**Λήμμα 0.0.1.** *Αν* $0 < \alpha < 1/2$, *τότε*

$$2\alpha < \sin(\pi\alpha) < \pi\alpha.$$

*Απόδειξη.* Θέτουμε $s(\alpha) = \sin(\pi\alpha) - 2\alpha$. Τότε $s(0) = s(1/2) = 0$. Αν $s(\alpha) = 0$ για κάποιον $\alpha \in (0, 1/2)$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $s$ στα $[0, \alpha]$ και $[\alpha, 1/2]$, βλέπουμε ότι η συνάρτηση $s'(\alpha) = \pi\cos(\pi\alpha) - 2$ θα είχε τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(0, 1/2)$. Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση $\cos(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi/2)$ και συνεπώς η $s'(\alpha)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1/2)$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τα παραπάνω. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $s(\alpha) \neq 0$ για κάθε $\alpha \in (0, 1/2)$. Καθώς τώρα η $s(\alpha)$ είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο στο $(0, 1/2)$. Υπολογίζουμε $s(1/4) = (\sqrt{2} - 1)/2 > 0$, και έτσι προκύπτει ότι $s(\alpha) > 0$ για κάθε $\alpha \in (0, 1/2)$. Το άνω φράγμα τώρα προκύπτει από την γνωστή ανισότητα $|\sin(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

$\square$