Αλέξανδρος Οικονόμου AEM:9260 alexanco@ece.auth.gr

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Θέμα: Ελαχιστοποίηση με χρήση παραγώγων

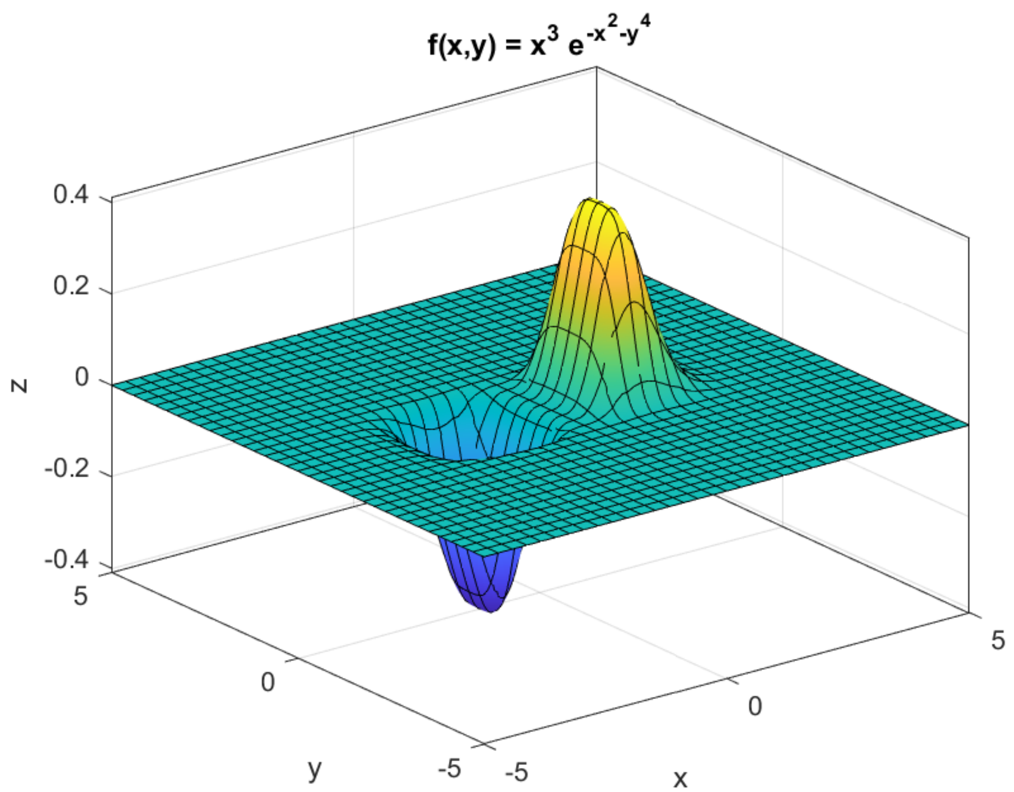
Στην εργασία αυτή μας ζητήθηκε να ελαχιστοποίσουμε μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών με τη χρήση ορισμένων αλγορίθμων μέσω Matlab.

Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

1) Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)
2) Μέθοδος Newton
3) Μέθοδος Levenberg-Marquardt

Η συνάρτηση προς μελέτη είναι η:

- $f(x,y) = x^3 e^{-x^2-y^4}$

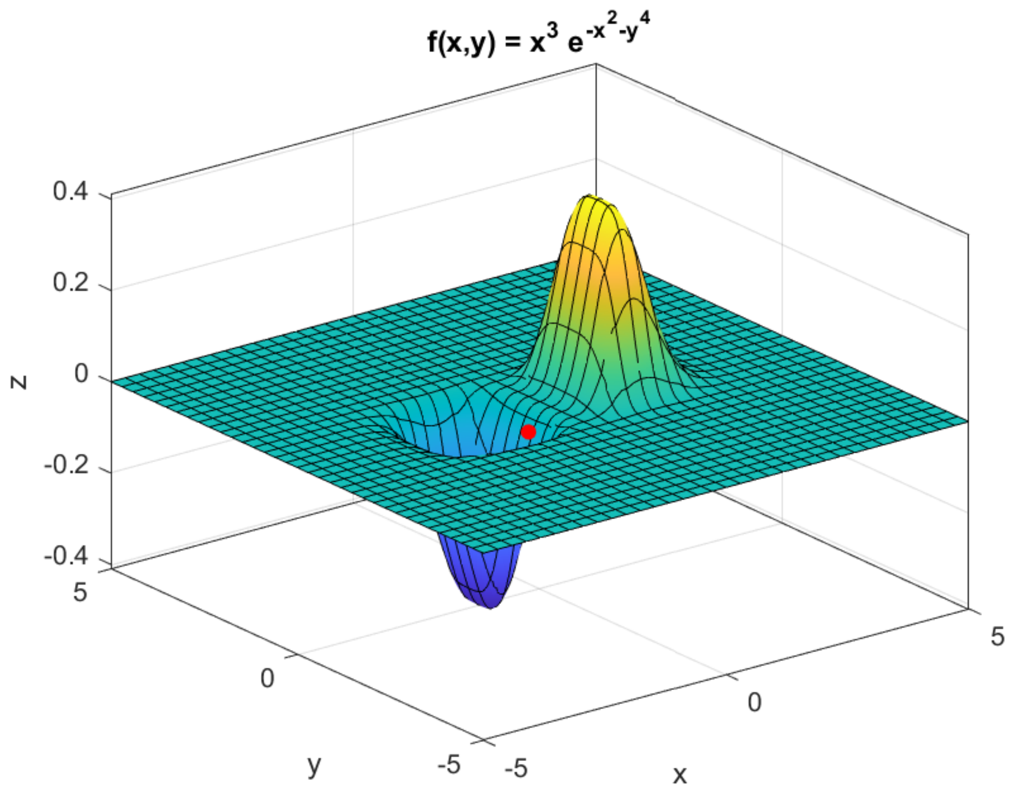


1) Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)

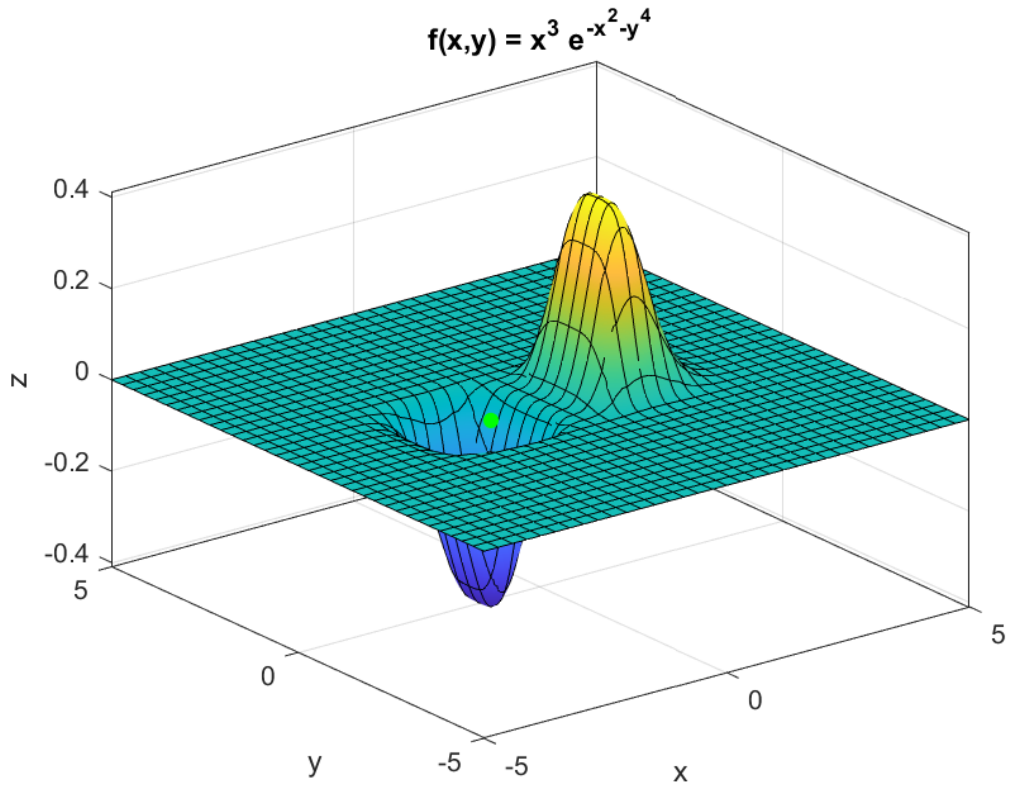
Μας ζητήθηκε να ελαχιστοποιήσουμε την f με χρήση της μεθόδου Μέγιστης Καθόδου, χρησιμοποιώντας:

- αρχικά σημεία (x_0, y_0):
  a) (-1, -1)
  b) (0, 0)
  c) (1, 1)
- Βήμα γ_k
  i. Σταθερό της επιλογής μας
  ii. Τέτοιο, ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + \gamma_k d_k)$
  iii. Βάσει του κανόνα Armijo

a) Για το σημείο (-1, -1):



i. Για $\gamma_k = 0.5$:



Η f συγκλίνει στο σημείο (-1.22472810359179, -0.270986350901848) σε 8 επαναλήψεις. Στην γραφική παράσταση το σημείο φαίνεται για z=0, αλλά βρίσκεται στην κορυφή του ελαχίστου.

ii. Για υπολογισμό του γ_k με τη χρήση της μεθόδου της Διχοτόμου στην συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και αρχικά σημεία (0, 5):

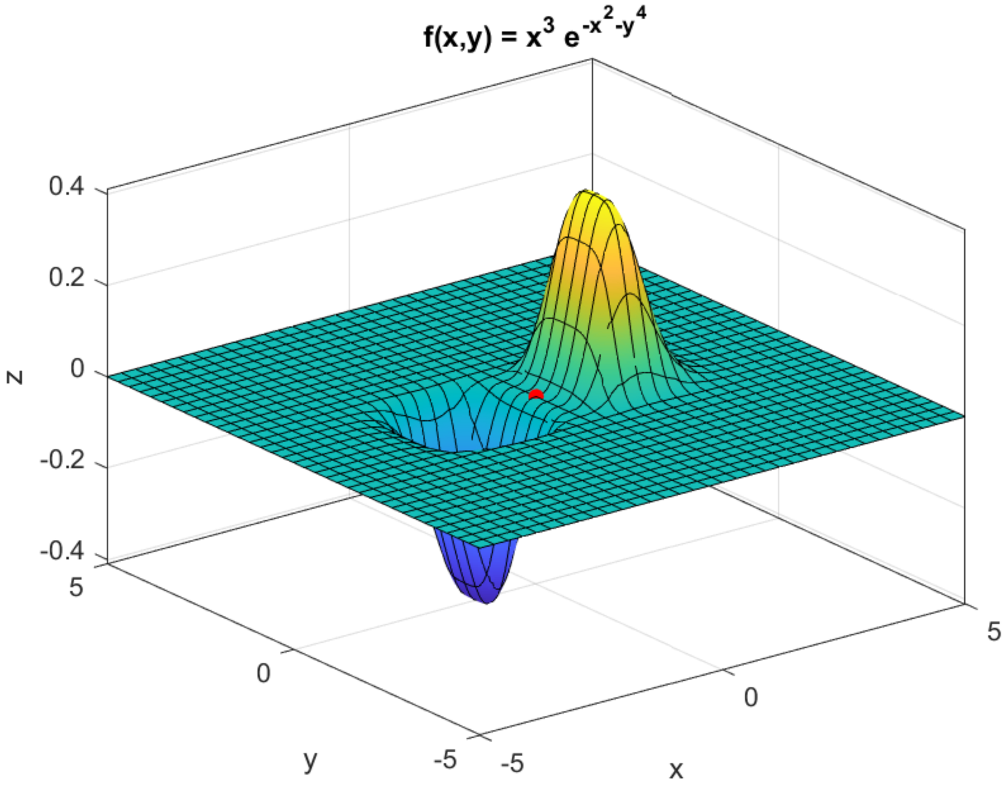
Παρόμοια και εδώ το σημείο σύγκλισης της f είναι

(-1.22468466800304, -0.0490653807010979). Χρειάστηκαν 49 επαναλήψεις.

iii. Για γ_k βάσει του κανόνα Armijo:

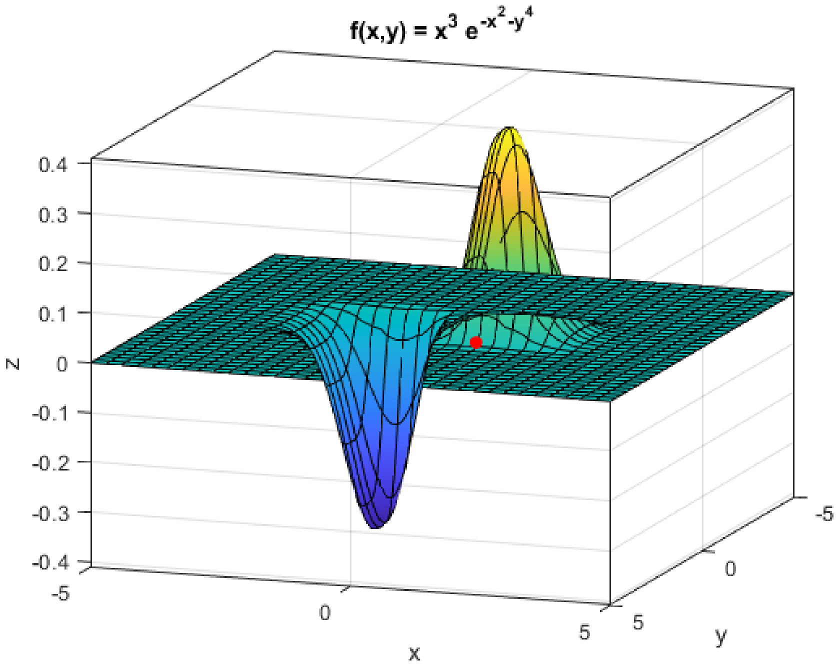
Η f συγκλίνει στο σημείο (-1.22469904884727, 0.262409956524977) σε 12 επαναλήψεις.

b) Για το σημείο (0, 0):

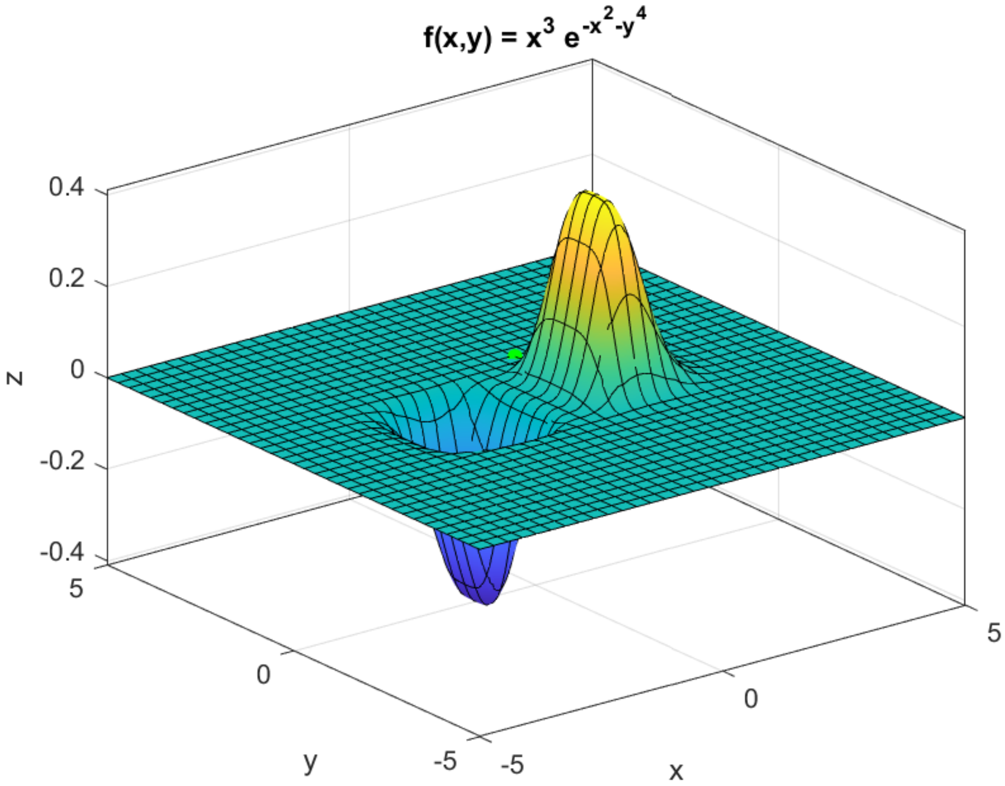


Η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου ικανοποιείται από την πρώτη επανάληψη (επειδή μηδενίζεται η κλίση της f), οπότε η f παραμένει στο σημείο (0, 0).

c) Για το σημείο (1, 1):



i. Για $\gamma_k = 0.5$:



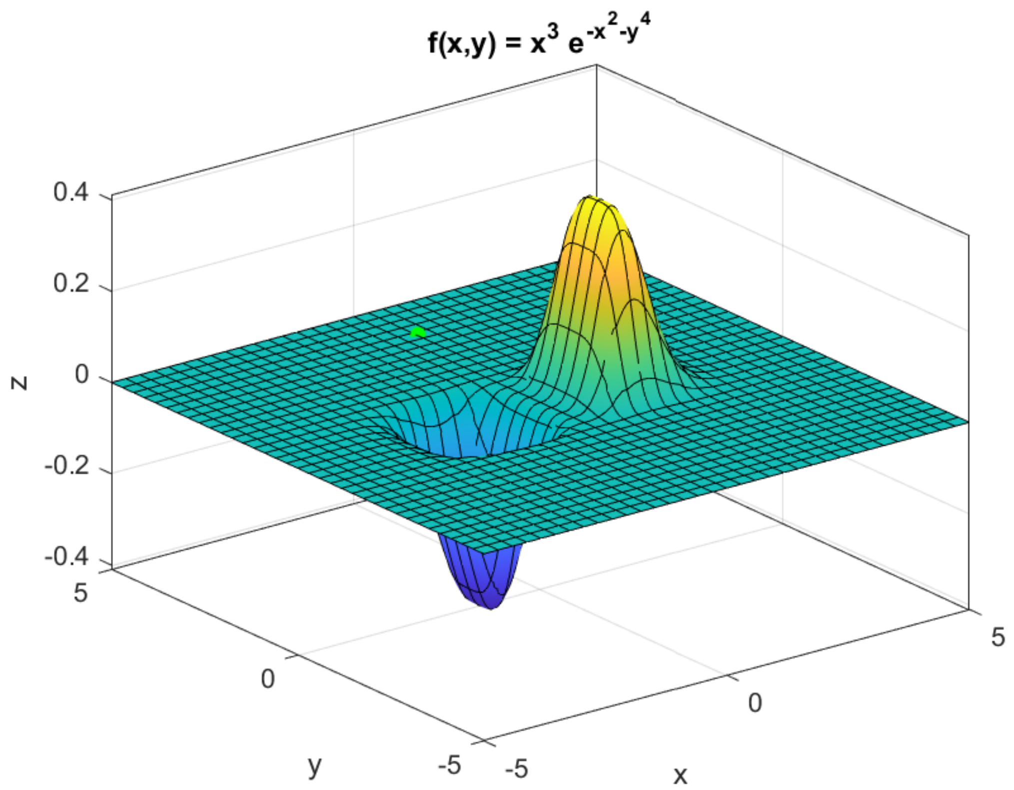
Η f συγκλίνει στο σημείο (0.878369517270122, 1.71035261674250)

σε 102 επαναλήψεις. Στην γραφική παράσταση το σημείο φαίνεται με πράσινο. Παρατηρούμε ότι δεν συγκλίνει σε σωστό ακρότατο.

ii. Για υπολογισμό του γ_k με τη χρήση της μεθόδου της Διχοτόμου στην συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και αρχικά σημεία (0, 5):

Η f συγκλίνει στο σημείο (0.323789195343150, 3.70484321862740)

σε 1 επανάληψη. Στην γραφική παράσταση το σημείο φαίνεται με πράσινο. Παρατηρούμε ότι δεν συγκλίνει σε σωστό ακρότατο.



iii. Για γ_k βάσει του κανόνα Armijo:

Δεν τερματίζει και δεν έχουμε αποτέλεσμα.

Παρατήρηση:

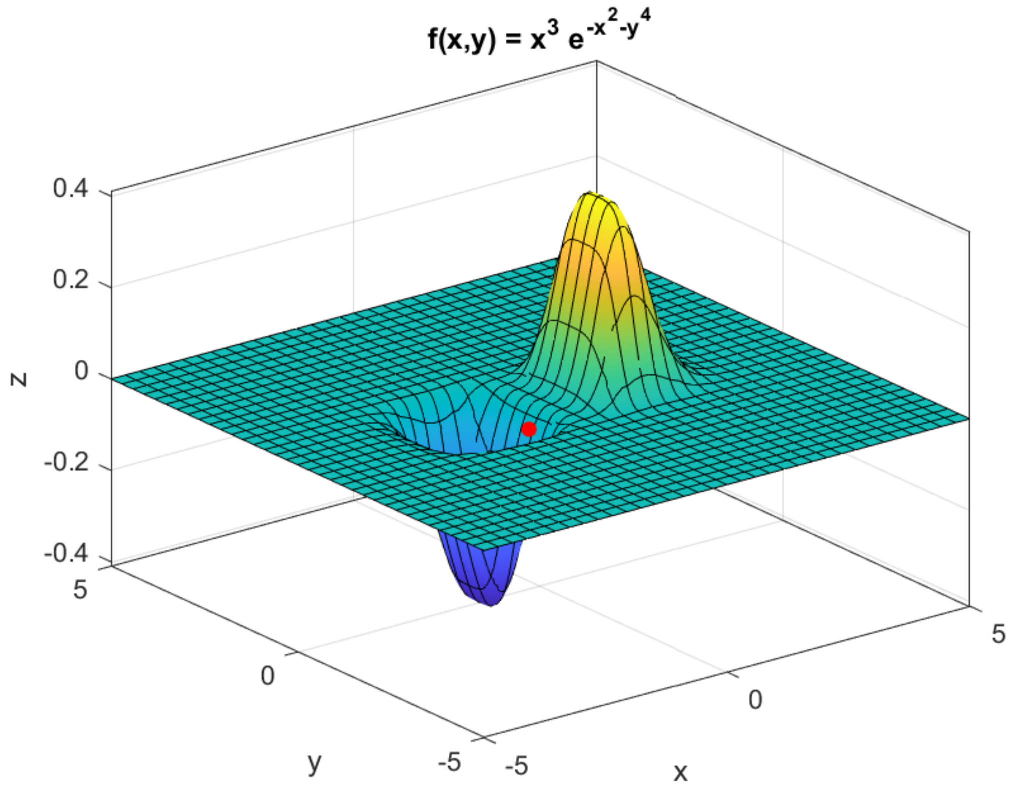
Η μέθοδος Μέγιστης Καθόδου είναι αλγόριθμος ελαχιστοποίησης, δηλαδή εύρεσης ελαχίστου. Στο σημείο (1, 1) βρισκόμαστε κοντά σε μέγιστο, οπότε ο αλγόριθμος δεν μπορεί να λειτουργήσει σωστά.

2) Μέθοδος Newton

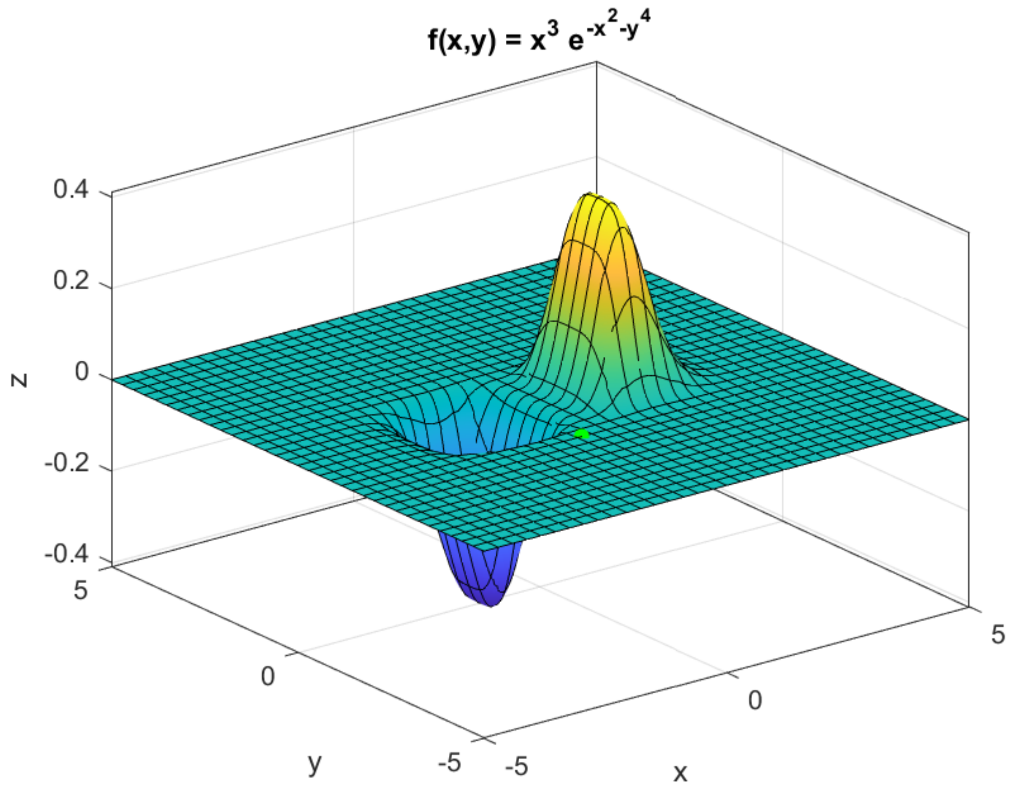
Μας ζητήθηκε να ελαχιστοποιήσουμε την f με χρήση της μεθόδου Newton, χρησιμοποιώντας:

- αρχικά σημεία (x_0, y_0):
  a) (-1, -1)
  b) (0, 0)
  c) (1, 1)
- Βήμα γ_k
  i. Σταθερό της επιλογής μας
  ii. Τέτοιο, ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + \gamma_k d_k)$
  iii. Βάσει του κανόνα Armijo

a) Για το σημείο (-1, -1):



i. Για $\gamma_k = 0.5$:



Η f συγκλίνει στο σημείο (-0.500295931746883, -1.75914056534154) σε 15 επαναλήψεις. Στην γραφική παράσταση το σημείο φαίνεται με πράσινο.

ii. Για υπολογισμό του γ_k με τη χρήση της μεθόδου της Διχοτόμου στην συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και αρχικά σημεία (0, 5):

Η f συγκλίνει στο σημείο (-0.753613710591954, -1.35256460366979) σε 540 επαναλήψεις.

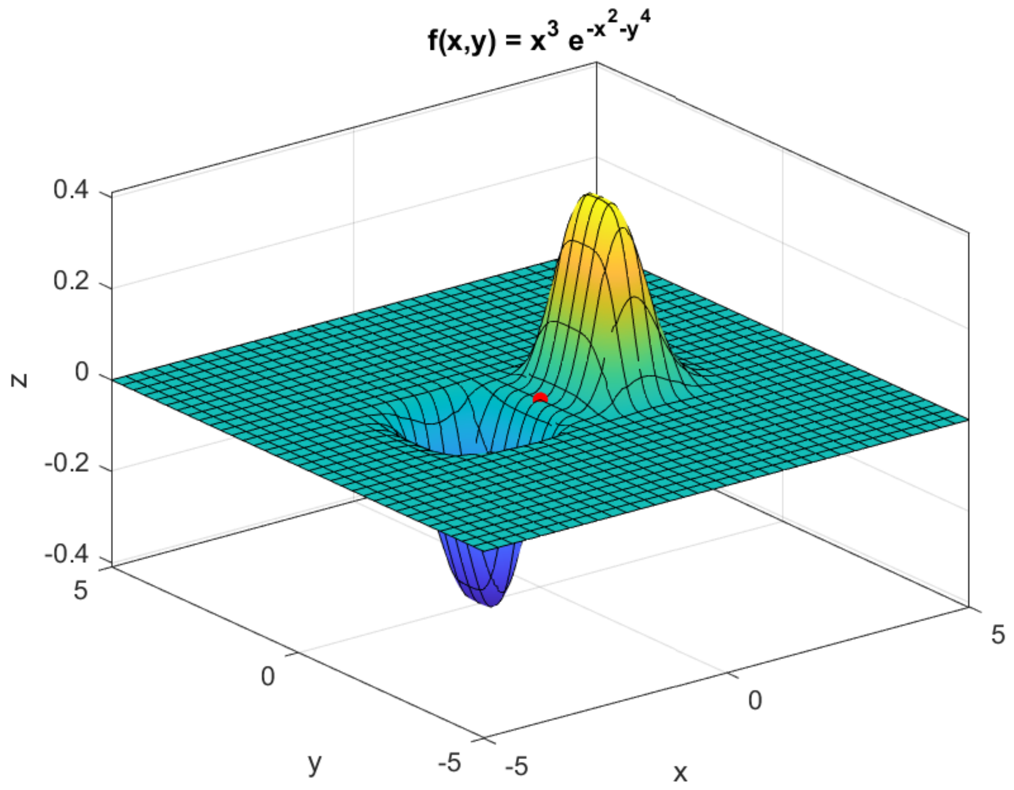
iii. Για γ_k βάσει του κανόνα Armijo:

Η f συγκλίνει στο σημείο (-0.707167927614666, -1.44225757467041) σε 7 επαναλήψεις.

Παρόλα αυτά, η μέθοδος Newton δεν συγκλίνει για αρχικό σημείο

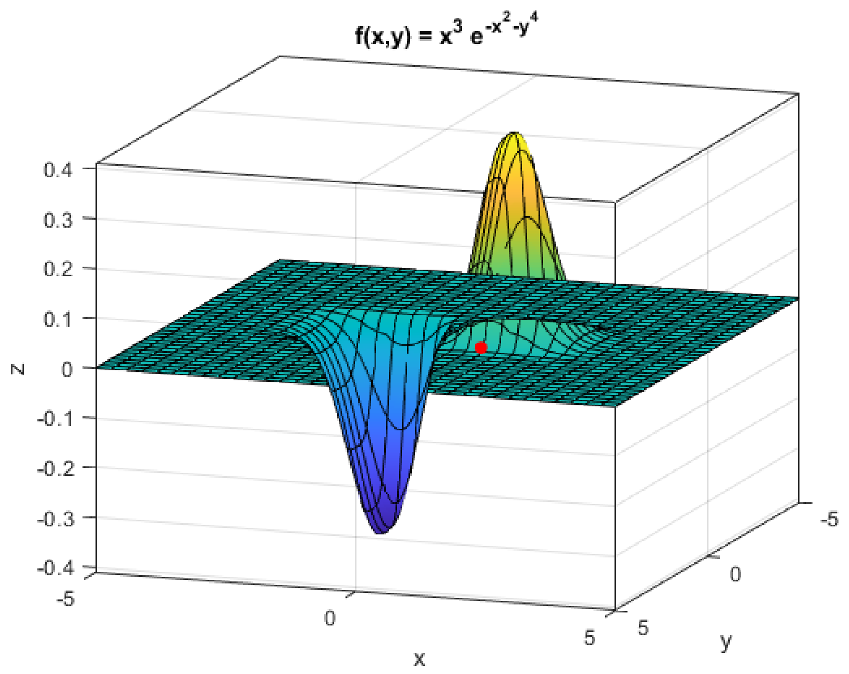
(-1, -1), επειδή ο Εσσιανός δεν είναι θετικά ορισμένος.

b) Για το σημείο (0, 0):

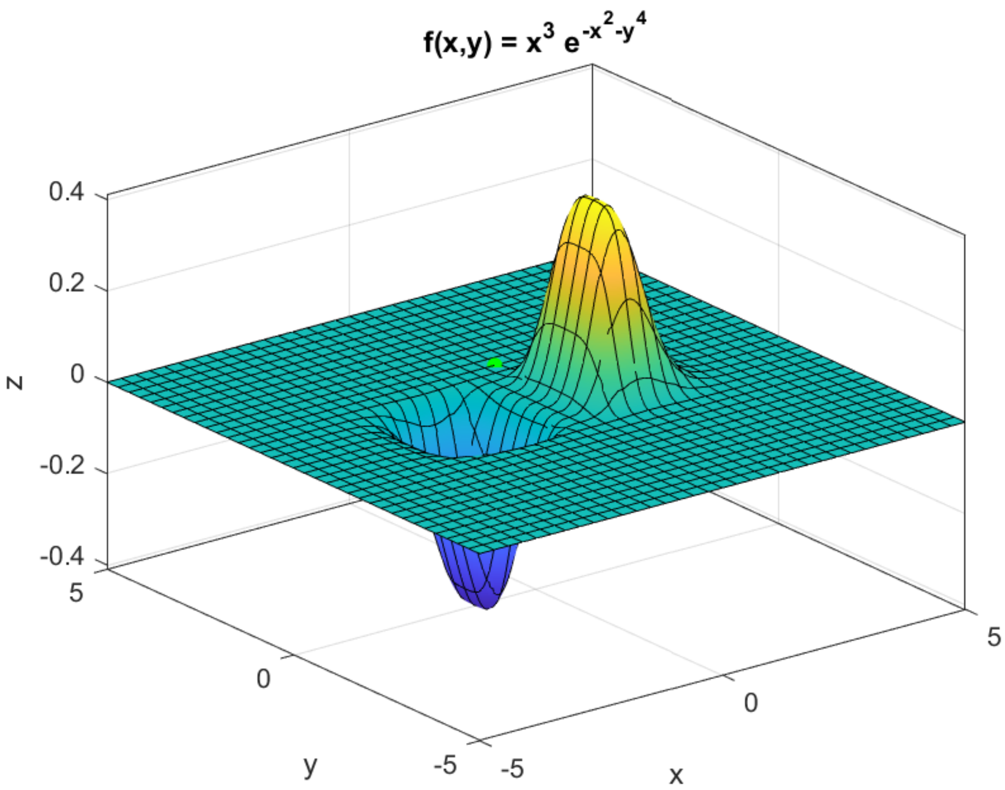


Η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου ικανοποιείται από την πρώτη επανάληψη (επειδή μηδενίζεται η κλίση της f), οπότε η f παραμένει στο σημείο (0, 0).

c) Για το σημείο (1, 1):



i. Για $\gamma_k = 0.5$:



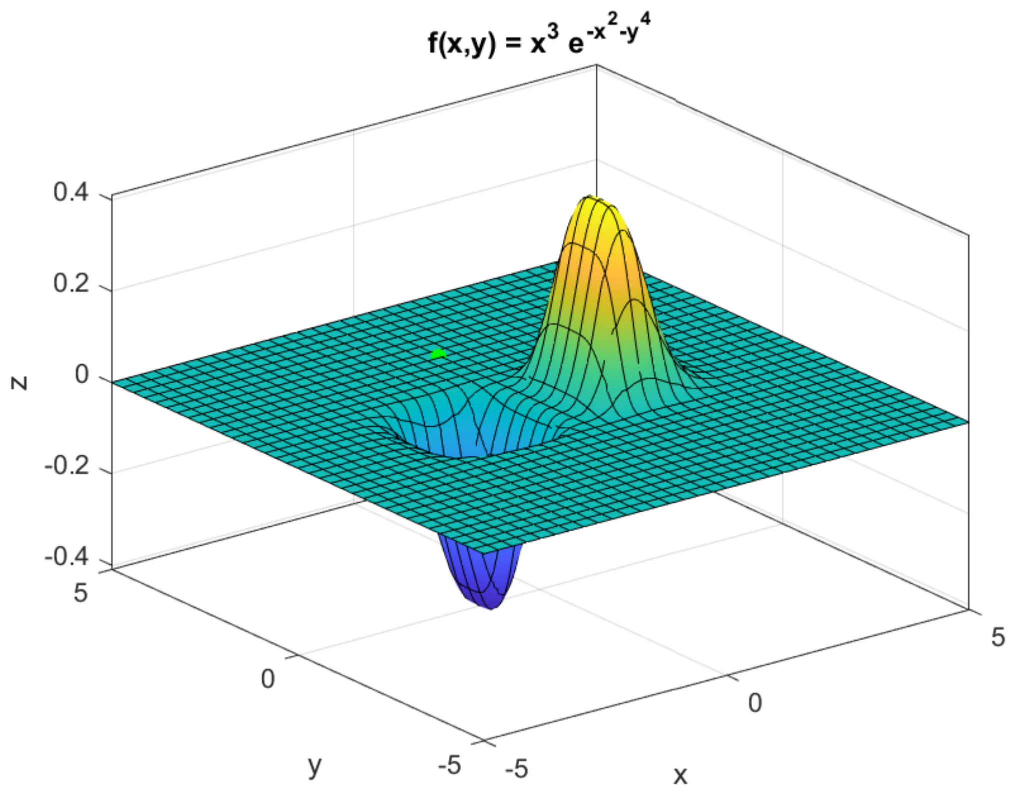
Η f συγκλίνει στο σημείο (0.500295931746883, 1.75914056534154

σε 15 επαναλήψεις. Στην γραφική παράσταση το σημείο φαίνεται με πράσινο. Παρατηρούμε ότι δεν συγκλίνει σε σωστό ακρότατο.

ii. Για υπολογισμό του γ_k με τη χρήση της μεθόδου της Διχοτόμου στην συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και αρχικά σημεία (0, 5):

Η f συγκλίνει στο σημείο (-0.0226099853515626, 2.70434997558594)

σε 1 επανάληψη. Στην γραφική παράσταση το σημείο φαίνεται με πράσινο. Παρατηρούμε ότι δεν συγκλίνει σε σωστό ακρότατο.



iii. Για γ_k βάσει του κανόνα Armijo:

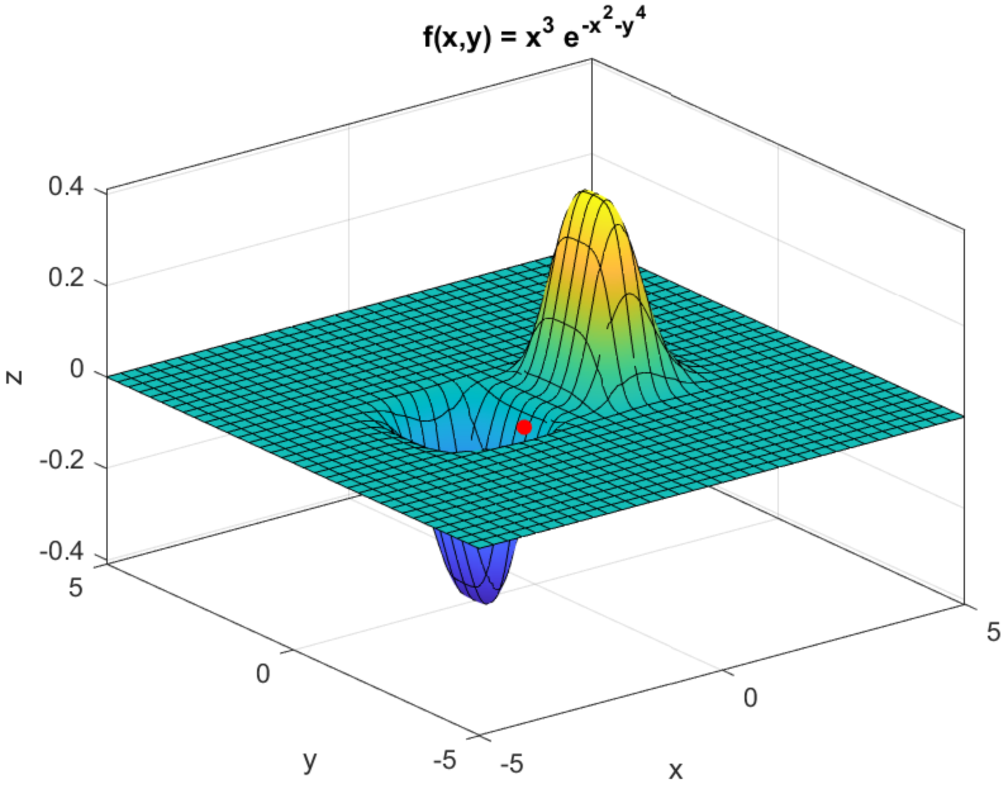
Δεν τερματίζει και δεν έχουμε αποτέλεσμα.

3) Μέθοδος Levenberg - Marquardt

Μας ζητήθηκε να ελαχιστοποιήσουμε την f με χρήση της μεθόδου Newton, χρησιμοποιώντας:

- αρχικά σημεία (x_0, y_0):
  a) (-1, -1)
  b) (0, 0)
  c) (1, 1)
- Βήμα γ_k
  i. Σταθερό της επιλογής μας
  ii. Τέτοιο, ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_k + \gamma_k d_k)$
  iii. Βάσει του κανόνα Armijo

a) Για το σημείο (-1, -1):



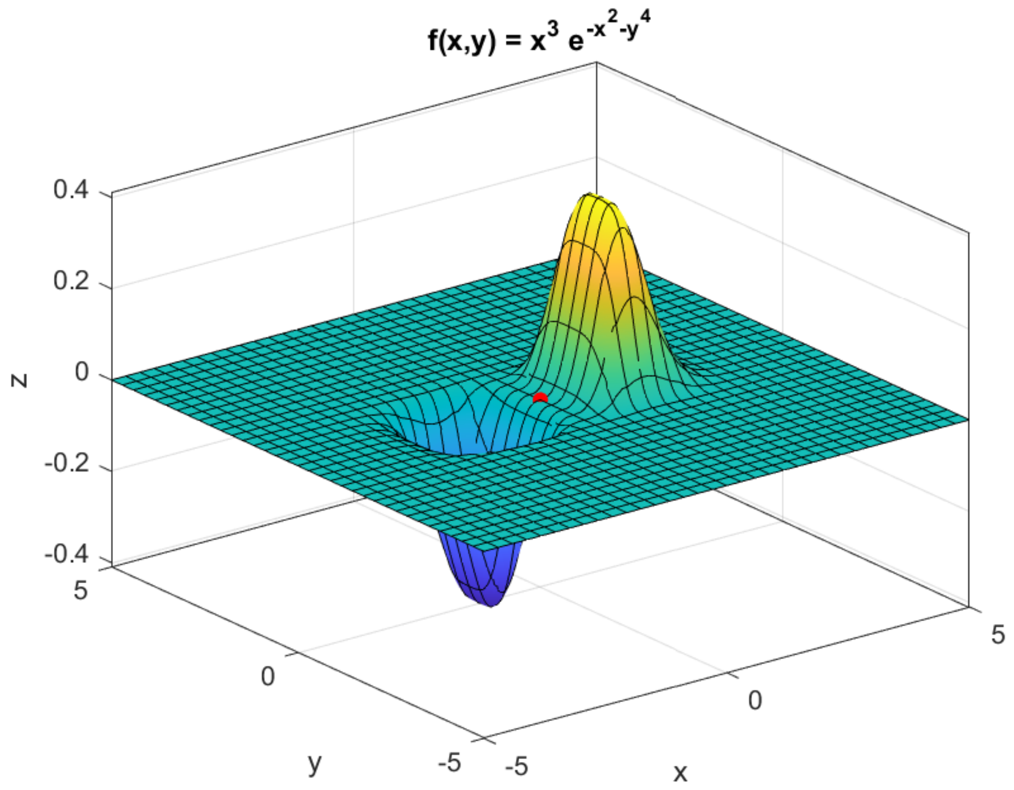
i. Για $\gamma_k = 0.5$:

ii. Για υπολογισμό του γ_k με τη χρήση της μεθόδου της Διχοτόμου στην συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και αρχικά σημεία (0, 5):

iii. Για γ_k βάσει του κανόνα Armijo:

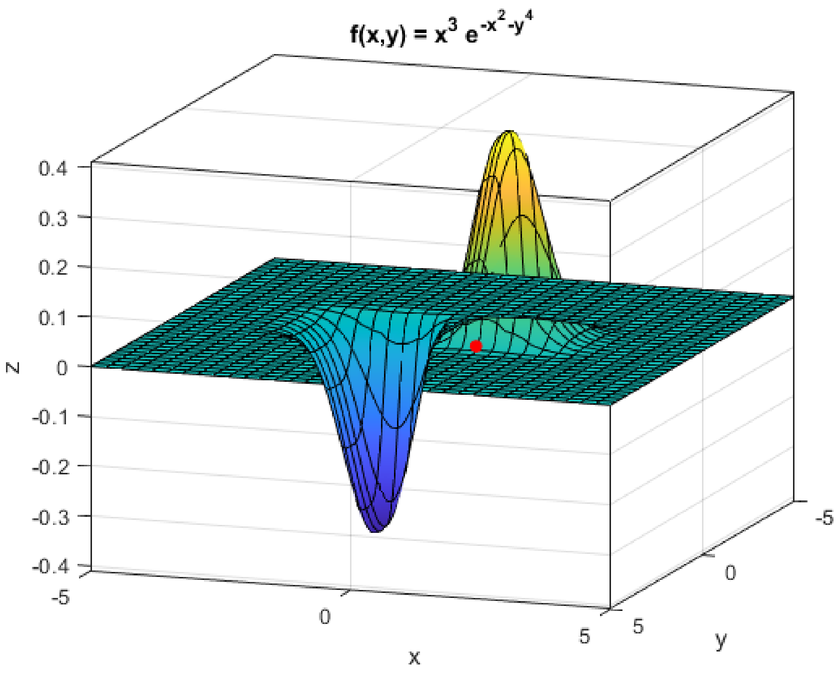
Ο αντίστροφος πίνακας του αλγορίθμου απειρίζει και δεν βγάζει αποτελέσματα.

b) Για το σημείο (0, 0):



Η συνθήκη τερματισμού του αλγορίθμου ικανοποιείται από την πρώτη επανάληψη (επειδή μηδενίζεται η κλίση της f), οπότε η f παραμένει στο σημείο (0, 0).

c) Για το σημείο (1, 1):



i. Για $\gamma_k = 0.5$:

ii. Για υπολογισμό του γ_k με τη χρήση της μεθόδου της Διχοτόμου στην συνάρτηση $f(x_k + \gamma_k d_k)$ και αρχικά σημεία (0, 5):

iii. Για γ_k βάσει του κανόνα Armijo:

Ο αντίστροφος πίνακας του αλγορίθμου απειρίζει και δεν βγάζει αποτελέσματα.

Παρατηρήσεις:

Η **Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου** είναι πολύ αργή και υπολογιστικά αναποτελεσματική.

Στη **Μέθοδο Newton** ο Εσσιανός πίνακας της f πρέπει να είναι θετικά ορισμένος. Στα αρχικά σημεία μας ο Εσσιανός δεν είναι θετικά ορισμένος. Υπάρχουν περιπτώσεις που η μέθοδος δεν συγκλίνει.

Η **Μέθοδος Levenberg – Marquardt** χρησιμοποιει έναν τροποποιημένο αλγόριθμο του Newton που λύνει το πρόβλημα του μη θετικά ορισμενου Εσσιανού.