ACTIVITE 3 : GRAPHES PONDERES

Exercice 1 : Introduction

Sur une carte autoroutière, on a lu que pour se rendre d’une ville D à une ville A, on peut passer par la ville B ou par la ville C. On se propose de déterminer, à l’aide d’un graphe, le trajet le plus court, ou le moins cher en péage pour aller de D à A.

1. Trajet le plus court

Voici les distances séparant deux villes par les autoroutes existantes :

- De D à C : 210 km
- De D à B : 420 km
- De C à A : 420 km
- De B à A : 200 km
- De C à B : 105 km.

a. Réaliser un graphe étiqueté donc les sommets sont les villes et les étiquettes les distances entre les villes reliées. On dit qu’il s’agit d’un graphe pondéré.

b. Déterminer le trajet le plus court pour aller de D à A.

2. Trajet le moins cher

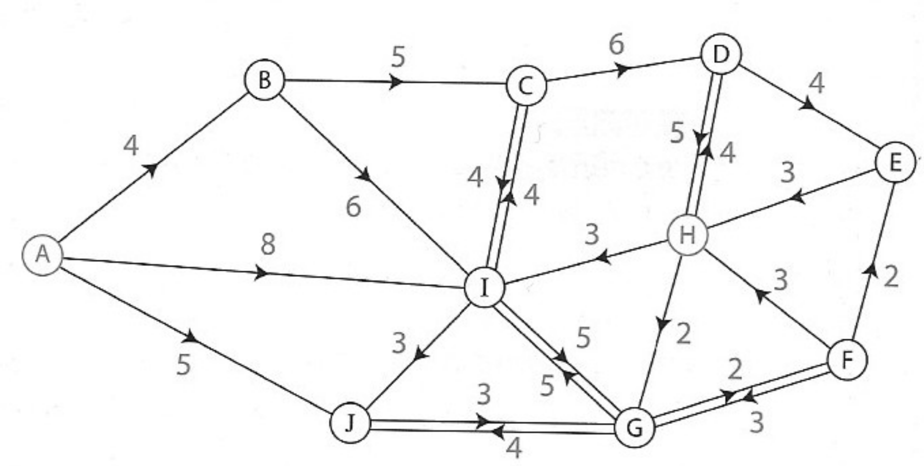
a. Réaliser le graphe pondéré de la situation précédente en remplaçant les distances par les prix des péages, qui sont les suivants :

- De D à C : 20 €
- De D à B : 45 €
- De C à A : 19 €
- De B à A : 40 €
- De C à B : 20 €

b. Quel est le trajet pour lequel la somme dépensée en péage est minimale ?

Exercice 2 : Découvrir l’algorithme de Dijkstra

Le graphe pondéré ci-dessous indique la durée du trajet en minutes selon les rues empruntées dans un quartier d’une ville. Lorsqu’une ville à double sens rejoint deux lieux, il se peut qu’elle soit plus empruntée dans un sens que dans l’autre, d’où des durées différentes dans chaque sens.



1. Poids d’une chaîne

Le ***poids d’une chaîne*** est la somme des durées inscrites sur les arcs qui la composent.

Quel est le poids de chacune des chaînes ci-dessous :

a. A – B – J – I – H ?   b. A – K – I – F – H ?

2. Algorithme de Dijkstra

Cet algorithme permet de déterminer le trajet de poids minimal, appelé plus courte chaîne, menant de A à H (par exemple).

Étape	Tâches à effectuer
1	• Placer tous les sommets du graphe dans la 1re ligne d’un tableau. • Sur la 2e ligne du tableau, écrire le coefficient 0 sous le sommet de départ et le coefficient ∞ sous les autres sommets.
2	• Sur la dernière ligne écrite, repérer le sommet X de coefficient minimal. • Commencer une nouvelle ligne et rayer toutes les cases vides sous X.
3	• Pour chaque sommet Y adjacent à X, calculer la somme P du coefficient de X et du poids de l’arête reliant Y à X. • Si P est strictement inférieur au coefficient de Y, inscrire P_X dans la case correspondante de la colonne Y. • Sinon, inscrire le coefficient de Y et compléter la ligne par des coefficients de la ligne précédente.
4	• S’il reste des sommets non sélectionnés, recommencer à l’étape 2. • Sinon, passer à l’étape 5.
5	• La longueur minimale est le nombre lu sur la dernière ligne du tableau.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en suivant les étapes de l’algorithme.

help me Yvan !

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
|	4_A	∞	∞	∞	∞	∞	∞	8_A	5_A

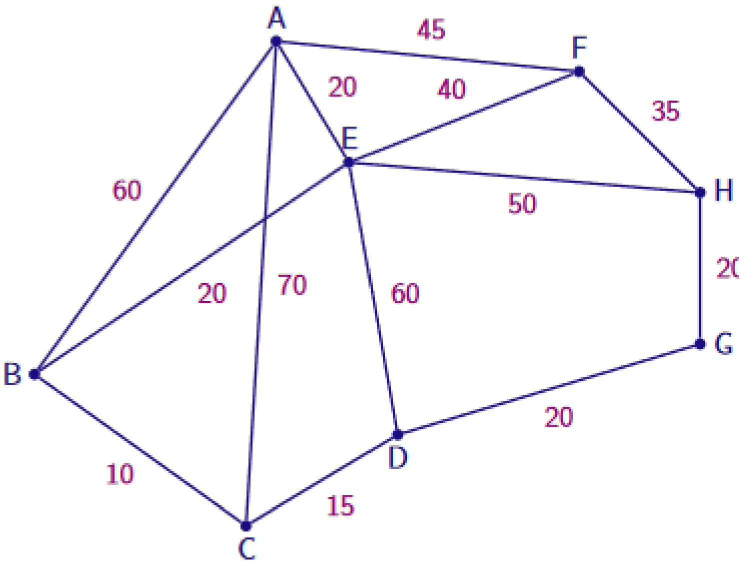
En déduire la durée minimale du trajet pour aller de A à H et préciser ce trajet.

Exercice 3 : courir oui, mais pas trop non plus

Chuck est un sportif adepte du semi-marathon. Il a décidé de courir un semi-marathon. Pour améliorer sa préparation, il décide d’enchaîner les courses pédestres de 10 km dans différentes villes.

Le graphe pondéré ci-dessous représente les villes A, B, C, D, E, F et H organisant des courses de 10 km, et la ville G est celle organisant le prochain semi-marathon auquel Jonathan est inscrit.

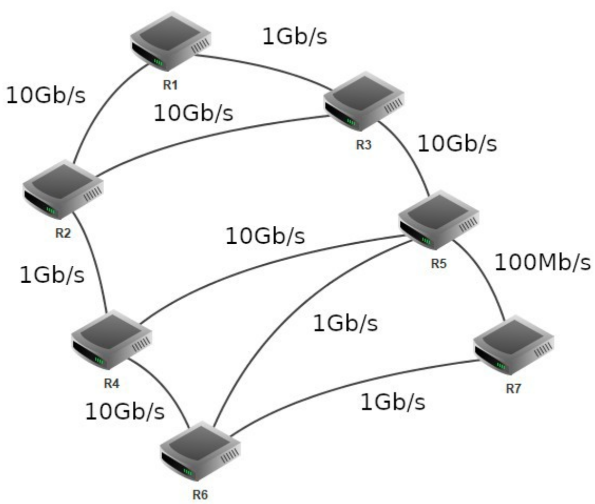
Le poids de chaque arête représente le temps, en minutes, nécessaire pour relier une ville à une autre grâce aux transports en commun.



Chuck vient de courir dans la ville A et souhaite se rendre dans la ville G pour repérer le parcours de son prochain semi-marathon. Déterminer le chemin permettant de relier le plus rapidement la ville A à la ville G, donner la durée de ce parcours en minutes, et les villes traversées.

Exercice 4 : application au protocole OSPF

On reprend la situation du chapitre 7 :



1. Créer un arbre pondéré où les étiquettes entre les sommets sont le coût de chaque liaison.

2. Déterminer à l’aide de l’algorithme de Dijkstra le chemin optimal de R1 à R 7.