Θεώρημα 0.0.1 (απλό θεώρημα Waring). *Για κάθε $k \geqslant 2$ ο $v(k)$ υπάρχει, και*

$$v(k) \leqslant 2^{k-1} + \frac{k!}{2}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον $(k-1)-$οστό τελεστή διαφορών στο πολυώνυμο $f(x) = x^k$ και χρησιμοποιώντας τα Λήμματα ;; και ;; έχουμε

$$\Delta^{(k-1)}(x^k) = k!x + m = \sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^{k-1-\ell}\binom{k-1}{\ell}(x+\ell)^k,$$

όπου $m = \frac{1+1+\cdots+1}{2}k! = \frac{k-1}{2}k! = (k-1)!\frac{k(k-1)}{2} = (k-1)!\binom{k}{2}$. Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι κάθε ακέραιος της μορφής $k!x+m$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ή διαφορά το πολύ

$$\sum_{\ell=0}^{k-1}\binom{k-1}{\ell} = (1+1)^{k-1} = 2^{k-1}$$

k-οστών δυνάμεων ακεραίων. Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε ακέραιο n μπορούμε να βρούμε ακέραιους q και r τέτοιους ώστε

$$n - m = k!q + r,$$

όπου

$$-\frac{k!}{2} < r \leqslant \frac{k!}{2}.$$

Καθώς ο r είναι το άθροισμα ή η διαφορά ακριβώς $|r|$ k-οστών δυνάμεων 1^k συμπεραίνουμε, ότι ο n μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα το πολύ $2^{k-1} + k!/2$ ακεραίων της μορφής $\pm x^k$.

$\square$