

Ingénierie du risque et Couverture à l'aide des produits dérivés

Alexandre Saadoun

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 3 |
| 2 | Cadre théorique et fonctionnel des produits dérivés | 4 |
| 2.1 | Définition et typologie | 4 |
| 2.2 | Théorie économique de la couverture | 5 |
| 2.2.1 | Rationalité économique : Théorie de la couverture optimale | 5 |
| 2.2.2 | Couverture Statique vs Dynamique | 5 |
| 2.2.3 | Risque Systématique vs Non Systématique | 6 |
| 3 | Produits dérivés et gestion des risques financiers | 7 |
| 3.1 | Risque de marché | 7 |
| 3.1.1 | Hedging de portefeuille actions (futures, options) | 7 |
| 3.1.2 | Gestion de la volatilité (options, VIX) | 7 |
| 3.2 | Risque de taux d'intérêt | 9 |
| 3.2.1 | Enjeux du risque de taux en assurance-vie | 9 |
| 3.2.2 | Swap de taux d'intérêt (Interest Rate Swap – IRS) | 9 |
| 3.2.3 | Cap et Floor : options sur taux d'intérêt | 10 |
| 3.2.4 | Modélisation du hedge via le modèle de Black | 10 |
| 3.3 | Risque de crédit | 11 |
| 3.3.1 | Utilisation des Credit Default Swaps | 11 |
| 3.3.2 | Modélisation du défaut | 12 |
| 3.3.3 | Structure en tranches | 12 |
| 3.3.4 | Modélisation par copules | 13 |
| 3.4 | Risque de change | 14 |
| 3.4.1 | Forwards de devises | 14 |
| 3.4.2 | Options de change | 14 |
| 3.4.3 | Cross-currency swaps | 14 |
| 4 | Approches quantitatives et limites de la couverture | 16 |
| 4.1 | Modélisation avancée | 16 |
| 4.1.1 | Les greeks | 16 |
| 4.1.2 | Simulation de Monte Carlo pour instruments complexes | 16 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.1.3 | Modèles de corrélation et copules | 17 |
| 4.2 | Coûts et Limites des dérivés | 18 |
| 4.2.1 | Coûts et limites des dérivés | 18 |
| 4.2.2 | Illustrations quantitatives : Basis Risk et XVA | 19 |
| 4.2.3 | Étude de cas 1 : Couverture d'un portefeuille d'assurance-vie à long terme via swap de taux d'intérêt | 21 |
| 4.2.4 | Étude de cas 2 : Couverture d'un portefeuille souverain obligataire via options sur taux | 22 |
| 5 | Conclusion | 25 |

1 Introduction

L'environnement financier contemporain est marqué par une intensification des incertitudes macroéconomiques, géopolitiques et climatiques. La volatilité accrue des marchés actions, la normalisation erratique des politiques monétaires, les tensions sur les marchés de taux et de crédit, ainsi que les chocs exogènes liés aux risques climatiques ou pandémiques, ont profondément modifié les paradigmes traditionnels de gestion des risques. Dans ce contexte, les institutions financières et assurantielles sont confrontées à une double exigence : maintenir la stabilité de leurs bilans tout en répondant à des contraintes réglementaires de plus en plus strictes (Bâle III/IV, Solvabilité II, IFRS 17, etc.).

Les produits dérivés, longtemps perçus comme des instruments spéculatifs, se sont imposés comme des outils incontournables de **gestion active du risque**. Leur flexibilité, leur capacité à répliquer ou transférer des expositions complexes, et leur intégration croissante dans les modèles de gestion intégrée des risques (ERM – *Enterprise Risk Management*) en font des leviers stratégiques pour les acteurs financiers.

Problématique

Dans un environnement caractérisé par une *corrélation croissante entre les risques*, une *non-linéarité des expositions* et une *incertitude structurelle* persistante, la gestion du risque ne peut plus se limiter à des approches segmentées ou statiques. La complexité des interactions entre les facteurs de marché qu'il s'agisse des taux, des spreads de crédit, des volatilités ou des corrélations croisées impose désormais une réflexion intégrée, dynamique et multi-échelle. Dans ce contexte, la question centrale devient : comment les institutions financières et assurantielles peuvent-elles mobiliser les produits dérivés pour construire des stratégies de couverture à la fois robustes, adaptables et conformes aux exigences prudentielles ? Cette interrogation engage à la fois une réflexion technique sur les instruments à privilégier, une approche quantitative rigoureuse pour en calibrer les effets, et une prise en compte fine des contraintes réglementaires qui encadrent leur usage. Elle renvoie enfin à une dimension stratégique : celle de l'intégration des outils dérivés dans une architecture globale de pilotage du risque et du capital, à l'échelle du bilan.

2 Cadre théorique et fonctionnel des produits dérivés

2.1 Définition et typologie

Les produits dérivés sont des instruments financiers dont la valeur dépend d'un actif sous-jacent, qu'il s'agisse d'actions, de taux d'intérêt, de devises, d'indices boursiers ou encore de matières premières. Leur fonction première est de permettre le transfert, la transformation ou la réplique d'expositions au risque. En cela, ils constituent des outils fondamentaux de l'ingénierie financière, tant pour la couverture que pour la spéculation ou l'arbitrage.

Parmi les instruments dérivés les plus fondamentaux, on trouve les contrats à terme, qui se déclinent en deux grandes catégories : **les forwards et les futures**. Les forwards sont des contrats de gré à gré (OTC) dans lesquels deux parties s'engagent à acheter ou vendre un actif à une date future déterminée, à un prix fixé à l'avance. Les futures, quant à eux, sont standardisés et négociés sur des marchés organisés, ce qui permet une meilleure liquidité et une réduction du risque de contrepartie grâce à la chambre de compensation. Ces instruments sont largement utilisés pour couvrir des expositions directionnelles sur les marchés de matières premières, de taux ou d'actions.

Les options constituent une autre classe majeure de dérivés. Elles confèrent à leur détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (option d'achat ou call) ou de vendre (option de vente ou put) un actif sous-jacent à un prix d'exercice donné, avant ou à une date d'échéance déterminée. Les options dites plain vanilla sont les plus simples et les plus liquides, avec des caractéristiques standardisées. À l'inverse, les options exotiques présentent des structures de paiement plus complexes, souvent conditionnées à des événements de marché spécifiques (barrières, moyennes, lookback, etc.). Ces instruments permettent de construire des profils de rendement non linéaires, adaptés à des stratégies de couverture ou de rendement asymétrique.

Les swaps sont des contrats d'échange de flux financiers entre deux contreparties. Le plus courant est le swap de taux d'intérêt (IRS), dans lequel une partie paie un taux fixe et reçoit un taux variable (ou inversement), permettant ainsi de gérer l'exposition à la courbe des taux. Les swaps de devises permettent d'échanger des flux dans deux monnaies différentes, intégrant à la fois un risque de change et un risque de taux. Enfin, les Credit Default Swaps (CDS) sont des instruments de transfert du risque de crédit : l'acheteur du CDS paie une prime périodique en échange d'une protection contre le défaut d'un émetteur de référence.

Enfin, **les produits structurés** combinent plusieurs instruments dérivés (souvent des options) avec des actifs de base (obligations, actions, indices) pour créer des profils de rendement sur mesure. Ils sont fréquemment utilisés dans les portefeuilles d'assurance-vie ou de gestion privée pour répondre à des objectifs spécifiques de rendement, de protection du capital ou d'exposition conditionnelle à certains scénarios de marché. Leur valorisation et leur couverture nécessitent des modèles avancés, notamment en présence d'options imbriquées ou de dépendances complexes entre sous-jacents.

2.2 Théorie économique de la couverture

La couverture est une stratégie visant à réduire l'exposition d'un portefeuille à des risques financiers spécifiques. Elle repose sur des fondements économiques solides et des outils mathématiques permettant d'optimiser la protection contre les fluctuations de marché. Trois dimensions fondamentales structurent cette théorie : la couverture optimale, la distinction entre couverture statique et dynamique, et la nature des risques couverts (systématique vs non systématique).

2.2.1 Rationalité économique : Théorie de la couverture optimale

L'objectif fondamental de la couverture est de minimiser la variance du portefeuille global, composé d'un actif risqué et d'un instrument de couverture. Soit :

- ΔS : variation du prix de l'actif sous-jacent,
- ΔH : variation du prix de l'instrument de couverture,
- h : ratio de couverture (hedge ratio),
- $\Delta P = \Delta S - h\Delta H$: variation du portefeuille couvert.

La variance du portefeuille est alors :

$$\text{Var}(\Delta P) = \text{Var}(\Delta S - h\Delta H)$$

En développant cette expression :

$$\text{Var}(\Delta P) = \text{Var}(\Delta S) + h^2\text{Var}(\Delta H) - 2h\text{Cov}(\Delta S, \Delta H)$$

La minimisation de cette variance par rapport à h donne le ratio de couverture optimal :

$$h^* = \frac{\text{Cov}(\Delta S, \Delta H)}{\text{Var}(\Delta H)}$$

Ce ratio peut être estimé empiriquement par une régression linéaire des rendements de l'actif sur ceux de l'instrument de couverture :

$$\Delta S_t = \alpha + h^* \Delta H_t + \varepsilon_t$$

où h^* est le coefficient de pente représentant le ratio de couverture optimal, et ε_t le résidu non couvert.

2.2.2 Couverture Statique vs Dynamique

La **couverture statique** consiste à mettre en place une stratégie de couverture à un instant donné sans ajustement ultérieur. Elle est adaptée aux expositions simples ou aux instruments à maturité fixe. Un exemple classique est la stratégie de *protective put*, qui consiste à acheter une option de vente pour protéger un actif contre une baisse de prix.

En revanche, la **couverture dynamique** implique des ajustements continus du portefeuille en fonction des variations du sous-jacent et des sensibilités de l'instrument dérivé. Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, la couverture dynamique d'une option repose sur le *delta hedging*, qui consiste à neutraliser la sensibilité du portefeuille à de petites variations du sous-jacent.

Formellement, si $V(S, t)$ est la valeur de l'option, la position optimale dans l'actif sous-jacent est donnée par :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Cette stratégie nécessitera des réajustements fréquents, notamment lorsque la volatilité implicite ou le temps à maturité évoluent. Elle peut être étendue à des couvertures de second ordre (gamma hedging) ou de volatilité (vega hedging), en utilisant des combinaisons d'options.

2.2.3 Risque Systématique vs Non Systématique

La théorie moderne du portefeuille distingue deux grandes catégories de risques :

Le risque systématique est lié aux facteurs macroéconomiques ou de marché globaux (taux d'intérêt, croissance, inflation, etc.). Il est non diversifiable et constitue le cœur du risque de marché. Dans le cadre du modèle CAPM, ce risque est mesuré par le bêta :

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)}$$

où R_i est le rendement de l'actif i , et R_m celui du marché. Les dérivés sur indices (futures sur indices, options sur ETF) sont des outils efficaces pour couvrir ce type de risque.

Le risque non systématique, est spécifique à un actif ou une entreprise (ex : défaut d'un émetteur, événement sectoriel). Il est théoriquement diversifiable dans un portefeuille bien construit, mais peut être couvert de manière ciblée à l'aide d'instruments comme les CDS (pour le risque de crédit) ou les options spécifiques (pour le risque de prix).

3 Produits dérivés et gestion des risques financiers

3.1 Risque de marché

Le risque de marché désigne la possibilité de pertes résultant de la variation défavorable des prix de marché : actions, taux d'intérêt, devises, matières premières. Dans le cadre de la gestion des risques financiers, les produits dérivés jouent un rôle central dans la couverture de ces expositions, en particulier via les contrats à terme et les options. Deux dimensions essentielles sont à considérer : la couverture directionnelle d'un portefeuille d'actions, et la gestion de la volatilité implicite et réalisée.

3.1.1 Hedging de portefeuille actions (futures, options)

Un portefeuille d'actions est exposé à la baisse des marchés. Pour neutraliser cette exposition, on peut utiliser des *contrats à terme sur indices* (futures) ou des *options de vente* (puts). Le choix de l'instrument dépend du profil de risque, du coût de la couverture et de la stratégie de gestion.

Couverture par futures : Soit un portefeuille d'actions de valeur V_P , avec une sensibilité au marché mesurée par un bêta β_P . On souhaite le couvrir à l'aide de contrats futures sur un indice de marché. Le nombre optimal de contrats à vendre est donné par :

$$N^* = \frac{\beta_P \cdot V_P}{F \cdot q}$$

où F est le prix du contrat future, et q le multiplicateur du contrat (valeur notionnelle d'un point d'indice).

Couverture par options : Une autre approche consiste à acheter des *options de vente* (put) sur l'indice. Cette stratégie, appelée *protective put*, offre une protection asymétrique : le portefeuille est protégé contre les fortes baisses, tout en conservant le potentiel de hausse.

Le coût de cette couverture est la prime de l'option, notée π , et la valeur du portefeuille couvert devient :

$$V_{\text{couvert}} = V_P + P(K, T) - \max(K - S_T, 0)$$

où $P(K, T)$ est la prime de l'option put de strike K et maturité T , et S_T le niveau de l'indice à l'échéance.

3.1.2 Gestion de la volatilité (options, VIX)

La volatilité est une mesure fondamentale du risque de marché. Elle reflète l'ampleur des fluctuations d'un actif financier autour de sa tendance moyenne. En finance quantitative, cette mesure joue un rôle central dans la valorisation des options, la gestion des risques.

Soit S_t le prix d'un actif à l'instant t . La volatilité est définie comme l'écart-type des rendements logarithmiques :

$$r_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

La *volatilité historique* (ou réalisée) sur une période de n jours est donnée par :

$$\sigma_{\text{réalisée}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}$$

où \bar{r} est la moyenne des rendements.

En revanche, la volatilité implicite est extraite des prix des options via des modèles comme celui de Black-Scholes. Elle représente l'anticipation du marché quant à la volatilité future de l'actif sous-jacent. Formellement, c'est la valeur de σ qui, insérée dans la formule de Black-Scholes, égalise le prix théorique de l'option au prix observé sur le marché :

$$C_{\text{BS}}(S, K, T, r, \sigma_{\text{imp}}) = C_{\text{marché}}$$

La différence entre volatilité implicite et réalisée est exploitée dans des stratégies dites de *volatility arbitrage*. Par exemple, si la volatilité implicite est significativement supérieure à la volatilité réalisée attendue, un investisseur peut vendre des options (stratégie short volatility) en anticipant une compression de la volatilité.

Plusieurs instruments permettent de se couvrir contre les mouvements de volatilité :

- **Options sur indices de volatilité** : comme les options sur le VIX (indice de volatilité implicite du S&P 500).
- **Futures sur le VIX** : permettant une exposition directe à la courbe de volatilité.
- **Stratégies optionnelles synthétiques** : telles que le *straddle* ou le *strangle*, qui permettent de tirer profit d'une hausse de la volatilité, indépendamment de la direction du marché.

Un *straddle long*, par exemple, consiste à acheter simultanément un call et un put de même strike K et maturité T . Le payoff est :

$$\text{Payoff} = \max(S_T - K, 0) + \max(K - S_T, 0)$$

Cette stratégie est profitable lorsque la volatilité réalisée dépasse la volatilité implicite intégrée dans les primes.

Exemple : Un gestionnaire anticipant une forte volatilité autour d'une annonce macroéconomique (par exemple, une décision de politique monétaire de la BCE) peut acheter un straddle sur l'Euro Stoxx 50. Si le marché évolue fortement dans un sens ou dans l'autre, la stratégie devient rentable, même si la direction du mouvement est incertaine. Cette approche est particulièrement utile dans les contextes de *volatility clustering*, où les chocs de volatilité tendent à se regrouper dans le temps.

3.2 Risque de taux d'intérêt

3.2.1 Enjeux du risque de taux en assurance-vie

En assurance-vie, les passifs représentent les engagements contractuels vis-à-vis des assurés, souvent à long terme et assortis de garanties de rendement, comme dans le cas des fonds en euros par exemple. Ces passifs doivent être financés par des actifs financiers, principalement composés d'obligations d'État, d'obligations d'entreprise et de produits monétaires.

Cependant, lorsque les taux d'intérêt baissent de manière prolongée, le rendement des actifs diminue, tandis que les engagements garantis envers les assurés restent constants. Ce déséquilibre entre la sensibilité des actifs et celle des passifs constitue un **mismatch actif/passif**, ou **ALM mismatch**.

Ce phénomène peut être formalisé par la notion de **duration**, qui mesure la sensibilité du prix d'un actif ou d'un passif à une variation des taux d'intérêt. Si la duration des passifs D_L est supérieure à celle des actifs D_A , alors une baisse des taux entraîne une augmentation plus forte de la valeur des engagements que celle des actifs, ce qui dégrade la solvabilité de l'assureur :

$$\Delta V \approx -D \cdot V \cdot \Delta r$$

où V est la valeur de l'actif ou du passif, D sa duration, et Δr la variation du taux d'intérêt.

Ainsi pour se prémunir contre ce risque de taux, les assureurs peuvent mettre en place des stratégies de couverture à l'aide de produits dérivés

3.2.2 Swap de taux d'intérêt (Interest Rate Swap – IRS)

Un IRS est un contrat par lequel deux contreparties échangent des flux d'intérêts : l'une paie un taux fixe K , l'autre paie un taux flottant, généralement indexé sur un taux de référence comme l'Euribor 6M.

La valeur nette d'un IRS du point de vue du payeur fixe est donnée par :

$$\text{NPV} = \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot (L_i - K) \cdot P(t, T_i)$$

où :

- δ_i : fraction d'année entre T_{i-1} et T_i ,
- L_i : taux forward sur la période $[T_{i-1}, T_i]$,
- K : taux fixe du swap,
- $P(t, T_i)$: facteur d'actualisation jusqu'à T_i .

Si $\text{NPV} > 0$, cela signifie que le payeur fixe est avantage (le taux flottant est supérieur au taux fixe moyen).

Exemple : Supposons un passif garanti à 2% par an sur 10 ans, alors que les taux de marché sont en baisse à 1.2%. L'assureur conclut un IRS dans lequel il paie fixe à 2% et reçoit flottant (Euribor). Si les taux baissent encore, l'assureur reçoit moins sur ses actifs, mais l'IRS lui verse davantage, compensant ainsi la perte de rendement. En revanche, si les taux montent, il paiera un taux fixe supérieur au marché, ce qui représente un coût d'opportunité.

3.2.3 Cap et Floor : options sur taux d'intérêt

Outre les swaps de taux, les caps et floors représentent des instruments dérivés optionnels qui offrent à un investisseur ou un assureur la possibilité de se protéger contre des fluctuations extrêmes des taux d'intérêt. Cela se fait via l'établissement de limites supérieures ou inférieures sur les flux futurs associés à des engagements ou actifs sensibles aux taux.

Un cap est une série d'options (caplets) qui protègent contre une hausse des taux d'intérêt. Le paiement d'un caplet i est :

$$\text{Paiement}_{\text{Caplet}_i} = N \cdot \delta_i \cdot \max(L_i - K, 0)$$

Un floor est l'inverse : il protège contre une baisse des taux. Le paiement d'un floorlet i est :

$$\text{Paiement}_{\text{Floorlet}_i} = N \cdot \delta_i \cdot \max(K - L_i, 0)$$

Ces instruments sont particulièrement utiles pour encadrer les flux futurs dans un contexte de taux incertains.

3.2.4 Modélisation du hedge via le modèle de Black

Le modèle de Black (1976), aussi appelé *Black 76*, est une extension du modèle de Black-Scholes appliqué aux produits dérivés sur taux d'intérêt, notamment les **caps** et **floors**.

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- Les taux forward suivent une dynamique log-normale.
- Les marchés sont complets et sans arbitrage.
- La volatilité est constante sur la période considérée.
- Les paiements sont effectués à la fin de chaque période.

Le prix d'un caplet à la date t , avec échéance T , notionnel N , et période de couverture δ , est donné par :

$$C = N \cdot \delta \cdot P(t, T) \cdot [F \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2)]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où :

- F : taux forward observé à la date t pour la période $[T, T + \delta]$,
- K : taux d'exercice (strike) du caplet,
- σ : volatilité implicite du taux forward,
- $P(t, T)$: facteur d'actualisation (prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T),
- $\Phi(\cdot)$: fonction de répartition de la loi normale standard.

Le caplet agit comme une *option d'achat sur le taux forward*. Si le taux forward F dépasse le strike K , l'acheteur du caplet reçoit un paiement proportionnel à l'écart $F - K$, actualisé et pondéré par la période δ . Le floorlet, symétriquement, est une option de vente sur le taux.

Ces instruments permettent de **couvrir les risques extrêmes** liés à des mouvements adverses des taux d'intérêt, tout en laissant une certaine flexibilité dans la gestion du portefeuille.

Bien que simplificateur, ce modèle reste largement utilisé en pratique pour la valorisation rapide et robuste des caps/floors, notamment dans les systèmes de gestion ALM.

Exemple : Soit

- $N = 100 \text{ M€}$, $\delta = 0,5$, $T = 2$,
- $F = 1,5\%$, $K = 2\%$, $\sigma = 20\%$, $P(t, T) = 0,96$

On calcule :

$$d_1 = \frac{\ln(0,015/0,02) + 0,5 \cdot 0,2^2 \cdot 2}{0,2 \cdot \sqrt{2}} \approx -0,49, \quad d_2 \approx -0,77$$

$$C \approx 100\,000\,000 \cdot 0,5 \cdot 0,96 \cdot [0,015 \cdot \Phi(-0,49) - 0,02 \cdot \Phi(-0,77)]$$

Ce calcul donne une estimation du coût du caplet, qui peut être intégré dans une simulation de portefeuille ALM.

3.3 Risque de crédit

Le risque de crédit est la probabilité qu'un emprunteur fasse défaut sur ses obligations financières. Il peut être modélisé, transféré ou couvert à l'aide d'instruments dérivés tels que les **Credit Default Swaps (CDS)** et les **produits de titrisation synthétique**.

3.3.1 Utilisation des Credit Default Swaps

Un CDS est un contrat dans lequel l'acheteur paie un spread périodique nommé s en échange d'une protection contre le défaut d'un émetteur de référence. Le contrat est structuré en deux jambes :

- **Jambe de protection** : La jambe de protection, correspondant à un paiement unique effectué par le vendeur de protection en cas de défaut de la référence de crédit.
- **Jambe de prime** : La jambe de prime, constituée de paiements périodiques versés par l'acheteur de protection jusqu'à l'échéance du contrat ou la survenance d'un événement de crédit.

Valorisation d'un CDS : Pour évaluer un contrat de Credit Default Swap (CDS), il convient de comparer la valeur actualisée des deux jambes du contrat : la jambe de protection et la jambe de prime. La valeur nette du CDS s'écrit :

$$\text{NPV}_{\text{CDS}} = \text{Protection leg} - \text{Premium leg}$$

La jambe de protection représente le paiement attendu en cas de défaut de l'entité de référence. Elle est calculée comme suit :

$$\text{Protection leg} = (1 - R) \cdot \sum_{i=1}^n P(t, T_i) \cdot [Q(T_{i-1}) - Q(T_i)]$$

où R est le taux de recouvrement, $P(t, T_i)$ le facteur d'actualisation, et $Q(T_i)$ la probabilité de survie jusqu'à la date T_i .

En parallèle, la jambe de prime correspond aux paiements périodiques effectués par l'acheteur de protection tant que l'entité n'a pas fait défaut. Elle s'exprime par :

$$\text{Premium leg} = s \cdot \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot P(t, T_i) \cdot Q(T_i)$$

où s est le spread du CDS, et δ_i la fraction d'année entre T_{i-1} et T_i .

3.3.2 Modélisation du défaut

Pour modéliser la probabilité de défaut, on suppose souvent que le temps de défaut τ suit un processus de Poisson d'intensité constante λ . Dans ce cadre, la probabilité de survie jusqu'à l'instant T est donnée par :

$$Q(T) = \mathbb{P}(\tau > T) = e^{-\lambda T}$$

Cette hypothèse permet une calibration simple des courbes de survie à partir des spreads observés sur le marché des CDS.

Au-delà des CDS individuels, la gestion du risque de crédit peut s'appuyer sur des structures plus complexes comme la titrisation synthétique. Celle-ci permet de transférer le risque de crédit d'un portefeuille de créances sans céder les actifs sous-jacents, en utilisant des CDS sur chaque composant du portefeuille.

3.3.3 Structure en tranches

Dans une opération de titrisation, les flux de paiements issus d'un portefeuille de créances (prêts hypothécaires, crédits à la consommation, etc.) sont redistribués à différents investisseurs selon une hiérarchie de séniorité appelée *structure en tranches*. Cette structuration permet de créer des titres ayant des profils de risque et de rendement différenciés, adaptés à des appétits variés.

Les pertes potentielles sur le portefeuille sont absorbées selon l'ordre suivant :

- **Tranche equity** : elle supporte les premières pertes. C'est la tranche la plus risquée, mais aussi celle qui offre le rendement le plus élevé. Elle est souvent conservée par l'initiateur de la titrisation pour aligner les incitations (principe de *skin in the game*).
- **Tranche mezzanine** : elle absorbe les pertes après la tranche equity. Elle présente un risque intermédiaire et est souvent notée entre BB et BBB par les agences de notation. Elle est attractive pour les investisseurs recherchant un compromis entre rendement et risque.
- **Tranche senior** : elle est la dernière à subir des pertes. Elle bénéficie d'un niveau de protection élevé grâce à la subordination des tranches inférieures. Elle est généralement notée AAA ou AA et attire les investisseurs institutionnels à la recherche de sécurité.

Cette hiérarchisation repose sur le principe de **subordination**, qui permet de protéger les tranches supérieures en transférant le risque de défaut vers les tranches inférieures. En contrepartie, les tranches les plus subordonnées reçoivent des coupons plus élevés.

Exemple : Considérons un portefeuille de prêts d'un montant total de 100 millions d'euros. La structure de titrisation pourrait être la suivante :

- Tranche senior : 70 M€, notée AAA
- Tranche mezzanine : 20 M€, notée BBB
- Tranche equity : 10 M€, non notée

Si les pertes sur le portefeuille atteignent 8 M€, elles sont entièrement absorbées par la tranche equity. Si les pertes montent à 15 M€, la tranche equity est entièrement effacée, et la tranche mezzanine subit une perte de 5 M€, tandis que la tranche senior reste intacte.

La structuration en tranches permet une **transformation du risque de crédit** : à partir d'un portefeuille homogène, on crée des titres hétérogènes en termes de profil de risque. Cela permet :

- d'attirer une base d'investisseurs plus large,
- d'optimiser le coût de financement,
- de transférer le risque vers des acteurs mieux à même de le supporter.

Cependant, cette structuration introduit une complexité importante dans la modélisation du risque, notamment en ce qui concerne la **corrélation des défauts** entre les actifs sous-jacents. C'est pourquoi des modèles de copules sont souvent utilisés pour simuler les pertes agrégées et évaluer la probabilité de défaut de chaque tranche.

3.3.4 Modélisation par copules

Pour juger du risque de perte sur chaque segment, il est essentiel de représenter la relation entre les défaillances des diverses entités du portefeuille. On utilise des copules pour établir une distribution conjointe à partir des distributions marginales.

$$\mathbb{P}(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n) = C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n))$$

où $F_i(t)$ est la fonction de répartition marginale du temps de défaut de l'entité i , et C la copule (souvent gaussienne ou t-student). Cette approche est à la base des modèles de type Gaussian Copula utilisés dans les CDOs.

3.4 Risque de change

Le risque de change résulte des fluctuations des taux de change entre devises. Il affecte les flux financiers des entreprises internationales, les portefeuilles d'investissement multi-devises, et les bilans consolidés. Pour le gérer, plusieurs instruments dérivés sont disponibles.

3.4.1 Forwards de devises

Le contrat forward de change permet de fixer aujourd'hui un taux d'échange pour une transaction future. Le taux forward F est déterminé par la parité des taux d'intérêt entre les deux devises :

$$F = S \cdot e^{(r_d - r_f)T}$$

où S est le taux spot, r_d et r_f les taux d'intérêt domestique et étranger, et T la maturité. Cette relation garantit l'absence d'arbitrage entre les marchés monétaires et de change.

3.4.2 Options de change

Lorsque l'on souhaite se couvrir tout en conservant une certaine flexibilité, les options de change sont particulièrement adaptées. Elles donnent le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre une devise à un taux prédéfini.

Modèle de Garman-Kohlhagen. Ce modèle est une extension du modèle de Black-Scholes aux devises. Le prix d'une option d'achat sur devise est donné par :

$$C = S_0 e^{-r_f T} \Phi(d_1) - K e^{-r_d T} \Phi(d_2)$$
$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où S_0 est le taux de change spot, K le strike, σ la volatilité implicite, et r_d , r_f les taux d'intérêt domestique et étranger. Ce modèle permet de valoriser les options de change de manière cohérente avec les courbes de taux et les anticipations de volatilité.

3.4.3 Cross-currency swaps

Dans un contexte financier mondialisé, les entités financières, les entreprises multinationales et les administrateurs d'actifs se trouvent souvent confrontés à des transactions en différentes monnaies. Cette exposition engendre un double danger : le **risque de change** (associé aux fluctuations des taux de change) et le **risque de taux d'intérêt** (associé aux fluctuations des taux dans chaque monnaie). Les swaps de devises croisées (CCS) sont des instruments dérivés qui offrent la possibilité de gérer ces deux types de risques de façon intégrée.

Un cross-currency swap est un contrat entre deux contreparties qui s'engagent à échanger des flux d'intérêts, et parfois de principal, dans deux devises différentes. À la date initiale, les montants notionnels sont échangés au taux de change spot. Pendant la durée du contrat, les parties échangent des paiements d'intérêts périodiques dans leurs devises respectives. À l'échéance, les montants notionnels sont rééchangés, généralement au taux initial.

Selon la nature des flux échangés, on distingue plusieurs configurations :

- **Fixed vs fixed** : chaque partie paie un taux fixe dans sa devise. Cette structure est utilisée pour verrouiller des coûts de financement bilatéraux.
- **Fixed vs floating** : une partie paie un taux fixe, l'autre un taux variable (souvent indexé sur un taux interbancaire comme Euribor ou SOFR). Cela permet de transformer un financement à taux fixe en taux variable dans une autre devise.
- **Floating vs floating** : les deux parties paient des taux variables dans leurs devises respectives. C'est la structure la plus courante pour les institutions financières, car elle permet de gérer dynamiquement les expositions croisées.

La valorisation d'un cross-currency swap repose sur l'actualisation des flux futurs dans chaque devise, suivie d'une conversion dans une devise de référence (généralement celle du bilan de l'investisseur). Formellement, la valeur du swap à la date t est :

$$\text{NPV}_{\text{CCS}} = \sum_{i=1}^n P_d(t, T_i) \cdot C_d^i - S_t \cdot \sum_{i=1}^n P_f(t, T_i) \cdot C_f^i$$

où :

- $P_d(t, T_i)$ et $P_f(t, T_i)$ sont les facteurs d'actualisation dans les devises domestique et étrangère,
- C_d^i et C_f^i sont les flux d'intérêts (ou de principal) dans chaque devise,
- S_t est le taux de change spot à la date t .

Cette valorisation dépend donc :

- des courbes de taux dans chaque devise (pour estimer les flux futurs),
- des spreads de crédit des contreparties (pour ajuster les taux d'actualisation),
- du taux de change spot (pour convertir les flux dans une devise commune).

Les cross-currency swaps sont essentiels pour les institutions ayant des expositions bilanciellles multi-devises. Par exemple, une entreprise européenne ayant émis une obligation en dollars pour profiter de conditions de financement avantageuses peut utiliser un CCS pour convertir ses paiements futurs en euros, tout en neutralisant le risque de change et de taux.

4 Approches quantitatives et limites de la couverture

4.1 Modélisation avancée

L'utilisation de produits dérivés pour gérer les risques financiers est basée sur une modélisation précise des sensibilités du portefeuille vis-à-vis des éléments de marché. Ce modèle facilite l'identification des expositions résiduelles, le réglage des instruments de couverture, et l'évaluation de leur performance dans des contextes incertains. Trois fondements méthodologiques sont primordiaux : les greeks, les simulations Monte Carlo et les modèles de dépendance multivariée.

4.1.1 Les greeks

Les **greeks** sont des dérivées partielles du prix d'un instrument dérivé par rapport à ses variables fondamentales. Ils permettent de quantifier la sensibilité du portefeuille à différents facteurs de risque, et servent de base à la couverture dynamique.

- **Delta** (Δ) mesure la sensibilité du prix d'un dérivé à une variation infinitésimale du sous-jacent S :

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Une stratégie *delta-neutre* consiste à ajuster la position dans le sous-jacent pour annuler cette sensibilité. Par exemple, pour couvrir une option d'achat, on vend une quantité Δ d'actions.

- **Gamma** (Γ) mesure la convexité du portefeuille, c'est-à-dire la sensibilité du delta à une variation du sous-jacent :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Une couverture gamma-neutre nécessite l'ajout d'options supplémentaires. Elle est cruciale pour limiter les erreurs de couverture dans des marchés volatils.

- **Vega** mesure la sensibilité du prix d'un dérivé à une variation de la volatilité implicite σ :

$$\text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

Elle est particulièrement importante pour les portefeuilles d'options, car la volatilité est un facteur de risque non directement observable et souvent instable.

Dans la pratique, les desks de couverture utilisent des portefeuilles d'options calibrés pour neutraliser simultanément plusieurs greeks, en fonction de la tolérance au risque et des coûts de transaction.

4.1.2 Simulation de Monte Carlo pour instruments complexes

Lorsque les instruments dérivés présentent des profils de paiement non linéaires ou path-dependent (ex : options asiatiques, lookback, garanties d'assurance-vie), les méthodes analytiques deviennent inapplicables. On utilise alors des **simulations de Monte Carlo** pour estimer la valeur espérée des flux futurs.

Soit V_0 la valeur actuelle d'un dérivé. On simule M trajectoires du sous-jacent S_t selon une dynamique stochastique, typiquement un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où W_t est un mouvement brownien standard. Pour chaque trajectoire j , on calcule le payoff à maturité T :

$$\text{Payoff}^{(j)} = f(S_T^{(j)})$$

La valeur du dérivé est alors estimée par :

$$V_0 \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{-rT} \cdot \text{Payoff}^{(j)}$$

Cette méthode est particulièrement utilisée dans la valorisation des garanties de type GMAB (Guaranteed Minimum Accumulation Benefit) ou GMDB (Guaranteed Minimum Death Benefit) en assurance-vie, où les flux dépendent de la trajectoire entière du sous-jacent.

4.1.3 Modèles de corrélation et copules

Dans un portefeuille multi-actifs, la dépendance entre les sous-jacents est un facteur critique. Une mauvaise estimation de la corrélation peut entraîner une sous-couverture ou une sur-couverture significative.

Les modèles linéaires utilisent des matrices de corrélation Σ , mais ils sont insuffisants pour capturer les dépendances extrêmes (co-mouvements en queue de distribution). C'est pourquoi on utilise des **copules**, qui permettent de modéliser la dépendance indépendamment des distributions marginales.

La copule gaussienne est définie par :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

où :

- Φ^{-1} est la fonction quantile de la loi normale standard,
- Φ_{Σ} est la fonction de répartition d'une loi normale multivariée de matrice de corrélation Σ .

Les copules permettent de simuler des scénarios de défauts corrélés (ex : dans les CDOs), ou de modéliser la dépendance entre plusieurs indices de marché dans des stratégies de couverture globale.

La modélisation avancée est indispensable pour construire des stratégies de couverture robustes dans des environnements incertains. Elle permet de quantifier les expositions résiduelles, d'optimiser les portefeuilles de dérivés, et de simuler des scénarios extrêmes. Toutefois, elle repose sur des hypothèses fortes (distribution, dynamique, indépendance) qui doivent être testées empiriquement pour éviter les biais de modélisation.

4.2 Coûts et Limites des dérivés

4.2.1 Coûts et limites des dérivés

Bien que les produits dérivés soient des instruments efficaces de gestion du risque, leur emploi n'est pas sans frais, sans tensions de marché ni contraintes structurelles. Ces restrictions pourraient diminuer l'efficacité de la couverture, voire introduire des risques supplémentaires. On identifie trois principales sortes de contraintes : les tensions de marché, les défauts de modélisation et les risques résiduels associés à la contrepartie.

Le **Slippage** désigne l'écart entre le prix théorique d'un instrument dérivé (issu d'un modèle) et le prix effectivement obtenu lors de l'exécution sur le marché. Il résulte de la profondeur limitée du carnet d'ordres, de la vitesse d'exécution, ou encore de la volatilité du marché. Dans une stratégie de couverture dynamique (ex : delta hedging), le slippage peut s'accumuler à chaque réajustement et générer un coût significatif.

La **liquidité** est une autre contrainte majeure. Certains dérivés, notamment les options exotiques ou les CDS sur entités peu notées, peuvent souffrir d'un manque de contreparties, rendant leur exécution difficile ou coûteuse. Cela limite la capacité à ajuster rapidement une position de couverture.

Enfin, les **modèles imparfaits** constituent une source de risque structurel. Les modèles de valorisation (Black-Scholes, Heston, SABR, etc.) reposent sur des hypothèses simplificatrices : volatilité constante, absence de sauts, marchés frictionless. En réalité, les marchés sont discontinus, les volatilités sont stochastiques, et les corrélations instables. Ces écarts entre modèle et réalité peuvent générer des erreurs de pricing et de couverture.

Le **risque de basis** apparaît lorsque l'instrument de couverture n'est pas parfaitement corrélé à l'exposition sous-jacente. Par exemple, couvrir un portefeuille d'actions européennes avec un future sur l'Euro Stoxx 50 introduit un risque de décalage si la composition du portefeuille diffère de l'indice. Ce risque est mesuré par la variance résiduelle non expliquée dans une régression de type :

$$\Delta P_t = \alpha + \beta \Delta H_t + \varepsilon_t$$

où ε_t représente le basis risk.

Le **risque modèle** résulte de l'utilisation d'un modèle de valorisation ou de couverture inadapté. Il peut provenir d'une mauvaise calibration, d'une instabilité des paramètres, ou d'une mauvaise spécification structurelle. Ce risque est particulièrement critique pour les produits structurés ou les dérivés exotiques.

Le **risque de contrepartie** est le risque que la partie avec laquelle le dérivé est conclu fasse défaut. Il est particulièrement important dans les contrats de gré à gré (OTC). Pour le quantifier, on utilise des mesures comme la **Credit Valuation Adjustment (CVA)**, qui ajuste la valeur du dérivé pour tenir compte de la probabilité de défaut de la contrepartie :

$$\text{CVA} = (1 - R) \cdot \int_0^T \mathbb{E}[\max(V_t, 0)] \cdot dPD(t)$$

où R est le taux de recouvrement, V_t la valeur positive du dérivé à l'instant t , et $PD(t)$ la probabilité de défaut cumulée.

D'autres ajustements sont également utilisés :

- **DVA** (Debit Valuation Adjustment) : ajustement symétrique lié au risque de défaut de l'institution elle-même.
- **FVA** (Funding Valuation Adjustment) : coût de financement de la position.
- **MVA** (Margin Valuation Adjustment) : coût lié aux appels de marge.

Ces ajustements sont regroupés sous le terme générique de **XVA**, qui représente l'ensemble des corrections de valorisation liées aux risques de marché, de crédit et de liquidité.

4.2.2 Illustrations quantitatives : Basis Risk et XVA

Pour mieux comprendre les limites pratiques de la couverture par dérivés, deux illustrations chiffrées sont proposées ci-dessous.

Le graphique suivant montre la différence entre les rendements d'un actif et ceux de son instrument de couverture (par exemple, un portefeuille d'actions couvert par un future sur indice). Le *basis risk* correspond à la partie non couverte de l'exposition, souvent due à une corrélation imparfaite.

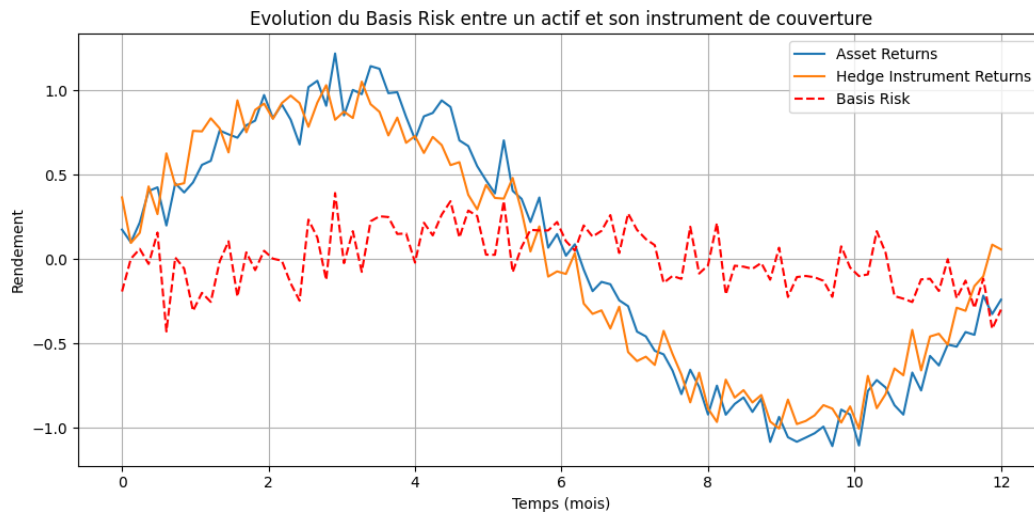


FIGURE 1 – Évolution du basis risk entre un actif et son instrument de couverture

Même si les deux courbes suivent une tendance similaire, l'écart (en rouge pointillé) varie dans le temps, illustrant le risque résiduel non éliminé par la couverture. Ce risque est d'autant plus important que la corrélation entre l'actif et l'instrument de couverture est faible ou instable.

Le graphique suivant illustre comment les ajustements liés au risque de contrepartie (CVA), au risque propre (DVA) et au coût de financement (FVA) réduisent la valeur théorique d'un dérivé (ici une option d'achat européenne).

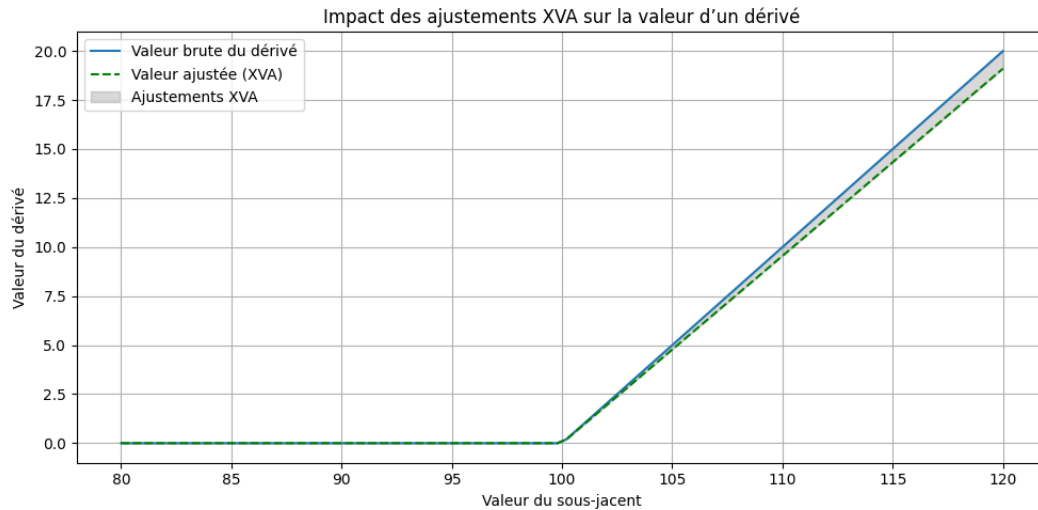


FIGURE 2 – Impact des ajustements XVA sur la valeur d'un dérivé

Plus la valeur du sous-jacent augmente, plus la valeur brute du dérivé croît. Cependant, les ajustements XVA (zone grisée) réduisent cette valeur, reflétant les coûts et risques additionnels liés à la réalité du marché. Ces ajustements sont essentiels pour une valorisation prudente et réglementairement conforme des portefeuilles de dérivés.

La couverture par dérivés, bien que théoriquement efficace, est confrontée à des limites pratiques qui doivent être intégrées dans toute stratégie de gestion du risque. Une approche rigoureuse nécessite de modéliser non seulement les expositions, mais aussi les frictions de marché, les incertitudes de modélisation, et les risques bilatéraux. Ces éléments sont essentiels pour évaluer le coût réel de la couverture et optimiser les arbitrages entre protection et performance.

4.2.3 Étude de cas 1 : Couverture d'un portefeuille d'assurance-vie à long terme via swap de taux d'intérêt

Dans le cadre de la gestion d'un portefeuille d'assurance-vie libellé en euros, un assureur est confronté à une problématique structurelle : la nécessité de garantir un rendement contractuel aux assurés dans un contexte de taux d'intérêt historiquement bas. Le portefeuille en question se compose d'un encours de passifs représentant 500 millions d'euros, assortis d'un taux d'intérêt garanti de 1,75% par an sur une période de 10 ans. Ces passifs, du fait de leur horizon long terme, présentent une duration élevée, estimée à $D_L = 9$ ans.

Parallèlement, les actifs servant de couverture sont principalement constitués d'obligations souveraines à faible risque, dont la duration moyenne est de $D_A = 6,5$ ans. Ce désalignement crée un *mismatch* actif/passif exposant l'assureur à un risque de réinvestissement significatif, notamment en cas de baisse prolongée des taux d'intérêt. La gestion actif-passif (ALM) impose alors une stratégie de couverture permettant d'allonger la duration effective des actifs pour la rapprocher de celle des engagements.

Pour atteindre cet objectif, l'assureur décide de mettre en place un contrat de swap de taux d'intérêt (*Interest Rate Swap* – IRS). Ce swap est structuré de manière à ce que l'assureur paie un taux fixe équivalent au taux garanti ($K = 1,75\%$) et reçoive un taux variable indexé sur l'Euribor 6 mois. Cette stratégie permet de capter l'évolution future des taux courts, compensant ainsi la rigidité du portefeuille obligataire.

Afin de calibrer le montant notionnel N du swap, l'assureur procède à une neutralisation du *gap* de duration par la relation suivante :

$$N = \frac{(D_L - D_A) \cdot V_{\text{passif}}}{D_{\text{IRS}}}$$

où :

- D_L : duration des passifs,
- D_A : duration des actifs obligataires,
- V_{passif} : encours des passifs (500 M€),
- D_{IRS} : duration du swap, supposée égale à 9 ans.

Substituant les valeurs numériques, on obtient :

$$N = \frac{(9 - 6,5) \cdot 500}{9} = \frac{2,5 \cdot 500}{9} \approx 138,89 \text{ M€}$$

L'assureur conclut ainsi un IRS d'un notionnel de 139 millions d'euros, avec une maturité de 10 ans. D'un point de vue financier, si les taux d'intérêt de marché venaient à baisser significativement, les revenus futurs des actifs seraient affectés à la baisse, ce qui détériorerait la marge technique de l'assureur.

Cependant, grâce au swap, l'assureur recevrait un taux variable potentiellement supérieur au taux fixe payé, générant ainsi un flux de compensation.

En revanche, si les taux remontent, le coût fixe du swap serait désavantageux comparé au taux variable, mais cette hausse des taux bénéficierait parallèlement aux actifs obligataires nouvellement réinvestis. Le swap permet donc de réduire la convexité négative induite par l'asymétrie des flux futurs dans les passifs garantis. Cette stratégie permet en outre de lisser

la valeur de marché du bilan économique de l'assureur, tout en réduisant la *Value at Risk* associée au facteur de risque taux.

Il est à noter que l'utilisation d'un swap de taux n'est pas sans inconvénients. D'une part, elle introduit un risque de contrepartie, qui peut toutefois être atténué par l'utilisation d'une chambre de compensation centrale (clearing house) ou la mise en place d'un contrat de collatéralisation (CSA). D'autre part, une couverture parfaite supposerait une gestion dynamique et continue du profil de duration, nécessitant des recalibrages périodiques du swap.

Du point de vue réglementaire, une telle stratégie de couverture est valorisée positivement dans le cadre de la directive Solvabilité II. En effet, elle permet une réduction du *capital de solvabilité requis* (SCR) en diminuant la sensibilité des engagements assurantiels aux variations de taux d'intérêt. Ainsi, au-delà de la simple gestion de performance, le recours aux IRS dans ce contexte participe à la stabilisation prudentielle du bilan.

Ce cas pratique illustre l'importance d'une stratégie de couverture linéaire par swap de taux dans le contexte d'un ALM sophistiqué, compte tenu d'un environnement prolongé de taux bas défavorable. Elle souligne aussi les choix difficiles que doivent faire les assureurs entre performance, solidité financière et gestion des risques, dans un contexte réglementaire rigoureux et un marché obligataire en constante évolution.

4.2.4 Étude de cas 2 : Couverture d'un portefeuille souverain obligataire via options sur taux

Nous nous plaçons dans le contexte d'un *fonds souverain* de premier plan, tel qu'un fonds de réserve stratégique ou un fonds d'investissement public d'un État pétrolier, détenant un portefeuille obligataire international de grande ampleur. Ce portefeuille, évalué à hauteur de 20 milliards de dollars, est composé à 60 % d'obligations libellées en dollars américains (USD) et à 40 % en euros (EUR), toutes classées *investment grade*, avec une duration moyenne pondérée de 12 ans.

Le gestionnaire du fonds, anticipant un resserrement agressif de la politique monétaire américaine, craint une hausse brutale des taux d'intérêt sur la courbe USD, en particulier sur le segment 10 ans. Ce choc de taux entraînerait une dégradation significative de la valeur de marché du portefeuille, en raison de la sensibilité importante des obligations à long terme à la variation des taux.

Dans le but de se protéger contre ce risque, le fonds met en œuvre une stratégie de couverture optionnelle, en recourant à des *payer swaptions*. Il s'agit d'options sur swaps de taux d'intérêt qui confèrent à leur détenteur le droit, mais non l'obligation, d'entrer à une date future dans un swap dans lequel il paiera un taux fixe et recevra un taux flottant. En achetant une *payer swaption*, le fonds sécurise une capacité de gain dans le cas d'une hausse des taux, qui viendrait compenser la perte en valeur de ses actifs obligataires.

Le fonds opte pour l'achat d'une série de *payer swaptions* de maturité 6 mois, adossées à des swaps de maturité 10 ans, avec un strike fixé à 3,25 %. À la date d'achat, le taux forward sur 10 ans est de 3,1 % et la volatilité implicite observée sur le marché des swaptions est de 25 %. Le fonds décide de couvrir 50 % de son exposition duration, en proportion des encours libellés en USD. Cela correspond à une couverture partielle mais efficace, permettant d'optimiser le couple coût/rendement de la stratégie.

Le prix de la swaption est déterminé selon le modèle de Black (1976), adapté aux produits dérivés de taux :

$$C = N \cdot P(0, T) \cdot [F \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2)]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où :

- C est la prime de la swaption,
- N le notionnel couvert (ici partiel, sur la moitié du portefeuille USD),
- $P(0, T)$ le facteur d'actualisation à 6 mois ($\approx 0,985$),
- $F = 3,1\%$ le taux forward 10 ans,
- $K = 3,25\%$ le strike de la swaption,
- $\sigma = 25\%$ la volatilité implicite,
- $T = 0,5$ an (maturité de la swaption),
- $\Phi(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale.

Le calcul donne une prime équivalente à environ 1,1 % du notionnel couvert. Ce montant est absorbé comme coût fixe par le portefeuille, indépendamment de la réalisation du scénario haussier.

En cas de remontée effective des taux au-delà du strike de 3,25 %, la swaption devient *in-the-money*. Le fonds peut ainsi faire appel à son droit d'engager un swap profitable, ce qui entraîne un afflux de valeur positive compensant la chute de valeur des obligations. En cas de survenance du risque, la couverture remplit donc pleinement sa fonction..

En revanche, si les taux d'intérêt restent stables ou diminuent, la swaption expire sans valeur et la perte pour le fonds se limite à la prime versée. Cette propriété asymétrique fait de la stratégie un choix particulièrement approprié pour les investisseurs institutionnels qui désirent se prémunir contre des risques extrêmes sans sacrifier les bénéfices en cas de situation favorable.

Cette stratégie de couverture optionnelle repose sur une estimation adéquate de la volatilité implicite des taux, paramètre clé dans le pricing des swaptions. De plus, la liquidité du marché des options longues peut représenter une contrainte, en particulier sur les devises moins échangées ou pour des maturités supérieures à 10 ans. Le fonds doit également prendre en compte le traitement comptable des dérivés ainsi que leur impact sur les ratios prudentiels si la réglementation locale est alignée sur les standards Bâlois ou internationaux (IFRS 9).

Ce cas pratique démontre comment une grande institution peut utiliser des instruments dérivés optionnels pour se prémunir contre un risque de taux asymétrique, tout en mettant en place une stratégie qui allie protection et flexibilité. Cette approche, malgré un coût initial élevé, favorise une gestion prudente des fluctuations de taux et maintient une ouverture aux opportunités du marché lorsque le scénario de risque ne se concrétise pas.

5 Conclusion

Dans un environnement économique et financier marqué par une montée en puissance des incertitudes, la capacité des institutions financières et assurantielles à gérer proactivement leurs expositions aux risques devient une compétence stratégique majeure. Cette étude a souligné l'importance cruciale des produits dérivés dans ce processus, pas seulement en tant qu'instruments de couverture, mais aussi en tant qu'outils d'optimisation du capital et de gestion du bilan dans une perspective d'ingénierie intégrée du risque.

À travers l'étude des différentes classes de dérivés, nous avons montré comment ces instruments permettent de couvrir des risques aussi variés que les risques de marché, les risques de crédit, les risques de change, ou encore les risques spécifiques aux engagements assurantiels de long terme. La granularité des outils disponibles, couplée à des techniques de modélisation avancées, offre aujourd'hui aux gestionnaires de portefeuille, aux risk managers et aux actuaires, une boîte à outils puissante, mais qui nécessite une rigueur extrême dans son utilisation.

Les deux études de cas approfondies illustrent concrètement les enjeux et les arbitrages de la couverture : d'une part, l'usage d'un swap de taux pour corriger un désalignement actif/passif dans un portefeuille d'assurance-vie en période de taux bas ; d'autre part, le recours à des swaptions pour se prémunir contre une hausse brutale des taux dans le cadre de la gestion souveraine. Ces illustrations mettent en évidence la sophistication croissante des stratégies de couverture, tout en soulignant leur nécessité d'être personnalisées en fonction du profil d'exposition, des buts économiques, des règles réglementaires pertinentes et des restrictions opérationnelles.

Néanmoins, en dépit de leur sophistication, les produits dérivés ne représentent pas une solution miracle. Leur efficacité dépend largement de la qualité des hypothèses de modélisation, de la robustesse des infrastructures de marché (liquidité, contrepartie, clearing), et du coût réel de la couverture (slippage, risque de basis, XVA). De plus, la montée en puissance des exigences réglementaires notamment via Solvabilité II, Bâle III/IV ou IFRS 17 impose une maîtrise accrue des impacts comptables, prudentiels et économiques des instruments dérivés. Dans ce contexte, la frontière entre ingénierie financière et ingénierie actuarielle s'estompe, et l'expertise interdisciplinaire devient la norme.

Par conséquent, l'ingénierie moderne du risque ne se limite plus à un ensemble de processus visant à réduire l'exposition brute : elle se transforme en une construction dynamique et cohérente de création d'une architecture protectrice, capable de faire face aux chocs extrêmes tout en satisfaisant les exigences de performance et les contraintes réglementaires. Quand ils sont utilisés judicieusement, les produits dérivés forment la base de cette structure. Enfin, les perspectives futures de la couverture par dérivés s'annoncent à la fois ambitieuses et exigeantes : adaptation aux risques climatiques et ESG, développement de dérivés tokenisés sur blockchain, intégration des risques systémiques dans les modèles de stress, et automatisation des stratégies via les technologies d'intelligence artificielle. Dans ce contexte, le rôle des ingénieurs du risque devient plus que jamais central : penser, modéliser et sécuriser un monde financier en pleine transformation.