Λήμμα 0.0.1. *Το n-οστό πολυώνυμο Hermite $H_n(x)$ έχει n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο n. Το λήμμα είναι φανερό για $n = 0$ και $n = 1$ καθώς $H_1(x) = x$. Έστω $n \geq 1$, και υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για n. Τότε το $H_n(x)$ έχει n το πλήθος διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ρίζες οι οποίες θα είναι και απλές. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί

$$\beta_n < \cdots < \beta_2 < \beta_1$$

τέτοιοι ώστε

$$H_n(\beta_j) = 0$$

και

$$H_n'(\beta_j) \neq 0$$

για $j = 1, \ldots, n$. Καθώς το $H_n(x)$ είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού n, προκύπτει ότι

$$\lim_{x \to \infty} H_n(x) = \infty.$$

και έτσι

$$H_n'(\beta_1) > 0.$$

Από το θεώρημα του Rolle προκύπτει ότι κάθε ένα από τα διαστήματα (β_j, β_{j-1}) για $j = 2, \ldots, n$ περιέχει ακριβώς μία από τις $n-1$ το πλήθος ρίζες του πολυωνύμου $H_n'(x)$. Από αυτό εύκολα προκύπτει ότι

$$(-1)^{j+1} H_n'(\beta_j) > 0$$

για $j = 1, \ldots, n$. Από την αναδρομική σχέση $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{1}{2}H_n'(x)$ θέτοντας $x = \beta_j$ έχουμε ότι

$$H_{n+1}(\beta_j) = -\frac{1}{2} H_n'(\beta_j),$$

και έτσι

$$(-1)^j H_{n+1}(\beta_j) = \frac{(-1)^{j+1}}{2} H_n'(\beta_j) > 0$$

για $j = 1, \ldots, n$. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα Bolzano σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα $[\beta_j, \beta_{j-1}]$ για $j = 2, \ldots, n$, παίρνουμε ότι το πολυώνυμο $H_{n+1}(x)$ έχει μία ρίζα β_j^* σε καθένα από τα διαστήματα (β_j, β_{j-1}). Επίσης καθώς $\lim_{x\to\infty} H_{n+1}(x) = \infty$ και $H_{n+1}(\beta_1) < 0$ βλέπουμε ότι το πολυώνυμο $H_{n+1}(x)$ έχει μία ρίζα $\beta_1^* > \beta_1$. Αν τώρα ο n είναι άρτιος, $H_{n+1}(\beta_n) > 0$. Επιπλέον ο $n+1$ έιναι περιττός αριθμός και συνεπώς το για το H_{n+1} ως πολυώνυμο περιττού βαθμού ισχύει ότι $\lim_{x\to\infty} H_{n+1}(x) = -\infty$. Πάλι από το θεώρημα Bolzano παίρνουμε ότι το $H_{n+1}(x)$ έχει μία ρίζα $\beta_{n+1}^* < \beta_n$. Με ανάλογο συλλογισμό προκύπτει ότι το $H_{n+1}(x)$ έχει μία ρίζα $\beta_{n+1}^* < \beta_n$ αν το n ειναι περιττος. Σε κάθε λοιπον περίπτωση το $H_{n+1}(x)$ έχει $n+1$ το πλήθος και διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ρίζες.

□