Μία αριθμητική συνάρτηση $f(n)$ είναι *πολλαπλασιαστική* αν

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

όποτε οι αριθμοί m, n είναι μεταξύ τους πρώτοι θετικοί ακέραιοι. Καθώς $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2$ έχουμε $f(1) = 1$ ή $f(1) = 0$. Αν $f(1) = 0$ τότε $f(n) = f(n \cdot 1) = f(n)f(1) = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Έτσι, αν μια αριθμητική συνάρτηση f δεν είναι ταυτοτικά η μηδενική, τότε $f(1) = 1$.

Θεώρημα 0.0.1. *Έστω $f(n)$ μια πολλαπλασιαστική αριθμητική συνάρτηση. Αν*

$$\lim_{p^k \to \infty} f(p^k) = 0$$

καθώς το p^k διατρέχει την ακολουθία όλων των πρώτων αριθμών, τότε

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = 0.$$

Απόδειξη. Υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος δυνάμεις πρώτων p^k τέτοιες ώστε $|f(p^k)| \geq 1$. Έστω

$$A = \prod_{|f(p^k)| \geq 1} |f(p^k)|.$$

Τότε είναι προφανές ότι $A \geq 1$. Έστω $0 < \varepsilon < A$. Υπάρχουν πεπερασμένες το πλήθος δυνάμεις πρώτων p^k τέτοιες ώστε $|f(p^k)| \geq \varepsilon/A$. Προκύπτει λοιπόν ότι υπάρχουν πεπερασμένοι ακέραιοι n τέτοιοι ώστε

$$|f(p^k)| \geq \varepsilon/A$$

για κάθε δύναμη πρώτου p^k που διαιρεί το n. Συνεπώς αν το n είναι αρκετά μεγάλο, ο n διαιρείται από τουλάχιστον μια δύναμη πρώτου p^k τέτοια ώστε $|f(p^k)| \leqslant \varepsilon/A$, και έτσι μπορούμε να γράψουμε τον n στην μορφή

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} p_i^{k_i} \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} p_i^{k_i}$$

όπου οι $p_1, \ldots, p_{r+s+t}$ είναι είναι ανά δύο διαφορετικοί πρώτοι αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$1 \leqslant |f(p^{k_i})|$$

για $i = 1, \ldots, r$,

$$\frac{\varepsilon}{A} \leqslant |f(p^{k_i})| \geq 1$$

για $i = r+1, \ldots, r+s$,

$$|f(p^{k_i})| \leqslant \frac{\varepsilon}{A}$$

για $i = r+s+1, \ldots, r+s+t$ και $t \geq 1$. Έπεται από τα παραπάνω αφού η $f(n)$ είναι πολλαπλασιαστική ότι

$$|f(n)| = \prod_{i=1}^{r} |f(p_i^{k_i})| \prod_{i=r+1}^{r+s} |f(p_i^{k_i})| \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} |f(p_i^{k_i})| < A(\varepsilon/A)^t \leqslant \varepsilon$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Η *συνάρτηση διαιρετών* $d(n)$ μετράει το πλήθος των θετικών διαιρετών του n. Για παράδειγμα, $d(n) = 1$ αν και μόνο αν $n = 1$, και $d(n) = 2$ αν ακι μόνο ο n είανι πρώτος. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι είναι και πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

Θεώρημα 0.0.2. *Ισχύει*

$$d(n) \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Απόδειξη. θεωρούμε την συνάρτηση $f(n) = d(n)/n$. Για να έχουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $f(n) = o(1)$. Καθώς οι αριθμητικές συναρτήσεις $d(n)$ και n είναι πολλαπλασιαστικές, προκύπτει ότι και η $f(n)$ είναι πολλαπλασιαστική. Απο το θεώρημα 0.0.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{p^k \to \infty} f(p^k) = 0.$$

Αφού η ποσότητα $(k+1)/2^{k\varepsilon/2}$ είναι φραγμένη για $k \geq 1$, έχουμε

$$f(p^k) = \frac{d(p^k)}{p^{k\varepsilon}} = \frac{k+1}{p^{k\varepsilon}} = \left(\frac{k+1}{p^{k\varepsilon/2}}\right)\left(\frac{1}{p^{k\varepsilon/2}}\right) \leqslant \left(\frac{k+1}{2^{k\varepsilon/2}}\right)\left(\frac{1}{p^{k\varepsilon/2}}\right) \ll \left(\frac{1}{p^k}\right)^{\varepsilon/2}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □