Λήμμα 0.0.1. *Έστω α πραγματικός αριθμός και έστω a και $q \geqslant 1$ ακέραιοι με $(a,q)=1$ και*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Τότε, για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό V και κάθε μη αρνητικό ακέραιο h, έχουμε

$$\sum_{r=1}^{q} \min\left\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\right\} \ll V + q\log q.$$

Απόδειξη. Έστω

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\vartheta}{q},$$

όπου

$$-1 \leqslant \vartheta \leqslant 1.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \alpha(hq+r) &= ah + \frac{ar}{q} + \frac{\vartheta h}{q} + \frac{\vartheta r}{q^2} \\ &= ah + \frac{ar}{q} + \frac{[\vartheta h] + \{\vartheta h\}}{q} + \frac{\vartheta r}{q^2} \\ &= ah + \frac{ar + [\vartheta h] + \delta(r)}{q}, \end{aligned}$$

όπου $-1 \leqslant \delta(r) = \{\vartheta h\} + \frac{\vartheta r}{q} < 2$ καθώς $0 \leqslant \{\vartheta h\} < 1$ και $-1 \leqslant \frac{-r}{q} \leqslant \frac{\vartheta r}{q} \leqslant \frac{r}{q} \leqslant 1$. Για κάθε $r = 1.\ldots,q$ υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος r' τέτοιος ώστε

$$\{\alpha(hq+r)\} = \frac{ar + [\vartheta h] + \delta(r)}{q} - r'.$$

Έστω

$$0 \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{q}.$$

Αν

$$t \leqslant \{\alpha(hq+r)\} \leqslant t + \frac{1}{q},$$

τότε

$$qt \leqslant ar - qr' + [\vartheta h] + \delta(r) \leqslant qt + 1.$$

Από αυτό έπεται ότι

$$ar - qr' \leqslant qt - [\vartheta h] + 1 - \delta(r) \leqslant qt - [\vartheta h] + 2$$

και

$$ar - qr' \geq qt - [\vartheta h] - \delta(r) > qt - [\vartheta h] - 2.$$

Συνεπώς, ο $ar - qr'$ βρίσκεται στο ημιανοικτό διάστημα J μηκους 4, όπου

$$J = (qt - [\vartheta h] - 2, qt - [\vartheta h] + 2].$$

Αυτό το διάστημα περιέχει ακριβώς 4 ακεραίους. Αν $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant q$ και

$$ar_1 - qr_1' = ar_2 - qr_2',$$

τότε

$$ar_1 \equiv ar_2 (mod q)$$

και καθώς $(a, q) = 1$ προκύπτει ότι

$$r_1 = r_2.$$

Έτσι, για κάθε $t \in [0, (q-1)/q]$, υπάρχουν 4 το πολύ ακέραιοι $r \in [1, q]$ τέτοιοι ώστε

$$\{\alpha(hq + r)\} \in [t, t + (1/q)].$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|\alpha(hq + r)\| \in [t, t + (1/q)]$$

αν και μόνο αν

$$\{\alpha(hq + r)\} \in [t, t + (1/q)].$$

ή

$$1 - \{\alpha(hq + r)\} \in [t, t + (1/q)].$$

Η τελευταία περίπτωση είναι ισοδύναμη με

$$0 \leqslant t' = 1 - \frac{1}{q} - t \leqslant 1 - \frac{1}{q}.$$

Προκύπτει ότι για κάθε $\in [0, (q-1)/q]$, υπάρχουν το πολύ 8 ακέραιοι $r \in [1, q]$ με

$$\|\alpha(hq + r)\| \in [t, t + (1/q)].$$

Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε $J(s) = [s/q, (s+1)/q]$ για $s = 0, 1, \ldots,$ έχουμε ότι

$$\|\alpha(hq + r)\| \in J(s)$$

για 8 το πολύ $r \in [1, q]$. Εφαρμόζουμε τώρα αυτό για να εκτιμήσουμε το άθροισμα

$$\sum_{r=1}^{q} \min\Big\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq + r)\|}\Big\}.$$

Αν $\|\alpha(hq + r)\| \in J(0) = [0, 1/q]$, χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\min\Big\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq + r)\|}\Big\} \leqslant V.$$

Αν τώρα $\|\alpha(hq + r)\| \in J(s)$ για κάποιον $s \geq 1$,χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\sum_{r=1}^{q} \min\Big\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq + r)\|}\Big\} \leqslant \frac{1}{\|\alpha(hq + r)\|} \leqslant \frac{q}{s}.$$

Καθώς $\|\alpha(hq + r)\| \in J(s)$ μόνο για $s < q/2$, αφού $0 \leqslant \|\alpha(hq + r)\| \leqslant 1/2$, προκύπτει ότι

$$\sum_{r=1}^{q} \min\Big\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq + r)\|}\Big\} \leqslant 8V + 8 \sum_{1 \leqslant s < q/2} \frac{q}{s} \ll V + q \log q$$

το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη του λήμματος.

$\square$