Λήμμα 0.0.1. *Έστω $k \geqslant 2$. Τότε,*

$$\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}(x^k) = d_1 \cdots d_{k-1} k! \Big(x + \frac{d_1 + \cdots + d_{k-1}}{2} \Big).$$

Απόδειξη. Από το λήμμα 2.2.2 έχουμε

$$\Delta_{d_{k-1},\cdots,d_1}(x^k) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_{k-1}+j=k \\ j_i \geq 1 \forall i, j \geq 0}} \frac{k!}{j! j_1! \cdots j_{k-1}!} d_1^{j_1} \cdots d_{k-1}^{j_{k-1}} x^j.$$

Για να ισχύει η σχέση $j_1 + \cdots + j_{k-1} + j = k$ με $j_1, \ldots, j_{k-1} \geq 1$ και $j \geq 0$ πρέπει είτε $j = j_1 = \cdots = j_{k-1} = 1$ είτε $j = 0, j_i = 2$ για κάποιο $i = 1, \ldots, k-1$ και $j_\ell = 1$ για κάθε $\ell \neq i$. Συνεπώς η παραπάνω σχεση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}\Delta_{d_{k-1},\cdots,d_1}(x^k) &= \frac{k!}{1!1!\cdots 1!} d_1 d_2 \cdots d_{k-1} x + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{k!}{0!2!1!\cdots 1!} d_1 \cdots d_i^2 \cdots d_{k-1} \\ &= d_1 d_2 \cdots d_{k-1} k! \left(x + \frac{d_1 + \cdots + d_{k-1}}{2} \right).\end{aligned}$$

□