Λήμμα 0.0.1. *Έστω α πραγματικός αριθμός, και έστω a και $q \geqslant 1$ ακέραιοι με $(a,q)=1$ και*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό $U \geqslant 1$ και κάθε φυσικό n, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{U} \min\left\{\frac{n}{k}, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right\} \ll \left(\frac{n}{q} + U + q\right)\log(2qU).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε τον k στην μορφή

$$k = hq + r,$$

όπου

$$1 \leqslant r \leqslant q$$

και

$$0 \leqslant h < \frac{U}{q}.$$

Τότε

$$S = \sum_{k=1}^{U} \min\left\{\frac{n}{k}, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right\} \leqslant \sum_{0 \leqslant h < U/q} \sum_{1 \leqslant r \leqslant q} \min\left\{\frac{n}{hq+r}, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\right\}.$$

Αν $h=0$ και $1 \leqslant r \leqslant q/2$, τότε από το λήμμα 2.3.3 προκύπτει

$$\sum_{r=1}^{q/2} \min\left\{\frac{n}{r}, \frac{1}{\|\alpha r\|}\right\} \leqslant \sum_{r=1}^{q/2} \frac{1}{\|\alpha r\|} \ll q \log q.$$

Για τους υπόλοιπους όρους, έχουμε

$$\frac{1}{hq+r} < \frac{2}{(h+1)q},$$

καθώς είτε $h \geq 1$ και

$$hq + r > hq \geq \frac{(h+1)q}{2},$$

είτε $h = 0, q/2 < r \leqslant q$, και

$$hq + r = r > \frac{q}{2} = \frac{(h+1)q}{2}.$$

Έτσι,

$$S \ll q \log q + \sum_{0 \leqslant h < U/q} \sum_{1 \leqslant r \leqslant q} \min\left\{\frac{n}{(h+1)q}, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{U}{q} + 1 \leqslant U + q \leqslant 2\max(q,U) \leqslant 2qU.$$

Υπολογίζοντας τώρα το εσωτερικό άθροισμα από το λήμμα 2.3.4 με $V = n/(h+1)q$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} S &\ll q\log q + \sum_{0\leqslant h<U/q}\sum_{1\leqslant r\leqslant q}\min\left\{\frac{n}{(h+1)q}, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\right\} \\ &\ll q\log q + \sum_{0\leqslant h<U/q}\left\{\frac{n}{(h+1)q} + q\log q\right\} \\ &\ll q\log q + \frac{n}{q}\sum_{0\leqslant h<U/q}\frac{1}{h+1} + \left(\frac{U}{q}+1\right)q\log q \\ &\ll q\log q + \frac{n}{q}\log\left(\frac{U}{q}+1\right) + U\log q + q\log q \\ &\ll \left(\frac{n}{q}+U+q\right)\log 2qU \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

□