Θεώρημα 0.0.1. *Αν το $\mathbb{N}$ χρωματιστεί πεπερασμένα τότε υπάρχουν a και d τέτοιοι ώστε οι a και $a + d^2$ να έχουν το ίδιο χρώμα.*

Απόδειξη.

Ορισμός 0.0.2. *Λέμε ότι ένα σημείο a_i είναι συσχετισμένο με το a αν $a_i - a = d_i^2$ για κάποιον d_i.*

Ορισμός 0.0.3. *Λέμε ότι ένα σημεία $a_1, a_2, \ldots, a_r$ είναι χρωματικά συσχετισμένα με το a αν κάθε a_i είναι συσχετισμένο με το a και τα a_i έχουν ανά δύο διαγορετικό χρώμα.*

Ισχυρισμός: Για κάθε $r \leqslant k$ υπάρχει $N = N(k, r) \in \mathbb{N}$ τέτοιος αν το $[N]$ χρωματιστεί με k χρώματα θα ισχύει το εξής: Το $[N]$ περιέχει σημεία a και $a + d^2$ που έχουν το ίδιο χρώμα ή το $[N]$ περιέχει σημείο a και σημεία $a_1, a_2, \ldots, a_r$ τα οποία είναι χρωματικά συσχετισμένα με το a.

Παρατήρούμε ότι αν ο ισχυρισμός είναι αληθής το Θεώρημα είναι μία άμεση συνέπεια του. Πράγματι θέτοντας $r = k$ βρίσκουμε $N(k, k) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει μια εκ των δύο περιπτώσεων του ισχυρισμού. Στην πρώτη περίπτωση το συμπέρασμα είναι άμεσο και στην δεύτερη από την Αρχή του Περιστερώνα προκύπτει ότι το a έχει το ίδιο χρώμα με κάποιο a_i και έχουμε το ζητούμενο.

Απόδειξη Ισχυρισμού: Με επαγωγή στο r. Για $r = 1$ μπορούμε να διαλέξουμε οποιονδήποτε $N \geq 2$. Τότε για $a = 1$ και $a_1 = 2 = a + 1^2$ ο ισχυρισμός αληθεύει τετριμμένα. Υποθέτουμε ότι έχουμε βρει $N = N(k, r-1) \in \mathbb{N}$ που ικανοποιεί την υπόθεση μας για $r - 1$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει N' που ικανοποιεί την υπόθεση για το r.

Αρχικά χωρίζουμε το $\mathbb{N}$ σε μπλοκ μήκους N, έστω $B_s = \{(s-1)N+1, (s-1)N+2, \ldots, sN\}$ για $s = 1, 2, \ldots$ και θέτουμε $l = \lfloor 2\sqrt{N} \rfloor$. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο k^N τρόποι να χρωματιστεί κάθε μπλοκ και συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το γραμικό θεώρημα Van Der Waerden στα μπλοκ και να βρούμε άριθμητική πρόοδο΄ από μπλοκ $B_s, B_{s+t}, \ldots, B_{s+lt}$ τα οποία έχουν χρωματιστεί όμοια. Διαλέγουμε τώρα $N' = (s+lt)N$, δηλαδή τέτοιο ώστε το $[N']$ να περιέχει όλα τα l το πλήθος μπλοκ. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $[N']$ δεν περιέχει a και d τέτοιους ώστε οι a και $a + d^2$ να έχουν το ίδιο χρώμα καθώς τότε το συμπέρασμα θα ήταν άμεσο. Από την επιλογή του N προκύπτει ότι το μπλοκ B_s περιέχει σημείο a και $r-1$ χρωματικά συσχετισμένα με το a σημεία $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$. Από την υπόθεση μας τα χρώματα των $a, a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$ είναι διαφορετικά.

Ισχυρισμός 1: Τα σημεία $a_i + 2d_iNt$ για $1 \leqslant i \leqslant r-1$ και το σημείο a είναι χρωματικά συσχετισμένα με το σημείο $a - (Nt)^2$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$a_i + 2d_iNt - (a - (Nt)^2) = d_i^2 + 2d_iNt + (Nt)^2 = (d_i + Nt)^2$$

και

$$a - (a - (Nt)^2) = (Nt)^2.$$

Έτσι τα σημεία ειναι συσχετισμένα με το $a - (Nt)^2$.

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι $a_i - a = d_i^2 \leqslant N$ και άρα $2d_i \leqslant l$ συνεπώς το μπλοκ B_{s+2d_it} έχει χρωματιστεί όμοια με το μπλοκ B_s. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι

$$B_{s+2d_it} = \{(s + 2d_it - 1)N + 1, (s + 2d_it - 1)N + 2, \ldots, (s + 2d_it)N\} = B_s + 2d_itN$$

και έτσι το σημείο $a_i + 2d_iNt$ έχει το ίδιο χρώμα με το στοιχείο a_i. Άρα τα σημεία $a_i + 2d_iNt$ για $1 \leqslant i \leqslant r-1$ καθώς και το a έχουν διαφορετικά χρώματα. Έτσι δείξαμε ότι τα r σημεια $a_i + 2d_iNt$ και a είναι χρωματικά συσχετισμένα με το σημείο $a - (Nt)^2$ και η απόδειξη του Ισχυρισμού 1 ολοκληρώθηκε.

Παρατήρηση:Στην απόδειξη παραπάνω έχουμε υποθέσει ότι ο $a - (Nt)^2$ είναι θετικός. Στην περίπτωση που δεν είναι, υπάρχει θετικός M τέτοιος ώστε $a - (Nt)^2 \geq -M$ και η παραπάνω κατασκευή μπορεί να γίνει για τα μπλοκ $B'_s = M + B_s$ εξασφαλίζοντας με αυτόν τον τρόπο ότι ο $a - (Nt)^2$ είναι θετικός .

Από τα παραπάνω έπεται άμεσα ο Ισχυρισμός και κατ΄ επέκταση και το Θεώρημα.

$\square$