Ορισμός 0.0.1. *Ένα $A \subseteq \mathbb{N}$ ονομάζεται προσθετική βάση των φυσικών αριθμών αν υπάρχει φυσικός s τέτοιος ώστε κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα s το πολύ στοιχείων του συνόλου A.*

Παραδείγματα:

1.Το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών δεν είναι προσθετική βάση του $\mathbb{N}$ καθώς ένας περιττος δεν μπορεί να φραγτεί ως άθροισμα άρτιων.

2.Το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών ειναι προσθετική βάση των φυσικών για $s = 2$.

3.Το θεώρημα του $Lagrange$ λέει ότι το σύνολο των τέλειων τετραγώνων είναι προσθετική βάση του $\mathbb{N}$ για $s = 4$ και η γενίκευση αυτού από τον $Hilbert$ λέει ότι το σύνολο των k-οστών δυνάμεων είναι προσθετική βάση του $\mathbb{N}$ για κάθε k.

4.Το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι προσθετική βάση του $\mathbb{N}$ όπως απέδειξε ο $Schnirelmann$.

5.Το σύνολο $B = \{2^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ δεν είναι προσθετική βάση των φυσικών αριθμών καθώς κάθε αριθμός της μορφής $2^k - 1$ είναι άθροισμα το λιγότερο k αριθμών του συνόλου B.

Πρόταση 0.0.2. *Έστω $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ ένα σύνολο φυσικών αριθμών με $a_n < a_{n+1}$ για κάθε n στο $\mathbb{N}$. Αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $b > 1$ τέτοιος ώστε τελικά να ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b$,τότε το σύνολο A δεν είναι προσθετική βάση των φυσικών αριθμών.*

Απόδειξη. Έστω πρός άτοπο ότι είναι προσθετική βάση των φυσικών. Από την υπόθεση υπαρχει n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b$ και συνεπώς έχουμε $a_{n+1} \geq b a_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $P_k = \{n \in \mathbb{N} : a_k \leqslant n < a_{k+1}\}$. Για $k \geq n_0$ έχουμε

$$|P_k| = a_{k+1} - a_k \geq (b-1)a_k \geq (b-1)b a_{k-1} \geq \cdots \geq (b-1)b^{k-n_0} a_{n_0} = f(k)$$

Καθώς το σύνολο A έχει υποτεθεί προσθετική βάση των φυσικών υπάρχει κάποιος s τέτοιος ώστε κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα s το πολύ στοιχείων του συνόλου A. Άρα κάθε στοιχείο του συνόλου P_k γράφεται ως άθροισμα s το πολύ στοιχείων του A και μάλιστα μικρότερων του a_{k+1}. Έπεται ότι

$$|P_k| \leqslant \binom{k+s-1}{s} = \frac{(k+s-1)!}{(k-1)!s!} = \frac{(k+s-1)(k+s-2)\cdots(k+1)k}{s!} \leqslant \frac{(k+s)^s}{s!} = p(k)$$

όπου $p(k)$ πολυώνυμο του k βαθμού s. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{p(k)} = +\infty$$

και άρα μπορούμε να βρούμε l τέτοιον ώστε

$$|P_l| \leqslant p(l) < f(l) \leqslant |P_l|$$

το οποίο είναι αντίφαση.

Πρόταση 0.0.3. *Έστω ένα σύνολο $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ όπου $a_{n+1} > a_n$ για κάθε φυσικό αριθμό n. Αν το A είναι προσθετική βάση του $\mathbb{N}$ τότε υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant M$$

για κάθε n φυσικό.

Απόδειξη. Καθώς το A είναι προσθετική βάση υπάρχει φυσικός αριθμός s τέτοιος ώστε $sA = \mathbb{N}$. Έστω προς άτοπο ότι η ακολουθία $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ δεν είναι φραγμένη. Έπεται ότι μπορούμε να βρούμε n_0 τέτοιον ώστε

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} > s+1$$

ή ισοδύναμα

$$a_{n_0+1} > (s+1)a_{n_0}.$$

Από υπόθεση υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1, n_2, \ldots, n_s$ τέτοιοι ώστε

$$a_{n_0+1} - 1 = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_s}$$

με $a_{n_i} \in A$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, s$ και προφανώς $n_i \leqslant n_0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, s$. Έτσι έχουμε

$$a_{n_0+1} = 1 + a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_s} \leqslant 1 + sa_{n_0} \leqslant (s+1)a_{n_0},$$

άτοπο.

□

□