La Value at Risk (VaR)

Alexandre Saadoun

12 juillet 2025

Table des matières

1	Intr	roduction	2
2	Mét 2.1 2.2 2.3	Méthode historique	2 2 3 3
3	$\operatorname{Int}\epsilon$	erprétation de la Value at Risk (VaR)	5
4	Lim	nites et Critiques	6
	4.1	Absence d'information sur les pertes extrêmes	6
	4.2	Hypothèses de distribution irréalistes	6
	4.3	Inadaptation à certains types de risques	6
	4.4	Non-cohérence mathématique	7
	4.5	Sensibilité aux données historiques	8
	4.6	Risque de mauvaise interprétation ou manipulation	8
	4.7	Dépendance à l'horizon temporel et au niveau de confiance	8
	4.8	Inadaptation à certains types de risques	8
5	Alternatives et compléments		9
	5.1	Expected Shortfall (ES)	9
	5.2	Stress testing	10
	5.3	Backtesting	10
6	Conclusion		11

1 Introduction

Dans un environnement financier caractérisé par une volatilité croissante, la capacité à mesurer, anticiper et gérer le risque est devenue un enjeu stratégique pour les institutions financières, les investisseurs et les régulateurs. C'est dans ce contexte que s'inscrit la Value at Risk (VaR), un indicateur devenu incontournable dans la gestion du risque de marché.

La VaR est une mesure statistique qui permet d'estimer la perte maximale potentielle d'un portefeuille financier sur un horizon temporel donné, avec un certain niveau de confiance. Elle répond à une question simple mais essentielle : « Quelle est la perte maximale que je peux subir, avec une probabilité de X %, sur une période de Y jours? »

Introduite dans les années 1990, notamment par les travaux de la banque J.P. Morgan à travers le projet *RiskMetrics*, la VaR s'est rapidement imposée comme un standard international. Elle est aujourd'hui utilisée aussi bien dans les salles de marché que dans les départements de gestion des risques, les comités de direction et les autorités de régulation.

2 Méthodologie de calcul

2.1 Méthode historique

La méthode historique est l'une des approches les plus intuitives et empiriques pour estimer la Value at Risk (VaR). Elle repose sur l'analyse des rendements passés d'un portefeuille, sans faire d'hypothèse particulière sur la distribution des rendements.

L'hypothèse centrale est de considérer que les rendements passés sont représentatifs des rendements futurs. On collecte donc une série chronologique de rendements historiques sur une période donnée (par exemple, les 250 derniers jours de bourse), puis on les classe du plus faible au plus élevé. La VaR est alors estimée comme le quantile empirique de cette distribution.

Soit R_1, R_2, \ldots, R_n les rendements historiques classés par ordre croissant, et soit α le niveau de confiance (par exemple, 95 %). La VaR est donnée par :

$$VaR_{\alpha} = -R_{(k)} \times V_0$$

où:

- V_0 est la valeur actuelle du portefeuille,
- $k = \lceil (1 \alpha) \times n \rceil$ est l'indice du quantile,
- $R_{(k)}$ est le k^{e} plus mauvais rendement observé.

2.2 Méthode paramétrique (Variance-covariance)

La méthode paramétrique, également appelée méthode de variance-covariance, repose sur l'hypothèse que les rendements financiers suivent une **distribution normale**. Cette hypothèse permet de modéliser les pertes potentielles à l'aide des paramètres statistiques classiques : la moyenne et l'écart-type des rendements.

Dans ce cadre, la VaR est calculée à partir de la formule analytique dérivée de la loi normale. Elle repose sur le quantile de la distribution normale standard, noté z_{α} , qui correspond au niveau de confiance choisi.

La formule de la VaR est alors la suivante :

$$VaR_{\alpha} = z_{\alpha} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t}$$

où:

- z_{α} est le quantile de la loi normale standard pour un niveau de confiance α (par exemple, $z_{0.95} \approx 1.645$, $z_{0.99} \approx 2.33$),
- σ est l'écart-type des rendements du portefeuille,
- t est l'horizon temporel (en jours, semaines, etc.).

Exemple : Supposons qu'un portefeuille présente une volatilité journalière de $\sigma = 0.018$ (soit 1.8%), et que l'on souhaite calculer la VaR à 99% sur un horizon de 10 jours. Le quantile de la loi normale standard à 99% est $z_{0.99} \approx 2.33$. On applique alors la formule :

$$VaR_{00\%} = 2.33 \times 0.018 \times \sqrt{10} \approx 0.1327 = 13.27\%$$

Si la valeur du porte feuille est de 2 000 000 €, la perte maximale estimée est :

$$VaR_{99\%} = 0.1327 \times 2000000 = 265400 \text{ £}$$

Cela signifie qu'il y a 99 % de chances que la perte sur 10 jours ne dépasse pas $265\,400\,$ €, et 1 % de chances qu'elle soit supérieure.

Cette méthode est rapide à mettre en œuvre et bien adaptée aux portefeuilles linéaires. Toutefois, elle repose sur des hypothèses fortes : la normalité des rendements et la stabilité de la volatilité. En réalité, les marchés financiers présentent souvent des distributions asymétriques et à queues épaisses, ce qui peut conduire à une sous-estimation du risque.

2.3 Simulation de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est une approche numérique puissante qui permet d'estimer la Value at Risk (VaR) en simulant un grand nombre de scénarios de rendements futurs. Contrairement aux méthodes historiques ou paramétriques, elle ne repose pas nécessairement sur des hypothèses de normalité ou de linéarité, ce qui la rend particulièrement adaptée aux portefeuilles complexes ou non linéaires (contenant des options par exemple).

On génère un grand nombre de trajectoires de rendements aléatoires à partir d'un modèle probabiliste (souvent une loi normale ou une loi empirique ajustée). Pour chaque scénario,

on calcule la valeur finale du portefeuille, puis la perte correspondante. La VaR est ensuite estimée comme le quantile empirique de la distribution des pertes simulées.

Soit V_0 la valeur initiale du portefeuille, et R_i les rendements simulés pour $i=1,\ldots,N$ scénarios. On calcule les pertes simulées :

$$L_i = V_0 - V_0 \cdot (1 + R_i) = V_0 \cdot (-R_i)$$

La VaR au niveau de confiance α est alors donnée par :

$$VaR_{\alpha} = quantile_{1-\alpha}(L_1, L_2, \dots, L_N)$$

Exemple : Supposons un portefeuille de $1\,000\,000\,$ € avec un rendement journalier moyen de $0,05\,$ % et une volatilité de $2\,$ %. En simulant $10\,000$ rendements selon une loi normale $\mathcal{N}(0,0005,0,02)$, on obtient une distribution de pertes. La VaR à $95\,$ % correspond au $5^{\rm e}$ percentile de cette distribution.

Illustration : Le graphique ci-dessous montre la distribution des pertes simulées et la position de la VaR à $95\,\%$:

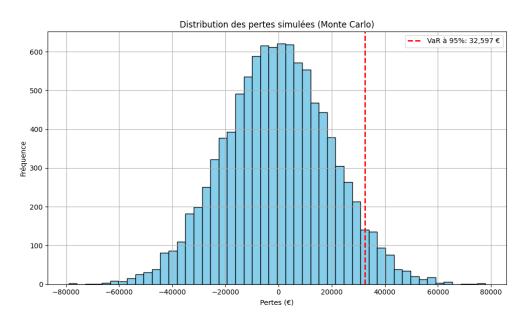


Figure 1 – Distribution des pertes simulées (Méthode Monte Carlo)

Dans cet exemple, la VaR à 95 % est estimée à environ $32\,597\,$ €, ce qui signifie qu'il y a 5 % de chances que la perte journalière dépasse ce montant.

La méthode de Monte Carlo est très flexible et permet de modéliser des portefeuilles complexes, y compris ceux contenant des instruments dérivés. Elle peut intégrer des distributions non normales, des corrélations dynamiques, ou des modèles de volatilité conditionnelle (GARCH, etc.). En revanche, elle est coûteuse en temps de calcul et nécessite une modélisation rigoureuse des rendements, ce qui peut introduire des erreurs si le modèle est mal spécifié.

3 Interprétation de la Value at Risk (VaR)

La Value at Risk (VaR) est une mesure probabiliste qui permet d'estimer la perte maximale potentielle d'un portefeuille sur un horizon temporel donné, avec un certain niveau de confiance. Elle repose sur une approche quantile de la distribution des pertes potentielles. Cette mesure est devenue un standard dans la gestion du risque, car elle permet de transformer une incertitude complexe en une valeur unique, facilement interprétable et communicable.

La VaR à un niveau de confiance α (par exemple, 95 %) signifie qu'il y a une probabilité α que la perte ne dépasse pas un certain montant sur la période considérée, et une probabilité $1-\alpha$ qu'elle soit supérieure. Formellement, si L est la variable aléatoire représentant la perte, alors :

$$\operatorname{VaR}_{\alpha}(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} \mid P(L \leq l) \geq \alpha\}$$

Une VaR de 1 million d'euros à 99 % sur 10 jours signifie qu'il y a 99 % de chances que la perte sur cette période ne dépasse pas 1 million d'euros, et 1 % de chances qu'elle soit supérieure. Cette information est cruciale pour les gestionnaires de portefeuille, les directions financières et les régulateurs, car elle permet de fixer des limites de risque, d'allouer du capital, ou encore de calibrer des stratégies de couverture.

Ainsi elle est utilisée dans de nombreux contextes :

- Banques et institutions financières : pour mesurer le risque de marché, de crédit ou de liquidité, et pour répondre aux exigences réglementaires (Bâle II/III).
- **Assurances** : pour évaluer les pertes potentielles sur les actifs financiers ou les engagements techniques.
- **Gestion d'actifs** : pour comparer des stratégies d'investissement selon leur profil de risque.
- Audit et contrôle interne : pour identifier les zones de vulnérabilité dans les processus financiers.

Bien que la VaR soit née dans le monde financier, son principe peut être transposé à d'autres domaines où l'on cherche à quantifier un risque extrême :

- Gestion des catastrophes naturelles : la VaR peut être utilisée pour estimer la perte maximale attendue en cas de séisme, d'inondation ou de tempête, sur la base de données historiques.
- Cybersécurité: certaines entreprises utilisent des variantes de la VaR pour estimer les pertes potentielles liées à une cyberattaque, en tenant compte de la fréquence et de la gravité des incidents passés.
- **Gestion de projet** : dans les projets industriels ou informatiques, la VaR peut servir à estimer le dépassement budgétaire maximal avec un certain niveau de confiance.
- **Énergie et environnement** : les opérateurs de réseaux électriques ou de production d'énergie peuvent utiliser des approches similaires pour anticiper les pertes liées à des pics de consommation ou à des défaillances techniques.

4 Limites et Critiques

Malgré son utilité et sa large adoption dans le secteur financier, la Value at Risk (VaR) présente plusieurs limites théoriques, pratiques et opérationnelles. Ces limites doivent être bien comprises pour éviter une utilisation aveugle ou excessive de cet indicateur, qui pourrait conduire à une sous-estimation du risque réel.

4.1 Absence d'information sur les pertes extrêmes

La VaR fournit une estimation de la perte maximale attendue à un certain niveau de confiance, mais elle ne donne aucune indication sur l'ampleur des pertes au-delà de ce seuil. Par exemple, une VaR à 99 % de 1 million d'euros signifie qu'il y a 1 % de chances que la perte dépasse ce montant, mais elle ne dit rien sur la gravité de ces pertes rares. Ce phénomène est connu sous le nom de risque de queue (tail risk), et il est particulièrement critique en période de crise financière, où les pertes peuvent être bien supérieures à la VaR estimée.

4.2 Hypothèses de distribution irréalistes

Les méthodes paramétriques de calcul de la VaR reposent souvent sur l'hypothèse que les rendements suivent une **loi normale**. Or, les données empiriques montrent que les rendements financiers présentent généralement des **queues épaisses** (kurtosis élevé), une **asymétrie** (skewness), et une **volatilité conditionnelle** (effet GARCH). Ces caractéristiques rendent l'hypothèse de normalité inadaptée, ce qui peut conduire à une sous-estimation systématique du risque.

4.3 Inadaptation à certains types de risques.

La VaR est principalement conçue pour mesurer le **risque de marché**, c'est-à-dire les pertes potentielles liées aux fluctuations des prix des actifs financiers (actions, taux d'intérêt, devises, matières premières, etc.). Cependant, elle est moins adaptée pour évaluer d'autres types de risques, qui nécessitent des approches spécifiques :

- **Risque de liquidité** : il correspond à l'incapacité d'une institution à vendre un actif ou à lever des fonds rapidement sans subir une perte significative. Ce risque est particulièrement critique en période de crise, lorsque les marchés deviennent illiquides. La VaR ne tient pas compte de la profondeur du marché ni des délais de transaction.
- **Risque opérationnel**: il s'agit du risque de pertes résultant de défaillances internes (erreurs humaines, systèmes, processus) ou d'événements externes (fraude, cyberattaque, catastrophe naturelle). Ce type de risque est difficile à modéliser statistiquement et ne peut pas être capturé par la VaR, qui repose sur des données de marché.
- **Risque systémique** : ce risque concerne la possibilité qu'un événement affectant une institution ou un marché se propage à l'ensemble du système financier, provoquant une crise généralisée. La VaR, en tant que mesure individuelle, ne prend pas en compte les interdépendances entre acteurs ni les effets de contagion.

— **Risque de crédit**: bien que certaines variantes de la VaR (comme la Credit VaR) tentent de l'intégrer, la VaR standard ne mesure pas directement le risque de défaut d'une contrepartie. Elle suppose implicitement que les actifs sont liquides et que les flux de paiement sont honorés.

Ces limites soulignent la nécessité d'adopter une approche intégrée de la gestion des risques, combinant des outils quantitatifs (comme la VaR) avec des analyses qualitatives, des scénarios de stress, et des indicateurs spécifiques à chaque type de risque.

4.4 Non-cohérence mathématique

L'une des critiques les plus fondamentales adressées à la Value at Risk (VaR) est qu'elle ne satisfait pas les propriétés d'une **mesure de risque cohérente**, telles que définies par Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999). Ces auteurs ont formalisé quatre axiomes que toute mesure de risque devrait idéalement respecter pour être considérée comme mathématiquement cohérente :

- 1. **Monotonie** : si un portefeuille X génère toujours des pertes supérieures ou égales à celles d'un portefeuille Y, alors le risque de X doit être au moins aussi grand que celui de Y.
- 2. Invariance par translation : ajouter un montant certain c à un portefeuille réduit le risque de ce montant : $\rho(X+c) = \rho(X) c$.
- 3. Homogénéité positive : doubler la taille d'un portefeuille double son risque : $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ pour tout $\lambda > 0$.
- 4. **Sous-additivité** : le risque d'un portefeuille combiné ne doit pas excéder la somme des risques individuels :

$$\rho(X+Y) \le \rho(X) + \rho(Y)$$

La VaR respecte les trois premières propriétés, mais **échoue à satisfaire la sous-additivité** dans certains cas, notamment lorsque les distributions de pertes sont non normales ou présentent des queues épaisses. Cela signifie que :

$$VaR(X + Y) > VaR(X) + VaR(Y)$$

Autrement dit, la VaR d'un portefeuille agrégé peut être supérieure à la somme des VaR de ses composants, ce qui va à l'encontre du **principe fondamental de diversification**. En théorie, la diversification devrait réduire le risque global, mais la VaR peut paradoxalement suggérer le contraire.

Exemple : Considérons deux actifs A et B dont les pertes sont parfaitement corrélées dans les queues de distribution (par exemple, en cas de crise). Si l'on calcule la VaR de chaque actif séparément, puis celle du portefeuille A+B, on peut observer que :

$$VaR_{\alpha}(A+B) > VaR_{\alpha}(A) + VaR_{\alpha}(B)$$

Ce phénomène est particulièrement problématique pour les institutions financières qui cherchent à agréger les risques à l'échelle d'un groupe ou d'un conglomérat. Il peut conduire à une surestimation du capital requis ou à une mauvaise allocation des ressources.

4.5 Sensibilité aux données historiques

Les méthodes historiques de calcul de la VaR supposent que les rendements passés sont représentatifs du futur. Or, les marchés financiers sont dynamiques et sujets à des ruptures de régime. Une VaR calculée sur une période calme peut sous-estimer le risque futur, tandis qu'une VaR calculée après une crise peut le surestimer. Cette instabilité temporelle rend la VaR peu fiable comme outil de prévision.

4.6 Risque de mauvaise interprétation ou manipulation

La simplicité apparente de la VaR peut conduire à une **mauvaise interprétation** par les décideurs non spécialistes. De plus, dans un contexte réglementaire, certains acteurs peuvent être tentés de **manipuler les modèles** pour réduire artificiellement la VaR et ainsi diminuer les exigences de fonds propres. Ce phénomène, connu sous le nom de *model gaming*, a été observé dans plusieurs institutions avant la crise de 2008.

4.7 Dépendance à l'horizon temporel et au niveau de confiance

La VaR est très sensible au choix de l'horizon temporel (1 jour, 10 jours, etc.) et du niveau de confiance (95 %, 99 %, etc.). Un même portefeuille peut présenter des VaR très différentes selon ces paramètres, ce qui complique les comparaisons entre institutions ou entre périodes.

4.8 Inadaptation à certains types de risques

La VaR est principalement conçue pour mesurer le **risque de marché**, c'est-à-dire les pertes potentielles liées aux fluctuations des prix des actifs financiers (actions, taux d'intérêt, devises, matières premières, etc.). Cependant, elle est moins adaptée pour évaluer d'autres types de risques, qui nécessitent des approches spécifiques :

- Risque de liquidité : il correspond à l'incapacité d'une institution à vendre un actif ou à lever des fonds rapidement sans subir une perte significative. Ce risque est particulièrement critique en période de crise, lorsque les marchés deviennent illiquides. La VaR ne tient pas compte de la profondeur du marché ni des délais de transaction.
- **Risque opérationnel**: il s'agit du risque de pertes résultant de défaillances internes (erreurs humaines, systèmes, processus) ou d'événements externes (fraude, cyberattaque, catastrophe naturelle). Ce type de risque est difficile à modéliser statistiquement et ne peut pas être capturé par la VaR, qui repose sur des données de marché.

- **Risque systémique** : ce risque concerne la possibilité qu'un événement affectant une institution ou un marché se propage à l'ensemble du système financier, provoquant une crise généralisée. La VaR, en tant que mesure individuelle, ne prend pas en compte les interdépendances entre acteurs ni les effets de contagion.
- **Risque de crédit** : bien que certaines variantes de la VaR (comme la Credit VaR) tentent de l'intégrer, la VaR standard ne mesure pas directement le risque de défaut d'une contrepartie. Elle suppose implicitement que les actifs sont liquides et que les flux de paiement sont honorés.

Ces limites soulignent la nécessité d'adopter une approche intégrée de la gestion des risques, combinant des outils quantitatifs (comme la VaR) avec des analyses qualitatives, des scénarios de stress, et des indicateurs spécifiques à chaque type de risque.

5 Alternatives et compléments

Bien que la Value at Risk (VaR) soit un outil central dans la gestion du risque de marché, ses limites théoriques et pratiques justifient le recours à des **mesures complémentaires**. Ces outils permettent de renforcer la robustesse de l'analyse du risque, d'améliorer la prise de décision, et de répondre aux exigences croissantes en matière de régulation et de gouvernance. Une approche intégrée combine des outils quantitatifs comme la VaR avec des analyses qualitatives, des scénarios de stress, et des indicateurs spécifiques à chaque type de risque.

5.1 Expected Shortfall (ES)

L'Expected Shortfall (ES), également appelé Conditional Value at Risk (CVaR), est une mesure qui complète la VaR en s'intéressant à la taille moyenne des pertes audelà du seuil de la VaR. Elle est particulièrement utile pour les distributions asymétriques ou à queues épaisses, où les pertes extrêmes sont significatives.

Soit L la variable aléatoire représentant la perte, et α le niveau de confiance. L'Expected Shortfall est défini comme :

$$\mathrm{ES}_{\alpha}(L) = \mathbb{E}[L \mid L > \mathrm{VaR}_{\alpha}(L)]$$

Autrement dit, l'ES mesure la **perte moyenne conditionnelle** dans les pires $(1 - \alpha)$ % des cas.

Contrairement à la VaR, l'ES est une **mesure de risque cohérente** : elle respecte la sous-additivité, ce qui la rend plus adaptée à l'agrégation du risque. Elle est également plus informative, car elle prend en compte l'ampleur des pertes extrêmes, et non seulement leur probabilité.

Si la VaR à 99% d'un portefeuille est de 1 million d'euros, mais que les pertes au-delà de ce seuil atteignent en moyenne 2,5 millions d'euros, alors l'ES à 99% est de 2,5 millions. Cette information est cruciale pour les décideurs, car elle reflète mieux le risque réel en cas de choc extrême.

5.2 Stress testing

Le stress testing est une méthode d'analyse qui consiste à simuler des scénarios extrêmes mais plausibles afin d'évaluer la résilience d'un portefeuille ou d'une institution face à des chocs de marché. Contrairement à la VaR, qui repose sur des distributions statistiques, le stress testing est scénario-dépendant et permet d'intégrer des événements rares ou systémiques.

Exemples de scénarios :

- Un krach boursier de 30 % en une semaine.
- Une hausse soudaine des taux d'intérêt de 200 points de base.
- Une crise géopolitique entraînant une chute des devises émergentes.
- Une pandémie mondiale affectant simultanément plusieurs secteurs économiques.

Le stress testing permet d'identifier les vulnérabilités non capturées par la VaR, notamment les effets de contagion, les ruptures de liquidité, ou les corrélations dynamiques. Il est devenu un outil réglementaire incontournable, notamment dans les tests de résistance imposés par la BCE ou la Fed.

Toutefois le stress testing repose sur des hypothèses de scénario qui peuvent être arbitraires ou mal calibrées. Il nécessite une expertise qualitative et une bonne connaissance des mécanismes de transmission du risque.

5.3 Backtesting

Le backtesting est une procédure d'évaluation ex post qui consiste à comparer les pertes réelles observées avec les pertes estimées par la VaR. Il permet de vérifier la validité statistique du modèle de VaR utilisé.

On calcule la VaR sur une période donnée (par exemple, 250 jours), puis on observe combien de fois la perte réelle dépasse la VaR. Si le modèle est bien calibré, le nombre de dépassements doit être proche de la fréquence attendue. Par exemple, pour une VaR à 99%, on s'attend à environ 2 à 3 dépassements sur 250 jours.

Si une banque observe 10 dépassements sur 250 jours pour une VaR à 99 %, cela suggère que le modèle sous-estime le risque. Des ajustements doivent alors être apportés : recalibrage des paramètres, changement de méthode, ou intégration de nouveaux facteurs de risque.

Le backtesting est un **outil de contrôle interne essentiel**, souvent exigé par les régulateurs pour valider les modèles internes. Il permet également d'ajuster les paramètres du modèle et d'améliorer sa précision.

Cependant ,le backtesting est rétrospectif : il ne garantit pas la performance future du modèle. Il peut aussi être biaisé si les données utilisées sont incomplètes ou si les événements extrêmes sont rares.

6 Conclusion

La VaR (Value at Risk) est devenue un instrument clé dans la gestion du risque de marché, fournissant une mesure condensée, probabiliste et aisément transmissible de la perte maximale envisageable. Sa réussite est due à sa compétence pour convertir une incertitude complexe en une valeur distincte, rendant ainsi la décision, la régulation et la communication financière plus aisées.

Toutefois, l'examen détaillé de ses bases méthodologiques, de ses postulats et de ses contraintes montre que la VaR n'est pas une évaluation complète du risque. Elle présente des lacunes structurelles : manque de données sur les pertes extrêmes, incohérence mathématique, dépendance à des distributions hypothétiques, et insuffisance concernant certains types de risques tels que le risque de liquidité, le risque de crédit ou systémique. Ces contraintes prennent une importance accrue dans un contexte financier caractérisé par l'incertitude, la complexité et l'interconnexion grandissante des marchés.

C'est la raison pour laquelle il est essentiel d'utiliser la VaR avec prudence, dans le contexte d'une approche globale de la gestion des risques. L'Expected Shortfall (ES), les tests de résistance et le backtesting, qui sont des outils supplémentaires, contribuent à compenser ses lacunes et à améliorer l'évaluation du risque. Particulièrement, l'ES fournit une évaluation cohérente et plus détaillée des pertes extrêmes, tandis que les tests de stress facilitent l'appréciation de la résilience face à des scénarios de crise.

En plus de la technique, la gestion du risque s'appuie sur un mélange de modèles quantitatifs stricts, d'expertise qualitative et d'une gouvernance solide. La VaR, malgré ses imperfections, demeure un élément clé de cette structure, à condition d'être comprise, testée et enrichie. Elle représente le conflit constant entre la modélisation et la réalité, la simplification et la complexité, l'évaluation et le jugement.

Ainsi, la maîtrise de la VaR et de ses alternatives constitue une compétence essentielle pour tout professionnel de la finance, de l'assurance ou de la régulation, soucieux de construire des systèmes financiers plus sûrs, plus transparents et plus résilients.