ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Раздел 4. Электрические цепи несинусоидального тока

Никитина Мария Владимировна
mvnikitina@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2025

Электрические цепи несинусоидального тока

Периодические несинусоидальные токи и напряжения в электрических цепях возникают в случае действия в них несинусоидальных ЭДС и/или наличия в них нелинейных элементов.

Реальные ЭДС, напряжения и токи в электрических цепях синусоидального переменного тока по разным причинам отличаются от синусоиды.

В энергетике появление несинусоидальности токов или напряжений нежелательно (из-за дополнительных потерь энергии).

В радиотехнике, автоматике, вычислительной технике, полупроводниковой преобразовательной технике и пр. несинусоидальные величины являются основной формой ЭДС, токов и напряжений.

Разложение периодической функции в тригонометрический ряд

Всякая периодическая функция, имеющая конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов за период, может быть разложена в тригонометрический ряд (ряд Фурье)

$$\boxed{\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + A_{1m}\sin(\omega t + \phi_1) + A_{2m}\sin(2\omega t + \phi_2) + \ldots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} A_{km}\sin(k\omega t + \phi_k) \end{aligned}}$$

при $k = 0 \quad A_{km} = A_0; \;\; \phi_k = \phi_0 = \pi/2$

A_0 – постоянная составляющая или нулевая гармоника

$a_1 = A_{1m}\sin(\omega t + \psi_1)$ – основная (или первая) гармоника

$a_k = A_{km}\sin(k\omega t + \psi_k)$ – k-ая гармоника (высшая гармоника)

Разложение периодической функции в тригонометрический ряд

Раскрыв синусы суммы каждой из гармоник в ряде Фурье

$$\boxed{\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + B_{1m}\sin\omega t + B_{2m}\sin 2\omega t + \ldots + B_{km}\sin k\omega t + \ldots + \\ & C_{1m}\cos\omega t + C_{2m}\cos 2\omega t + \ldots + C_{km}\cos k\omega t + \ldots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km}\sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km}\cos k\omega t \end{aligned}}$$

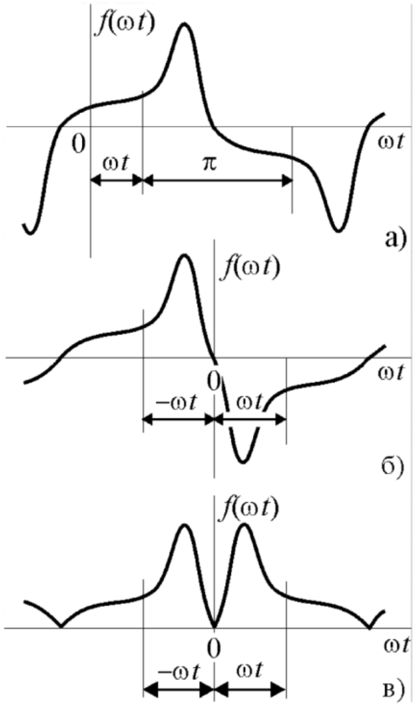
$$B_{km} = A_{km}\cos\phi_k;\ C_{km} = A_{km}\sin\phi_k$$

Если $f(\omega t)$ задана аналитически, то коэффициенты ряда Фурье определяются как

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\,d(\omega t) \qquad B_{km} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\sin(k\omega t)\,d(\omega t) \qquad C_{km} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos(k\omega t)\,d(\omega t)$$

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2} \qquad \phi_k = \operatorname{arctg}(C_{km}/B_m)$$

Признаки, определяющие состав ряда Фурье



$$\boxed{f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)}$$

$$f(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin\left[(2k+1)\omega t + \phi_k\right]$$

$$\boxed{f(\omega t) = -f(-\omega t)}$$

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin k\omega t$$

$$\boxed{f(\omega t) = f(-\omega t)}$$

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos k\omega t$$

Спектр несинусоидальной величины

Под **спектром** несинусоидальной величины понимают определение ее гармонического состава, т.е. определение в составе несинусоидальной величины комплексных амплитуд (или комплексных действующих значений), соответствующих действующим частотам несинусоидальной величины.

Так для несинусоидальной величины $\boldsymbol{x(t) = 50 - 30cos(200t) + 10sin(400t)}$ [ед.изм.], изменяющейся с частотой $\omega_x = 100$ [рад/с] спектр определяется как

$\underline{X}_0 = 50e^{j90^\circ}$ [ед.изм.] – соответствует первому слагаемому несинусоидальной величины $x(t)$

$\underline{X}_{m2} = 30e^{-j90^\circ}$ [ед.изм.] – соответствует второму слагаемому несинусоидальной величины $x(t)$

$\underline{X}_{m4} = 10e^{j0^\circ}$ [ед.изм.] – соответствует второму слагаемому несинусоидальной величины $x(t)$

Основные характеристики

Действующее значение:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(\omega t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty}[A_{km}\sin(k\omega t+\phi_k)]^2\,dt} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2}$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \ldots};\quad U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots};\quad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots}.$$

Среднее значение:

$$A_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\omega t)\,dt$$

Среднее по модулю значение:

$$A_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(\omega t)|\,dt$$

Коэффициенты формы, амплитуды и искажений

Кривые несинусоидальных периодических величин отличаются бесконечным разнообразием. При этом часто требуется произвести оценку их гармонического состава и формы, не прибегая к точным расчётам. Для этого используют ***коэффициенты формы***, ***амплитуды*** и ***искажений***.

Коэффициент ***формы*** $k_ф=A/A_{ср}$ $(k_ф^{sin}=\pi/(2\sqrt{2})\approx 1{,}11)$.

Коэффициент ***амплитуды*** $k_а=a_{max}/A$ $(k_а^{sin}=\sqrt{2}\approx 1{,}41)$.

Коэффициент ***искажений*** $k_и=A_1/A$ $(k_и^{sin}=1)$.

Если коэффициенты формы, амплитуды и искажений несинусоидального сигнала отличаются не более, чем на 5% от соответствующих коэффициентов синусоидального сигнала, то такой несинусоидальный сигнал заменяют на эквивалентный синусоидальный:

$$a_{экв}(t)=(\sqrt{2})\cdot A\cdot sin(\omega\cdot t+\psi_{а\ экв}),$$

где ω – угловая частота несинусоидального сигнала (обычно совпадавшая с ω_1).

Мощность цепи несинусоидального тока

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km}\sin(k\omega t + \phi_{uk})\right] \times \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\sin(k\omega t + \phi_{uk} - \varphi_k)\right] dt =$$

$$= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

$$\boxed{Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k}$$

$$\boxed{S = UI}$$

Мощность цепи несинусоидального тока

Отношение активной мощности к полной называется коэффициентом мощности

$$\cos(\varphi_{\text{экв}})=P/S.$$

Такое же соотношение между активной и полной мощностью будет у двухполюсника в цепи синусоидального тока, если действующие значения напряжения и тока на его входе будут равны действующим значениям несинусоидального напряжения и тока, а сдвиг фазы синусоиды тока относительно напряжения будет соответствовать $\varphi_{\text{экв}}$.

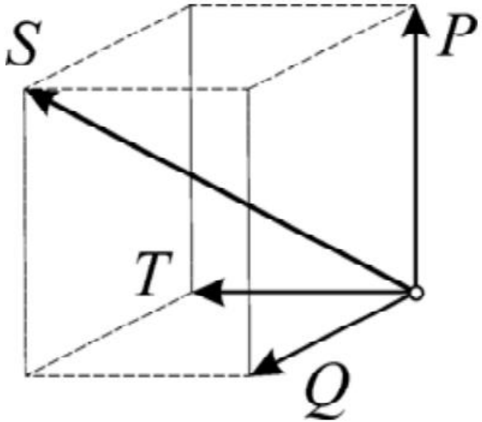
$$\varphi_{\text{экв}} = \psi_{u\ \text{экв}} - \psi_{i\ \text{экв}},$$

как правило, $\psi_{u\ \text{экв}}$ принимают равной ψ_{u1}.

Мощность цепи несинусоидального тока

Реактивная мощность всех гармоник меньше реактивной мощности эквивалентных синусоид, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k < UI \sin \varphi_{экв}$$



Следовательно, для несинусоидальных токов $\sqrt{P^2+Q^2} < S$ и существует некоторая величина T (мощность искажения), с учетом которой

$$S = \sqrt{P^2+Q^2+T^2}.$$

Расчёт цепи несинусоидального тока

Расчёт цепи несинусоидального тока выполняется ***методом наложения*** для каждой гармоники источника питания, действующего в цепи. При расчёте метод наложения комбинируется с методом комплексных амплитуд, учитывая, что индуктивное сопротивление для *k*-й гармоники равно

$$X_{kL} = \omega_k L = k\omega_1 L,$$

а ёмкостное –

$$X_{kC} = 1 / (\omega_k C) = 1/ (k\omega_1 C).$$

Расчёт цепи для постоянной составляющей соответствует расчёту на постоянном токе, но его можно вести так же как на переменном токе, полагая для реактивных сопротивлений $k = 0$.

Тогда $X_{0L} = 0$, а $X_{0C} = \infty$.

Следовательно, индуктивный элемент будет эквивалентен замыканию, а ёмкостный – разрыву цепи между точками включения.

Спасибо
за внимание!

ITsMOre than a UNIVERSITY

Никитина Мария Владимировна,
mvnikitina@itmo.ru