Λήμμα 0.0.1. *Έστω $n \geqslant 1$ και $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ οι ρητοί αριθμοί που ορίζονται από την (;;). Υπάρχουν διακεκριμένοι ρητοί αριθμοί $\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*$ και θετικοί ρητοί αριθμοί $\varrho_1^*, \ldots, \varrho_n^*$ τέτοιοι ώστε*

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^*)^k \varrho_j^* = c_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Απόδειξη. Από το λήμμα 1.2.4, για κάθε n-αδα διαφορετικών ανά δύο πραγματικών αριθμών $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ το σύστημα των n γραμμικων εξισώσεων στους n αγνώστους

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^k x_j = c_k \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

έχει μοναδική λύση $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$. Έστω $\Re$ το ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από όλα τα $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ τέτοια ώστε $\beta_i \neq \beta_j$ για $i \neq j$, και έστω επίσης $\Phi : \Re \to \mathbb{R}^n$ η συνάρτηση που στέλνει το $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ στο $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$. Από τον κανόνα του Cramer για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων, μπορούμε να εκφράσουμε κάθε ϱ_j ως ρητή συνάρτηση των $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$,και έτσι η συνάρτηση

$$\Phi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)$$

είναι συνεχής. Έστω $\mathbb{R}_+^n$ το ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από όλα τα σημεία $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με $x_i > 0$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.Από το λήμμα 1.2.6, αν οι $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ είναι οι n ρίζες του πολυωνύμου $H_n(x)$, έχουμε ότι $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \Re$ και

$$\Phi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

Καθώς το R_+^n είναι ανοικτό υποσύνολο του R^n, συμπεραίνουμε ότι το $\Phi^{-1}(\mathbb{R}_+^n)$ είναι μια ανοικτή περιοχή στο $\Re$. Έτσι τα σημεία με ρητές συντεταγμένες έιναι πυκνά στο $\Re$ και συνεπώς η περιοχή αυτή περιέχει ένα σημείο $(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*)$ με ρητές συντεταγμένες. Θεωρούμε τώρα το σημείο

$$(\varrho_1^*, \varrho_2^*, \ldots, \varrho_n^*) = \Phi(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Κάθε ένας από τους αριθμούς ϱ_i^* μπορεί να εκφραστεί ως ρητή συνάρτηση των ρητών αριθμών $(\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_n^*)$ και άρα είναι φανερό ότι κάθε ένας από τους θετικούς αριθμούς ϱ_i^* είναι ρητός, το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη του λήμματος.

□