Λήμμα 0.0.1. *Έστω α πραγματικός αριθμός, και έστω a και $q \geqslant 1$ ακέραιοι με $(a,q)=1$. Αν*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2},$$

τότε

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant q/2} \frac{1}{\|\alpha r\|} \ll q \log q.$$

Απόδειξη. Το λήμμα ισχύει για $q=1$, καθώς

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant q/2} \frac{1}{\|\alpha r\|} = 0.$$

Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \geq 2$. Γνωρίζουμε ότι $\left\|\frac{ar}{q}\right\| \in \mathbb{Q}$ και $0 \leqslant \left\|\frac{ar}{q}\right\| \leqslant \frac{1}{2}$. Συνεπώς υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $s(r) \in [0, q/2]$ και $m(r)$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{s(r)}{q} = \left\|\frac{ar}{q}\right\| = \pm\left(\frac{ar}{q} - m(r)\right).$$

Καθώς $(a,q)=1$ έχουμε

$$s(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{s(r)}{q} = 0 \Leftrightarrow \left\|\frac{ar}{q}\right\| = 0 \Leftrightarrow \frac{ar}{q} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow q|ar \Leftrightarrow r|q \Leftrightarrow r \equiv 0(modq),$$

και έτσι $s(r) \in [1, q/2]$ αν και μόνο αν $r \in [1, /2]$. Αφού $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ϑ τέτοιος ώστε

$$\alpha - \frac{a}{q} = \frac{\vartheta}{q^2}$$

και $-1 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Έχουμε

$$\alpha r = \frac{ar}{q} + \frac{\vartheta r}{q^2} = \frac{ar}{q} + \frac{\vartheta'}{2q},$$

όπου

$$|\vartheta'| = \left|\frac{2\vartheta r}{q}\right| \leqslant |\vartheta| \leqslant 1$$

αφού $\left|\frac{2r}{q}\right| \leqslant 1$. Τώρα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\|\alpha r\| &= \left\|\frac{ar}{q} + \frac{\vartheta'}{2q}\right\| \\
&= \left\|m(r) \pm \frac{s(r)}{q} + \frac{\vartheta'}{2q}\right\| \\
&= \left\|\frac{s(r)}{q} \pm \frac{\vartheta'}{2q}\right\| \\
&\geq \left\|\frac{s(r)}{q}\right\| - \left\|\frac{\vartheta'}{2q}\right\| \\
&\geq \frac{s(r)}{q} - \frac{1}{2q} \\
&\geq \frac{1}{2q}
\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα. Στην συνέχεια έστω $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant q/2$. Θα αποδείξουμε ότι $s(r_1) = s(r_2)$ αν και μόνο αν $r_1 = r_2$. Προς τούτο έχουμε

$$s(r_1) = s(r_2) \Leftrightarrow \left\| \frac{ar_1}{q} \right\| = \left\| \frac{ar_2}{q} \right\| \Leftrightarrow \pm\left(\frac{ar_1}{q} - m(r_1) \right) = \pm\left(\frac{ar_2}{q} - m(r_2) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ar_1 \equiv \pm ar_2 (modq) \Leftrightarrow r_1 \equiv \pm r_2 (modq).$$

όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το ότι οι a και q είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί. Αν $r_1 = r_2(modq)$ τότε καθώς $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant q/2$ είναι φανερό ότι $r_1 = r_2$. Αν τώρα $r_1 = -r_2(modq)$ έχουμε $q|(r_1 + r_2)$ και εύκολα βλέπουμε ότι αυτό ισχύει μόνο αν $r_1 = r_2 = q/2$ και η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.
Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\left\{ \left\| \frac{ar}{q} : 1 \leqslant r \leqslant \frac{q}{2} \right\| \right\} = \left\{ \frac{s(r)}{q} : 1 \leqslant r \leqslant \frac{q}{2} \right\} = \left\{ \frac{s}{q} : 1 \leqslant s \leqslant \frac{q}{2} \right\}.$$

και έτσι,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant r \leqslant q/2} \frac{1}{\|\alpha r\|} &\leqslant \sum_{1 \leqslant r \leqslant q/2} \frac{1}{\frac{s(r)}{q} - \frac{1}{2q}} \\
&= \sum_{1 \leqslant s \leqslant q/2} \frac{1}{\frac{s}{q} - \frac{1}{2q}} \\
&= 2q \sum_{1 \leqslant s \leqslant q/2} \frac{1}{2s-1} \\
&= 2q \sum_{1 \leqslant s \leqslant q/2} \frac{1}{s} \\
&\ll q \log q
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□