Θεώρημα 0.0.1 (Liouville). *Ισχύει η ταυτότητα*

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 = \frac{1}{6} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i + x_j)^4 + \frac{1}{6} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i - x_j)^4$$

και κάθε μη αρνητικός ακέραιος γράφεται ως άθροισμα 53 *τέταρτων δυνάμεων, δηλαδή,*

$$g(4) \leqslant 53.$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$(x_1 \pm x_2)^4 = (x_1 + x_2)^4 + (x_1 - x_2)^4 = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 2x_1^4$$

και έτσι

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i \pm x_j)^4 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i + x_j)^4 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i - x_j)^4$$

$$= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (2x_i^4 + 12x_i^2x_j^2 + 2x_j^4) = 6\sum_{i=1}^{4} x_i^4 + 12 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_i^2 x_j^2$$

$$= 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2.$$

Έτσι αποδείχτηκε η ταυτότητα του Liouville.

Έστω α ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Από το θεώρημα του Lagrange γνωρίζουμε ότι ο α γράφεται ως άθροισμα 4 τέλειων τετραγώνων, έστω $\alpha = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, και έτσι για τον $6\alpha^2$ έχουμε ότι

$$6\alpha^2 = 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i + x_j)^4 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} (x_i - x_j)^4$$

είναι το άθροισμα 12 τέταρτων δυνάμεων. Κάθε μη αρνητικός ακέραιος n μπορεί να γραφεί στην μορφή $n = 6q + r$, με $q \geq 0$ και $0 \leqslant r \leqslant 5$. Από το θεώρημα του Lagrange προκύπτει ότι $q = a_1^2 + ... + a_4^2$ και συνεπώς $6q = 6a_1^2 + ...6a_4^2$ είναι το άθροισμα 48 τετάρτων δυνάμεων.Καθώς όμως ο r είναι το άθροισμα 5 τετάρτων δυνάμεων, κάθε μία εκ των οποίων είναι ίση με 0^4 ή 1^4, συμπεραίνουμε ότι ο n είναι το άθροισμα 53 τετάρτων δυνάμεων.

$\square$