Θεώρημα 0.0.1. *(Γραμμικό θεώρημα Van der Waerden για το $\mathbb{Z}$) Για κάθε k και για κάθε $l \geq 2$ οποτεδήποτε το χρωματιστεί με k το πλήθος χρώματα θα υπάρχουν α και d τέτοιοι ώστε το σύνολο $\{\alpha, \alpha + d, \ldots, a + ld\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Θεώρημα 0.0.2. *(Γραμμικό θεώρημα Van der Waerden για το $\mathbb{N}$) Για κάθε k και για κάθε $l \geq 2$ οποτεδήποτε το χρωματιστεί με k το πλήθος χρώματα θα υπάρχουν α και d τέτοιοι ώστε το σύνολο $\{\alpha, \alpha + d, \ldots, a + ld\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Ισχυρισμός: Από το πρώτο θεώρημα μπορουμε να συνάγουμε το δεύτερο.

Απόδειξη. Έστω ένας k-χρωματισμός του συνόλου $\mathbb{N}$, δηλαδή έστω σύνολα $C_1, \ldots, C_m$ με $m \leqslant k$, $C_i \cap C_j =$ για κάθε $i \neq j$ και τέτοια ώστε $\mathbb{N} = C_1 \cup \ldots C_m$. Θεωρούμε την εξής διαμέριση του συνόλου $\mathbb{Z}$. Ορίζουμε

$$C_0 = \{0\}$$

και

$$C_{-i} = \big\{ -c : c \in C_i \big\}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\mathbb{Z} = \cup_{i=-m}^{m} C_i$$

και προφανώς τα σύνολα στην ένωση αυτή είναι ξένα ανά δύο. Έχουμε λοιπόν έναν $(2k+1)$-χρωματισμό του $\mathbb{Z}$ και από το θεώρημα 1 συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν α και d στο $\mathbb{Z}$ καθώς και i_0 στο $\{-m, \ldots, m\}$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{\alpha, \alpha + d, \ldots, \alpha + ld\}$ να είναι υποσύνολο του C_{i_0}. Είναι φανερό ότι $i_0 \neq 0$ καθώς το σύνολο περιέχει παραπάνω από ενα στοιχεία. Αν το i_0 είναι θετικός το συμπέρασμα έπεται άμεσα ενώ αν ο i_0 είναι αρνητικός παρατηρούμε ότι ο εγκλεισμός

$$\{\alpha, \alpha + d, \ldots, -\alpha + ld\} \subseteq C_{i_0}$$

είναι ισοδύναμος με τον εγκλεισμό

$$\{-\alpha, -\alpha - d, \ldots, -\alpha - ld\} \subseteq -C_{i_0} = C_{-i_0}$$

όπου τα $-\alpha$ και $-d$ είναι θετικοί αριθμοί. Το συμπέρασμα έπεται θέτοντας $\alpha' = -\alpha$ και $d' = d$.

$\square$