Πρόταση 0.0.1. *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η τριγωνική ανισότητα :*

$$||\alpha + \beta|| \leqslant ||\alpha|| + ||\beta||.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α έχουμε

$$||x|| = \min(|n - x| : n \in \mathbb{Z}) = \min(\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\}) = dist(x, \mathbb{Z}).$$

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $0 \leqslant \alpha < 1$ και $0 \leqslant \beta < 1$ καθώς είναι προφανές ότι $||x|| = ||n \pm x||$ για κάθε πραγματικό αριθμό x και κάθε ακέραιο n.

Αν τουλάχιστον ένας εκ των α, β είναι μικρότερος από το $1/2$, έστω χωρίς βλάβη ο α, έχουμε

$$\Big| ||\alpha + \beta|| - ||\beta|| \Big| = \big| dist(\alpha + \beta, \mathbb{Z}) - dist(\beta, \mathbb{Z}) \big| \leqslant |\alpha| = \{\alpha\} = ||\alpha||$$

καθώς η συνάρτηση $dist(x, \mathbb{Z})$ είναι Lipschitz με σταθερά 1 και $0 \leqslant \alpha < 1/2$.Από αυτό έπεται το ζητούμενο.

Αν και οι δύο είναι μεγαλύτεροι από το $1/2$ τότε οι αριθμοί $\gamma = 1 - \alpha, \delta = 1 - \beta$ είναι και οι δύο μικρότεροι του $1/2$. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο και έχουμε

$$||\alpha + \beta|| = ||2 - (\alpha + \beta)|| = ||\gamma + \delta|| \leqslant ||\gamma|| + ||\delta|| = ||1 - \alpha|| + ||1 - \beta|| = ||\alpha|| + ||\beta||$$

και έτσι βλέπουμε ότι το ζητούμενο ισχύει σε κάθε περίπτωση.

$\square$