Λήμμα 0.0.1. *Έστω $\ell \geqslant 1$. Τότε,*

$$\Delta^{(\ell)}(f)(x) = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} f(x+j).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο ℓ. Αν το ζητούμενο ισχύει για ℓ, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\ell+1)}(f)(x) &= \Delta(\Delta^{(\ell)}(f)(x) \\
&= \Delta\left(\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} f(x+j)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} \Delta(f)(x+j) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} f(x+j+1) + \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell+1-j} \binom{\ell}{j} f(x+j) \\
&= \sum_{j=1}^{\ell+1} (-1)^{\ell+1-j} \binom{\ell}{j} f(x+j) + \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell+1-j} \binom{\ell}{j} f(x+j) \\
&= f(x+\ell+1) + \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{\ell+1-j} \left(\binom{\ell}{j-1} + \binom{\ell}{j}\right) f(x+j) + (-1)^{\ell+1} f(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\ell+1} (-1)^{(\ell+1)-j} \binom{\ell+1}{j} f(x+j)
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η γνωστη ταυτότητα $\binom{\ell+1}{j} = \binom{\ell}{j-1} + \binom{\ell}{j}$.

$\square$