0.1 Μερική άθροιση

Θεώρημα 0.1.1. *(Μερική άθροιση) Έστω $u(n)$ και $f(n)$ αριθμητικές συναρτήσεις. Ορίζουμε την συνάρτηση αθροίσματος*

$$U(t) = \sum_{n \leqslant t} u(n).$$

Έστω a και b μη αρνητικοί ακέραιοι με $a \leqslant b$. Τότε

$$\sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n) = U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)(f(n+1) - f(n)).$$

Έστω x και y πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $0 \leqslant y < x$. Αν $f(t)$ είναι μια συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[x, y]$, τότε

$$\sum_{y < n \leqslant x} u(n)f(n) = U(x)f(x) - U(y)f(y) - \int_y^x U(t)f'(t)dt.$$

Συγκεκριμένα, αν $f(t)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[1, x]$, τότε

$$\sum_{n \leqslant x} u(n)f(n) = U(x)f(x) - \int_1^x U(t)f'(t)dt.$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n) \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} (U(n) - U(n-1))f(n) \\
&= \sum_{n=a+1}^{b} U(n)f(n) - \sum_{n=a}^{b-1} U(n)f(n+1) \\
&= U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)(f(n+1) - f(n)).
\end{aligned}$$

Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x, y]$,τότε

$$f(n+1) - f(n) = \int_n^{n+1} f'(t)dt$$

και

$$U(n)(f(n+1) - f(n)) = \int_n^{n+1} U(t)f'(t)dt.$$

Έστω $a = [y]$ και $b = [x]$. Τότε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{y<n\leqslant x} u(n)f(n)\\
&= \sum_{n=a+1}^{b} u(n)f(n)\\
&= U(b)f(b) - U(a)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} U(n)(f(n+1) - f(n))\\
&= U(x)f(b) - U(y)f(a+1) - \sum_{n=a+1}^{b-1} \int_{n}^{n+1} U(t)f'(t)dt\\
&= U(x)f(x) - U(y)f(y) - U(x)(f(x) - f(b)) - U(y)(f(a+1) - f(y)) - \int_{a+1}^{b} U(t)f'(t)dt\\
&= U(x)f(x) - U(y)f(y) - \int_{y}^{x} U(t)f'(t)dt.
\end{aligned}
$$

Αν η $f(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[1, x]$, τότε

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} u(n)f(n) &= u(1)f(1) + \sum_{1<n\leqslant x} u(n)f(n)\\
&= u(1)f(1) + U(x)f(x) - U(1)f(1) - \int_{1}^{x} U(t)f'(t)dt\\
&= U(x)f(x) - \int_{1}^{x} U(t)f'(t)dt
\end{aligned}
$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

0.2 Η συνάρτηση διαιρετών

Μία αριθμητική συνάρτηση $f(n)$ είναι *πολλαπλασιαστική* αν

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

όποτε οι αριθμοί m, n είναι μεταξύ τους πρώτοι θετικοί ακέραιοι. Καθώς $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$ έχουμε $f(1) = 1$ ή $f(1) = 0$. Αν $f(1) = 0$ τότε $f(n) = f(n \cdot 1) = f(n)f(1) = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Έτσι, αν μια αριθμητική συνάρτηση f δεν είναι ταυτοτικά η μηδενική, τότε $f(1) = 1$.

Θεώρημα 0.2.1. *Έστω $f(n)$ μια πολλαπλασιαστική αριθμητική συνάρτηση. Αν*

$$\lim_{p^k\to\infty} f(p^k) = 0$$

καθώς το p^k διατρέχει την ακολουθία όλων των πρώτων αριθμών, τότε

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

Απόδειξη. Υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος δυνάμεις πρώτων p^k τέτοιες ώστε $|f(p^k)| \geq 1$. Έστω

$$A = \prod_{|f(p^k)| \geq 1} |f(p^k)|.$$

Τότε είναι προφανές ότι $A \geq 1$. Έστω $0 < \varepsilon < A$. Υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος δυνάμεις πρώτων p^k τέτοιες ώστε $|f(p^k)| \geq \varepsilon/A$. Προκύπτει λοιπόν ότι υπάρχουν πεπερασμένοι ακέραιοι n τέτοιοι ώστε

$$|f(p^k)| \geq \varepsilon/A$$

για κάθε δύναμη πρώτου p^k που διαιρεί το n. Συνεπώς αν το n είναι αρκετά μεγάλο, ο n διαιρείται από τουλάχιστον μια δύναμη πρώτου p^k τέτοια ώστε $|f(p^k)| \leqslant \varepsilon/A$, και έτσι μπορούμε να γράψουμε τον n στην μορφή

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} p_i^{k_i} \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} p_i^{k_i}$$

όπου οι $p_1, \ldots, p_{r+s+t}$ είναι είναι ανά δύο διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$1 \leqslant |f(p^{k_i})|$$

για $i = 1, \ldots, r$,

$$\frac{\varepsilon}{A} \leqslant |f(p^{k_i})| \geq 1$$

για $i = r+1, \ldots, r+s$,

$$|f(p^{k_i})| \leqslant \frac{\varepsilon}{A}$$

για $i = r+s+1, \ldots, r+s+t$ και $t \geq 1$. Έπεται από τα παραπάνω αφού η $f(n)$ είναι πολλαπλασιαστική ότι

$$|f(n)| = \prod_{i=1}^{r} |f(p_i^{k_i})| \prod_{i=r+1}^{r+s} |f(p_i^{k_i})| \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} |f(p_i^{k_i})| < A(\varepsilon/A)^t \leqslant \varepsilon$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Η *συνάρτηση διαιρετών* $d(n)$ μετράει το πλήθος των θετικών διαιρετών του n. Για παράδειγμα, $d(n) = 1$ αν και μόνο αν $n = 1$, και $d(n) = 2$ αν ακι μόνο ο n είανι πρώτος. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι είναι και πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

Θεώρημα 0.2.2. *Ισχύει*

$$d(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Απόδειξη. θεωρούμε την συνάρτηση $f(n) = d(n)/n$. Για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $f(n) = o(1)$. Καθώς οι αριθμητικές συναρτήσεις $d(n)$ και n είναι πολλαπλασιαστικές, προκύπτει ότι και η $f(n)$ είναι πολλαπλασιαστική. Απο το θεώρημα 0.2.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{p^k \to \infty} f(p^k) = 0.$$

Αφού η ποσότητα $(k+1)/2^{k\varepsilon/2}$ είναι φραγμένη για $k \geq 1$, έχουμε

$$f(p^k) = \frac{d(p^k)}{p^{k\varepsilon}} = \frac{k+1}{p^{k\varepsilon}} = \left(\frac{k+1}{p^{k\varepsilon/2}}\right)\left(\frac{1}{p^{k\varepsilon/2}}\right) \leqslant \left(\frac{k+1}{2^{k\varepsilon/2}}\right)\left(\frac{1}{p^{k\varepsilon/2}}\right) \ll \left(\frac{1}{p^k}\right)^{\varepsilon/2}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

0.3 Άπειρα γινόμενα

Αυτή είναι μια σύντομη εισαγωγή στα άπειρα γινόμενα και τα γινόμενα Euler.

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Το *n-οστό μερικό γινόμενο* αυτής της ακολουθίας είναι ο αριθμός

$$p_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

Αν το n τείνει στο άπειρο, η ακολουθία των n-οστών μερικών γινομένων συγκλίνει σε ένα όριο α διαφορετικό του μηδενός, τότε λέμε ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{n} \alpha_k$ συγκλίνει και

$$\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \alpha$$

Λέμε ότι το άπειρο γινόμενο *αποκλίνει* αν το όριο της ακολουθίας των μερικών γινομένων δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι ίσο με μηδέν. Στην τελευταία περίπτωση λέμε ότι το άπειρο γινόμενο *αποκλίνει στο μηδέν.*

Έστω

$$\alpha_k = 1 + a_k.$$

Αν το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(a_k + 1)$ αποκλίνει ,τότε $a_k \neq -1$ για όλα τα k. Επιπλέον,

$$\lim_{k\to\infty}(1 + a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_{k-1}} = 1,$$

και έτσι

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Θεώρημα 0.3.1. *Έστω $a_k \geq 0$ για όλα τα k . Το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(a_k + 1)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ το n-οστό μερικό άθροισμα και έστω $p_n = \prod_{k=1}^{n}(a_k + 1)$ το n-οστό μερικό γινόμενο. Καθώς $a_n \geq 0$, οι ακολουθίες $\{s_n\}$ και $\{p_n\}$ είναι και οι δύο αύξουσες ,και $p_n \geq 1$ για κάθε n. Επειδή

$$1 + x \leqslant e^x$$

για όλους τους πραγματικούς x, προκύπτει

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} < \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{a_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a_k},$$

και συνεπώς

$$0 \leqslant s_n < p_n \leqslant e^{s_n}.$$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι η ακολουθία $\{p_n\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει. Αυτό ολοκληρώνρι και την απόδειξη. □

Λέμε ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_k)$ *συγκλίνει απόλυτα* αν το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + |a_k|)$$

συκλίνει.

Θεώρημα 0.3.2. *Αν το άπειρο γινόμενο* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ *συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$$

και έστω

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|).$$

Αν το άπειρο γινόμενο συγκλίνει απόλυτα, τίτε η ακολουθία των μερικών γινομένων P_n συγκλίνει και συνεπώς η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}(P_n - P_{n-1})$$

συγκλίνει. Καθώς

$$0 \leqslant |p_n - p_{n-1}| = |a_n p_{n-1}| = \left|a_n \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)\right| \leqslant |a_n| \prod_{k=1}^{n-1}(1+|a_k|) = |a_n| P_{n-1} = P_n - P_{n-1},$$

προκύπτει ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty}|p_n - p_{n-1}|$$

συγκλίνει, και άρα

$$\sum_{k=2}^{\infty}(p_n - p_{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}(p_k - p_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}(p_n - p_1)$$

συγκλίνει. Έτσι, η ακολουθία των μερικών γινομένων $\{p_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο όριο.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι το όριο αυτό είναι διάφορο του μηδενός. Αφού το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ συγκλίνει απόλυτα, έπεται από το προηγούμενο θεώρημα ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει, και έτσι οι αριθμοί a_k συγκλίνουν στο 0. Συνεπώς, για όλους τους αρκετά μεγάλους k,

$$|1+a_k| \geq 1/2$$

και

$$\left|\frac{-a_k}{1+a_k}\right| \leqslant 2|a_k|.$$

Προκύπτει με αυτόν τον τρόπο ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{-a_k}{1+a_k}\right|$$

συγκλίνει και άρα το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{a_k}{1+a_k}\right)$$

συγκλίνει απόλυτα. Από αυτό έπεται ότι η ακολουθία των n-οστών μερικών γινομένων

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{1+a_k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)}=\frac{1}{p_n}$$

συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο και άρα το όριο της ακολουθίας $\{p_n\}$ είναι μη μηδενικό. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το άπειρο γινόμενο $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ συγκλίνει. □

Ένα *γινόμενο euler* είναι ένα άπειρο γινόμενο που εκτείνεται στους πρώτους αριθμούς. Συμβολίζουμε τα αθροίσματα και τα γινόμενα πάνω στους πρώτους με $\sum_p$ και $\prod_p$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 0.3.3. *Έστω $f(n)$ μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση που δεν είναι ταυτοτικά η μηδενική. Αν η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

συγκλίνει απόλυτα, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_{p}\left(1+f(p)+f(p^2)+\cdots\right)=\prod_{p}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}f(p^k)\right).$$

Αν η $f(n)$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\prod_{p}\left(1-f(p)\right)^{-1}.$$

Απόδειξη. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει απόλυτα, τότε η σειρά

$$a_p=\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)$$

συγκλίνει απόλυτα για κάθε πρώτο p. Επίσης η σειρά

$$\sum_p |a_p|=\sum_p\left|\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right|\leqslant\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}|f(p^k)|<\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|$$

συγκλίνει και έτσι προκύπτει ότι το άπειρο γινόμενο

$$\prod_p(1+a_p)=\prod_p\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}f(p^k)\right)$$

συγκλίνει απόλυτα. Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι συγκλίνει.

Έστω $\varepsilon>0$,και διαλέγουμε ακέραιο N_0 τέτοιον ώστε

$$\sum_{n>N_0}|f(n)|<\varepsilon.$$

Για κάθε θετικό ακέραιο n , έστω $P(n)$ ο μεγαλύτερος πρώτος παράγοντας του n. Τότε με $\sum_{P(n)\geq N}$ συμβολίζουμε το άθροισμα πάνω σε όλους τους ακεραίους οι οποίοι έχουν τουλάχιστον έναν πρώτο παράγοντα γνήσια μεγαλύτερο του N. Αφού η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)$ συγκλίνει απόλυτα για κάθε πρώτο αριθμό p, κάθε πεπερασμένο πλήθος αυτών των σειρών μπορεί να πολλαπλασιαστεί μαζί όρο προς όρο. Έστω $N \geq N_0$. Προκύπτει από την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης των ακεραίων σε γινόμενο πρώτων ότι

$$\prod_{p \leqslant N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \sum_{P(n) \geq N} f(n)$$

και άρα

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \prod_{p \leqslant N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \sum_{P(n) \geq N} f(n) \right| \\ = \left| \sum_{P(n) > N} f(n) \right| \leqslant \sum_{P(n) > N} |f(n)| &\leqslant \sum_{n > N} |f(n)| \leqslant \sum_{n > N_0} |f(n)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \lim_{N \to \infty} \prod_{p \leqslant N} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \prod_{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right).$$

Αν $f(n)$ είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, τότε $f(p^k) = f(p)^k$ για όλους τους πρώτους p και όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους k. Εφόσον το $f(p^k)$ τείνει στο άπειρο όταν το k τείνει στο άπειρο, έχουμε ότι $|f(p)| < 1$. Αθροίζοντας την γεωμετρική πρόοδο έχουμε

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p)^k\right) = \frac{1}{1 - f(p)},$$

συνεπώς

$$\prod_{p} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)\right) = \prod_{p} (1 - f(p))^{-1}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

$\square$