ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ανισότητα του Weyl

1.1 Διοφαντική προσέγγιση

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσουμε κάποια αναλυτικά εργαλεία τα οποία θα χρειαστούμε για την απόδειξη του ασυμπτωτικού τύπου των Hardy=Littlewood για το πρόβλημα του Waring. Τα πιο σημαντικά από αυτά τα εργαλεία είναι δύο ανισότητες για εκθετικά αθροίσματα, η ανισότητα του Weyl και το λήμμα του Hua. Θα χρειαστεί επίσης να θυμηθούμε την άθροιση κατά μέρη, τα απειρογινόμενα και τα γινόμενα Euler.

Αρχίζουμε με το ακόλουθο απλό αποτέλεσμα για την προσέγγιση πραγματικών αριθμών από ρητούς με μικρούς παρονομαστές. Συμβολίζουμε με $\lfloor x \rfloor$ το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x και με $\{x\}$ το κλασματικό μέρος του x, δηλαδή $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Θεώρημα 1.1.1 (Dirichlet)**.** *Έστω α και $Q \geqslant 1$ πραγματικοί αριθμοί. Υπάρχουν ακέραιοι a και q τέτοιοι ώστε*

$$1 \leqslant q \leqslant Q, \qquad (a,q) = 1,$$

και

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{qQ}.$$

Απόδειξη. Έστω $N = [Q]$. Αν υποθέσουμε ότι $\{q\alpha\} \in [0, 1/(N+1))$ για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό $q \leqslant N$ τότε θέτοντας $a = [q\alpha]$ έχουμε ότι

$$0 \leqslant \{q\alpha\} = q\alpha - [q\alpha] = q\alpha - a < \frac{1}{N+1},$$

και έτσι

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q(N+1)} < \frac{1}{qQ} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Ομοίως αν $\{q\alpha\} \in [N/(N+1), 1)$ για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό $q \leqslant N$ και αν $a = [q\alpha]+1$,τότε καθώς

$$\frac{N}{N+1} \leqslant \{q\alpha\} = q\alpha - a + 1 < 1$$

εύκολα προκύπτει ότι
$$|q\alpha - a| \leqslant \frac{1}{N+1}$$
και έτσι
$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < \frac{1}{q(N+1)} < \frac{1}{qQ} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$
Αν τώρα
$$\{q\alpha\} \in \Big[\frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1}\Big)$$
για όλους τους $q \in [1, N]$, τότε καθένας από τους N το πλήθος πραγματικούς αριθμούς $\{q\alpha\}$ ανήκει σε ένα από τα $N-1$ το πλήθος διαστήματα
$$\Big[\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1}\Big) \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$
Από την Αρχή της Περιστεροφωλιάς, υπάρχουν ακέραιοι $i \in [1, N-1]$ και $q_1, q_2 \in [1, N]$ τέτοιοι ώστε
$$1 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant N$$
και
$$\{q_1\alpha\}, \{q_2\alpha\} \in \Big[\frac{i}{N+1}, \frac{i+1}{N+1}\Big).$$
Θέτουμε
$$q = q_2 - q_1 \in [1, N-1]$$
και
$$a = [q_2\alpha] - [q_1\alpha]$$
και έχουμε ότι
$$|q\alpha - a| = |(q_2\alpha - [q_2\alpha]) - (q_1\alpha - [q_1\alpha])| = |\{q_2\alpha\} - \{q_1\alpha\}| < \frac{1}{N+1} < \frac{1}{Q}$$
και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

1.2 Τελεστές διαφορών

Ο *τελεστής διαφορών προς τα εμπρός* Δ_d είναι ο γραμμικός τελεστής που ορίζεται για μια συνάρτηση f από τον τύπο
$$\Delta_d(f)(x) = f(x+d) - f(x).$$
Για $\ell \geqslant 2$ ορίζουμε τον *τελεστή διαδοχικών διαφορών* $\Delta_{d_\ell, d_{\ell-1}, \ldots, d_1}$ μέσω της
$$\Delta_{d_\ell, d_{\ell-1}, \ldots, d_1} = \Delta_{d_\ell} \circ \Delta_{d_{\ell-1}, \ldots, d_1} = \Delta_{d_\ell} \circ \Delta_{d_{\ell-1}} \circ \cdots \circ \Delta_{d_1}.$$
Για παράδειγμα,
$$\begin{aligned}
\Delta_{d_2, d_1}(f)(x) &= \Delta_{d_2}(\Delta_{d_1}(f))(x) \\
&= (\Delta_{d_1}(f))(x + d_2) - (\Delta_{d_1}(f))(x) \\
&= f(x + d_2 + d_1) - f(x + d_2) - f(x + d_1) + f(x)
\end{aligned}$$

και

$$\Delta_{d_3,d_2,d_1}(f)(x) = f(x+d_3+d_2+d_1) - f(x+d_3+d_2) - f(x+d_3+d_1) - f(x+d_2+d_1) \\ + f(x+d_3) + f(x+d_2) + f(x+d_1) - f(x).$$

Συμβολίζουμε με $\Delta^{(\ell)}$ τον τελεστή διαδοχικών διαφορών $\Delta_{1,1,\ldots,1}$ με $d_i = 1$ για $i = 1,\ldots,\ell$. Τότε,

$$\Delta^{(2)}(f)(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

και

$$\Delta^{(3)}(f)(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x).$$

Λήμμα 1.2.1. *Εστω $\ell \geqslant 1$. Τότε,*

$$\Delta^{(\ell)}(f)(x) = \sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell-j}\binom{\ell}{j}f(x+j).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο ℓ. Αν το ζητούμενο ισχύει για ℓ, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\ell+1)}&(f)(x) = \Delta(\Delta^{(\ell)}(f)(x)\\
&= \Delta\left(\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell-j}\binom{\ell}{j}f(x+j)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell-j}\binom{\ell}{j}\Delta(f)(x+j)\\
&= \sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell-j}\binom{\ell}{j}f(x+j+1) + \sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell+1-j}\binom{\ell}{j}f(x+j)\\
&= \sum_{j=1}^{\ell+1}(-1)^{\ell+1-j}\binom{\ell}{j-1}f(x+j) + \sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{\ell+1-j}\binom{\ell}{j}f(x+j)\\
&= f(x+\ell+1) + \sum_{j=1}^{\ell}(-1)^{\ell+1-j}\left(\binom{\ell}{j-1}+\binom{\ell}{j}\right)f(x+j) + (-1)^{\ell+1}f(x)\\
&= \sum_{j=0}^{\ell+1}(-1)^{(\ell+1)-j}\binom{\ell+1}{j}f(x+j)
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η γνωστη ταυτότητα $\binom{\ell+1}{j} = \binom{\ell}{j-1} + \binom{\ell}{j}$. □

Στο επόμενο λήμμα υπολογίζουμε το πολυώνυμο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε κάποιον τελεστή διαδοχικών διαφορών στο μονώνυμο $f(x) = x^k$.

Λήμμα 1.2.2. *Εστω $k \geqslant 1$ και $1 \leqslant \ell \leqslant k$. Έστω $\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}$ ένας τελεστής διαδοχικών διαφορών. Τότε,*

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(x^k) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+j=k\\ j\geqslant 0, j_1\geqslant 1,\ldots,j_\ell\geqslant 1}} \frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell!}d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell}x^j = d_1\cdots d_\ell p_{k-\ell}(x),$$

όπου $p_{k-\ell}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $k-\ell$ με μεγιστοβάθμιο συντελεστή $k(k-1)\cdots(k-\ell+1)$. Αν οι $d_1,\ldots,d_\ell$ είναι ακέραιοι, τότε το $p_{k-\ell}(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς ℓ. Για $\ell = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\Delta_{d_1}(x^k) &= (x+d_1)^k - x^k \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} d_1^{k-j} x^j - x^k \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} d_1^{k-j} x^j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{k!}{j!(k-j)!} d_1^{k-j} x^j \\ &= \sum_{\substack{j_1+j=k \\ j\geq 0, j_1 \geq 1}} \frac{k!}{j!j_1!} d_1^{j_1} x^j.\end{aligned}$$

Έστω $1 \leqslant \ell \leqslant k-1$, και ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός αληθέυει για το ℓ. Τότε

$$\begin{aligned}&\Delta_{d_{\ell+1}, d_\ell, \ldots, d_1}(x^k) \\ &= \Delta_{d_{\ell+1}}\Big(\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(x^k)\Big) \\ &= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+m=k \\ m\geqslant 0, j_1\geqslant 1,\ldots,j_\ell\geqslant 1}} \frac{k!}{m!j_1!\cdots j_\ell!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} \Delta_{d_{\ell+1}}(x^m) \\ &= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+m=k \\ m\geqslant 0, j_1\geqslant 1,\ldots,j_\ell\geqslant 1}} \frac{k!}{m!j_1!\cdots j_\ell!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} \sum_{\substack{j_{\ell+1}+j=m \\ j\geq 0, j_{\ell+1}\geq 1}} \frac{m!}{j!j_{\ell+1}!} d_{\ell+1}^{j_{\ell+1}} x^j \\ &= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+m=k \\ m\geqslant 0, j_1\geqslant 1,\ldots,j_\ell\geqslant 1}} \sum_{\substack{j_{\ell+1}+j=m \\ j\geq 0, j_{\ell+1}\geq 1}} \frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell! j_{\ell+1}!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} d_{\ell+1}^{j_{\ell+1}} x^j \\ &= \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+j_{\ell+1}+j=k \\ j\geq 0, j_1,\ldots,j_\ell,j_{\ell+1}\geq 1}} \frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell! j_{\ell+1}!} d_1^{j_1}\cdots d_\ell^{j_\ell} d_{\ell+1}^{j_{\ell+1}} x^j.\end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η γραμμικότητα του τελεστη Δ. Καθώς οι διωνυμικοί συντελεστές $\frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell!}$ είναι ακέραιοι, προκύπτει ότι οι $d_1, \ldots, d_\ell$ είναι και αυτοί ακέραιοι αριθμοί και έτσι το πολυώνυμο $p_{k-\ell}(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές. Τέλος είναι φανερό ότι ο βαθμός του είναι $k-\ell$ και ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του είναι ο $\frac{k!}{(k-\ell)!} = k(k-1)\cdots(k-\ell+1)$ ο.ε.δ. □

Λήμμα 1.2.3. *Έστω $k \geqslant 2$. Τότε,*

$$\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}(x^k) = d_1\cdots d_{k-1} k! \Big(x + \frac{d_1+\cdots+d_{k-1}}{2}\Big).$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.2.2 έχουμε

$$\Delta_{d_{k-1},\cdots,d_1}(x^k) = \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_{k-1}+j=k \\ j_i\geq 1 \forall i, j\geq 0}} \frac{k!}{j!j_1!\cdots j_{k-1}!} d_1^{j_1}\cdots d_{k-1}^{j_{k-1}} x^j.$$

Για να ισχύει η σχέση $j_1+\cdots+j_{k-1}+j=k$ με $j_1,\ldots,j_{k-1}\geq 1$ και $j\geq 0$ πρέπει είτε $j=j_1=\cdots=j_{k-1}=1$ είτε $j=0, j_i=2$ για κάποιο $i=1,\ldots,k-1$ και $j_\ell=1$ για κάθε $\ell\neq i$. Συνεπώς η παραπάνω σχεση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}\Delta_{d_{k-1},\cdots,d_1}(x^k)&=\frac{k!}{1!1!\cdots 1!}d_1d_2\cdots d_{k-1}x+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{k!}{0!2!1!\cdots 1!}d_1\cdots d_i^2\cdots d_{k-1}\\&=d_1d_2\cdots d_{k-1}k!\left(x+\frac{d_1+\cdots+d_{k-1}}{2}\right).\end{aligned}$$

□

Λήμμα 1.2.4. *Έστω $\ell\geqslant 1$ και $\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}$ ένας τελεστής διαδοχικών διαφορών. Έστω $f(x)=\alpha x^k+\cdots$ πολυώνυμο βαθμού k. Τότε,*

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(x)=d_1\cdots d_\ell(k(k-1)\cdots(k-\ell+1)\alpha x^{k-\ell}+\cdots)$$

αν $1\leqslant\ell\leqslant k$ και

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(x)=0$$

αν $\ell>k$. Ειδικότερα, αν $\ell=k-1$ και $d_1\cdots d_{k-1}\neq 0$, τότε το

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(x)=d_1\cdots d_{k-1}k!\alpha x+\beta$$

είναι πολυώνυμο βαθμού 1.

Απόδειξη. Έστω $f(x)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_jx^j$, όπου $\alpha_k=\alpha$. Καθώς ο τελεστής διαφορών είναι γραμμικός έχουμε

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(x^j)=d_1\cdots d_\ell\left(\frac{k!}{(k-\ell)!}\alpha x^{k-\ell}+\cdots\right)$$

και η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. □

Λήμμα 1.2.5. *Έστω $1\leqslant\ell\leqslant k$. Αν*

$$-P\leqslant d_1,\ldots,d_\ell,x\leqslant P,$$

τότε

$$\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(x^k)\ll P^k,$$

με την σταθερά να εξαρτάται μόνο από το k.

Απόδειξη. Από το Λήμμα (1.2.2) και καθώς $-P\leqslant d_1,\ldots,d_\ell,x\leqslant P$ εύκολα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}|\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(x^k)|&\leqslant\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+j=k\\ j\geq 0,j_1,\ldots,j_\ell\geq 1}}\frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell!}P^{j_1+\cdots+j_\ell+j}\\&\leqslant\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_\ell+j=k\\ j,j_1,\ldots,j_\ell\geq 0}}\frac{k!}{j!j_1!\cdots j_\ell!}P^k\\&=(\ell+1)^kP^k\leqslant(k+1)^kP^k.\end{aligned}$$

και έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μια απλή εφαρμογή των τελεστών διαφορών. Το πρόβλημα του Waring ρωτάει αν κάθε μη αρνητικός ακέραιος γράφεται ως άθροισμα φραγμένων το πλήθος k-οστών δυνάμεων. Μπορούμε να θέσουμε το εξής παρόμοιο ερώτημα: Είναι σωστό ότι κάθε ακέραιος γράφεται ως άθροισμα ή διαφορά φραγμένων το πλήθος k-οστών δυνάμεων; Αν η απάντηση είναι καταφατική, τότε για κάθε k υπάρχει ελάχιστος ακέραιος $v(k)$ τέτοιος ώστε η εξίσωση

$$n = \pm x_1^k \pm x_2^k \pm \cdots \pm x_{v(k)}^k \tag{1.2.1}$$

να έχει ακέραιες λύσεις για κάθε ακέραιο n. Αυτό το πρόβλημα είναι γνωστό ως το *απλό πρόβλημα του Waring* και είναι πράγματι αρκετά ευκολότερο να αποδείξουμε την ύπαρξη του $v(k)$ από το να αποδείξουμε την ύπαρξη του $g(k)$. Παραμένει όμως ανοικτό πρόβλημα ο ακριβής υπολογισμός του $v(k)$ για κάθε $k \geqslant 3$.

Θεώρημα 1.2.6 (απλό θεώρημα Waring). *Για κάθε $k \geqslant 2$ ο $v(k)$ υπάρχει, και*

$$v(k) \leqslant 2^{k-1} + \frac{k!}{2}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας τον $(k-1)-$οστό τελεστή διαφορών στο πολυώνυμο $f(x) = x^k$ και χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 1.2.1 και 1.2.3 έχουμε

$$\Delta^{(k-1)}(x^k) = k!x + m = \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{k-1-\ell} \binom{k-1}{\ell} (x+\ell)^k,$$

όπου $m = \frac{1+1+\cdots+1}{2}k! = \frac{k-1}{2}k! = (k-1)!\frac{k(k-1)}{2} = (k-1)!\binom{k}{2}$. Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι κάθε ακέραιος της μορφής $k!x + m$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ή διαφορά το πολύ

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} = (1+1)^{k-1} = 2^{k-1}$$

k-οστών δυνάμεων ακεραίων. Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε ακέραιο n μπορούμε να βρούμε ακέραιους q και r τέτοιους ώστε

$$n - m = k!q + r,$$

όπου

$$-\frac{k!}{2} < r \leqslant \frac{k!}{2}.$$

Καθώς ο r είναι το άθροισμα ή η διαφορά ακριβώς $|r|$ k-οστών δυνάμεων 1^k συμπεραίνουμε, ότι ο n μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα το πολύ $2^{k-1} + k!/2$ ακεραίων της μορφής $\pm x^k$. □

1.3 Κλασματικά μέρη

Συμβολίζουμε με $\lfloor \alpha \rfloor$ το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού α και με $\{\alpha\}$ το κλασματικό μέρος του α. Τότε, $\lfloor \alpha \rfloor \in \mathbb{Z}$, $\{\alpha\} \in [0,1)$, και

$$\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}.$$

Η απόσταση του πραγματικού αριθμού α από τον πλησιέστερο ακέραιο ορίζεται ως εξής:

$$\|\alpha\| = \min\{|n-\alpha| : n \in \mathbb{Z}\} = \min\{\{\alpha\}, 1-\{\alpha\}\}.$$

Τότε, $\|\alpha\| \in [0, 1/2]$, και

$$\alpha = n \pm \|\alpha\|$$

για κάποιον ακέραιο n. Έπεται κάνοντας χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

ότι

$$|\sin\pi\alpha| = \sin\pi\|\alpha\|$$

για κάθε πραγματικό αριθμό α. Η τριγωνική ανισότητα

$$\|\alpha+\beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\| \tag{1.3.1}$$

ισχύει για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α και β όπως αποδεικνύεται στο ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.3.1. *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η τριγωνική ανισότητα :*

$$||\alpha+\beta|| \leqslant ||\alpha|| + ||\beta||.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α έχουμε

$$||x|| = \min(|n-x| : n \in \mathbb{Z}) = \min(\{x\}, 1-\{x\}) = dist(x, \mathbb{Z}).$$

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $0 \leqslant \alpha < 1$ και $0 \leqslant \beta < 1$ καθώς είναι προφανές ότι $||x|| = ||n \pm x||$ για κάθε πραγματικό αριθμό x και κάθε ακέραιο n.

Αν τουλάχιστον ένας εκ των α, β είναι μικρότερος από το $1/2$, έστω χωρίς βλάβη ο α, έχουμε

$$\Big| ||\alpha+\beta|| - ||\beta|| \Big| = \big| dist(\alpha+\beta, \mathbb{Z}) - dist(\beta, \mathbb{Z}) \big| \leqslant |\alpha| = \{\alpha\} = ||\alpha||$$

καθώς η συνάρτηση $dist(x, \mathbb{Z})$ είναι Lipschitz με σταθερά 1 και $0 \leqslant \alpha < 1/2$. Από αυτό έπεται το ζητούμενο.

Αν και οι δύο είναι μεγαλύτεροι από το $1/2$ τότε οι αριθμοί $\gamma = 1-\alpha, \delta = 1-\beta$ είναι και οι δύο μικρότεροι του $1/2$. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο και έχουμε

$$||\alpha+\beta|| = ||2-(\alpha+\beta)|| = ||\gamma+\delta|| \leqslant ||\gamma|| + ||\delta|| = ||1-\alpha|| + ||1-\beta|| = ||\alpha|| + ||\beta||$$

και έτσι βλέπουμε ότι το ζητούμενο ισχύει σε κάθε περίπτωση. □

Τα δύο λήμματα που ακολουθούν είναι πολύ βασικά για την απόδειξη της ανισότητας του Weyl για εκθετικά αθροίσματα. Η ανισότητα του Weyl, με τη σειρά της, είναι το κεντρικό εργαλείο για την εφαρμογή της μεθόδου του κύκλου στο πρόβλημα του Waring. Σε ό,τι ακολουθεί, $\exp(t) = e^t$ και $e(t) = \exp(2\pi it) = e^{2\pi it}$.

Λήμμα 1.3.2. *Αν $0 < \alpha < 1/2$, τότε*

$$2\alpha < \sin(\pi\alpha) < \pi\alpha.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $s(\alpha) = \sin(\pi\alpha) - 2\alpha$. Τότε $s(0) = s(1/2) = 0$. Αν $s(\alpha) = 0$ για κάποιον $\alpha \in (0, 1/2)$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle για την παραγωγίσιμη συνάρτηση s στα $[0, \alpha]$ και $[\alpha, 1/2]$, βλέπουμε ότι η συνάρτηση $s'(\alpha) = \pi\cos(\pi\alpha) - 2$ θα είχε τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(0, 1/2)$. Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση $\cos(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi/2)$ και συνεπώς η $s'(\alpha)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1/2)$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με τα παραπάνω. Έτσι συμπεραίνουμε ότι $s(\alpha) \neq 0$ για κάθε $\alpha \in (0, 1/2)$. Καθώς τώρα η $s(\alpha)$ είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο στο $(0, 1/2)$. Υπολογίζουμε $s(1/4) = (\sqrt{2} - 1)/2 > 0$, και έτσι προκύπτει ότι $s(\alpha) > 0$ για κάθε $\alpha \in (0, 1/2)$. Το άνω φράγμα τώρα προκύπτει από την γνωστή ανισότητα $|\sin(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. □

Λήμμα 1.3.3. *Για κάθε πραγματικό αριθμό α και για οποιουσδήποτε φυσικούς $N_1 < N_2$,*

$$\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha n) \leqslant \min\{N_2 - N_1, \|\alpha\|^{-1}\}.$$

Απόδειξη. Αφού $|e(\alpha n)| = 1$ για όλους τους ακεραίους n, έχουμε

$$\Big|\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha n)\Big| \leqslant \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \Big|e(\alpha n)\Big| = N_2 - N_1.$$

Αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε $\|\alpha\| > 0$ και $e(\alpha) \neq 1$. Αφού το άθροισμα είναι και γεωμετρική πρόοδος, έχουμε

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\alpha n)\Big| &= \Big|e(\alpha(N_1+1))\sum_{n=0}^{N_2-N_1+1} e(\alpha)^n\Big| = \Big|\frac{e(\alpha(N_2-N_1)) - 1}{e(\alpha) - 1}\Big| \\ &\leqslant \frac{2}{|e(\alpha) - 1|} = \frac{2}{|e(\alpha/2) - e(-\alpha/2)|} \\ &= \frac{2}{|2i\sin(\pi\alpha)|} = \frac{1}{|\sin(\pi\alpha)|} \\ &= \frac{1}{\sin(\pi\|\alpha\|)} \leqslant \frac{1}{2\|\alpha\|}.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα δύο άνω φράγματα έχουμε τον ισχυρισμό του λήμματος. □

Λήμμα 1.3.4. *Έστω α πραγματικός αριθμός, και έστω a και $q \geqslant 1$ ακέραιοι με $(a, q) = 1$. Αν*

$$\Big|\alpha - \frac{a}{q}\Big| \leqslant \frac{1}{q^2},$$

τότε

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant q/2} \frac{1}{\|\alpha r\|} \ll q \log q.$$

Απόδειξη. Το λήμμα ισχύει για $q = 1$, καθώς

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant q/2} \frac{1}{\|\alpha r\|} = 0.$$

Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \geq 2$. Γνωρίζουμε ότι $\left\|\frac{ar}{q}\right\| \in \mathbb{Q}$ και $0 \leqslant \left\|\frac{ar}{q}\right\| \leqslant \frac{1}{2}$. Συνεπώς υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί $s(r) \in [0, q/2]$ και $m(r)$ τέτοιοι ώστε

$$\frac{s(r)}{q} = \left\|\frac{ar}{q}\right\| = \pm\left(\frac{ar}{q} - m(r)\right),$$

και έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{ar}{q} = m(r) \pm \frac{s(r)}{q}$$

Καθώς $(a, q) = 1$ έχουμε

$$s(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{s(r)}{q} = 0 \Leftrightarrow \left\|\frac{ar}{q}\right\| = 0 \Leftrightarrow \frac{ar}{q} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow q|ar \Leftrightarrow r|q \Leftrightarrow r \equiv 0 \bmod\ q,$$

και έτσι $s(r) \in [1, q/2]$ αν $r \in [1, q/2]$. Αφού $\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ϑ τέτοιος ώστε

$$\alpha - \frac{a}{q} = \frac{\vartheta}{q^2}$$

και $-1 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Έχουμε

$$\alpha r = \frac{ar}{q} + \frac{\vartheta r}{q^2} = \frac{ar}{q} + \frac{\vartheta'}{2q},$$

όπου

$$|\vartheta'| = \left|\frac{2\vartheta r}{q}\right| \leqslant |\vartheta| \leqslant 1$$

αφού $\left|\frac{2r}{q}\right| \leqslant 1$. Τώρα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\|\alpha r\| &= \left\|\frac{ar}{q} + \frac{\vartheta'}{2q}\right\| \\
&= \left\|m(r) \pm \frac{s(r)}{q} + \frac{\vartheta'}{2q}\right\| \\
&= \left\|\frac{s(r)}{q} \pm \frac{\vartheta'}{2q}\right\| \\
&\geqslant \left\|\frac{s(r)}{q}\right\| - \left\|\frac{\vartheta'}{2q}\right\| \\
&\geqslant \frac{s(r)}{q} - \frac{1}{2q} \\
&\geqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{2q} \\
&\geqslant \frac{1}{2q}
\end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα. Στην συνέχεια έστω $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant q/2$. Θα αποδείξουμε ότι $s(r_1) = s(r_2)$ αν και μόνο αν $r_1 = r_2$. Προς τούτο έχουμε

$$s(r_1) = s(r_2) \Leftrightarrow \left\| \frac{ar_1}{q} \right\| = \left\| \frac{ar_2}{q} \right\| \Leftrightarrow \pm\left(\frac{ar_1}{q} - m(r_1) \right) = \pm\left(\frac{ar_2}{q} - m(r_2) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ar_1 \equiv \pm ar_2 \bmod q \Leftrightarrow r_1 \equiv \pm r_2 \bmod q.$$

όπου στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το ότι οι a και q είναι σχετικά πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί. Αν $r_1 = r_2 \bmod q$ τότε καθώς $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant q/2$ είναι φανερό ότι $r_1 = r_2$. Αν τώρα $r_1 = -r_2 \bmod q$ έχουμε $q|(r_1 + r_2)$ και εύκολα βλέπουμε ότι αυτό ισχύει μόνο αν $r_1 = r_2 = q/2$ και η απόδειξη του ισχυρισμού ολοκληρώθηκε.
Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\left\{ \left\| \frac{ar}{q} : 1 \leqslant r \leqslant \frac{q}{2} \right\| \right\} = \left\{ \frac{s(r)}{q} : 1 \leqslant r \leqslant \frac{q}{2} \right\} = \left\{ \frac{s}{q} : 1 \leqslant s \leqslant \frac{q}{2} \right\}.$$

και έτσι,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant r \leqslant q/2} \frac{1}{\|\alpha r\|} &\leqslant \sum_{1 \leqslant r \leqslant q/2} \frac{1}{\frac{s(r)}{q} - \frac{1}{2q}} \\ &= \sum_{1 \leqslant s \leqslant q/2} \frac{1}{\frac{s}{q} - \frac{1}{2q}} \\ &= 2q \sum_{1 \leqslant s \leqslant q/2} \frac{1}{2s-1} \\ &\leqslant 2q \sum_{1 \leqslant s \leqslant q/2} \frac{1}{s} \\ &\ll q \log q \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Λήμμα 1.3.5. *Έστω α πραγματικός αριθμός και έστω a και $q \geqslant 1$ ακέραιοι με $(a, q) = 1$ και*

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Τότε, για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό V και κάθε μη αρνητικό ακέραιο h, έχουμε

$$\sum_{r=1}^{q} \min\left\{ V, \frac{1}{\|\alpha(hq + r)\|} \right\} \ll V + q \log q.$$

Απόδειξη. Έστω

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\vartheta}{q},$$

όπου

$$-1 \leqslant \vartheta \leqslant 1.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\alpha(hq+r) &= ah + \frac{ar}{q} + \frac{\vartheta h}{q} + \frac{\vartheta r}{q^2}\\ &= ah + \frac{ar}{q} + \frac{[\vartheta h] + \{\vartheta h\}}{q} + \frac{\vartheta r}{q^2}\\ &= ah + \frac{ar + [\vartheta h] + \delta(r)}{q},\end{aligned}$$

όπου $-1 \leqslant \delta(r) = \{\vartheta h\} + \frac{\vartheta r}{q} < 2$ καθώς $0 \leqslant \{\vartheta h\} < 1$ και $-1 \leqslant \frac{-r}{q} \leqslant \frac{\vartheta r}{q} \leqslant \frac{r}{q} \leqslant 1$. Για κάθε $r = 1.\ldots, q$ υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος r' τέτοιος ώστε

$$\{\alpha(hq+r)\} = \frac{ar + [\vartheta h] + \delta(r)}{q} - r'.$$

Έστω

$$0 \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{q}.$$

Αν

$$t \leqslant \{\alpha(hq+r)\} \leqslant t + \frac{1}{q},$$

τότε

$$qt \leqslant ar - qr' + [\vartheta h] + \delta(r) \leqslant qt + 1.$$

Από αυτό έπεται ότι

$$ar - qr' \leqslant qt - [\vartheta h] + 1 - \delta(r) \leqslant qt - [\vartheta h] + 2$$

και

$$ar - qr' \geq qt - [\vartheta h] - \delta(r) > qt - [\vartheta h] - 2.$$

Συνεπώς, ο $ar - qr'$ βρίσκεται στο ημιανοικτό διάστημα J μηκους 4, όπου

$$J = (qt - [\vartheta h] - 2, qt - [\vartheta h] + 2].$$

Αυτό το διάστημα περιέχει ακριβώς 4 ακεραίους. Αν $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant q$ και

$$ar_1 - qr_1' = ar_2 - qr_2',$$

τότε

$$ar_1 \equiv ar_2 \mathrm{mod}\ \ q$$

και καθώς $(a, q) = 1$ προκύπτει ότι

$$r_1 = r_2.$$

Έτσι, για κάθε $t \in [0, (q-1)/q]$, υπάρχουν 4 το πολύ ακέραιοι $r \in [1, q]$ τέτοιοι ώστε

$$\{\alpha(hq+r)\} \in [t, t + (1/q)].$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|\alpha(hq+r)\| \in [t, t + (1/q)]$$

αν και μόνο αν

$$\{\alpha(hq+r)\} \in [t, t+(1/q)].$$

ή

$$1-\{\alpha(hq+r)\} \in [t, t+(1/q)].$$

Η τελευταία περίπτωση είναι ισοδύναμη με

$$\{\alpha(hq+r)\} \in [t', t'+(1/q)],$$

όπου

$$0 \leqslant t' = 1-\frac{1}{q}-t \leqslant 1-\frac{1}{q}.$$

Προκύπτει ότι για κάθε $t \in [0,(q-1)/q]$, υπάρχουν το πολύ 8 ακέραιοι $r \in [1,q]$ με

$$\|\alpha(hq+r)\| \in [t, t+(1/q)].$$

Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε $J(s)=[s/q,(s+1)/q]$ για $s=0,1,\ldots,$ έχουμε ότι

$$\|\alpha(hq+r)\| \in J(s)$$

για 8 το πολύ $r \in [1,q]$. Εφαρμόζουμε τώρα αυτό για να εκτιμήσουμε το άθροισμα

$$\sum_{r=1}^{q} \min\Big\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\Big\}.$$

Αν $\|\alpha(hq+r)\| \in J(0)=[0,1/q]$, χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\min\Big\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\Big\} \leqslant V.$$

Αν τώρα $\|\alpha(hq+r)\| \in J(s)$ για κάποιον $s \geq 1$,χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\min\Big\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\Big\} \leqslant \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|} \leqslant \frac{q}{s}.$$

Καθώς $\|\alpha(hq+r)\| \in J(s)$ μόνο για $s<q/2$, αφού $0 \leqslant \|\alpha(hq+r)\| \leqslant 1/2$, προκύπτει ότι

$$\sum_{r=1}^{q} \min\Big\{V, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\Big\} \leqslant 8V + 8\sum_{1\leqslant s<q/2} \frac{q}{s} \ll V + q\log q$$

το οποίο ολοκληρώνει και την απόδειξη του λήμματος. □

Λήμμα 1.3.6. *Έστω α πραγματικός αριθμός, και έστω a και $q \geqslant 1$ ακέραιοι με $(a,q)=1$ και*

$$\Big|\alpha-\frac{a}{q}\Big| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό $U \geqslant 1$ και κάθε φυσικό n, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{U} \min\Big\{\frac{n}{k}, \frac{1}{\|\alpha k\|}\Big\} \ll \Big(\frac{n}{q}+U+q\Big)\log(2qU).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε τον k στην μορφή

$$k = hq + r,$$

όπου

$$1 \leqslant r \leqslant q$$

και

$$0 \leqslant h < \frac{U}{q}.$$

Τότε

$$S = \sum_{k=1}^{U} \min\left\{\frac{n}{k}, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right\} \leqslant \sum_{0 \leqslant h < U/q} \sum_{1 \leqslant r \leqslant q} \min\left\{\frac{n}{hq+r}, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\right\}.$$

Αν $h = 0$ και $1 \leqslant r \leqslant q/2$, τότε από το λήμμα 2.3.3 προκύπτει

$$\sum_{r=1}^{q/2} \min\left\{\frac{n}{r}, \frac{1}{\|\alpha r\|}\right\} \leqslant \sum_{r=1}^{q/2} \frac{1}{\|\alpha r\|} \ll q \log q.$$

Για τους υπόλοιπους όρους, έχουμε

$$\frac{1}{hq+r} < \frac{2}{(h+1)q},$$

καθώς είτε $h \geq 1$ και

$$hq + r > hq \geq \frac{(h+1)q}{2},$$

είτε $h = 0, q/2 < r \leqslant q$, και

$$hq + r = r > \frac{q}{2} = \frac{(h+1)q}{2}.$$

Έτσι,

$$S \ll q \log q + \sum_{0 \leqslant h < U/q} \sum_{1 \leqslant r \leqslant q} \min\left\{\frac{n}{(h+1)q}, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{U}{q} + 1 \leqslant U + q \leqslant 2\max(q, U) \leqslant 2qU.$$

Υπολογίζοντας τώρα το εσωτερικό άθροισμα από το λήμμα 2.3.4 με $V = n/(h+1)q$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
S &\ll q \log q + \sum_{0 \leqslant h < U/q} \sum_{1 \leqslant r \leqslant q} \min\left\{\frac{n}{(h+1)q}, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\right\} \\
&\ll q \log q + \sum_{0 \leqslant h < U/q} \left\{\frac{n}{(h+1)q} + q \log q\right\} \\
&\ll q \log q + \frac{n}{q} \sum_{0 \leqslant h < U/q} \frac{1}{h+1} + \left(\frac{U}{q} + 1\right) q \log q \\
&\ll q \log q + \frac{n}{q} \log\left(\frac{U}{q} + 1\right) + U \log q + q \log q \\
&\ll \left(\frac{n}{q} + U + q\right) \log 2qU
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Λήμμα 1.3.7. *Έστω α πραγματικός αριθμός, και έστω a και $q \geqslant 1$ ακέραιοι με $(a,q)=1$ και*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Τότε, για οποιουσδήποτε μη αρμητικούς πραγματικούς αριθμούς U και n, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{U} \min\left\{n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right\} \ll \left(q + U + n + \frac{Un}{q}\right)\max\{1, \log q\}.$$

Απόδειξη. Το επιχείρημα που χρησιμοποιούμε είναι εντελώς ανάλογο με αυτό της απόδειξης του Λήμματος 1.3.6, δηλαδή γράφουμε τον k στην μορφή

$$k = hq + r,$$

όπου $0 \leqslant h < \frac{U}{q}$ και $1 \leqslant r \leqslant q$. Τώρα από το λήμμα 1.3.5 έχουμε

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{1\leqslant k\leqslant U} \min\left\{n, \frac{1}{\|\alpha k\|}\right\} \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant h<U/q}\ \sum_{1\leqslant r\leqslant q} \min\left\{n, \frac{1}{\|\alpha(hq+r)\|}\right\} \\
&\ll \sum_{0\leqslant h<U/q} (n + q\log q) \\
&\ll \left(\frac{U}{q} + 1\right)(n + q\log q) \\
&\ll q\log q + U\log q + n + \frac{Un}{q} \\
&\ll \left(q + U + n + \frac{Un}{q}\right)\max\{1, \log q\}.
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

1.4 Η ανισότητα του Weyl και το λήμμα του Hua

Σε ό,τι ακολουθεί, συμβολίζουμε με $[M,N]$ το διάστημα των ακεραίων m που ικανοποιούν την $M \leqslant m \leqslant N$. Για κάθε πραγματικό αριθμό t, ο μιγαδικός συζυγής του $e(t) = e^{2\pi i t}$ είναι ο $\overline{e(t)} = e(-t)$.

Λήμμα 1.4.1. *Έστω N_1, N_2 και N ακέραιοι τέτοιοι ώστε $N_1 < N_2$ και $0 \leqslant N_2 - N_1 \leqslant N$. Έστω $f(n)$ αριθμητική συνάρτηση με πραγματικές τιμές, και έστω*

$$S(f) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(f(n)).$$

Τότε,

$$|S(f)|^2 = \sum_{|d|<N} S_d(f),$$

όπου

$$S_d(f) = \sum_{n \in I(d)} e(\Delta_d(f)(n))$$

και $I(d)$ είναι διάστημα διαδοχικών ακεραίων που περιέχεται στο $[N_1+1, N_2]$.

Απόδειξη. Για κάθε ακέραιο d ορίζουμε

$$I(d) = [N_1+1-d, N_2-d] \cap [N_1+1, N_2].$$

Υψώνοντας την απόλυτη τιμή του εκθετικού αθροίσματος στο τετράγωνο παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|S(f)|^2 = S(f)\overline{S(f)} &= \sum_{m=N_1+1}^{N_2} e(f(m)) \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \overline{e(f(n))} \\
&= \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{m=N_1+1}^{N_2} e(f(m)-f(n)) \\
&= \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{d=N_1+1-n}^{N_2-n} e(f(n+d)-f(n)) \\
&= \sum_{n=N_1+1}^{N_2} \sum_{d=N_1+1-n}^{N_2-n} e(\Delta_d(f)(n)) \\
&= \sum_{d=-(N_2-N_1-1)}^{N_2-N_1-1} \sum_{n \in I(d)} e(\Delta_d(f)(n)) \\
&= \sum_{|d|<N} \sum_{n \in I(d)} e(\Delta_d(f)(n)) \\
&= \sum_{|d|<N} S_d(f).
\end{aligned}$$

Αυτός είναι ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Λήμμα 1.4.2. *Έστω N_1, N_2, N και ℓ ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\ell \geqslant 1$ και $0 \leqslant N_2 - N_1 \leqslant N$. Έστω $f(n)$ αριθμητική συνάρτηση με πραγματικές τιμές, και έστω*

$$S(f) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(f(n)).$$

Τότε,

$$|S(f)|^{2^\ell} \leqslant (2N)^{2^\ell-\ell-1} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_\ell|<N} S_{d_\ell,\ldots,d_1}(f),$$

όπου

$$S_{d_\ell,\ldots,d_1}(f) = \sum_{n \in I(d_\ell,\ldots,d_1)} e(\Delta_{d_\ell,\ldots,d_1}(f)(n)) \tag{1.4.1}$$

και $I(d_\ell,\ldots,d_1)$ είναι διάστημα διαδοχικών ακεραίων που περιέχεται στο $[N_1+1, N_2]$.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς ℓ. Η περίπτωση $\ell = 1$ είναι το Λήμμα 1.4.1. Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για κάποιον $\ell \geqslant 1$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|S(f)|^{2^{\ell+1}} &= \left(|S(f)|^{2^\ell}\right)^2 \\
&\leqslant \left((2N)^{2^\ell-\ell-1} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_\ell|<N} |S_{d_\ell,\dots,d_1}(f)|\right)^2 \\
&= (2N)^{2^{\ell+1}-2\ell-2} \Big(\sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_\ell|<N} |S_{d_\ell,\dots,d_1}(f)|\Big)^2 \\
&\leqslant (2N)^{2^{\ell+1}-2\ell-2} (2N)^\ell \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_\ell|<N} |S_{d_\ell,\dots,d_1}(f)|^2,
\end{aligned}$$

όπου $S_{d_\ell,\dots,d_1}(f)$ είναι ένα εκθετικό άθροισμα της μορφής (1.4.1). Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.4.1, για $e(\Delta_{d_\ell,\dots,d_1}(f)(n))$ στην θέση της f, έχουμε ότι για κάθε $d_1, \dots, d_\ell$ υπάρχει κάποιο διάστημα

$$I(d_{\ell+1}, d_\ell, \dots, d_1) \subseteq I(d_\ell, \dots, d_1) \subseteq [N_1+1, N_2]$$

τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
|S_{d_\ell,\dots,d_1}(f)|^2 &= \Big| \sum_{n \in I(d_1,\dots,d_\ell)} e(\Delta_{d_\ell,\dots,d_1}(f)(n)) \Big|^2 \\
&= \sum_{|d_{\ell+1}|<N} \sum_{n \in I(d_{\ell+1},d_\ell,\dots,d_1)} e(\Delta_{d_{\ell+1},d_\ell,\dots,d_1}(f)(n)) \\
&= \sum_{|d_{\ell+1}|<N} S_{d_{\ell+1},d_\ell,\dots,d_1}(f),
\end{aligned}$$

άρα

$$|S(f)|^{2^{\ell+1}} \leqslant (2N)^{2^{\ell+1}-(\ell+1)-1} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_\ell|<N} \sum_{|d_{\ell+1}|<N} S_{d_{\ell+1},d_\ell,\dots,d_1}(f).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 1.4.3. *Έστω $k \geqslant 1$, $K = 2^{k-1}$, και $\varepsilon > 0$. Έστω $f(x) = \alpha x^k + \cdots$ πολυώνυμο βαθμού k με πραγματικούς συντελεστές. Αν*

$$S(f) = \sum_{n=1}^{N} e(f(n)),$$

τότε

$$|S(f)|^K \ll N^{K-1} + N^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\{N, \|m\alpha\|^{-1}\},$$

με την σταθερά να εξαρτάται μόνο από τους k και ε.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.4.2 με $\ell = k-1$ παίρνουμε

$$|S(f)|^K \leqslant (2N)^{K-k} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_{k-1}|<N} |S_{d_{k-1},\dots,d_1}(f)|,$$

όπου

$$S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f) = \sum_{n\in I(d_{k-1},\ldots,d_1)} e(\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)(n))$$

και $I(d_{k-1},\ldots,d_1)$ είναι ένα διάστημα ακεραίων που περιέχεται στο $[1,N]$. Αφού $|e(t)|=1$ για κάθε πραγματικό αριθμό t, έχουμε το άνω φράγμα

$$|S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)| \leqslant \sum_{n\in I(d_{k-1},\ldots,d_1)} |e(\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)(n))| = |I(d_{k-1},\ldots,d_1)| \leqslant N.$$

Από το Λήμμα 1.2.4, για οποιουσδήποτε μη μηδενικούς ακεραίους $d_1,\ldots,d_{k-1}$, ο τελεστής διαφορών $\Delta_{d_{k-1},\ldots,d_1}$ εφαρμοσμένος στο πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού k μας δίνει το γραμμικό πολυώνυμο

$$\Delta_{d_1,\ldots,d_{k-1}}(f)(x) = d_{k-1}\cdots d_1 k!\alpha x+\beta = \lambda x+\beta,$$

όπου

$$\lambda = d_{k-1}\cdots d_1 k!\alpha$$

και $\beta\in\mathbb{R}$. Έστω $I(d_{k-1},\ldots,d_1)=[N_1+1,N_2]$. Από το Λήμμα 1.3.3,

$$\begin{aligned}
|S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)| &= \Big|\sum_{n\in I(d_{k-1},\ldots,d_1)} e(\Delta_{d_{k-1},d_{k-2},\ldots,d_1}(f)(n))\Big| \\
&= \Big|\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\lambda n+\beta)\Big| \\
&= \Big|\sum_{n=N_1+1}^{N_2} e(\lambda n)\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{\|\lambda\|} \\
&= \frac{1}{\|d_{k-1}\cdots d_1 k!\alpha\|}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$|S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)| \leqslant \min\{N, \|d_1\cdots d_{k-1}k!\alpha\|^{-1}\}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
|S(f)|^K &\leqslant (2N)^{K-k}\sum_{|d_1|<N}\cdots\sum_{|d_{k-1}|<N} |S_{d_{k-1},\ldots,d_1}(f)| \\
&\leqslant (2N)^{K-k}\sum_{|d_1|<N}\cdots\sum_{|d_{k-1}|<N} \min\{N, \|d_1\cdots d_{k-1}k!\alpha\|^{-1}\}.
\end{aligned}$$

Αφού υπάρχουν λιγότερες από $(k-1)(2N)^{k-2}$ επιλογές για τα $d_1,\ldots,d_{k-1}$ τέτοιες ώστε $d_1\cdots d_{k-1}=0$, και κάθε τέτοια επιλογή προσθέτει έναν όρο N στο άθροισμα, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
|S(f)|^K &\leqslant (2N)^{K-k}(k-1)(2N)^{k-2}N + (2N)^{K-k}\sum_{1\leqslant|d_1|<N}\cdots\sum_{1\leqslant|d_{k-1}|<N}\min\{N, \|d_1\cdots d_{k-1}k!\alpha\|^{-1}\} \\
&\leqslant k(2N)^{K-1} + 2^{k-1}N^{K-k}\sum_{1\leqslant d_1<N}\cdots\sum_{1\leqslant d_{k-1}<N}\min\{N, \|d_1\cdots d_{k-1}k!\alpha\|^{-1}\} \\
&\ll N^{K-1} + N^{K-k}\sum_{d_1=1}^{N}\cdots\sum_{d_{k-1}=1}^{N}\min\{N, \|d_1\cdots d_{k-1}k!\alpha\|^{-1}\},
\end{aligned}$$

με την σταθερά στην ανισότητα να εξαρτάται μόνο από το k. Αφού

$$1 \leqslant d_1 \cdots d_{k-1} k! \leqslant k! N^{k-1}$$

και η συνάρτηση του πλήθους διαιρετών $d(m)$, από το θεώρημα ;;, ικανοποιεί την $d(m) \ll_\varepsilon m^\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι το πλήθος των αναπαραστάσεων ενός ακεραίου m στη μορφή $d_1 \cdots d_{k-1} k!$ είναι $\ll m^\varepsilon \ll N^\varepsilon$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |S(f)|^K &\ll N^{K-1} + N^{K-k} \sum_{d_1=1}^{N} \cdots \sum_{d_{k-1}=1}^{N} \min\{N, \|d_{k-1} \cdots d_1 k! \alpha\|^{-1}\} \\ &\ll N^{K-1} + N^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\{N, \|m\alpha\|^{-1}\}, \end{aligned}$$

με την σταθερά στην ανισότητα να εξαρτάται από τα k και ε. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Θεώρημα 1.4.4 (ανισότητα του Weyl)**.** *Έστω $f(x) = \alpha x^k + \cdots$ πολυώνυμο βαθμού $k \geqslant 2$ με πραγματικούς συντελεστές,. Υποθέτουμε ότι ο α έχει ρητή προσέγγιση a/q τέτοια ώστε*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2},$$

όπου $q \geqslant 1$ και $(a, q) = 1$. Έστω

$$S(f) = \sum_{n=1}^{N} e(f(n)).$$

Έστω $K = 2^{k-1}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε,

$$S(f) \ll N^{1+\varepsilon} \Big(\frac{1}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N^k} \Big)^{1/K},$$

με την σταθερά να εξαρτάται μόνο από τους k και ε.

Απόδειξη. Αφού $|S(f)| \leqslant N$, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα αν $q \geqslant N^k$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι

$$1 \leqslant q < N^k,$$

άρα

$$\log q \ll \log N \ll N^\varepsilon.$$

Από το Λήμμα 1.4.3 έχουμε

$$|S(f)|^K \ll N^{K-1} + N^{K-k+\varepsilon} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\{N, \|m\alpha\|^{-1}\}.$$

Από το Λήμμα 1.3.7 έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k!N^{k-1}} \min\{N, \|m\alpha\|^{-1}\} &\ll \Big(q + k!N^{k-1} + N + \frac{k!N^k}{q} \Big) \max\{1, \log q\} \\ &\ll \Big(q + N^{k-1} + \frac{N^k}{q} \Big) \log N \\ &\ll N^k (qN^{-k} + N^{-1} + q^{-1}) N^\varepsilon. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}|S(f)|^K &\ll N^{K-1} + N^{K+\varepsilon}(qN^{-k} + N^{-1} + q^{-1})\\ &\ll N^{K+\varepsilon}(qN^{-k} + N^{-1} + q^{-1}).\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 1.4.5. *Εστω $k \geqslant 2$, και έστω a/q ρητός αριθμός με $q \geqslant 1$ και $(a,q)=1$. Τότε,*

$$S(q,a) = \sum_{x=1}^{q} e(ax^k/q) \ll q^{1-\frac{1}{K}+\varepsilon}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Weyl με $f(x) = ax^k/q$ και $N = q$ παίρνουμε

$$S(q,a) \ll q^{1+\varepsilon}(q^{-1} + q^{-k+1})^{1/K} \ll q^{1-\frac{1}{K}+\varepsilon},$$

που είναι το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 1.4.6. *Εστω $k \geqslant 2$. Υπάρχει σταθερά $\delta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $N \geqslant 2$ και a/q είναι ρητός αριθμός τέτοιος ώστε $(a,q)=1$ και*

$$N^{1/2} \leqslant q \leqslant N^{k-1/2},$$

τότε

$$\sum_{n=1}^{N} e(an^k/q) \ll N^{1-\delta}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Weyl για την $f(x) = ax^k/q$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}S(f) &\ll N^{1+\varepsilon}(N^{-1} + q^{-1} + N^{-k}q)^{1/K} \leqslant N^{1+\varepsilon}(N^{-1} + N^{-1/2} + N^{-1/2})^{1/K}\\ &\leqslant N^{1-\frac{1}{2K}+\varepsilon} \leqslant N^{1-\delta}\end{aligned}$$

για κάθε $\delta < \frac{1}{2K}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 1.4.7 (το λήμμα του Hua)**.** *Για $k \geqslant 2$ ορίζουμε*

$$T(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} e(\alpha n^k).$$

Τότε,

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^k} d\alpha \ll N^{2^k-k+\varepsilon}.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε με επαγωγή ως προς j ότι

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^j} d\alpha \ll N^{2^j-j+\varepsilon}$$

για $j = 1, \ldots, k$. Η περίπτωση $j = 1$ προκύπτει άμεσα από την

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \int_0^1 e(\alpha(m^k - n^k))\, d\alpha = N.$$

Θεωρούμε $1 \leqslant j \leqslant k-1$ και υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τον j. Έστω $f(x) = \alpha x^k$. Από το Λήμμα 1.2.2 έχουμε

$$\Delta_{d_j,\ldots,d_1}(f)(x) = \alpha d_j \cdots d_1 p_{k-j}(x),$$

όπου $p_{k-j}(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $k-j$ με ακέραιους συντελεστές. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.4.2 με $N_1 = 0$, $N_2 = N$ και $S(f) = T(\alpha)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} |T(\alpha)|^{2^j} &\leqslant (2N)^{2^j - j + 1} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_j|<N} \sum_{n \in I(d_j,\ldots,d_1)} e(\Delta_{d_j,\ldots,d_1}(f)(n)) \\ &= (2N)^{2^j - j + 1} \sum_{|d_1|<N} \cdots \sum_{|d_j|<N} \sum_{n \in I(d_j,\ldots,d_1)} e(\alpha d_j \cdots d_1 p_{k-j}(n)), \end{aligned}$$

όπου $I(d_j, \ldots, d_1)$ είναι ένα διάστημα διαδοχικών ακεραίων που περιέχεται στο $[1, N]$. Έπεται ότι

$$|T(\alpha)|^{2^j} \leqslant (2N)^{2^j - j + 1} \sum_d r(d) e(\alpha d), \tag{1.4.2}$$

όπου $r(d)$ είναι το πλήθος των παραγοντοποιήσεων του d στη μορφή

$$d = d_j \cdots d_1 p_{k-j}(n)$$

με $|d_i| \leqslant N$ και $n \in I(d_j, \ldots, d_1)$. Αφού $d \ll N^k$ από το Λήμμα **;;** έχουμε

$$r(d) \ll |d|^{\frac{\varepsilon}{k}} \ll N^{\varepsilon}$$

για $d \neq 0$. Αφού το $p_{k-j}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $k - j \geqslant 1$, υπάρχουν το πολύ $k - j$ ακέραιοι x τέτοιοι ώστε $p_{k-j}(x) = 0$, άρα

$$r(0) \ll N^j.$$

Όμοια,

$$\begin{aligned} |T(\alpha)|^{2^j} &= T(\alpha)^{2^{j-1}} T(-\alpha)^{2^{j-1}} \\ &= \Big(\sum_{x=1}^N e(\alpha x^k)\Big)^{2^{j-1}} \Big(\sum_{y=1}^N e(-\alpha y^k)\Big)^{2^{j-1}} \\ &= \sum_{x_1=1}^N \cdots \sum_{x_{2^{j-1}}=1}^N \sum_{y_1=1}^N \cdots \sum_{y_{2^{j-1}}=1}^N e\Big(\alpha\Big(\sum_{i=1}^{2^{j-1}} x_i^k - \sum_{i=1}^{2^{j-1}} y_i^k\Big)\Big) \\ &= \sum_d s(d) e(-\alpha d), \end{aligned}$$

όπου $s(d)$ είναι το πλήθος των αναπαραστάσεων του d στη μορφή

$$d = \sum_{i=1}^{2^{j-1}} y_i^k - \sum_{i=1}^{2^{j-1}} x_i^k$$

με $1 \leqslant x_i, y_i \leqslant N$ για $i = 1, \ldots, j-1$. Συνεπώς,

$$\sum_d s(d) = |T(0)|^{2^j} = N^{2^j}$$

και, από την επαγωγική υπόθεση,

$$s(0) = \int_0^1 |T(\alpha)|^{2^j} d\alpha \ll N^{2^j - j + \varepsilon}.$$

Από την (1.4.2) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^{j+1}} d\alpha &= \int_0^1 |T(\alpha)|^{2^j} |T(\alpha)|^{2^j} d\alpha \\
&\leqslant N^{2^j - j + 1} \int_0^1 \sum_{d'} r(d') e(\alpha d') \sum_d s(d) e(-\alpha d)\, d\alpha \\
&= (2N)^{2^j - j + 1} \sum_d r(d) s(d) \\
&= (2N)^{2^j - j + 1} r(0) s(0) + (2N)^{2^j - j + 1} \sum_{d \neq 0} r(d) s(d) \\
&\ll N^{2^j - j + 1} N^j N^{2^j - j + \varepsilon} + N^{2^j - j + 1} N^{\varepsilon} \sum_{d \neq 0} s(d) \\
&\ll N^{2^{j+1} - (j+1) + \varepsilon} + N^{2^j - j + 1} N^{\varepsilon} N^{2^j} \\
&\ll N^{2^{j+1} - (j+1) + \varepsilon},
\end{aligned}$$

και έχουμε αποδείξει το θεώρημα. □