Λήμμα 0.0.1. *Έστω $n \geqslant 1$ και $\beta_1, \dots, \beta_n$ οι n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες του n-οστού πολυωνύμου Hermite $H_n(x)$. Αν $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ είναι η λύση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων (;;) τότε $\varrho_i > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.*

Απόδειξη. Καθώς

$$H_n(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - \beta_j),$$

προκύπτει ότι για $i = 1, \dots, n$, το

$$f_i(x) = \left(\frac{H_n(x)}{(x - \beta_i)}\right)^2 = \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(x - \beta_j)^2$$

είναι ένα μονικό πολυώνυμο βαθμού $2n - 2$ και τέτοιο ώστε $f_i(x) \geq 0$ για κάθε x. Έτσι έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f_i(x) dx > 0.$$

Όμως $f_i(\beta_i) > 0$ και $f_i(\beta_j) = 0$ για $i \neq j$. Έτσι από το λήμμα 1.2.5 παίρνουμε ότι

$$f_i(\beta_i)\varrho_j = \sum_{j=1}^{n} f_i(\beta_j)\varrho_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f_i(x) dx > 0.$$

και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

□