CentraleSupélec

Aide à la Décision :
Modèles, Algorithmes, Implémentations

M. Amoussou, M. Lerouge,
V. Mousseau, A. Wilczynski

1 Fausse note dans la somme pondérée

Un mélomane amateur cherche à acquérir une installation Hi-Fi. Une première sélection lui a permis de retenir quatre modèles a, b, c et d. Sur les conseils d'un vendeur bien intentionné, il décide de fonder ses choix à partir d'un dossier comparatif gracieusement offert par le magasin. Peu soucieux des détails techniques auxquels il ne comprend pas grand chose, le mélomane décide de ne prendre en compte que deux évaluations globales définies ci-dessous. Le comparatif fournit les évaluations des quatres modèles sur ces deux critères.

- note technique évaluée de 0 à 20,
- catégorie de prix évaluée de 0 à 20 (catégorie la plus chère : 0, et catégorie la moins chère : 20).

	a	b	c	d
Note technique	5	9	18	10
Catégorie de prix	18	7	4	10

1. Notre mélomane décide de représenter l'information dont il dispose sur un graphique. Représenter les quatres modèles a, b, c et d dans l'espace des critères.

2. Très vite notre mélomane décide d'écarter l'un des quatre modèles. A quel concept multicritère fait-il référence pour justifier ceci ? Quel est ce modèle rejeté ? Indiquer le sous-ensemble des solutions “intéressantes” pour notre mélomane.

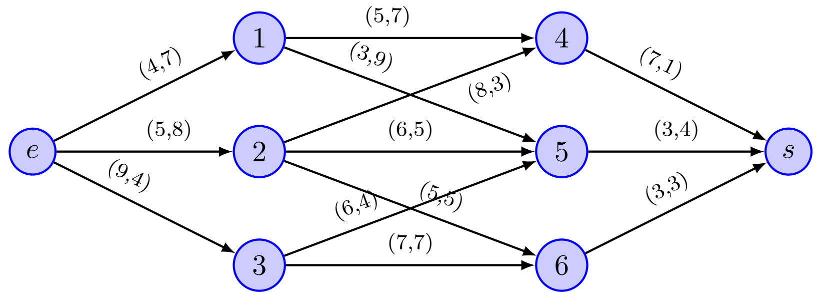
3. Considérant les trois modèles restants, il décide d'utiliser la somme pondérée “pour y voir un peu plus clair”. Celle-ci est définie pour le modèle x par $g(x) = \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)$ où $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$ sont les poids associés aux critères g_1 et g_2 tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
   D'un naturel méticuleux, notre mélomane se demande si le modèle qu'il vient d'éliminer ne pourrait pas apparaître comme meilleure solution de la somme pondérée pour au moins un jeu de poids. Peut-on le rassurer sur ce point ?

4. A la suite d'une première introspection, il se dit “*je n'ai pas besoin d'une installation très sophistiquée, mais je ne veux quand même pas de la camelote !*”.
   a) Notre mélomane essaye alors un jeu de poids qui lui paraît correspondre le mieux à cette première réflexion : $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0.5$. Il est un peu surpris par le résultat. Expliquez pourquoi ?
   b) N'étant finalement pas très certain du jeu de poids qu'il vient de tester, il décide d'essayer des jeux de poids “voisins” afin d'explorer le voisinage des solutions optimales selon la somme pondérée. Il estime que l'on pourrait “faire varier de $\pm 10\%$ autour de 0.5” chacun des deux poids. Une nouvelle surprise l'attend. Donner les résultats de cette analyse de sensibilité et commenter.

5. L'étude menée jusqu'à présent, bien qu'elle n'ait pas conduit aux résultats attendus, a quand même servi à persuader le mélomane que ce qu'il souhaite “*c'est un modèle relativement satisfaisant sur chacun des deux critères*”. L'examen du comparatif lui permet de constater que seul le modèle d correspond à cette description.
   S'obstinant à chercher un jeu de poids qui permettrait de faire apparaître d comme le modèle le plus intéressant, il se heurte à une difficulté imprévue. Identifier et commenter cette difficulté.

2 Plus court chemin multicritère

1. Calculer, dans le graphe ci-dessous, les plus courts chemins de e à s pour minimiser la longeur du chemin selon le critère 1 ; selon le critère 2.



2. Pour ces chemins optimaux, quelle est la valeur sur le critère qui n'est pas optimisé ?

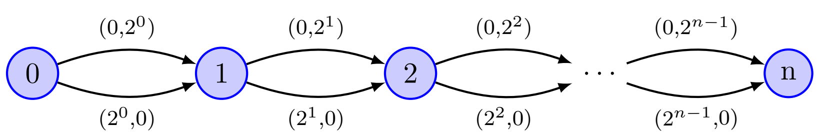
3. Enumérer l'ensemble des 7 chemins de e à s ; représenter ces chemins dans l'espace des critères et en déduire l'ensemble des chemins efficaces de e à s.

4. Formuler un programme linéaire qui détermine le plus court chemin de e à s selon le premier critère. Quelle difficulté apparaît lorsque l'on formule le même programme pour optimiser le critère 2 ? Quelle est la fonction objectif à considérer pour garantir que la solution optimale du programme linéaire corresponde à une solution efficace du problème bi-critère ?

5. Dans le problème bi-critère, quels sont les solutions efficaces que l'on peut obtenir en optimisant une combinaison linéaire des deux objectifs ? Justifier votre réponse.

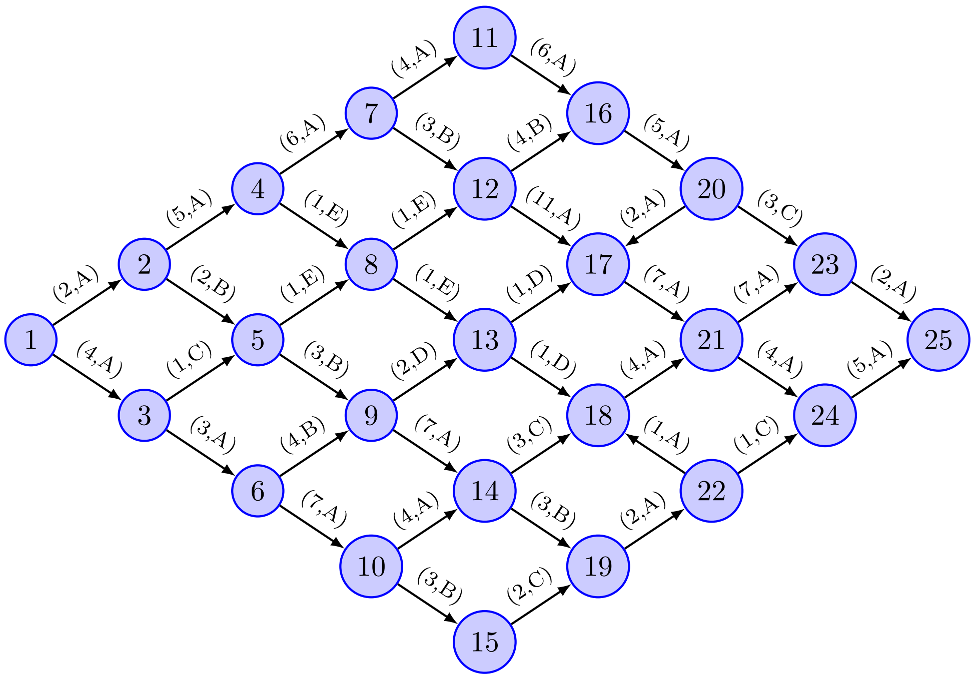
6. Proposez un algorithme permettant d'identifier toutes les solutions efficaces du problème bi-critère en procédant par la résolution d'une séquence de programmes linéaires que vous spécifierez. Implémentez cet algorithme en Python, pour retrouver l'ensemble des solution non-dominées de ce problème de plus court chemin bi-objectif.

7. On considère maintenant le problème du plus court chemin bi-critère de 0 à n sur le graphe ci-dessous. On note $f_1(c)$ ($f_2(c)$, respectivement) la longueur du chemin c selon le premier critère (selon le second critère, respectivement). Combien existe-il de chemins de 0 à n ? Que pouvez vous dire de la quantité $f_1(c) + f_2(c)$? Existe-il 2 chemins c et c' tels que $f_1(c) = f_1(c')$ ou tels que $f_2(c) = f_2(c')$? Quelle conclusion pouvez-vous en tirer concernant l'ensemble des solutions non-dominées ? concernant l'algorithme élaboré à la question précédente ?



3 Bien choisir son trajet en vélo

Votre ami cycliste Eddy cherche à planifier son trajet pour se rendre d'un point de départ à sa destination. Il souhaite en particulier choisir son itinéraire de sorte de rendre son trajet le plus court possible. Toutefois, ce cycliste (prudent) souhaite éviter de parcourir des routes connues pour être dangereuses. Pour l'aider, vous représentez le réseau routier à l'aide du graphe $G = (X, U)$ ci-dessous. Eddy part du lieu symbolisé par le sommet 1 et souhaite aller au sommet 25 (du moins au lieu qui est représenté par ce sommet).



1. Dans un premier temps, vous souhaitez calculer la distance la plus courte de 1 à 25. Quel algorithme pouvez-vous utiliser ? Appliquer cet algorithme et donnez la distance minimale calculée à votre ami.

2. Eddy souhaite connaître comment aller de 1 à 25 dans la distance annoncée, que lui répondez-vous ?

3. Votre réponse est loin de le satisfaire. Fin connaisseur des conditions de la circulation pour un cycliste, Eddy juge votre proposition beaucoup trop dangereuse. Vous lui proposez alors d'associer à chaque tronçon de route (à chaque arc u du graphe) une valeur ordinale $v(u)$, représentant le niveau de danger associé à u, exprimée sur une échelle $A \succ B \succ C \succ D \succ E$ (A correspondant à une route la plus sûre, et E à une route très dangereuse).
   Une discussion avec Eddy vous permet de comprendre que pour évaluer un parcours (de 1 à 25) en termes de sécurité, Eddy prend en compte l'arc le moins sûr du chemin. Vous considérez alors les graphes partiels suivants $G^x = (X, U^x)$, $x \in \{A, B, C, D, E\}$ avec $U^x = \{u \in U : v(u) \succ x\}$ où $v(u)$ représente le niveau de sécurité de l'arc u et $\succ$ la relation "plus sûr que". Représentez ces graphes et donnez en une interprétation précise.

4. Existe-t-il nécessairement un chemin du sommet 1 au sommet 25 dans les graphes G^x ? justifier votre réponse et donner une interprétation à ce résultat.

5. Vous expliquez alors à Eddy que vous avez affaire à un problème de plus court chemin bi-critère. Expliquez en termes clairs ce que représentent les chemins efficaces.

6. Déduire des questions précédentes un algorithme calculant tous les chemin bi-critères efficaces. Calculez ces chemins, et expliquez vos résultats à Eddy.

7. Vous présentez les résultats à Eddy qui reste encore préoccupé. En effet, Eddy connaît bien le carrefour symbolisé par le noeud 12 dans le graphe, et il juge que son niveau dangerosité est D. Comment modifier le graphe de sorte à pouvoir utiliser le même algorithme avec cette nouvelle information.

8. Eddy vient de découvrir une nouvelle route de 11 à 12 de longueur 1 mais dont il ne connaît pas le niveau de dangerosité (A, B, C, D ou E). En fonction du niveau de dangerosité de cette nouvelle route, quel sera l'impact sur la frontière efficace ?

9. Eddy voudrait maintenant raffiner la solution de sorte à pouvoir distinguer qualitativement les trajet en fonction des dénivelés (A: pas de côte, ..., E: côte très forte et pénible) et d'agrément (A: route très agréable, ..., E : route très désagréable). Comment adapter votre algorithme, à quelles difficultés allez vous être confronté (en termes de calculs, en terme d'interprétation des résultats).

4 Optionnel: Sac à dos bi-objectif

Le responsable d'une société doit sélectionner des projets d'investissement qu'il va financer sur les quatre prochaines années. Après une première phase de préselection, il concentre l'examen sur 4 projets dont les coûts en M€ sont connus, et sont notés w_k. En revanche l'utilité des projets n'est pas connue avec certitude et dépend du contexte économique. Deux critères f_1 et f_2 sont à maximiser : $f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} u_{i,k}.x_k$ où $x_k \in \{0,1\}$ sont des variables représentant le fait d'inverstir dans le projet k, et les coefficients $u_{i,k}$ sont donnés dans le tableau ci-dessous. Sachant que le budget global que la société souhaite consacrer à tout ou partie de ces projets est 10 M€, on souhaite étudier la sélection optimale. Les données sont les suivantes :

k	1	2	3	4
$u_{1,k}$	18	12	17	2
$u_{2,k}$	3	11	7	15
w_k	4	5	6	5

1. Enumérer les solutions réalisables et représenter leur image dans l'espace des critères.

2. Formaliser le problème comme un problème de sac-à-dos bi-critère. et calculer à l'aide d'un solveur le point idéal et le point nadir. Vérifier sur le graphique de la question précédente.

3. Toujours en vous aidant d'un solveur, explorer les compromis possibles par une approche ε-constraint. Comparer à ceux que vous obtiendriez avec une somme pondérée.