Θεώρημα 0.0.1 (Hilbert-Waring). *Το σύνολο των μη αρνητικών k-δυνάμεων είναι βάση πεπερασμένης τάξης για κάθε θετικό ακέραιο k.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς k. Η περίπτωση $k = 1$ είναι προφανής, και η περίπτωση $k = 2$ είναι το Θεώρημα ;; του Lagrange. Έστω λοιπόν $k \geq 3$, και υποθέτουμε ότι το σύνολο των ℓ-δυνάμεων είναι βάση πεπερασμένης τάξης για κάθε $\ell < k$. Από το Θεώρημα ;;, το σύνολο των 2ℓ-δυνάμεων είναι βάση πεπερασμένης τάξης για $\ell = 1, 2, \ldots, k-1$. Έτσι, υπάρχει ένας ακέραιος r τέτοιος ώστε, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n και για $\ell = 1, 2, \ldots, k-1$, η εξίσωση

$$n = x_1^{2\ell} + \cdots + x_r^{2\ell}$$

έχει λύση στους μη αρνητικούς ακεραίους $x_{1,\ell}, \ldots, x_{r,\ell}$. (Για παράδειγμα μπορούμε να θέσουμε $r = \max\{g(2\ell) : \ell = 1, 2, \ldots, k-1\}$.)

Έστω $T \geq 2$. Διαλέγουμε ακέραιους $C_1, \ldots, C_{k-1}$ τέτοιους ώστε

$$0 \leqslant C_\ell < T$$

για $\ell = 1, 2, \ldots, k-1$. Υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι $x_{j,\ell}$ για $j = 1, \ldots, r$ και $\ell = 1, \ldots, k-1$ τέτοιοι ώστε

$$x_{1,\ell}^{2\ell} + \cdots + x_{r,\ell}^{2\ell} = C_{k-\ell}. \tag{0.0.1}$$

Τότε

$$x_{j,\ell}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{r} x_{j,\ell}^{2i} \leqslant C_{k-\ell} < T$$

για $j = 1, \ldots, r, \ell = 1, \ldots, k-1$, και $i = 1, \ldots, \ell$. Από το λήμμα ;;, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $B_{i,\ell}$ που εξαρτώνται μόνο από τους k και ℓ ώστε να ισχύει

$$x_{j,\ell}^{2\ell} T^{k-\ell} + \sum_{i=0}^{\ell-1} B_{i,\ell} x_{j,\ell}^{2i} T^{k-i} = \sum(2k) = \sum(k) \tag{0.0.2}$$

Αθροίζοντας την (0.0.2) για $j = 1, \ldots, r$ και χρησιμοποιώντας την (0.0.1), έχουμε

$$\begin{aligned}
&C_{k-\ell} T^{k-\ell} + \sum_{i=0}^{\ell-1} B_{i,\ell} T^{k-i} \sum_{j=1}^{r} x_{j,\ell}^{2i} \\
&= C_{k-\ell} T^{k-\ell} + T^{k-\ell+1} \sum_{i=0}^{\ell-1} B_{i,\ell} T^{\ell-1-i} \sum_{j=1}^{r} x_{j,\ell}^{2i} \\
&= C_{k-\ell} T^{k-\ell} + D_{k-\ell+1} T^{k-\ell+1} \\
&= \sum(k),
\end{aligned}$$

όπου

$$D_{k-\ell+1} = \sum_{i=0}^{\ell-1} B_{i,\ell} T^{\ell-1-i} \sum_{j=1}^{r} x_{j,\ell}^{2i}$$

για $\ell = 1, \ldots, k-1$. Ο ακέραιος $D_{k-\ell+1}$ καθορίζεται πλήρως από τους k, ℓ, T και $C_{k-\ell}$ και είναι ανεξάρτητος του C_{k-i} για $i \neq \ell$. Έστω

$$B^* = \max\{B_{i,\ell} : \ell = 1, \ldots, k-1, i = 0, 1, \ldots, \ell-1\}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant C_{k-\ell}T^{k-\ell} + D_{k-\ell+1}T^{k-\ell+1} \\
&= C_{k-\ell}T^{k-\ell} + \sum_{i=0}^{\ell-1} B_{i,\ell}T^{k-i} \sum_{j=1}^{r} x_{j,\ell}^{2i} \\
&< B^*\left(T^{k-\ell+1} + rT^k + \sum_{i=1}^{\ell-1} T^{k-i+1}\right) \\
&= B^*\left(rT^k + T^{k-\ell+1} \sum_{i=1}^{\ell-1} T^i\right) \\
&< B^*\left(rT^k + \frac{T^{k+1}}{T-1}\right) \\
&\leqslant (r+2)B^*T^k,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν τα εξής:

$$C_{k-\ell}T^{k-\ell} < TT^{k-\ell} = T^{k-\ell+1} \leqslant B^*T^{k-\ell+1}$$

καθώς $C_{k-\ell} < T$ και $B^* \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{\ell-1} B_{i,\ell}T^{k-i} \sum_{j=1}^{r} x_{j,\ell}^{2i} = B_{0,\ell}T^k \sum_{j=1}^{r} 1 + \sum_{i=1}^{\ell-1} B_{i,\ell}T^{k-i} \sum_{j=1}^{r} x_{j,\ell}^{2i} \leqslant B^*rT^k + B^* \sum_{i=1}^{\ell-1} T^{k-i+1}$$

αφού $\sum_{j=1}^{r} x_{j,\ell}^{2i} < T$ και τέλος $T/(T-1) \leqslant 2$ όταν $T \geq 2$. Έστω

$$C_k = D_1 = 0.$$

Έχουμε

$$\sum_{\ell=1}^{k-1}(C_{k-\ell}T^{k-\ell} + D_{k-\ell+1}T^{k-\ell+1}) = \sum_{\ell=1}^{k}(C_\ell + D_\ell)T^\ell = \sum(k)$$

και

$$0 \leqslant \sum_{\ell=1}^{k}(C_\ell + D_\ell)T^\ell < (k-1)(r+2)B^*T^k = E^*T^k,$$

όπου ο ακέραιος

$$E^* = (k-1)(r+2)B^*$$

καθορίζεται από τον k και είναι ανεξάρτητος του T. Αν διαλέξουμε

$$T \geq E^*,$$

έπεται

$$0 \leqslant \sum_{\ell=1}^{k} (C_\ell + D_\ell) T^\ell < E^* T < T^{k+1},$$

και έτσι ο $\sum_{\ell=1}^{k} (C_\ell + D_\ell) T^\ell$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\sum_{\ell=1}^{k} (C_\ell + D_\ell) T^\ell = E_1 T + \cdots + E_{k-1} T^{k-1} + E_k T^k, \tag{0.0.3}$$

με

$$0 \leqslant E_i < T$$

για $i = 1, \ldots, k-1$ και

$$0 \leqslant E_k < E^*$$

Με αυτόν τον τρόπο, δείξαμε ότι για κάθε επιλογή μιας $(k-1)$-άδας $(C_1, \ldots, C_{k-1})$ ακεραίων ανάμεσα στους $\{0, 1, \ldots, T-1\}$ καθορίζει μια άλλη $(k-1)$-άδα $(E_1, \ldots, E_{k-1})$ ακεραίων ανάμεσα στους $\{0, 1, \ldots, T-1\}$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή η απεικόνιση είναι $1-1$ και επί.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι επί. Προς τούτο έστω $(E_1, \ldots, E_{k-1})$ μια $(k-1)$-άδα ακεραίων ανάμεσα στους $\{0, 1, \ldots, T-1\}$. Υπάρχει ένας απλός αλγόριθμος που παράγει ακεραίους $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ τέτοιους ώστε η (0.0.3) ικανοποιείται για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο $E_k < E^*$. Έστω $C_1 = E_1$ και $I_2 = 0$. Καθώς $D_1 = 0$, έχουμε

$$(C_1 + D_1) T = E_1 T + I_2 T^2.$$

Ο ακέραιος C_1 καθορίζει τον ακέραιο D_2. Διαλέγουμε στην συνέχεια $C_2 \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ τέτοιον ώστε

$$C_2 + D_2 + I_2 \equiv E_2 (mod T).$$

Συνεπώς

$$C_2 + D_2 + I_2 = E_2 + I_3 T$$

για κάποιον ακέραιο I_3, και

$$\sum_{\ell=1}^{2} (C_\ell + D_\ell) T^\ell = \sum_{\ell=1}^{2} E_\ell T^\ell + I_3 T^3.$$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο ο ακέραιος C_2 καθορίζει τον D_3. Όμοια διαλέγουμε $C_3 \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ τέτοιον ώστε

$$C_3 + D_3 + I_3 \equiv E_3 (mod T)$$

και τότε

$$C_3 + D_3 + I_3 = E_3 + I_4 T$$

για κάποιον ακέραιο I_4, και

$$\sum_{\ell=1}^{3} (C_\ell + D_\ell) T^\ell = \sum_{\ell=1}^{3} E_\ell T^\ell + I_4 T^4.$$

Έστω $2 \leqslant j \leqslant k-1$, και ας υποθέσουμε ότι έχουμε κατασκευάσει ακέραιους I_j και

$$C_1, \ldots . C_{j-1} \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$$

τέτοιους ώστε

$$\sum_{\ell=1}^{j-1}(C_\ell + D_\ell)T^\ell = \sum_{\ell=1}^{j-1} E_\ell T^\ell + I_j T^j.$$

Υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος $C_j \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ τέτοιος ώστε

$$C_j + D_j + I_j \equiv E_j (modT)$$

Έτσι

$$C_j + D_j + I_j = E_j + I_{j+1}T$$

για κάποιον ακέραιο I_{j+1}, και

$$\sum_{\ell=1}^{j}(C_\ell + D_\ell)T^\ell = \sum_{\ell=1}^{j} E_\ell T^\ell + I_{j+1} T^{j+1}.$$

Επαγωγικά, η διαδικασία αυτή παράγει μια μοναδική ακολουθία ακεραίων $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{\ell=1}^{k-1}(C_\ell + D_\ell)T^\ell = \sum_{\ell=1}^{k-1} E_\ell T^\ell + I_k T^k.$$

Αφού $C_k = 0$ και ο ακέραιος C_{k-1} καθορίζει τον D_k, προκύπτει ότι

$$0 \leqslant \sum_{\ell=1}^{k}(C_\ell + D_\ell)T^\ell = \sum_{\ell=1}^{k-1} E_\ell T^\ell + (D_k + I_k)T^k = \sum_{\ell=1}^{k} E_\ell T^\ell < E^* T^k,$$

όπου $D_k + I_k = E_k$. Καθώς

$$0 \leqslant \sum_{\ell=1}^{k-1} E_\ell T^\ell < T^k,$$

και

$$0 \leqslant E_k < E^*$$

προκύπτει ότι

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} E_\ell T^\ell + E^* T^k < (1 + E^*)T^k \leqslant 2E^* T^k. \tag{0.0.4}$$

Προηγουμένως δείξαμε ότι

$$\sum_{\ell=1}^{k} E_\ell T^\ell = \sum_{\ell=1}^{k}(C_\ell + D_\ell)T^\ell = \sum(k).$$

Ο E^* εξαρτάται μόνο από τον k και όχι από τον T , και έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$(E^* - E_k)T^K = \sum(k),$$

και συνεπώς

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} E_\ell T^\ell + E^* T^k = \sum(k) \tag{0.0.5}$$

για κάθε $(k-1)$-άδα ακεραίων $(E_1, \ldots, E_{k-1})$ ανάμεσα στους $\{0, 1, \ldots, T-1\}$. Καθώς η $\left(\frac{T+1}{T}\right)^k$ συγκλίνει στο 1 καθώς T τείνει στο άπειρο μπορούμε να διαλέξουμε ακέραιο $T_0 > 5E^*$ με

$$4(T+1)^k \leqslant 5T^k$$

για κάθε $T \geq T_0$. Θα δείξουμε ότι εάν $T \geq T_0$ και εάν $(F_0, F_1, \ldots, F_{k-1})$ είναι μια k-άδα ακεραίων στο $\{0, 1, \ldots, T-1\}$, τότε

$$F_0 + F_1 T + \cdots + F_{k-1} T^{k-1} + 4E^* T^k = \sum(k).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο τέχνασμα. Έστω $E_0' \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Εφαρμόζοντας την (0.0.4) με $T+1$ στη θέση του T, παίρνουμε

$$E_0'(T+1) + E^*(T+1)^k < (T+1)^2 + E^*(T+1)^k \leqslant (1+E^*)(T+1)^k \leqslant 2E^*(T+1)^k. \tag{0.0.6}$$

Ακόμα, εφαρμόζοντας την (0.0.5) με $T+1$ στην θέση του T , έχουμε

$$E_0'(T+1) + E^*(T+1)^k = \sum(k) \tag{0.0.7}$$

Προσθέτοντας τώρα τις (0.0.5) και (0.0.7), βλέπουμε ότι για κάθε επιλογή k το πλήθος ακεραίων

$$E_0', E_1, \ldots, E_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, T-1\},$$

έχουμε

$$\begin{aligned} F^* &= \Big(E_1 T + \cdots + E_{k-1} T^{k-1} + E^* T^k\Big) + \Big(E_0'(T+1) + E^*(T+1)^k\Big) \\ &= (E_0' + E^*) + (E_1 + E_0' + kE^*)T + \sum_{\ell=2}^{k-1} \left(E_\ell + \binom{k}{\ell} E^*\right) T^\ell + 2E^* T^k \\ &= \sum(k). \end{aligned}$$

Επιπλέον, από τις (0.0.4) και (0.0.6) προκύπτει ότι

$$0 \leqslant F^* < 2E^* T^k + 2E^*(T+1)^k < 4E^*(T+1)^k \leqslant 5E^* T^k < T^{k+1}$$

καθώς $4(T+1)^k \leqslant 5T^k$ και $T \geq T_0 > 5E^*$. Δοθέντων k ακεραίων μπορούμε να εφαρμόσουμε πάλι τον αλγόριθμο για να βρούμε ακεραίους F_k και

$$E_0',, E_1, \ldots, E_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, T-1\},$$

τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} &F_0 + F_1 T + \cdots + F_{k-1} T^{k-1} + F_k T^k \\ &= E_1 T + \cdots + E_{k-1} T^{k-1} + E^* T^k + E_0'(T+1) + E^*(T+1)^k \\ &= \sum(k), \end{aligned}$$

όπου ο F_k είναι ένας ακέραιος που ικανοποιεί την ανισότητα

$$0 \leqslant F_k < 5E^*.$$

Μετά και την πρόσθεση του $(5E^* - F_k)T^k = \sum(k)$, έχουμε ότι

$$F_0 + F_1T + \cdots + F_{k-1}T^{k-1} + 5E^*T^k = \sum(k)$$

για όλα τα $T \geq T_0$ και για κάθε επιλογή $F_0, F_1, \ldots, F_{k-1} \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $n = \sum(k)$ αν $T \geq T_0$ και

$$5E^*T^k \leqslant n < (5E^* + 1)T^k.$$

Υπάρχει ένας ακέραιος $T_1 \geq T_0$ με

$$5E^*(T+1)^k < (5E^* + 1)T^k$$

για κάθε $T \geq T_1$. Έτσι δείξαμε ότι $n = \sum(k)$ αν $T \geq T_1$ και

$$5E^*T^k \leqslant n < 5E^*(T+1)^k. \tag{0.0.8}$$

Καθώς κάθε ακέραιος $n \geq 5E^*T_1^k$ ικανοποιεί την ανισότητα (0.0.8) για κάποιον $T \geq T_1$, συμπεραίνουμε ότι

$$n = \sum(k)$$

για όλα τα n με $n \geq 5E^*T_1^k$. Το τελικό συμπέρασμα τώρα προκύπτει άμεσα από το λήμμα 3.9.

□