Θεώρημα 0.0.1 (Dirichlet)**.** *Έστω α και $Q \geqslant 1$ πραγματικοί αριθμοί. Υπάρχουν ακέραιοι a και q τέτοιοι ώστε*

$$1 \leqslant q \leqslant Q, \qquad (a, q) = 1,$$

και

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{qQ}.$$

Απόδειξη. Έστω $N = [Q]$. Αν υποθέσουμε ότι $\{q\alpha\} \in [0, 1/(N+1))$ για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό $q \leqslant N$ τότε θέτοντας $a = [q\alpha]$ έχουμε ότι

$$0 \leqslant \{q\alpha\} = q\alpha - [q\alpha] = q\alpha - a < \frac{1}{N+1},$$

και έτσι

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q(N+1)} < \frac{1}{qQ} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Ομοίως αν $\{q\alpha\} \in [N/(N+1), 1)$ για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό $q \leqslant N$ και αν $a = [q\alpha]+1$,τότε καθώς

$$\frac{N}{N+1} \leqslant \{q\alpha\} = q\alpha - a + 1 < 1$$

εύκολα προκύπτει ότι

$$|q\alpha - a| \leqslant \frac{1}{N+1}$$

και έτσι

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q(N+1)} < \frac{1}{qQ} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Αν τώρα

$$\{q\alpha\} \in \Big[\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\Big)$$

για όλους τους $q \in \ [1, N]$, τότε καθένας από τους N το πλήθος πραγματικούς αριθμούς $\{q\alpha\}$ ανήκει σε ένα από τα $N-1$ το πλήθος διαστήματα

$$\Big[\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1}\Big) \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

Από την Αρχή της Περιστεροφωλιάς, υπάρχουν ακέραιοι $i \in [1, N-1]$ και $q_1, q_2 \in [1, N]$ τέτοιοι ώστε

$$1 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant N$$

και

$$\{q_1\alpha\}, \{q_2\alpha\} \in \Big[\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1}\Big).$$

Θέτουμε

$$q = q_2 - q_1 \in [1, N-1]$$

και

$$a = [q_2\alpha] - [q_1\alpha]$$

και έχουμε ότι

$$|q\alpha - a| = |(q_2\alpha - [q_2\alpha]) - (q_1\alpha - [q_1\alpha])| = |\{q_2\alpha\} - \{q_1\alpha\}| < \frac{1}{N+1} < \frac{1}{Q}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

$\square$