

1 Fun4all : vente sur internet

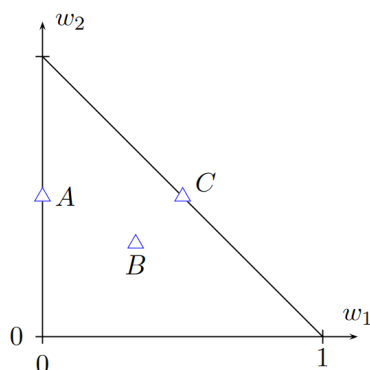
Michel vient de créer une société **fun4all.com** de vente par internet spécialisé dans les produits technologiques destinés à une clientèle jeune (console de jeux, lecteurs mp3, ...). Michel souhaite optimiser la gamme de produits proposés sur son site marchand. En particulier, il souhaite que les produits soient attractifs pour sa jeune clientèle. Dans le même temps, sa jeune société ne peut pas se permettre d'avoir un catalogue trop grand.

Pour identifier les modèles de lecteurs mp3 qu'il propose à la vente, Michel a fait appel à un cabinet d'étude marketing qui, sur un panel de jeunes acheteurs potentiels, a permis d'évaluer la qualité perçue des lecteurs existants sur le marché, et ceci sur trois dimensions : la capacité de stockage, l'autonomie, l'ergonomie/design (chaque lecteur étant évalué, pour chacune des dimensions, sur une échelle $[0,100]$). Une partie des résultats de l'étude est synthétisée dans le tableau ci-dessous.

	Dimension 1	Dimension 2	Dimension 3
1	10	50	70
2	34	56	84
3	40	90	45
4	30	10	70
5	60	80	45
6	49	56	54
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Pour apprécier l'attractivité relative des lecteurs, Michel souhaite établir un classement et se fonde sur une évaluation globale $g(i)$ synthétisant les trois dimensions par une somme pondérée : $g(i) = w_1.g_1(i) + w_2.g_2(i) + w_3.g_3(i)$ avec $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ et $w_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

1. Sans connaître la valeur de w_1, w_2 et w_3 , dans quel intervalle varie $g(1)$?
2. Le schéma ci-dessous représente l'espace des valeurs acceptables pour le vecteur poids (w_1, w_2, w_3) compte tenu de la contrainte de normalisation. A quels vecteurs correspondent les points A, B et C du graphique ? Sur quel axe peut-on représenter w_3 sur ce schéma ? tracer cet axe.



3. Pour mieux comprendre les préférences de sa jeune clientèle, Michel demande à son neveu Antonin de comparer certains des lecteurs étudiés dans l'enquête. Antonin lui affirme :

- Le lecteur 1 est au moins aussi attractif que le lecteur 4,
- Le lecteur 5 n'est pas pire que le lecteur 3,
- Le lecteur 2 est au moins aussi bien que le lecteur 6.

Par ailleurs, Michel considère raisonnable d'ajouter la contrainte selon laquelle aucune des 3 dimensions ne peut contribuer de plus de la moitié de l'évaluation globale. Montrer que ces affirmations peuvent être représentées dans le modèle de somme pondérée par des contraintes linéaires sur w_1, w_2 et w_3 , puis identifier l'espace des valeurs pour les vecteurs poids compatibles avec ces affirmations. Les contraintes étant linéaires, cet espace est un polyèdre que l'on notera \mathcal{D} ; représentez \mathcal{D} .

4. Soient w et w' deux vecteurs poids. Notons $g_w(i)$ la somme pondérée des évaluations du lecteur i considérant le jeu de poids w . Montrer que si la somme pondérée conduit à préférer le lecteur i au lecteur j pour les deux vecteurs w et w' alors cette conclusion reste vraie pour tout vecteur correspondant à une combinaison linéaire de w et w' , i.e., si $g_w(i) > g_w(j)$ et $g_{w'}(i) > g_{w'}(j)$, alors $g_{w^\alpha}(i) > g_{w^\alpha}(j)$ avec $w^\alpha = \alpha w + (1 - \alpha)w'$ et $\alpha \in [0, 1]$.

En déduire que si le lecteur i est préféré au lecteur j pour chaque sommet du polyèdre \mathcal{D} de valeurs acceptables pour les poids, alors tout jeu de poids de ce polyèdre conduira à la même conclusion.

5. Identifier les jeux de poids correspondant aux sommets du polyèdre \mathcal{D} obtenu à la question 3.. Montrer que l'on ne peut déterminer lequel des lecteurs 2 et 5 est jugé comme le meilleur pour l'ensemble de ces jeux de poids.

6. Face à cette situation, Michel souhaite disposer d'une méthode permettant de comparer deux à deux les lecteurs i et j compte tenu de l'information imprécise dont il dispose sur les poids (le polyèdre de valeurs acceptables \mathcal{D}). Plus précisément, il souhaite déterminer si :

- Situation 1 : $g_w(i) > g_w(j), \forall w \in \mathcal{D}$
- Situation 2 : $g_w(j) > g_w(i), \forall w \in \mathcal{D}$
- Situation 3 : aucune des deux précédentes situations n'est vérifiée.

Donner une interprétation de ces 3 situations.

Pour déterminer la comparaison entre deux lecteurs i et j , Michel construit les deux programmes mathématiques suivants :

- $Prog_1 : \max_{w \in \mathcal{D}} (g_w(i) - g_w(j))$
- $Prog_2 : \max_{w \in \mathcal{D}} (g_w(j) - g_w(i))$

Comment peut-on interpréter la valeur optimale de ces deux programmes ?

7. Implémentez les programmes mathématiques permettant de déterminer la comparaison pour chaque paire de lecteurs (situation 1, 2, ou 3) compte tenu de l'information $w \in \mathcal{D}$. Tracer le préordre partiel sur les lecteurs.