

Questão 3

Escolhendo o estimador de máxima Verossimilhança para o parâmetro θ na distribuição Gamma, temos:

$$\hat{\theta}_m = \frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^m x_i$$

3.a) Viés (Bias)

$$E[\hat{\theta}_m] = \frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^m E[x_i] ; \quad E[x_i] = 2\theta \quad \forall i$$

$$E[\hat{\theta}_m] = \frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^m 2\theta = \frac{1}{\cancel{2m}} \cdot \cancel{2\theta m} = \theta$$

$$B(\hat{\theta}_m) = E[\hat{\theta}_m] - \theta = \theta - \theta \Rightarrow B(\hat{\theta}_m) = 0$$

3.b) MSE

Como o estimador ~~não~~ é enviesado: $B(\hat{\theta}_m) = 0$

$$MSE(\hat{\theta}_m) = V[\hat{\theta}_m] = V\left[\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m x_i\right] = \frac{1}{4m^2} \cdot \sum_{i=1}^m V[x_i]$$

$$V[x_i] = 2\theta^2 \quad \forall i \Rightarrow MSE(\hat{\theta}_m) = \frac{1}{4m^2} \cdot \sum_{i=1}^m 2\theta^2 = MSE(\hat{\theta}_m) = \frac{\theta^2}{2n}$$

3.c) Consistência

Cálculo da consistência (fraca) do estimador

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_n] = \theta \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} V[\hat{\theta}_n] = 0 \right) \Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ é consistente}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_n] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \theta = \theta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} V[\hat{\theta}_n] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta^2}{2n} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ Como satisfaz as requisições, o estimador é consistente}$$

