Στα παρακάτω συμβολίζουμε με $d(A_n) = \frac{|A\cap\{1,\ldots,n\}|}{n}$

Πρόταση 0.0.1. *Έστω σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ με $\limsup_{n\to\infty} d(A_n) = 1$. Τότε το σύνολο A περιέχει διαστήματα αυθαίρετα μεγάλου μήκους.*

Απόδειξη. Έστω k φυσικός αριθμός αριθμός. Θα δείξουμε ότι το σύνολο A περιέχει διάστημα μήκους k. Καθώς $\limsup_{n\to\infty} d(A_n) = 1$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0(k)$ τέτοιος ώστε

$$d(A_{n_0}) > \frac{k^2-1}{k^2}.$$

Μπορούμε μάλιστα να τον επιλέξουμε ώστε $n_0 > k^3 + k$. Υπάρχει c φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $ck \leqslant n_0 < (c+1)k$ με $c \geq k^2$. Θα δείξουμε ότι το αρχικό τμήμα $[ck]$ του $\mathbb{N}$ περιέχει διάστημα μήκους k.

Έστω προς άτοπο ότι δεν περιέχει. Χωρίζουμε το αρχικό τμήμα αυτό σε διαστήματα μήκους k τα

$$D_i = \{ik+1, \ldots, (i+1)k\}$$

για $i = 0, 1, \ldots, c-1$. Τότε

$$[ck] = D_0 \sqcup D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_{c-1}$$

και καθένα από τα διαστήματα A_i περιέχει το πολύ $k-1$ αριθμούς από το σύνολο A. Επίσης ισχύει

$$[n_0] = D_0 \sqcup D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_{c-1} \sqcup D_c$$

όπου D_c υποδιάστημα του $(ck, (c+1)k)$ και προφανώς $|D_c| < k$. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} d(A_{n_0}) &= \frac{|A\cap\{1,\ldots,n_0\}|}{n_0} \leqslant \frac{|A\cap\{1,\ldots,n_0\}|}{ck} \\ &= \frac{|A\cap D_0| + \cdots + |A\cap D_{c-1}| + |A\cap D_c|}{ck} \\ &\leqslant \frac{c(k-1)}{ck} + \frac{|A\cap D_c|}{ck} \\ &\leqslant \frac{k-1}{k} + \frac{|A\cap D_c|}{k^3} \\ &\leqslant \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{k^2-k+1}{k^2} \\ &\leqslant \frac{k^2-1}{k^2} \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

□