Convergência de Operadores e o Teorema de Toeplitz

Alexandre do Amaral   João Vitor Parada Poletto
Professor: José Carlos Corrêa Eidam

Universidade Federal do Paraná

20 de novembro de 2019

Definições

Convergência de sequências de operadores

Seja X e Y espaços normados. Uma sequência de operadores (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$ é dita:

(1) **uniformemente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.

Definições

Convergência de sequências de operadores

Seja X e Y espaços normados. Uma sequência de operadores (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$ é dita:

(1) **uniformemente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.

(2) **fortemente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$.

Definições

Convergência de sequências de operadores

Seja X e Y espaços normados. Uma sequência de operadores (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$ é dita:

(1) **uniformemente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.

(2) **fortemente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$.

(3) **fracamente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$ e para todo $f \in Y'$.

Definições

Convergência de sequências de operadores

Seja X e Y espaços normados. Uma sequência de operadores (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$ é dita:

(1) **uniformemente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.

(2) **fortemente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$.

(3) **fracamente convergente** se existe um operador $T : X \longrightarrow Y$ tal que $|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0$ para todo $x \in X$ e para todo $f \in Y'$.

T é chamado o operador limite *uniforme, forte e fraco* de T_n, respectivamente.

Exemplos

No espaço l^2 nós consideramos a sequência (T_n), onde $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$ é definido por:

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n\,zeros}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \cdots);$$

com $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

Exemplos

No espaço l^2 nós consideramos a sequência (T_n), onde $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$ é definido por:

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n\,zeros}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \cdots);$$

com $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.Este operador é linear e limitado e é fortemente convergente para 0 mas não é uniformemente convergente.

Ainda no espaço l^2, uma outra sequência T_n de operadores $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$ é definida por:

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n \, zeros}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots);$$

com $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$.

Ainda no espaço l^2, uma outra sequência T_n de operadores $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$ é definida por:

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n\ zeros}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots);$$

com $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$. O operador T_n é linear e limitado e mostraremos que ele é fracamente convergente para 0 mas não fortemente. Para isso recorramos ao Teorema de Riesz.

Teorema

Teorema de Riesz (Funcionais no espaço de Hilbert)

Todo funcional linear f em um espaço de Hilbert pode ser representado em termos do produto interno, chamado:

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

onde z depende de f, é unicamente determinado pelo funcional e tem norma:

$$\|z\| = \|f\|$$

Exemplos

Qualquer funcional $f \in l^2$ pode ser escrito como

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta}_j$$

onde $z = (\eta_j) \in l^2$.

Exemplos

Qualquer funcional $f \in l^2$ pode ser escrito como

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta}_j$$

onde $z = (\eta_j) \in l^2$. Desta forma, chamando $j = n + k$

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{j-n} \overline{\eta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_{n+k}$$

Exemplos

Qualquer funcional $f \in l^2$ pode ser escrito como

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta}_j$$

onde $z = (\eta_j) \in l^2$. Desta forma, chamando $j = n + k$

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{j-n} \overline{\eta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_{n+k}$$

Usando a desigualdade de Holder para somas, temos que:

$$|f(T_n x)| = |\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \overline{\eta}_{n+k}| \leq$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} |\eta_m|^2\right)^{1/2}$$

Exemplos

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$|f(T_n x)| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} |\xi_m|^2\right)$$

Como o lado direito da desigualdade vai a 0, temos que $f(T_n x) \longrightarrow 0$. Consequentemente, (T_n) é fracamamente operador convergente para 0.

Exemplos

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$|f(T_n x)| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} |\xi_m|^2\right)$$

Como o lado direito da desigualdade vai a 0, temos que $f(T_n x) \longrightarrow 0$.
Consequentemente, (T_n) é fracamamente operador convergente para 0.
Porém $T_n x$ não é fortemente operador convergente, basta considerarmos a sequência $x = (1, 0, 0, \cdots)$

Convergência de funcionais

E sobre convergência de funcionais?

Convergência de funcionais

E sobre convergência de funcionais?
Como funcionais são operadores lineares, as definições citadas anterioremente se aplicam. Além disso, para uma sequência de funcionais, convergência forte e fraca são equivalentes, basta relembrar o seguinte teorema:

Teorema

Teorema (convergência forte e fraca)

Seja (x_n) uma sequência em um espaço normado X. Então

a) Convergência forte implica convergência fraca com o mesmo limite.
b) A recíproca de *a* não é sempre verdadeira.
c) **Se dim $X < \infty$, convergência fraca implica convergência forte.**

Convergência de funcionais

Para uma sequência de funcionais f_n temos que $f_n x \in F$ para todo $x \in X$.

Convergência de funcionais

Para uma sequência de funcionais f_n temos que $f_n x \in F$ para todo $x \in X$.
Então, assumindo que exista um funcional f para o qual a sequência de funcionais converge fracamente significa que para cada $x \in X$ e $g \in F'$, temos que: $\|f_n(x) - f(x)\| \longrightarrow 0 \iff |g(f_n x) - g(fx)|$ pelo item c do teorema anterior.

Convergência de funcionais

Para uma sequência de funcionais f_n temos que $f_n x \in F$ para todo $x \in X$.
Então, assumindo que exista um funcional f para o qual a sequência de funcionais converge fracamente significa que para cada $x \in X$ e $g \in F'$, temos que: $\|f_n(x) - f(x)\| \longrightarrow 0 \iff |g(f_n x) - g(fx)|$ pelo item c do teorema anterior.
Por esse motivo, há as seguintes definições:

Convergência de funcionais

Definção (forte e fraca* convergência de uma sequência de funcionais)

Seja f_n uma sequência de funcionais lineares limitados no espaço normado X. Então:

(a) Convergência forte de f_n significa que existe um $f \in X'$ tal que $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. Escrevemos:

$$f_n \longrightarrow f.$$

Convergência de funcionais

Definção (forte e fraca* convergência de uma sequência de funcionais)

Seja f_n uma sequência de funcionais lineares limitados no espaço normado X. Então:

(a) Convergência forte de f_n significa que existe um $f \in X'$ tal que $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. Escrevemos:

$$f_n \longrightarrow f.$$

(b) Convergência fraca* de f_n significa que existe um $f \in X'$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$. Escrevemos:

$$f_n \xrightarrow{w^*} f$$

Convergência de funcionais

Definção (forte e fraca* convergência de uma sequência de funcionais)

Seja f_n uma sequência de funcionais lineares limitados no espaço normado X. Então:

(a) Convergência forte de f_n significa que existe um $f \in X'$ tal que $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. Escrevemos:

$$f_n \longrightarrow f.$$

(b) Convergência fraca* de f_n significa que existe um $f \in X'$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ para todo $x \in X$. Escrevemos:

$$f_n \xrightarrow{w^*} f$$

f em *(a)* e *(b)* é chamado limite forte e limite fraco* de f_n, respectivamente.

Convergência de operadores

Voltando para convergência de operadores $T_n \in B(X, Y)$ o que pode ser dito do operador limite?

Convergência de operadores

Voltando para convergência de operadores $T_n \in B(X, Y)$ o que pode ser dito do operador limite?
Em primeiro lugar, convergência uniforme implica que $T : X \longrightarrow Y$ nas definições anteriores é limitado.

Convergência de operadores

Voltando para convergência de operadores $T_n \in B(X, Y)$ o que pode ser dito do operador limite?
Em primeiro lugar, convergência uniforme implica que $T : X \longrightarrow Y$ nas definições anteriores é limitado.
Em segundo lugar, se a convergência é forte ou fraca o operador ainda é linear, mas não necessariamente limitado.

Exemplo

O espaço X das sequências $x = (\xi_j)$ no l^2 com somente finitos termos não nulos, na métrica l^2 não é completo.

Exemplo

O espaço X das sequências $x = (\xi_j)$ no l^2 com somente finitos termos não nulos, na métrica l^2 não é completo.
É possível construir uma sequência de operadores nesse espaço que converge fortemente para um operador ilimitado.

Exemplo

O espaço X das sequências $x = (\xi_j)$ no l^2 com somente finitos termos não nulos, na métrica l^2 não é completo.
É possível construir uma sequência de operadores nesse espaço que converge fortemente para um operador ilimitado.
Tal sequência é:

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \cdots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots).$$

Exemplo

O espaço X das sequências $x = (\xi_j)$ no l^2 com somente finitos termos não nulos, na métrica l^2 não é completo.
É possível construir uma sequência de operadores nesse espaço que converge fortemente para um operador ilimitado.
Tal sequência é:

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \cdots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots).$$

Porém, se X é completo, convergência forte implica que o limite dos operadores é um operador limitado.

Lema

Lema (Convergência forte de operadores

Seja $T_n \in B(X, Y)$ uma sequência de operadores, onde X é um espaço de Banach e Y é um espaço normado. Se T_n é fortemente convergente com limite T, então $T \in B(X, Y)$.

Lema

Lema (Convergência forte de operadores

Seja $T_n \in B(X, Y)$ uma sequência de operadores, onde X é um espaço de Banach e Y é um espaço normado. Se T_n é fortemente convergente com limite T, então $T \in B(X, Y)$.
Demonstração: A linearidade de T segue direto da linearidade de T_n.

Lema

Lema (Convergência forte de operadores

Seja $T_n \in B(X, Y)$ uma sequência de operadores, onde X é um espaço de Banach e Y é um espaço normado. Se T_n é fortemente convergente com limite T, então $T \in B(X, Y)$.

Demonstração: A linearidade de T segue direto da linearidade de T_n.

Como $T_n x \longrightarrow Tx$ para cada $x \in X$, segue que a sequência $(T_n x)$ é limitada para cada x, visto que toda sequência convergente é limitada.

Lema

Lema (Convergência forte de operadores)

Como X é completo, $(\|T_n\|)$ é limitado pelo teorema da limitação uniforme. Digamos então que $\|T_n\| \leq c$ para todo n. Então, $\|T_n x\| \leq \|Tn\|\|x\| \leq c\|x\|$. Daí segue o resultado anunciado. ■

Teorema

Convergência forte

Uma sequência (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$, onde X e Y são espaços de Banach, é fortemente convergente se, e somente se, são satisfeitos:

Teorema

Convergência forte

Uma sequência (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$, onde X e Y são espaços de Banach, é fortemente convergente se, e somente se, são satisfeitos:

(A) A sequência $(\|T_n\|)$ é limitada.

Teorema

Convergência forte

Uma sequência (T_n) de operadores $T_n \in B(X, Y)$, onde X e Y são espaços de Banach, é fortemente convergente se, e somente se, são satisfeitos:

(A) A sequência $(\|T_n\|)$ é limitada.

(B) A sequência $(T_n x)$ é Cauchy em Y para todo x em um conjunto total M de X.

Teorema

Demonstração: Se $T_n x \longrightarrow Tx$ para cada $x \in X$, então (A) segue do lema anterior e (B) é verificado facilmente.

Teorema

Demonstração: Se $T_n x \longrightarrow Tx$ para cada $x \in X$, então (A) segue do lema anterior e (B) é verificado facilmente.

Reciprocamente, assumindo que (A) e (B) são satisfeitos existe c tal que $\|T_n\| \leq c$ para todo n.

Demonstração: Se $T_n x \longrightarrow Tx$ para cada $x \in X$, então (A) segue do lema anterior e (B) é verificado facilmente.
Reciprocamente, assumindo que (A) e (B) são satisfeitos existe c tal que $\|T_n\| \leq c$ para todo n. Seja agora $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Como M é total em X segue que span M é denso em X. Então existe $y \in spanM$ tal que

$$\|x - y\| < \frac{\epsilon}{3c}.$$

Teorema

Como $y \in spanM$, a sequência $(T_n y)$ é Cauchy em (B)
Consequentemente, existe um N tal que

$$\|T_n y - T_m y\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

para $m, n > N$.

Teorema

Como $y \in spanM$, a sequência $(T_n y)$ é Cauchy em (B)
Consequentemente, existe um N tal que

$$\|T_n y - T_m y\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

para $m, n > N$.
Utilizando as desigualdades triangulares temos o resultado provado. ■

Aplicações

Considerando uma sequência de funconais (f_n) no teorema anterior obtemos aplicações interessantes, como veremos a seguir.

Métodos de Somabilidade

Com intuito de generalizar a noção de convergência de sequências podemos utilizar métodos de somabilidade, que associam uma sequência com outra possivelmente convergente.

Métodos matriciais

Um método de somabilidade é nomeado matricial se é possível escreve-lo na forma:

$$y = Ax$$

Onde y e x são vetores coluna infinitos e A é uma matriz infinita.

Método de Cesàro

Definição

O método de Cesàro é a sequência de médias até o n-ésimo termo

Representação em somatório

Dada uma sequência $x = (\xi_n)_n$ temos que sua sequência de Cesáro $y = (\eta_n)_n$ é tal que

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k$$

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se} \quad k \leq n \\ 0 & \text{se} \quad k > n \end{cases}$$

Representação matricial do método de Cesàro

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \\ & \vdots & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

Regularidade e notação

Um método matricial pode ser chamado de A-método, se todas as linhas da matriz infinita e $y = (\eta_n)_n$ convergem no sentido usual. O limite é denominado A-limite de x e x é dito A-somável, o conjunto de todas as sequências somáveis é denominado A-domínio.

Regularidade

Um método matricial é dito regular se toda sequência convergente pertence ao seu domínio e seu A-limite coincide com o limite usual da sequência.

Teorema de Toeplitz

Um método matricial é regular se e somente se,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_{nk} = 0 \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1 \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \gamma \tag{3}$$

Prova

Regularidade $\implies$ Equação 1

Dada a sequência x_k com todo termo igual a 0, exceto o termo k que é igual a 1, temos que $\eta_n = \alpha_{nk}$

Regularidade $\implies$ Equação 2

Dada a sequência x com todo termo igual a 1 temos que

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}$$

Prova

Regularidade $\Longrightarrow$ Equação 3

Dado o espaço metrico c com a norma ℓ^∞
definimos funcionais lineares

$$f_{nm}(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{nk}\xi_k \quad m, n = 1{,}2, \ldots$$

então temos que o método define funcionais lineares

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k \quad n = 1{,}2, \ldots$$

$$f_{nm}(x) \to f_n(x) \quad \text{ou seja} \quad f_{nm} \overset{w^*}{\to} f_n$$

Prova

Regularidade $\Longrightarrow$ Equação 3

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} \frac{\alpha_{nk}}{|\alpha_{nk}|} & \text{se} \quad k \leq m \quad \text{e} \quad \alpha_{nk} \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad k > m \quad \text{ou} \quad \alpha_{nk} = 0 \end{cases}$$

então temos

$$\sum_{k=1}^{m} |\alpha_{nk}| = f_{nm}(x_{nm}) \leq \|f_{nm}\|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \|f_n\| \leq \gamma$$

Prova

Equações 1, 2 e 3 $\implies$ Regularidade

Definimos o funcional linear

$$f(x) = \xi = \lim_{k\to\infty} \xi_k$$

que é limitado pois

$$|f(x)| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k| = \|x\|$$

Dado o conjunto M das sequências quase constantes, que é denso em c, e $x \in M$ com todo termo igual apos j

Prova

Equações 1, 2 e 3 $\Longrightarrow$ Regularidade

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{nk}\xi_k + \xi \sum_{k=j}^{\infty} \alpha_{nk}$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{nk}(\xi_k - \xi) + \xi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}$$

Pelas Equações 1 e 2

$$\eta_n = f_n(x) \to 0 + \xi * 1 = \xi = f(x)$$

Prova

Equações 1, 2 e 3 $\implies$ Regularidade

E pela Equação 3 temos

$$|f_n(x)| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \gamma \|x\|$$

então f_n é limitado, e como $f_n(x) \to f(x), x \in M$ logo $f_n \overset{w^*}{\to} f$.
Portanto se $f(x)$ existe $\eta_n \to \xi$ e portanto é regular.

Exemplos

Inverso do método de Cesàro

Podemos encontrar um inverso para o método de Cesàro notando-se que

$$\xi_1 = \eta_1$$
$$\xi_2 = 2\eta_2 - \eta_1$$
$$\xi_3 = 3\eta_3 - 2\eta_2$$

$$\xi_n = n\eta_n - (n-1)\eta_{n-1}$$

Exemplos

Matriz do inverso do método de Cesàro

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 & \\ & \vdots & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

Exemplos

Método C_k de Cesàro

Primeiramente definimos $\sigma_n^{(0)} = \xi_n$, então é definido

$$\sigma_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{(k-1)} \quad k \geq 1,\, n = 0, 1, 2, \; \ldots.$$

Com isso, obtemos o método C_k,

$$\eta_n^{(k)} = \frac{\sigma_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}$$

$$\sigma_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-1-\nu}{k-1} \xi_\nu$$

Exemplos

Com o C_1-método encontraremos o C_1 limite para as sequências abaixo:

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$$

Exemplos

Com o C_1-método encontraremos o C_1 limite para as sequências abaixo:

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$$

$$(1, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{8}, -\frac{3}{16}, \cdots).$$

Exemplos

Método da Somabilidade de Holder H_P é definido a seguir. H_1 é idêntico a C_1. O método H_2 consiste de duas sucessivas aplicações de H_1; H_3 consiste de três aplicações seguidas de H_3, e assim sucessivamtne. Vejamos os métodos H_1 e H_2 para a sequência:

$$(1, -3, 5, -7, 9, -11, \cdots).$$

Séries Uma série infinita é dita *A*-somável se a sequência de suas somas parciais é *A*-somável, e o *A*-limite da sequência é chamado *A*-soma da série.

Séries Uma série infinita é dita A-somável se a sequência de suas somas parciais é A-somável, e o A-limite da sequência é chamado A-soma da série. Vejamos que a seríe $1 + z + z^2 + \cdots$ é C_1-somável para $|z| \leq 1$ e sua soma é $\frac{1}{1-z}$.