0.1 Άπειρα γινόμενα

Αυτή είναι μια σύντομη εισαγωγή στα άπειρα γινόμενα και τα γινόμενα Euler.

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Το *n-οστό μερικό γινόμενο* αυτής της ακολουθίας είναι ο αριθμός

$$p_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

Αν το n τείνει στο άπειρο, η ακολουθία των n-οστών μερικών γινομένων συγκλίνει σε ένα όριο α διαφορετικό του μηδενός, τότε λέμε ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{n} \alpha_k$ συγκλίνει και

$$\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha$$

Λέμε ότι το άπειρο γινόμενο *αποκλίνει* αν το όριο της ακολουθίας των μερικών γινομένων δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι ίσο με μηδέν. Στην τελευταία περίπτωση λέμε ότι το άπειρο γινόμενο *αποκλίνει στο μηδέν.*

Έστω

$$\alpha_k = 1 + a_k.$$

Αν το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(a_k + 1)$ αποκλίνει ,τότε $a_k \neq -1$ για όλα τα k. Επιπλέον,

$$\lim_{k\to\infty}(1 + a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_{k-1}} = 1,$$

και έτσι

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Θεώρημα 0.1.1. *Έστω $a_k \geq 0$ για όλα τα k . Το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(a_k + 1)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ το n-οστό μερικό άθροισμα και έστω $p_n = \prod_{k=1}^{n}(a_k + 1)$ το n-οστό μερικό γινόμενο. Καθώς $a_n \geq 0$, οι ακολουθίες $\{s_n\}$ και $\{p_n\}$ είναι και οι δύο αύξουσες ,και $p_n \geq 1$ για κάθε n. Επειδή

$$1 + x \leqslant e^x$$

για όλους τους πραγματικούς x, προκύπτει

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} < \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{a_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a_k},$$

και συνεπώς

$$0 \leqslant s_n < p_n \leqslant e^{s_n}.$$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι η ακολουθία $\{p_n\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει. Αυτό ολοκληρώνρι και την απόδειξη. □

Λέμε ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$ *συγκλίνει απόλυτα* αν το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + |a_k|)$$

συκλίνει.

Θεώρημα 0.1.2. *Αν το άπειρο γινόμενο* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ *συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$$

και έστω

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|).$$

Αν το άπειρο γινόμενο συγκλίνει απόλυτα, τίτε η ακολουθία των μερικών γινομένων P_n συγκλίνει και συνεπώς η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}(P_n - P_{n-1})$$

συγκλίνει. Καθώς

$$0 \leqslant |p_n - p_{n-1}| = |a_n p_{n-1}| = \left| a_n \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k) \right| \leqslant |a_n| \prod_{k=1}^{n-1}(1+|a_k|) = |a_n| P_{n-1} = P_n - P_{n-1},$$

προκύπτει ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty} |p_n - p_{n-1}|$$

συγκλίνει, και άρα

$$\sum_{k=2}^{\infty}(p_n - p_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n}(p_k - p_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}(p_n - p_1)$$

συγκλίνει. Έτσι, η ακολουθία των μερικών γινομένων $\{p_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο όριο.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι το όριο αυτό είναι διάφορο του μηδενός. Αφού το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ συγκλίνει απόλυτα, έπεται από το προηγούμενο θεώρημα ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει, και έτσι οι αριθμοί a_k συγκλίνουν στο 0. Συνεπώς, για όλους τους αρκετά μεγάλους k,

$$|1+a_k| \geq 1/2$$

και

$$\left| \frac{-a_k}{1+a_k} \right| \leqslant 2|a_k|.$$

Προκύπτει με αυτόν τον τρόπο ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{-a_k}{1+a_k} \right|$$

συγκλίνει και άρα το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{a_k}{1+a_k}\right)$$

συγκλίνει απόλυτα. Από αυτό έπεται ότι η ακολουθία των n-οστών μερικών γινομένων

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{1+a_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}=\frac{1}{p_n}$$

συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο και άρα το όριο της ακολουθίας $\{p_n\}$ είναι μη μηδενικό. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ συγκλίνει. $\square$

Ένα *γινόμενο euler* είναι ένα άπειρο γινόμενο που εκτείνεται στους πρώτους αριθμούς. Συμβολίζουμε τα αθροίσματα και τα γινόμενα πάνω στους πρώτους με $\sum_p$ και $\prod_p$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 0.1.3. *Έστω $f(n)$ μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση που δεν είναι ταυτοτικά η μηδενική. Αν η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

συγκλίνει απόλυτα, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_{p}\left(1+f(p)+f(p^2)+\cdots\right)=\prod_{p}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right).$$

Αν η $f(n)$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_{p}\left(1-f(p)\right)^{-1}.$$

Απόδειξη. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει απόλυτα, τότε η σειρά

$$a_p=\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)$$

συγκλίνει απόλυτα για κάθε πρώτο p. Επίσης η σειρά

$$\sum_{p}|a_p|=\sum_{p}\left|\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right|\leqslant\sum_{p}\sum_{k=1}^{\infty}|f(p^k)|<\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|$$

συγκλίνει και έτσι προκύπτει ότι το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{p}(1+a_p)=\prod_{p}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right)$$

συγκλίνει απόλυτα. Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι συγκλίνει.

Έστω $\varepsilon>0$,και διαλέγουμε ακέραιο N_0 τέτοιον ώστε

$$\sum_{n>N_0}|f(n)|<\varepsilon.$$

Για κάθε θετικό ακέραιο n , έστω $P(n)$ ο μέγαλύτερος πρώτος παράγοντας του n. Τότε με $\sum_{P(n)\geq N}$ συμβολίζουμε το άθροισμα πάνω σε όλους τους ακεραίους οι οποίοι έχουν τουλάχιστον έναν πρώτο παράγοντα γνήσια μεγαλύτερο του N. Αφού η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε πρώτο αριθμό p, κάθε πεπερασμένο πλήθος αυτών των σειρών μπορεί να πολλαπλασιαστεί μαζί όρο προς όρο. Έστω $N \geq N_0$. Προκύπτει από την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης των ακεραίων σε γινόμενο πρώτων ότι

$$\prod_{p \leqslant N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \sum_{P(n) \geq N} f(n)$$

και άρα

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \prod_{p \leqslant N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{P(n) \geq N} f(n) \right|$$
$$= \left| \sum_{P(n) > N} f(n) \right| \leqslant \sum_{P(n) > N} |f(n)| \leqslant \sum_{n > N} |f(n)| \leqslant \sum_{n > N_0} |f(n)| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \lim_{N \to \infty} \prod_{p \leqslant N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \prod_{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right).$$

Αν $f(n)$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, τότε $f(p^k) = f(p)^k$ για όλους τους πρώτους p και όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους k. Εφόσον το $f(p^k)$ τείνει στο άπειρο όταν το k τείνει στο άπειρο, έχουμε ότι $|f(p)| < 1$. Αθροίζοντας την γεωμετρική πρόοδο έχουμε

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p)^k\right) = \frac{1}{1 - f(p)},$$

συνεπώς

$$\prod_{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \prod_{p} (1 - f(p))^{-1}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

$\square$