Λήμμα 0.0.1. *Έστω* $\ell \geqslant 1$ *και* $\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}$ *ένας τελεστής διαδοχικών διαφορών. Έστω* $f(x) = \alpha x^k + \cdots$ *πολυώνυμο βαθμού* k*. Τότε,*

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(x) = d_1 \cdots d_\ell (k(k-1)\cdots(k-\ell+1)\alpha x^{k-\ell} + \cdots)$$

αν $1 \leqslant \ell \leqslant k$ *και*

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(x) = 0$$

αν $\ell > k$*. Ειδικότερα, αν* $\ell = k-1$ *και* $d_1 \cdots d_{k-1} \neq 0$*, τότε το*

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(x) = d_1 \cdots d_{k-1} k! \alpha x + \beta$$

είναι πολυώνυμο βαθμού 1.

Απόδειξη. Έστω $f(x) = \sum_{j=1}^{k} x^j$, όπου $\alpha_k = \alpha$. Καθώς ο τελεστής διαφορών είναι γραμμικός έχουμε

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(x^j) = d_1 \cdots d_\ell \left(\frac{k!}{(k-\ell)!} \alpha x^{k-\ell} + \cdots \right)$$

και η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης.

$\square$