Λήμμα 0.0.1. *Έστω $k \geqslant 2$ και $0 \leqslant \ell \leqslant k$. Υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $B_{0,\ell}, B_{1,\ell}, \ldots, B_{\ell-1,\ell}$ που εξαρτώνται μόνο από τους k και ℓ, τέτοιο ώστε*

$$x^{2\ell}T^{k-\ell} + \sum_{i=0}^{\ell-1} B_{i,\ell} x^{2i} T^{k-i} = \sum(2k),$$

για όλους τους ακεραίους x και T που ικανοποιούν την

$$x^2 \leqslant T.$$

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την ταυτότητα του Hilbert για εκθέτη $k+\ell$ με $r=5$ παίρνουμε:

$$(x_1^2 + \cdots + x_5^2)^{k+\ell} = \sum_{i=1}^{M_\ell} a_i (b_{i,1}x_1 + \cdots + b_{i,5}x_5)^{2k+2\ell},$$

όπου οι ακέραιοι M_l και $b_{i,j}$ και οι θετικοί ρητοί αριθμοί a_i εξαρτώνται μόνο από τους k και ℓ. Έστω U ένας μη αρνητικός ακέραιος. Από το θεώρημα του Lagrange, μπορούμε να γράψουμε

$$U = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

για κάποιους μη αρνητικούς ακέραιους x_1, x_2, x_3, x_4. Έστω $x_5 = x$. Από τα παραπάνω έχουμε την πολυωνυμική ταυτότητα

$$(x^2 + U)^{k+\ell} = \sum_{i=1}^{M_\ell} a_i (b_i x + c_i)^{2k+2\ell},$$

όπου οι αριθμοί M_ℓ, a_i και $b_i = b_{i,5}$ εξαρτώνται μόνο από τους k και ℓ, και οι ακέραιοι $c_i = b_{i,1}x_1 + \cdots + b_{i,4}x_4$ εξαρτώνται από τους k,l και U. Παρατηρούμε επίσης ότι $2\ell \leqslant k+\ell$ διότι $\ell \leqslant k$. Παραγωγίζοντας το πολυώνυμο στα αριστερά της σχέσης (;;) 2ℓ φορές παίρνουμε

$$\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}\Big((x^2+U)^{k+\ell}\Big) = \sum_{i=0}^{l} A_{i,l} x^{2i} (x^2+U)^{k-i},$$

όπου οι $A_{i,\ell}$ είναι θετικοί ακέραιοι που εξαρτώνται μόνο από τους k και ℓ. Παραγωγίζοντας τώρα το πολυώνυμο στο δεξιό μέλος της (··) 2ℓ φορές παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{2\ell}}{dx^{2\ell}}\left(\sum_{i=1}^{M_\ell} a_i (b_i x + c_i)^{2k+2\ell}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{M_\ell} (2k+1)(2k+2)\cdots(2k+2\ell) b_i^{2\ell} a_i (b_i x + c_i)^{2k} \\
&= \sum_{i=0}^{M_\ell} a_i' (b_i x + c_i)^{2k} \\
&= \sum_{i=0}^{M_\ell} a_i' y_i^{2k},
\end{aligned}$$

όπου $y_i = |b_i x + c_i|$ είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος και ο

$$a_i' = (2k+1)(2k+2)\cdots(2k+2\ell) b_i^{2\ell} a_i$$

είναι μη αρνητικός ρητός αριθμός ο οποιός εξαρτάται μόνο από τους k και ℓ. Έπεται ότι, αν ο x και ο U είναι ακέραιοι με $U \geq 0$, τότε υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι $y_1, \dots, y_{M_\ell}$ τέτοιοι ώστε

$$\sum_{i=0}^{\ell} A_{i,\ell} x^{2i} (x^2 + U)^{k-i} = \sum_{i=0}^{M_\ell} a'_i y_i^{2k}.$$

Θεωρούμε x και T μη αρνητικούς ακεραίους τέτοιους ώστε $x^2 \leqslant T$. Αφού ο $A_{\ell,\ell}$ είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός προκύπτει ότι $x^2 \leqslant T \leqslant A_{\ell,\ell} T$ και συνεπώς

$$U = A_{\ell,\ell} T - x^2 \geq 0$$

Με αυτή την επιλογή του U, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\ell} A_{i,\ell} x^{2i} (x^2 + U)^{k-i} &= \sum_{i=0}^{\ell} A_{i,\ell} x^{2i} (A_{\ell,\ell} T)^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{\ell} A_{i,\ell} A_{\ell,\ell}^{k-i} x^{2i} T^{k-i} \\
&= A_{\ell,\ell}^{k-\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} A_{i,\ell} A_{\ell,\ell}^{\ell-i-1} x^{2i} T^{k-i} \\
&= A_{\ell,\ell}^{k-\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell} B_{i,\ell} x^{2i} T^{k-i},
\end{aligned}$$

όπου $B_{\ell,\ell} = 1$ και $B_{i,\ell} = A_{i,\ell} A_{\ell,\ell}^{\ell-i-1}$ είναι θετικός ακέραιος για $i = 0, \dots, \ell - 1$. Θέτοντας τέλος

$$a''_i = \frac{a'_i}{A_{\ell,\ell}^{k-\ell+1}}$$

καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned}
x^{2\ell} T^{k-\ell} + \sum_{i=0}^{\ell-1} B_{\ell,\ell} x^{2i} T^{k-i} = \sum_{i=0}^{\ell} B_{i,\ell} x^{2i} T^{k-i} &= \frac{\sum_{i=0}^{\ell} A_{i,\ell} x^{2i} (x^2 + U)^{k-i}}{A_{\ell,\ell}^{k-\ell+1}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{M_\ell} a'_i y_i^{2k}}{A_{\ell,\ell}^{k-\ell+1}} = \sum_{i=1}^{M_\ell} a''_i y_i^{2k} = \sum(2k)
\end{aligned}$$

και η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε.

□