

# Convergência de Operadores e o Teorema de Toeplitz

Alexandre do Amaral   João Vitor Parada Poletto  
Professor: José Carlos Corrêa Eidam

Universidade Federal do Paraná

20 de novembro de 2019



## Convergência de sequências de operadores

Seja  $X$  e  $Y$  espaços normados. Uma sequência de operadores  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$  é dita:

- (1) **uniformemente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ .

## Convergência de sequências de operadores

Seja  $X$  e  $Y$  espaços normados. Uma sequência de operadores  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$  é dita:

- (1) **uniformemente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ .
- (2) **fortemente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$  para todo  $x \in X$ .

## Convergência de sequências de operadores

Seja  $X$  e  $Y$  espaços normados. Uma sequência de operadores  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$  é dita:

- (1) **uniformemente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ .
- (2) **fortemente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$  para todo  $x \in X$ .
- (3) **fracamente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0$  para todo  $x \in X$  e para todo  $f \in Y'$ .

## Convergência de seqüências de operadores

Seja  $X$  e  $Y$  espaços normados. Uma seqüência de operadores  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$  é dita:

- (1) **uniformemente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ .
- (2) **fortemente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $\|T_n x - Tx\| \longrightarrow 0$  para todo  $x \in X$ .
- (3) **fracamente convergente** se existe um operador  $T : X \longrightarrow Y$  tal que  $|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0$  para todo  $x \in X$  e para todo  $f \in Y'$ .

$T$  é chamado o operador limite *uniforme, forte e fraco* de  $T_n$ , respectivamente.

# Exemplos

No espaço  $l^2$  nós consideramos a sequência  $(T_n)$ , onde  $T_n : l^2 \rightarrow l^2$  é definido por:

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ zeros}}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \dots);$$

com  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ .

# Exemplos

No espaço  $l^2$  nós consideramos a sequência  $(T_n)$ , onde  $T_n : l^2 \rightarrow l^2$  é definido por:

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ zeros}}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}, \dots);$$

com  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ . Este operador é linear e limitado e é fortemente convergente para 0 mas não é uniformemente convergente.

# Exemplos

Ainda no espaço  $l^2$ , uma outra sequência  $T_n$  de operadores  $T_n : l^2 \rightarrow l^2$  é definida por:

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ zeros}}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots);$$

com  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ .



Ainda no espaço  $l^2$ , uma outra sequência  $T_n$  de operadores  $T_n : l^2 \rightarrow l^2$  é definida por:

$$T_n x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n \text{ zeros}}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots);$$

com  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l^2$ . O operador  $T_n$  é linear e limitado e mostraremos que ele é fracamente convergente para 0 mas não fortemente. Para isso recorramos ao Teorema de Riesz.

## Teorema de Riesz (Funcionais no espaço de Hilbert)

Todo funcional linear  $f$  em um espaço de Hilbert pode ser representado em termos do produto interno, chamado:

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

onde  $z$  depende de  $f$ , é unicamente determinado pelo funcional e tem norma:

$$\|z\| = \|f\|$$

# Exemplos

Qualquer funcional  $f \in l^2$  pode ser escrito como

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j$$

onde  $z = (\eta_j) \in l^2$ .

# Exemplos

Qualquer funcional  $f \in l^2$  pode ser escrito como

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j$$

onde  $z = (\eta_j) \in l^2$ . Desta forma, chamando  $j = n + k$

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{j-n} \bar{\eta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_{n+k}$$

# Exemplos

Qualquer funcional  $f \in l^2$  pode ser escrito como

$$f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j$$

onde  $z = (\eta_j) \in l^2$ . Desta forma, chamando  $j = n + k$

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{j-n} \bar{\eta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_{n+k}$$

Usando a desigualdade de Holder para somas, temos que:

$$\begin{aligned} |f(T_n x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_{n+k} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \bar{\eta}_{n+k}| \leq \\ &\left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} |\eta_m|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$|f(T_n x)|^2 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right) \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} |\xi_m|^2 \right)$$

Como o lado direito da desigualdade vai a 0, temos que  $|f(T_n x)| \rightarrow 0$ .  
Consequentemente,  $(T_n)$  é fracamente operador convergente para 0.

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$|f(T_n x)| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right) \left( \sum_{m=n+1}^{\infty} |\xi_m|^2 \right)$$

Como o lado direito da desigualdade vai a 0, temos que  $f(T_n x) \rightarrow 0$ . Consequentemente,  $(T_n)$  é fracamente operador convergente para 0.

Porém  $T_n x$  não é fortemente operador convergente, basta considerarmos a sequência  $x = (1, 0, 0, \dots)$

# Convergência de funcionais

E sobre convergência de funcionais?



E sobre convergência de funcionais?

Como funcionais são operadores lineares, as definições citadas anteriormente se aplicam. Além disso, para uma sequência de funcionais, convergência forte e fraca são equivalentes, basta relembrar o seguinte teorema:

## Teorema (convergência forte e fraca)

Seja  $(x_n)$  uma sequência em um espaço normado de dimensão  $X$ . Então

- a) Convergência forte implica convergência fraca com o mesmo limite.
- b) A recíproca de a não é sempre verdadeira.
- c) **Se  $\dim X < \infty$ , convergência fraca implica convergência forte.**

# Convergência de funcionais

Para uma sequência de funcionais  $f_n$  temos que  $f_n x \in F$  para todo  $x \in X$ .

# Convergência de funcionais

Para uma sequência de funcionais  $f_n$  temos que  $f_n x \in F$  para todo  $x \in X$ .

Então, assumindo que exista um funcional  $f$  para o qual a sequência de funcionais converge fracamente significa que para cada  $x \in X$  e  $g \in F'$ , temos que:  $\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \iff |g(f_n x) - g(fx)|$  pelo item c do teorema anterior.

# Convergência de funcionais

Para uma sequência de funcionais  $f_n$  temos que  $f_n x \in F$  para todo  $x \in X$ .

Então, assumindo que exista um funcional  $f$  para o qual a sequência de funcionais converge fracamente significa que para cada  $x \in X$  e  $g \in F'$ , temos que:  $\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \iff |g(f_n x) - g(fx)|$  pelo item c do teorema anterior.

Por esse motivo, há as seguintes definições:

# Convergência de funcionais

Definição (forte e fraca\* convergência de uma sequência de funcionais)

Seja  $f_n$  uma sequência de funcionais lineares limitados no espaço normado  $X$ . Então:

- (a) Convergência forte de  $f_n$  significa que existe um  $f \in X'$  tal que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ . Escrevemos:

$$f_n \rightarrow f.$$

# Convergência de funcionais

Definição (forte e fraca\* convergência de uma sequência de funcionais)

Seja  $f_n$  uma sequência de funcionais lineares limitados no espaço normado  $X$ . Então:

- (a) Convergência forte de  $f_n$  significa que existe um  $f \in X'$  tal que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ . Escrevemos:

$$f_n \rightarrow f.$$

- (b) Convergência fraca\* de  $f_n$  significa que existe um  $f \in X'$  tal que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$ . Escrevemos:

$$f_n \xrightarrow{w^*} f$$

# Convergência de funcionais

Definição (forte e fraca\* convergência de uma sequência de funcionais)

Seja  $f_n$  uma sequência de funcionais lineares limitados no espaço normado  $X$ . Então:

- (a) Convergência forte de  $f_n$  significa que existe um  $f \in X'$  tal que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ . Escrevemos:

$$f_n \rightarrow f.$$

- (b) Convergência fraca\* de  $f_n$  significa que existe um  $f \in X'$  tal que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$ . Escrevemos:

$$f_n \xrightarrow{w^*} f$$

$f$  em (a) e (b) é chamado limite forte e limite fraco\* de  $f_n$ , respectivamente.



# Convergência de operadores

Voltando para convergência de operadores  $T_n \in B(X, Y)$  o que pode ser dito do operador limite?

# Convergência de operadores

Voltando para convergência de operadores  $T_n \in B(X, Y)$  o que pode ser dito do operador limite?

Em primeiro lugar, convergência uniforme implica que  $T : X \longrightarrow Y$  nas definições anteriores é limitado.

# Convergência de operadores

Voltando para convergência de operadores  $T_n \in B(X, Y)$  o que pode ser dito do operador limite?

Em primeiro lugar, convergência uniforme implica que  $T : X \longrightarrow Y$  nas definições anteriores é limitado.

Em segundo lugar, se a convergência é forte ou fraca o operador ainda é linear, mas não necessariamente limitado.

## Exemplo

O espaço  $X$  das sequências  $x = (\xi_j)$  no  $l^2$  com somente finitos termos não nulos, na métrica do  $l^2$  não é completo.

## Exemplo

O espaço  $X$  das sequências  $x = (\xi_j)$  no  $l^2$  com somente finitos termos não nulos, na métrica do  $l^2$  não é completo.

É possível construir uma sequência de operadores nesse espaço que converge fortemente para um operador ilimitado.

# Exemplo

O espaço  $X$  das sequências  $x = (\xi_j)$  no  $l^2$  com somente finitos termos não nulos, na métrica do  $l^2$  não é completo.

É possível construir uma sequência de operadores nesse espaço que converge fortemente para um operador ilimitado.

Tal sequência é:

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \dots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots).$$

# Exemplo

O espaço  $X$  das sequências  $x = (\xi_j)$  no  $l^2$  com somente finitos termos não nulos, na métrica do  $l^2$  não é completo.

É possível construir uma sequência de operadores nesse espaço que converge fortemente para um operador ilimitado.

Tal sequência é:

$$T_n x = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \dots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots).$$

Porém, se  $X$  é completo, convergência operador forte implica que o limite dos operadores é um operador limitado.

## Lema (Convergência forte de operadores)

Seja  $T_n \in B(X, Y)$  uma sequência de operadores, onde  $X$  é um espaço de Banach e  $Y$  é um espaço normado. Se  $T_n$  é fortemente operador convergente com limite  $T$ , então  $T \in B(X, Y)$ .



## Lema (Convergência forte de operadores)

Seja  $T_n \in B(X, Y)$  uma sequência de operadores, onde  $X$  é um espaço de Banach e  $Y$  é um espaço normado. Se  $T_n$  é fortemente operador convergente com limite  $T$ , então  $T \in B(X, Y)$ .

**Demonstração:** A linearidade de  $T$  segue direto da linearidade de  $T_n$ .

## Lema (Convergência forte de operadores)

Seja  $T_n \in B(X, Y)$  uma sequência de operadores, onde  $X$  é um espaço de Banach e  $Y$  é um espaço normado. Se  $T_n$  é fortemente operador convergente com limite  $T$ , então  $T \in B(X, Y)$ .

**Demonstração:** A linearidade de  $T$  segue direto da linearidade de  $T_n$ .

Como  $T_n x \rightarrow Tx$  para cada  $x \in X$ , segue que a sequência  $(T_n x)$  é limitada para cada  $x$ , visto que toda sequência convergente é limitada.

## Lema (Convergência forte de operadores)

Como  $X$  é completo,  $(\|T_n\|)$  é limitado pelo teorema da limitação uniforme. Digamos então que  $\|T_n\| \leq c$  para todo  $n$ . Então,  $\|T_n x\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq c \|x\|$ . Daí segue o resultado anunciado. ■

## Convergência forte

Uma sequência  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach, é fortemente convergente se, e somente se, são satisfeitos:

## Convergência forte

Uma sequência  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach, é fortemente convergente se, e somente se, são satisfeitos:

(A) A sequência  $(\|T_n\|)$  é limitada.

## Convergência forte

Uma sequência  $(T_n)$  de operadores  $T_n \in B(X, Y)$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach, é fortemente convergente se, e somente se, são satisfeitos:

- (A) A sequência  $(\|T_n\|)$  é limitada.
- (B) A sequência  $(T_n x)$  é Cauchy em  $Y$  para todo  $x$  em um conjunto maximal  $M$  de  $X$ .

**Demonstração:** Se  $T_n x \longrightarrow Tx$  para cada  $x \in X$ , então (A) segue do lema anterior e (B) é verificado facilmente.

**Demonstração:** Se  $T_n x \rightarrow Tx$  para cada  $x \in X$ , então (A) segue do lema anterior e (B) é verificado facilmente. Reciprocamente, assumindo que (A) e (B) são satisfeitos existe  $c$  tal que  $\|T_n\| \leq c$  para todo  $n$ .



**Demonstração:** Se  $T_n x \rightarrow Tx$  para cada  $x \in X$ , então (A) segue do lema anterior e (B) é verificado facilmente.

Reciprocamente, assumindo que (A) e (B) são satisfeitos existe  $c$  tal que  $\|T_n\| \leq c$  para todo  $n$ . Seja agora  $x \in X$  e  $\epsilon > 0$ . Como  $M$  é maximal em  $X$  segue que  $\text{span } M$  é denso em  $X$ . Então existe  $y \in \text{span } M$  tal que

$$\|x - y\| < \frac{\epsilon}{3c}.$$

Como  $y \in \text{span}M$ , a sequência  $(T_n y)$  é Cauchy em  $(B)$   
Consequentemente, existe um  $N$  tal que

$$\|T_n y - T_m y\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

para  $m, n > N$ .

Como  $y \in \text{span}M$ , a sequência  $(T_n y)$  é Cauchy em  $(B)$   
Consequentemente, existe um  $N$  tal que

$$\|T_n y - T_m y\| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

para  $m, n > N$ .

Utilizando as desigualdades triangulares temos o resultado provado. ■

Considerando uma sequência de funconais  $(f_n)$  no teorema anterior obtemos aplicações interessantes, como veremos a seguir.

# Métodos de Somabilidade

Com intuito de generalizar a noção de convergência de sequências podemos utilizar métodos de somabilidade, que associam uma sequência com outra possivelmente convergente.

## Métodos matriciais

Um método de somabilidade é nomeado matricial se é possível escreve-lo na forma:

$$y = Ax$$

Onde  $y$  e  $x$  são vetores coluna infinitos e  $A$  é uma matriz infinita.

# Método de Cesàro

## Definição

O método de Cesàro é a sequência de médias até o  $n$ -ésimo termo

## Representação em somatório

Dada uma sequência  $x = (\xi_n)_n$  temos que sua sequência de Cesàro  $y = (\eta_n)_n$  é tal que

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k$$

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

# Representação matricial do método de Cesàro

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \end{bmatrix}$$

Um método matricial pode ser chamado de A-método, se todas as linhas da matriz infinita e  $y = (\eta_n)_n$  convergem no sentido usual. O limite é denominado A-limite de  $x$  e  $x$  é dito A-somável, o conjunto de todas as sequências somáveis é denominado A-domínio.

## Regularidade

Um método matricial é dito regular se toda sequência convergente pertence ao seu domínio e seu A-limite coincide com o limite usual da sequência.



Um método matricial é regular se e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{nk} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \gamma \quad (3)$$

## Regularidade $\implies$ Equação 1

Dada a sequência  $x_k$  com todo termo igual a 0, exceto o termo  $k$  que é igual a 1, temos que  $\eta_n = \alpha_{nk}$

## Regularidade $\implies$ Equação 2

Dada a sequência  $x$  com todo termo igual a 1 temos que

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}$$

## Regularidade $\implies$ Equação 3

Dado o espaço métrico  $c$  com a norma  $\ell^\infty$   
definimos funcionais lineares

$$f_{nm}(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{nk} \xi_k \quad m, n = 1, 2, \dots$$

então temos que o método define funcionais lineares

$$\eta_n = f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk} \xi_k \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f_{nm}(x) \rightarrow f_n(x) \quad \text{ou seja} \quad f_{nm} \xrightarrow{w^*} f_n$$

## Regularidade $\implies$ Equação 3

$$\xi_k^{(n,m)} = \begin{cases} \frac{\alpha_{nk}}{|\alpha_{nk}|} & \text{se } k \leq m \text{ e } \alpha_{nk} \neq 0 \\ 0 & \text{se } k > m \text{ ou } \alpha_{nk} = 0 \end{cases}$$

então temos

$$\sum_{k=1}^m |\alpha_{nk}| = f_{nm}(x_{nm}) \leq \|f_{nm}\|$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \|f_n\| \leq \gamma$$

## Equações 1, 2 e 3 $\implies$ Regularidade

Definimos o funcional linear

$$f(x) = \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k$$

que é limitado pois

$$|f(x)| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k| = \|x\|$$

Dado o conjunto  $M$  das sequências quase constantes, que é denso em  $c$ , e  $x \in M$  com todo termo igual após  $j$

Equações 1, 2 e 3  $\implies$  Regularidade

$$\begin{aligned}\eta_n = f_n(x) &= \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{nk} \xi_k + \xi \sum_{k=j}^{\infty} \alpha_{nk} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{nk} (\xi_k - \xi) + \xi \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{nk}\end{aligned}$$

Pelas Equações 1 e 2

$$\eta_n = f_n(x) \rightarrow 0 + \xi * 1 = \xi = f(x)$$

Equações 1, 2 e 3  $\implies$  Regularidade

E pela Equação 3 temos

$$|f_n(x)| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{nk}| \leq \gamma \|x\|$$

então  $f_n$  é limitado, e como  $f_n(x) \rightarrow f(x), x \in M$  logo  $f_n \xrightarrow{w^*} f$ .  
Portanto se  $f(x)$  existe  $\eta_n \rightarrow \xi$  e portanto é regular.

## Inverso do método de Cesàro

Podemos encontrar um inverso para o método de Cesàro notando-se que

$$\xi_1 = \eta_1$$

$$\xi_2 = 2\eta_2 - \eta_1$$

$$\xi_3 = 3\eta_3 - 2\eta_2$$

$$\xi_n = n\eta_n - (n-1)\eta_{n-1}$$



# Exemplos

Matriz do inverso do método de Cesàro

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 & \\ & \vdots & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

## Método $C_k$ de Cesàro

Primeiramente definimos  $\sigma_n^{(0)} = \xi_n$ , então é definido

$$\sigma_n^{(k)} = \sum_{k=1}^n \sigma_k^{(k-1)} \quad k \geq 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

Com isso, obtemos o método  $C_k$ ,

$$\eta_n^{(k)} = \frac{\sigma_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}$$
$$\sigma_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^n \binom{n+k-1-\nu}{k-1} \xi_\nu$$