Λήμμα 0.0.1. *Έστω $n \geqslant 1$ και $\beta_1, \ldots, \beta_n$ διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Αν $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ είναι οι σταθερές που ορίστηκαν στην (;;) τότε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων*

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^k x_j = c_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{0.0.1}$$

έχει μοναδική λύση $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$. Για κάθε πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από $n-1$ ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n} r(\beta_j)\varrho_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} r(x)\, dx.$$

Απόδειξη. Ή ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η ορίζουσα του συστήματος γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= c_0 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n &= c_1 \\ \beta_1^2 x_1 + \beta_2^2 x_2 + \cdots + \beta_n^2 x_n &= c_2 \\ &\vdots \\ \beta_1^{n-1} x_1 + \beta_2^{n-1} x_2 + \cdots + \beta_n^{n-1} &= c_{n-1} \end{aligned}$$

είναι η ορίζουσα Vandermode

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \ldots & \beta_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \ldots & \beta_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (\beta_i - \beta_j) \neq 0$$

Για το πολυώνυμο $r(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x^k$ βαθμού το πολύ $n-1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} r(\beta_j)\varrho_j &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \beta_j^k \varrho_j \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{j=1}^{n} \beta_j^k \varrho_j \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k c_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^k dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} r(x) dx. \end{aligned}$$

□