INFO-F-305 Modélisation et Simulation
Simulation des systèmes et cas d'étude

1 Références

- — Documentation officielle Octave (en français) :
  `https://octave.org/doc/interpreter/`
- — Tutoriel Octave (en anglais) :
  `https://en.wikibooks.org/wiki/Octave_Programming_Tutorial`
- — Tutoriel Octave (en francais) :
  `https://fr.wikibooks.org/wiki/Programmation_Octave`
- — Aide-mémoire des commandes Matlab (en anglais) :
  `http://www.ulb.ac.be/di/map/gbonte/calcul/quikref.ps`
- — Un tutoriel plus complet pour Matlab (en anglais) :
  `http://www.ulb.ac.be/di/map/gbonte/calcul/matlabintro.pdf`

2 Cas d'étude 1 : intégrateur simple

2.1 Le cas d'étude

1. Structure:
   (a) Dimensionnalité: $n = 1$ état, $m = 1$ entrée, $p = 1$ sortie
   (b) Contraintes sur la fonction d'entrée $u(t)$ (si $m > 0$): fonction à valeurs finies
   (c) Temps: continu
   (d) Espace d'état: continu
   (e) Formalisme: EDO
   (f) Équations:
   $$\begin{cases} \dot{x}(t) = cu(t), \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$
   (g) Paramètres: $c \in \mathbb{R}$
2. Simulations
   (a) Simulation 1

    i. Conditions initiales: $x(0) = 1$
    ii. Valeurs paramètres: $c = 1$
    iii. Temps de simulation: $[0, 10]$
    iv. Fonction(s) d'entrée: $\boxed{u(t) = \sin(t)}$
    v. Analyser la relation entre le signe de $u(t)$ et la dérivée de $x(t)$

(b) Simulation 2

    i. Conditions initiales: $x(0) = 0$
    ii. Valeurs paramètres: $c = 0.1$
    iii. Temps de simulation: $[0, 10]$
    iv. Fonction(s) d'entrée: $\boxed{u(t) = t}$

(c) Simulation 3

    i. Conditions initiales: $x(0) = 0$
    ii. Valeurs paramètres: $c = 0.1$
    iii. Temps de simulation: $[0, 50]$
    iv. Fonction(s) d'entrée: $\boxed{\text{Linéaire par morceaux}}$

3 Cas d'étude 2: croissance et décroissance exponentielle

1. Structure

   (a) Dimensionnalité: $n = 1$ variables d'état, $m = 0$ variables d'entrée, $p = 1$ variable de sortie

   (b) Contraintes sur la fonction d'entrée $u(t)$; néant

   (c) Temps: continu

   (d) Espace d'état: continu

   (e) Paramètres: c: le signe de ce paramètre détermine le signe du feedback et par conséquent la stabilité ($c < 0$) ou l'instabilité de la dynamique ($c > 0$). La valeur absolue $|c|$ détermine la vitesse de la croissance ou de la décroissance exponentielle.

   (f) Formalisme: EDO

   (g) Équations:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = cx(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \tag{1}$$

2. Simulations

   (a) Simulation 1

      i. Conditions initiales: $x(0) = 1$

      ii. Valeurs paramètres: $c = 0.1$

      iii. Intervalle de temps de simulation $[0, 10]$.

      iv. Fonction(s) d'entrée: néant

   (b) Simulation 2

      i. Conditions initiales: $x(0) = 2$

      ii. Valeurs paramètres: $c = -0.1$

      iii. Intervalle de temps de simulation $[0, 10]$.

      iv. Fonction(s) d'entrée: néant.

   (c) Simulation 3

      i. Conditions initiales: $x(0) = 1$

      ii. Valeurs paramètres: $c = -1$

      iii. Intervalle de temps de simulation $[0, 10]$.

      iv. Fonction(s) d'entrée: néant.

4 Cas d'étude 3: système avec retard d'ordre 1

1. Structure
   (a) Dimensionnalité: $n = 1$ état, $m = 1$ entrée, $p = 1$ sortie
   (b) Contraintes sur la fonction d'entrée $u(t)$: finie
   (c) Temps: continu
   (d) Espace d'état: continu
   (e) Paramètres: $c > 0$ constante de décroissance exponentielle
   (f) Formalisme: EDO
   (g) Équations:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) - cx(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

2. Simulations
   (a) Simulation 1
      i. Conditions initiales: $x(0) = 1$
      ii. Valeurs paramètres: $c = 2$
      iii. Intervalle de temps de simulation $[0, 10]$.
      iv. Fonction(s) d'entrée: $u(t) = 1$ pour $t > 0$.

   (b) Simulation 2
      i. Conditions initiales: $x(0) = 1$
      ii. Valeurs paramètres $c = 0.02$
      iii. Intervalle de temps de simulation $[0, 50]$.
      iv. Fonction(s) d'entrée: $u(t) = Gt$, où $G = 0.1$.

5 Cas d'étude 4: croissance logistique

1. Structure
   (a) Dimensionnalité: $n = 1$ état, $m = 0$, $p = 1$ sortie
   (b) Contraintes sur la fonction d'entrée $u(t)$: néant
   (c) Temps: continu
   (d) Espace d'état: continu
   (e) Paramètres: seuil $k > 0$ et constant exponentielle $c > 0$. Le paramètre c représente le taux de croissance quand la taille x est petite. La paramètre k représente une sorte de taille idéale ou de capacité du système.
   (f) Formalisme: EDO
   (g) Équations:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = cx(t)(1 - \frac{x(t)}{k}) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \tag{2}$$

   Notons que si x est petit l'équation revient à $\dot{x}(t) = cx(t)$ et si $x > k$ alors $\dot{x} < 0$.

2. Simulations
   (a) Simulation 1
      i. Conditions initiales: $x(0) = 0.3$
      ii. Valeurs paramètres: $k = 1.5$, $c = 0.2$
      iii. Intervalle de temps de simulation $[0, 50]$.
      iv. Fonction(s) d'entrée: néant
   (b) Simulation 2
      i. Conditions initiales: $x(0) = 3$
      ii. Valeurs paramètres: $k = 1.5$, $c = 0.2$
      iii. Intervalle de temps de simulation $[0, 50]$.
      iv. Fonction(s) d'entrée: néant

   — une variation intéressante du modèle (3) est obtenue en ajoutant un terme négatif qui dépend de l'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = cx(t)(1 - \frac{x(t)}{k}) - gx(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \tag{3}$$

   Cette équation peut être utilisée pour modéliser la croissance de la densité d'une population (par exemple de poissons) où le taux de capture dépend de la densité même ou l'évolution des impôts en fonction de l'activité productive.

6 Cas d'étude 5: systèmes linéaires d'ordre 2

Pour les systèmes d'ordre 2, on vous demande d'effectuer les différentes simulations et d'afficher

— l'évolution de x_1 et x_2 au cours du temps.
— le portrait de phase avec les vecteurs vitesses, les droites invariantes, etc.
— les trajectoires pour les points initiaux donnés.

Veuillez à bien **comprendre** le résultat des différentes simulations !

1. Structure
   (a) Dimensionnalité: $n = 2$ états, $m = 0$ entrée, $p = 1$ sortie
   (b) Contraintes sur la fonction d'entrée $u(t)$: néant
   (c) Temps: continu
   (d) Espace d'état: continu
   (e) Paramètres:
   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
   (f) Formalisme: EDO
   (g) Équations
   $$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

6.1 Simulation 1 : selle

1. Conditions initiales: $x(0) = [0.5, 0]$
2. Valeurs paramètres
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
   Notons que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Elles sont réelles et de signe opposé.
3. Intervalle de temps de simulation $[0, 1]$.
4. Fonction(s) d'entrée: néant