1. Voir 1.4.

1) Soit $U = \left]-\infty, 0\right[$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. f est-elle monotone ?

f est strictement décroissante sur U si : $\forall\, x, y \in U\,,\ \ x < y \Rightarrow f(x) > f(\,y)$

Avec $f(x) = 1/x$: $\forall\, x, y \in U,\ \ x < y \Rightarrow 1/x > 1/y \Rightarrow f(x) > f(\,y)$

Donc monotone décroissante

2) Et sur $U = \left]0, +\infty, \right[$?

idem

3) Et sur $U = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty, \right[$?

idem

2. Voir 1.5.

1) Pour deux fonctions paires que peut-on dire sur la parité de la somme ? du produit ? et de la composée ?

Soit f et g deux fonctions paires. On a $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = g(x)$

- parité de la somme : $f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$: paire
- parité du produit : $f(-x) \times g(-x) = f(x) \times g(x)$: paire
- parité de la composée : $f \circ g(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(g(x)\big) = f \circ g(x)$: paire

2) Et pour deux fonctions impaires ?

Soit f et g deux fonctions impaires. On a $f(-x) = -f(x)$ et $g(-x) = -g(x)$

- parité de la somme : $f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x)$: impaire
- parité du produit : $f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times -g(x) = f(x) \times g(x)$: paire
- parité de la composée : $f \circ g(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = -f\big(g(x)\big) = -f \circ g(x)$: impaire

3) Et si l'une est paire et l'autre impaire ?

Soit f paire et g impaires. On a $f(-x) = f(x)$ et $g(-x) = -g(x)$

- parité de la somme : $f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$: ni paire ni impaire
- parité du produit : $f(-x) \times g(-x) = f(x) \times -g(x) = -f(x) \times g(x)$: impaire
- parité de la composée : $f \circ g(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = f \circ g(x)$: paire

3. Voir 1.5

On note $\{x\} = x - E(x)$ la partie fractionnaire de x.

1) Tracer le graphe de la fonction $x \rightarrow \{x\}$

On note que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ , \{x\} \in [0,1[$

2) montrer qu'elle est périodique

périodique si $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ , f(x+T) = f(x)$

- $$f(x+T) = x + T - E(x+T)$$

$$E(x+T) = E(x) + E(T) + E\big(x - E(x) + T - E(T)\big) = E(x) + E(T) + E\big(\{x\} + \{T\}\big)$$

$$f(x+T) = x + T - E(x) - E(T) - E\big(\{x\} + \{T\}\big) = x - E(x) + T - E(T) - E\big(\{x\} + \{T\}\big)$$

$$f(x+T) = f(x) + \{T\} - E\big(\{x\} + \{T\}\big)$$

- $$\{T\} - E\big(\{x\} + \{T\}\big)\ ?$$

$$Si\ T \in \mathbb{N} :\ \ \{T\} = 0\ \Rightarrow E\big(\{x\} + \{T\}\big) = E\big(\{x\}\big) = 0 \Rightarrow \{T\} - E\big(\{x\} + \{T\}\big) = 0$$

$$Si\ T \notin \mathbb{N} :\ \ \{T\} \in \left]0,1\right[\ \Rightarrow E\big(\{x\} + \{T\}\big) \in\ \{0,1\}\ \Rightarrow \{T\} - E\big(\{x\} + \{T\}\big) \neq 0$$

Conclusion, la fonction est périodique de période un entier naturel. La période est égal au 1er entier naturel non nul donc $T = 1$

4. Voir 1.3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1) Montrer que $|f(x)|$ est majorée par ½

f est majorée sur $U\ si\ \exists\ M \in \mathbb{R},\ \ \forall\ x \in U,\ f(x) < M.$

Remarques :

- $|f|$ est majorée par $\dfrac{1}{2} \iff -\dfrac{1}{2} < f(x) < \dfrac{1}{2}$
- Dans $\mathbb{R}^- f(x) < 0$. Dans $\mathbb{R}^+ f(x) > 0. f(0) = 0.$

Par l'absurde :

a) Dans $\mathbb{R}^+,\ \ \exists ?\ x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) > \dfrac{1}{2}$

$$\frac{x}{1+x^2} > \frac{1}{2}\ et\ 1 + x^2 > 0 \iff 2x > 1 + x^2 \iff 0 > x^2 - 2x + 1 \iff 0 > (x-1)^2$$

Impossible donc $f(x) < \frac{1}{2}$

b) Dans $\mathbb{R}^-$, $\exists ?\ x \in \mathbb{R}^-$ tel que $f(x) < -\frac{1}{2}$

$$\frac{x}{1+x^2} < -\frac{1}{2}\ et\ 1+x^2 > 0 \Longleftrightarrow\ 2x < -1-x^2\ \Longleftrightarrow\ 0 < -x^2-2x-1 \Longleftrightarrow 0 < -(x+1)^2$$

Impossible donc $f(x) < -\frac{1}{2}$

La fonction est bien majorée

2) étudier les variations de f (sans utiliser de dérivée) et tracer son graphe

Dans $\mathbb{R}^-$ $f(x) > -\frac{1}{2}$. Dans $\mathbb{R}^+$ $f(x) < \frac{1}{2}$. $Et\, f(0) = 0.$

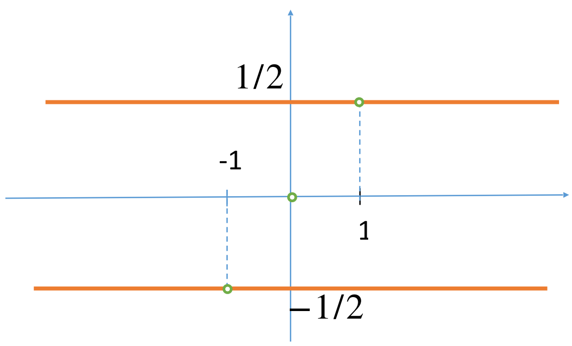
$$dans\ \mathbb{R}^- : \frac{x}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow 1+2x+x^2 = 0 \Longleftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = -1$$

$$dans\ \mathbb{R}^+ : \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 1-2x+x^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

Dérivée

$$soit\ f(x) = \frac{u}{v} = \frac{x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$



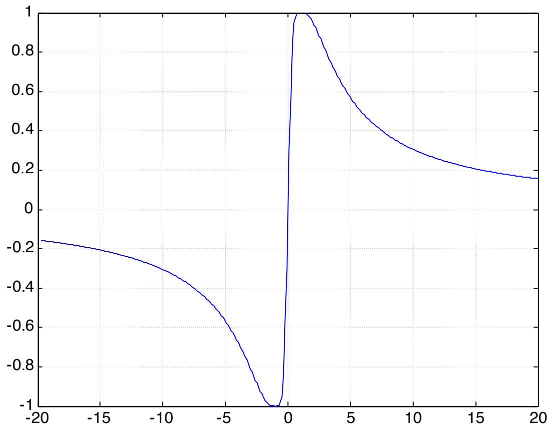
Le signe de la dérivée dépend uniquement de $u'v - v'u$

$$u'v - v'u = 1\left(1+x^2\right) - x(2x) = 1 + x^2 - 2x^2 = 1 - x^2 = (1-x)(1+x)$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

5.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	-1/2	↗		↘	0



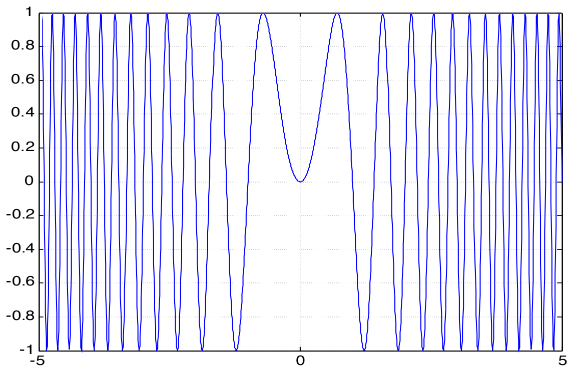
1) Variations

$$sin(u) = u'\cos(u)$$

$$f(x) = sin\left(\pi \frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$u = \pi \frac{x}{1+x^2} \qquad u' = \frac{\pi(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad f'(x) = \frac{\pi(1-x^2)sin\left(\pi \frac{x}{1+x^2}\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$$

2) Périodicité



$$\sin\left(\pi \frac{x}{1+x^2}\right) = \sin\left(\pi \frac{x}{1+x^2} + 2*\pi\right) = \sin\left(\pi\left(\frac{x}{1+x^2} + 2\right)\right)$$

$$Périodique\ si : sin\left(\pi \frac{x}{1+x^2}\right) = sin\left(\pi \frac{x+T}{1+(x+T)^2}\right)$$

$$T\,solution\,de\ : \frac{x+T}{1+(x+T)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2$$

Pas de solution donc pas périodique

Limites

1.

1) Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2}$ en 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2} = -1$$

2) Et en $+\infty$?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

2.

1) Déterminer, si elle existe, la limite de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ (voir proposition 3)

$$\lim_{x \to +\infty} sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad et \quad \lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$$

2) Déterminer, si elle existe, la limite de $\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$

$$-1 \leq \cos(x) \leq +1$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x)}} \leq \frac{\cos(x)}{\sqrt{(x)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x)}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \pm\frac{1}{\sqrt{(x)}} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{(x)}} = 0$$

3.

En utilisant la définition de la limite (avec des ϵ), montrer que $\lim_{x\to 2}(3x+1) = 7$.

S i

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in D_f,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

$$x_0 = 2 \implies 2 - \delta < x < 2 + \delta \implies 6 - 3\delta < 3x < 6 + 3\delta \implies 6 - 3\delta + 1 < 3x + 1 < 6 + 3\delta + 1$$

$$\implies 7 - 3\delta < 3x + 1 < 7 + 3\delta$$

Si on choisi $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ alors $7 - \epsilon < 3x + 1 < 7 + \epsilon$ donc $l = 7$

4.

Montrer que si f admet une limite finie en x_0 alors il existe $\delta > 0$ tel que f soit bornée sur $\left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$

On doit montrer que :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall\ M \in \mathbb{R}^+,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in D_f,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \lfloor f(x) \rfloor < M$$

De la définition de la limite en l :

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0,\ \forall\ x \in D_f,\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$$

Prenons $l > 0$ et M tel que $l + \epsilon < M$

$$\epsilon < M - l \implies -\epsilon > -M + l \implies l - \epsilon > -M + l + l \implies l - \epsilon > -M + 2l > -M$$

On peut écrire :

$$-M < -M + 2l < l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon < M \implies \lfloor f(x) \rfloor < M$$

A voir avec $l < 0$??

5.

1) Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$

A priori on a la forme indéterminée : $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}\,\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$x\neq 0\Longrightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

2) Déterminer, si elle existe $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

$$\lim_{x\to 2}x^2-4=0\quad et\ \lim_{x\to 2}x^2-3\mathrm{x}+2=0$$

A priori on a la forme indéterminée : $\dfrac{0}{0}$

Mais 2 est racine des deux polynômes. On peut donc factoriser par $(x-2)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$$