Θεώρημα 0.0.1. *(Μερική άθροιση) Έστω $u(n)$ και $f(n)$ αριθμητικές συναρτήσεις. Ορίζουμε την συνάρτηση αθροίσματος*

$$U(t) = \sum_{n \leqslant t} u(n).$$

Έστω a και b μη αρνητικοί ακέραιοι με $a \leqslant b$. Τότε

$$\sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n) = U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)(f(n+1) - f(n)).$$

Έστω x και y πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $0 \leqslant y < x$. Αν $f(t)$ είναι μια συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[x, y]$, τότε

$$\sum_{y < n \leqslant x} u(n)f(n) = U(x)f(x) - U(y)f(y) - \int_{y}^{x} U(t)f'(t)dt.$$

Συγκεκριμένα, αν $f(t)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[1, x]$, τότε

$$\sum_{n \leqslant x} u(n)f(n) = U(x)f(x) - \int_{1}^{x} U(t)f'(t)dt.$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n) \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} (U(n) - U(n-1))f(n) \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} U(n)f(n) - \sum_{n=a}^{b-1} U(n)f(n+1) \\
&= U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)(f(n+1) - f(n)).
\end{aligned}$$

Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x, y]$,τότε

$$f(n+1) - f(n) = \int_{n}^{n+1} f'(t)dt$$

και

$$U(n)(f(n+1) - f(n)) = \int_{n}^{n+1} U(t)f'(t)dt.$$

Έστω $a = [y]$ και $b = [x]$. Τότε

$$\begin{aligned}
&\sum_{y<n\leqslant x} u(n)f(n) \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n) \\
&= U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)(f(n+1) - f(n)) \\
&= U(x)f(b) - U(y)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} \int_{n}^{n+1} U(t)f'(t)dt \\
&= U(x)f(x) - U(y)f(y) - U(x)(f(x) - f(b)) - U(y)(f(a+1) - f(y)) - \int_{a+1}^{b} U(t)f'(t)dt \\
&= U(x)f(x) - U(y)f(y) - \int_{y}^{x} U(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

Αν η $f(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[1, x]$, τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} u(n)f(n) &= u(1)f(1) + \sum_{1<n\leqslant x} u(n)f(n) \\
&= u(1)f(1) + U(x)f(x) - U(1)f(1) - \int_{1}^{x} U(t)f'(t)dt \\
&= U(x)f(x) - \int_{1}^{x} U(t)f'(t)dt
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$