

■ Chapitre 4 ■

Équations différentielles linéaires

Notations.

- \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
- I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

I - Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1 (Équation différentielle linéaire du premier ordre).

Soit $(a, b) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^2$. La fonction dérivable f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si

$$\forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = b(t).$$

Notations.

- a, b désignent deux fonctions continues de I dans \mathbb{K} .

On étudie l'équation différentielle

$$y' + ay = b. \quad (4.1)$$

I.1 - Équation homogène

Définition 2 (Équation sans second membre).

L'équation sans second membre, ou équation homogène, associée à l'équation (4.1) est

$$y' + ay = 0. \quad (4.2)$$

Propriété 1 (Solutions de l'équation homogène).

Soit $t_0 \in I$. Une fonction dérivable y est solution de l'équation homogène (4.2) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$y(t) = \lambda \exp \left\{ - \int_{t_0}^t a(u) du \right\}, \forall t \in I.$$

Pour tout $t \in I$, on note $y_H(t) = \exp \left\{ - \int_{t_0}^t a(u) du \right\}$ et $\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{cc} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ t & \mapsto \lambda y_H(t) \end{array}, \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $y' + y = 0$.
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y' = ay$ avec pour condition initiale $y(0) = 1$.

Théorème 1 (Caractérisation de la fonction exponentielle).

Soit \mathcal{E} l'ensemble des fonctions f à valeurs complexes dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y).$$

Alors,

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto 0 \end{array}, \begin{array}{cc} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{\lambda x} \end{array}, \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

I.2 - Solution particulière

Notation.

■ y_p désigne une solution particulière de l'équation différentielle (4.1).

Solutions remarquables, lorsque a est constante.

Si $t \mapsto b(t)$ est de la forme...	...chercher une solution de la forme
λ constante	μ constante
$P_n(t)$ polynôme de degré n	$Q_n(t)$ polynôme de degré n
$\lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$	$\lambda_1 \cos(\alpha t) + \mu_1 \sin(\alpha t)$, $(\lambda_1, \mu_1) \in \mathbb{K}^2$
$\lambda e^{\alpha t}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq -a$	$\mu e^{\alpha t}$, $\mu \in \mathbb{K}$
λe^{-at} , $\lambda \in \mathbb{K}$	$\mu t e^{-at}$, $\mu \in \mathbb{K}$

Exercice 2. Trouver une solution particulière, sur \mathbb{R} , des équations différentielles

1. $y' + y = e^t$. | 2. $y' + y = e^{-t}$.

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda(t)y_H(t)$, où λ est une fonction dérivable à déterminer. La fonction λ vérifie alors l'équation différentielle $\lambda' = \frac{b}{y_H}$.

Exercice 3. Trouver une solution particulière, sur \mathbb{R}_+^* , de l'équation différentielle $ty' - y = t^2 e^t$.

Principe de superposition

Propriété 2 (Principe de superposition).

Soient $(b_1, b_2) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^2$, f_1 une solution de l'équation $y' + ay = b_1$ et f_2 une solution de l'équation $y' + ay = b_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $f_1 + \lambda f_2$ est solution de l'équation $y' + ay = b_1 + \lambda b_2$.

Exercice 4. Trouver une solution particulière de l'équation $y' + y = \cosh$.

I.3 - Solution générale

Théorème 2 (Équations différentielles du premier ordre).

L'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'équation générale (4.1) est

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H = \{y_p + g, g \in \mathcal{S}_H\} = \{y_p + \lambda y_H, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Théorème 3 (Le problème de Cauchy).

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution f de l'équation différentielle (4.1) satisfaisant $f(t_0) = x_0$.

Exercice 5. Trouver la solution de l'équation différentielle $y' + y = \cosh$ telle que $y(0) = 0$.

I.4 - Recollement de solutions

Exercice 6. Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes.

1. $ty' - 2y = t^3.$

2. $ty' - y = \frac{t}{1+t^2}.$

II - Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 3 (Équation différentielle linéaire du deuxième ordre).

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $a \neq 0$ et $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Une fonction dérivable f est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = d$ si

$$\forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = d(t).$$

Notation.

■ a, b, c désignent trois éléments de \mathbb{K} tels que $a \neq 0$.

On étudie l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d. \quad (4.3)$$

II.1 - Équation homogène

Définition 4 (Équation sans second membre, Équation caractéristique).

L'équation sans second membre, ou équation homogène, associée à l'équation (4.3) est

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (4.4)$$

L'équation caractéristique associée à l'équation (4.3) est

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (4.5)$$

On notera r_1 et r_2 les solutions de l'équation caractéristique.

Propriété 3 (Le cas complexe : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

L'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène (4.4) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \end{array} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \right\}, \text{ où}$$

(i). Si $r_1 \neq r_2$, $y_1 : t \mapsto e^{r_1 t}$, $y_2 : t \mapsto e^{r_2 t}$.

(ii). Si $r_1 = r_2$ (notons r_0 cette valeur commune), $y_1 : t \mapsto e^{r_0 t}$, $y_2 : t \mapsto te^{r_0 t}$.

Propriété 4 (Le cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène (4.4) est

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) \end{array} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}, \text{ où}$$

(i). **Régime apériodique.** Si $r_1 \neq r_2$ et $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 : t \mapsto e^{r_1 t}$, $y_2 : t \mapsto e^{r_2 t}$.

(ii). **Régime critique.** Si $r_1 = r_2$ (notons $r_0 \in \mathbb{R}$ leur valeur commune), $y_1 : t \mapsto e^{r_0 t}$, $y_2 : t \mapsto te^{r_0 t}$.

(iii). **Régime pseudopériodique.** Si $r_1 = \bar{r}_2$ et $r_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, notons $r_1 = \alpha + i\beta$, $y_1 : t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $y_2 : t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + 4y' - 5y = 0$.

2. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Exercice 8. Soient ω_0 et Q deux réels strictement positifs.

1. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' + \omega_0^2 y = 0$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation $y'' - \omega_0^2 y = 0$. Exprimer cet ensemble à l'aide de la fonction exponentielle, puis à l'aide des fonctions de trigonométrie hyperbolique.
3. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0$.

II.2 - Solution particulière

Notation.

■ y_p désigne une solution particulière de l'équation (4.3)

Solutions remarquables

Si $t \mapsto d(t)$ est de la forme...	...et sur (4.5)...	...une solution particulière...
$P_n(t)e^{\alpha t}$, $\deg(P_n) = n$	α non racine	$Q_n(t)e^{\alpha t}$, $\deg(Q_n) = n$
$P_n(t)e^{\alpha t}$, $\deg(P_n) = n$	α racine simple	$t \cdot Q_n(t)e^{\alpha t}$, $\deg(Q_n) = n$
$P_n(t)e^{\alpha t}$, $\deg(P_n) = n$	α racine double	$t^2 \cdot Q_n(t)e^{\alpha t}$, $\deg(Q_n) = n$

Exercice 9. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = (2t + 1)e^t$.

Principe de superposition

Propriété 5 (Principe de superposition).

Soient $(d_1, d_2) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})^2$, f_1 une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1$ et f_2 une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2$. Alors, $f_1 + f_2$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1 + d_2$.

Exercice 10. Trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 4y' + 3y = (2t + 1) \sinh t$.

Méthode de la variation des constantes

On cherche une solution de la forme $t \mapsto \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t)$, où λ et μ sont deux fonctions dérivables à déterminer et y_1, y_2 sont solution de l'équation homogène sous la condition $\lambda' e^{r_1 t} + \mu' e^{r_2 t} = 0$.

Exercice 11. Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$.

II.3 - Solution générale

Théorème 4 (Équations différentielles du second ordre à coefficients constants).

L'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'équation générale est

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_H = \{y_p + g, g \in \mathcal{S}_H\}.$$

Exercice 12. Résoudre $y'' + y' - 2y = te^{-2t}$.

Théorème 5 (Le problème de Cauchy).

Soit $(t_0, x_0, \tilde{x}_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Il existe une unique solution f de l'équation différentielle (4.3) satisfaisant $f(t_0) = x_0$ et $f'(t_0) = \tilde{x}_0$.