Questão 3

Escolhendo o estimador de máxima Verossimilhança para o parametro θ na distribuição Gamma, temos:

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

3.a) Viés (Bias)

$$E[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E[x_i] \quad ; \qquad E[x_i] = 2\theta \quad \forall i$$

$$E[\hat{\theta}_n] = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2\theta = \frac{1}{\cancel{2n}} \cdot \cancel{2}\theta\cancel{n} = \theta$$

$$B(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n] - \theta = \theta - \theta \implies \boxed{B(\hat{\theta}_n) = 0}$$

3.b) MSE

$B(\hat{\theta}_n) = 0$

Como o estimador não é enviesado:

$$MSE(\hat{\theta}_n) = V[\hat{\theta}_n] = V\left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{4n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V[x_i]$$

$$V[x_i] = 2\theta^2 \quad \forall i \implies MSE(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{4n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2\theta^2 = \boxed{MSE(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{2n}}$$

3.c) Consistência

Cálculo da consistência (fraca) do estimador

$$\left(\lim_{n\to\infty} E[\hat{\Theta}_n] = \Theta \wedge \lim_{n\to\infty} V[\hat{\Theta}_n] = 0\right) \Longrightarrow \hat{\Theta}_n \text{ é consistente}$$

$$\lim_{n\to\infty} E[\hat{\Theta}_n] = \lim_{n\to\infty} \Theta = \Theta$$

$$\lim_{n\to\infty} V[\hat{\Theta}_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{\Theta^2}{2n} = 0$$

Como satisfaz os requisições, o estimador é consistente

3.d) Eficiência Assintótica

$I(\Theta)$ = Informação de Fisher

Um estimador $\hat{\alpha}_n$ é assintoticamente eficiente, se $V[\alpha_n] \geq \frac{1}{I(\alpha_n)}$

$$I(\Theta) = -n\, E\left[\frac{d^2 \ell(\Theta)}{d\Theta^2}\right]$$

$$\frac{d\ell(\Theta)}{d\Theta} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\Theta}\left(\frac{x_i}{\Theta} - 2\right)\right)$$

$$V(\hat{\Theta}_n) = \frac{\Theta^2}{2n}$$

$$\frac{d\ell^2(\Theta)}{d\Theta^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{2}{\Theta^3}(x_i - \Theta)\right) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i) - \Theta n\right] \cdot \frac{-2}{\Theta^3}$$

$$I(\hat{\Theta}_n) = -n\, E\left[\frac{2}{\hat{\Theta}_n^3} \cdot \left(n \cdot \hat{\Theta}_n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right] = \frac{2n}{\hat{\Theta}_n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} E[X_i] - n\hat{\Theta}_n\right] = \frac{2n}{\hat{\Theta}_n^3}\left[2n\Theta - n\hat{\Theta}_n\right]$$

$$I(\hat{\Theta}_n) = \frac{2n^2}{\hat{\Theta}_n^3}\left[2\Theta - \hat{\Theta}_n\right]$$

$$V[\hat{\Theta}_n] \geq \frac{1}{I(\hat{\Theta}_n)} \Rightarrow \frac{\cancel{2n^2}}{\hat{\Theta}_n^3}\left[2\Theta - \hat{\Theta}_n\right] \leq \frac{\cancel{2n}}{\Theta^2} \Rightarrow \frac{\Theta^2 \cdot n}{\hat{\Theta}_n}\left[2\Theta - \hat{\Theta}_n\right] \leq 1$$