Λήμμα 0.0.1. *Έστω $k \geqslant 1$ και $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Έστω $\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}$ ένας τελεστής διαδοχικών διαφορών. Τότε,*

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(x^k) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+j=k \\ j\geqslant 0, j_1\geqslant 1,\ldots,j_\ell\geqslant 1}} \frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} x^j = d_1\cdots d_\ell p_{k-\ell}(x),$$

όπου $p_{k-\ell}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $k-\ell$ με μεγιστοβάθμιο συντελεστή $k(k-1)\cdots(k-\ell+1)$. Αν οι $d_1,\ldots,d_\ell$ είναι ακέραιοι, τότε το $p_{k-\ell}(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς ℓ. Για $\ell = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta_{d_1}(x^k) &= (x+d_1)^k - x^k \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} d_1^{k-j} x^j - x^k \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} d_1^{k-j} x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{k!}{j!(k-j)!} d_1^{k-j} x^j \\
&= \sum_{\substack{j_1+j=k \\ j\geq 0, j_1\geq 1}} \frac{k!}{j!j_1!} d_1^{j_1} x^j.
\end{aligned}$$

Έστω $1 \leqslant \ell \leqslant k-1$, και ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός αληθέυει για το ℓ. Τότε

$$\begin{aligned}
&\Delta_{d_{\ell+1},d_\ell,\ldots,d_1}(x^k) \\
&= \Delta_{d_{\ell+1}}\Big(\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(x^k)\Big) \\
&= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+m=k \\ m\geqslant 0, j_1\geqslant 1,\ldots,j_\ell\geqslant 1}} \frac{k!}{m!j_1!\cdots j_\ell!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} \Delta_{d_{\ell+1}}(x^m) \\
&= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+m=k \\ m\geqslant 0, j_1\geqslant 1,\ldots,j_\ell\geqslant 1}} \frac{k!}{m!j_1!\cdots j_\ell!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} \sum_{\substack{j_{\ell+1}+j=m \\ j\geq 0, j_{\ell+1}\geq 1}} \frac{m!}{j!j_{\ell+1}!} d_{\ell+1}^{j_{\ell+1}} x^j \\
&= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+m=k \\ m\geqslant 0, j_1\geqslant 1,\ldots,j_\ell\geqslant 1}} \sum_{\substack{j_{\ell+1}+j=m \\ j\geq 0, j_{\ell+1}\geq 1}} \frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell! j_{\ell+1}!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} d_{\ell+1}^{j_{\ell+1}} \\
&= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+j_{\ell+1}+j=k \\ j\geq 0, j_1,\ldots,j_\ell,j_{\ell+1}\geq 1}} \frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell! j_{\ell+1}!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} d_{\ell+1}^{j_{\ell+1}} x^j.
\end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η γραμμικότητα του τελεστη Δ. Καθώς οι διωνυμικοί συντελεστές $\frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell!}$ είναι ακέραιοι, προκύπτει ότι οι $d_1,\ldots,d_\ell$ είναι και αυτοί ακέραιοι αριθμοί και έτσι το πολυώνυμο $p_{k-\ell}(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές. Τέλος είναι φανερό ότι ο βαθμός του είναι $k-\ell$ και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του είναι ο $\frac{k!}{(k-\ell)!} = k(k-1)\cdots(k-\ell+1)$ ο.ε.δ.

$\square$