



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΗΡΩΩΝ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 9 - ΖΩΓΡΑΦΟΥ, 157 73 ΑΘΗΝΑ

ΤΗΛ.: 210-7722479 - FAX: 210-7722281

e-mail: eglytsis@central.ntua.gr

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Β (2019-2020)

ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Νο. 3

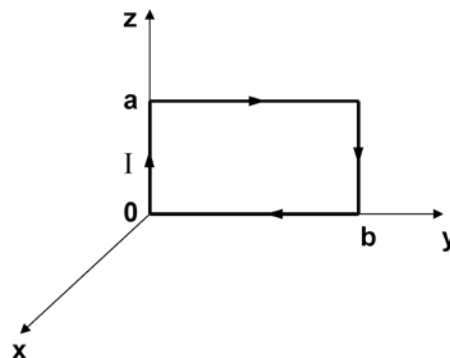
Ασκήσεις για εξάσκηση: No. 1, 2, 3, 4, 5, 6

Ασκήσεις για παράδοση: No. 7, 8, και 9

Ημερομηνία Παράδοσης: **14 Ιανουαρίου 2020**

Άσκηση 1:

Ένας νηματοειδής βρόχος σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου βρίσκεται τοποθετημένος στο επίπεδο yz όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Τα μήκη των πλευρών του βρόχου είναι a και b κατά μήκος των αξόνων z και y αντίστοιχα. Η μαγνητική διαπερατότητα είναι μ_0 παντού. (α) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό σε ένα τυχαίο σημείο (x, y, z) του χώρου. (β) Να βρεθεί η μαγνητική επαγωγή στο τυχαίο σημείο (x, y, z) του χώρου. (γ) Να βρεθεί η μαγνητική επαγωγή στο κέντρο του βρόχου.



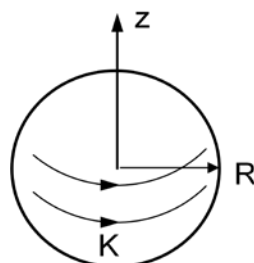
Άσκηση 2:

Ένα σταθερό επιφανειακό ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα $\vec{K} = K_0 \hat{i}_\phi$ ρέει πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας R .

(α) Να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στα σημεία του άξονα των z υπό την μορφή ενός ορισμένου ολοκληρώματος (χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα).

(β) Να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο της σφαίρας.

(γ) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα να υπολογισθεί η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο σφαιρικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής ακτίνας R_2 μέσα στο οποίο ρέει ομοιόμορφα κατανεμημένο ρεύμα με χωρική πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = J_0 \hat{i}_\phi$.



Άσκηση 3:

(α) Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός τετράγωνου βρόχου που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I . Η απόσταση του κέντρου του τετραγώνου από οποιαδήποτε πλευρά είναι R .

(β) Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός κανονικού πολυγώνου με N πλευρές που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I . Το R είναι πάλι η απόσταση του κέντρου του πολυγώνου από οποιαδήποτε πλευρά του. Ναδειχθεί ότι το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του πολυγώνου στο όριο $N \rightarrow \infty$, δίνει το πεδίο στο κέντρο ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας R .

Άσκηση 4:

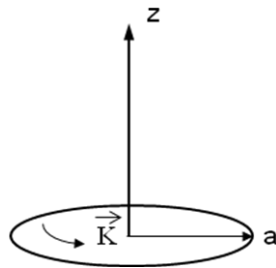
Κυκλικός δίσκος ακτίνας a φέρει ηλεκτρικό ρεύμα που ρέει κυκλικά γύρω από τον άξονά του με επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος $\vec{K} = K_0 r_T \hat{\phi}$ όπου K_0 σταθερά.

(α) Χρησιμοποιώντας το νόμο του Biot-Savart να βρεθεί η μαγνητική επαγωγή στο τυχαίο σημείο πάνω στον άξονα z .

(β) Να βρεθεί σε ποίο σημείο του άξονος των z υπάρχει η μέγιστη τιμή της μαγνητικής επαγωγής, B_{max} , και να γίνει η γραφική παράσταση του λόγου $B(z)/B_{max}$ σαν συνάρτηση του z/a .

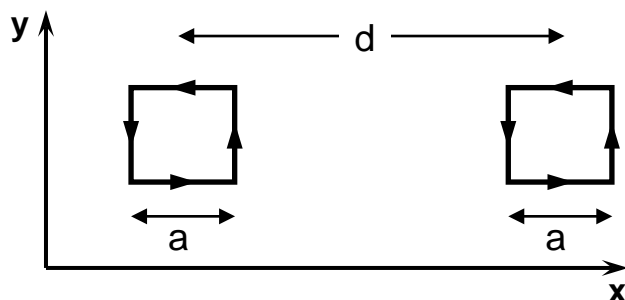
(γ) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο του χώρου με σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) . Το δυναμικό να εκφραστεί σαν ολοκλήρωμα χωρίς να υπολογισθεί αλλά με όλους τους όρους του πλήρως προσδιορισμένους βάσει των δεδομένων του προβλήματος. Σημείο αναφοράς του διανυσματικού δυναμικού το άπειρο.

(δ) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο πάνω στον άξονα z .



Άσκηση 5:

Δύο τετράγωνοι βρόχοι πλευράς a βρίσκονται πάνω στο επίπεδο xy και σε απόσταση d μεταξύ τους (όπου $d \gg a$) με τα κέντρα τους σε ίση απόσταση από τον άξονα των x όπως φαίνεται και στο κάτωθι σχήμα. Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η αλληλεπαγωγή τους. Υπόδειξη: Θεωρήσετε ότι η απόσταση των βρόχων είναι τόσο μεγάλη σχετικά με το μήκος των πλευρών τους ώστε το πεδίο εκάστου να μπορεί να προσεγγισθεί από το αντίστοιχο πεδίο ενός μαγνητικού δίπολου. Μη χρησιμοποιήσετε τον τύπο του Neumann.



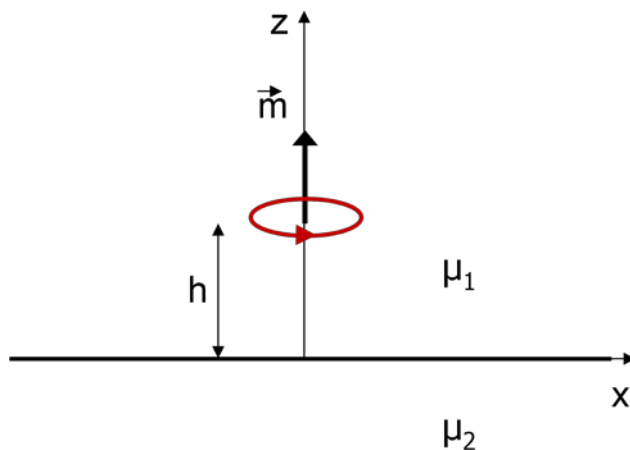
Άσκηση 6:

Ένα μαγνητικό δίπολο (κυκλικός βρόχος με ακτίνα a και ρεύμα I) με μαγνητική ροπή $\vec{m} = m \hat{z}$, βρίσκεται σε απόσταση h από την διαχωριστική επιφάνεια δύο μαγνητικών υλικών με διαπερατότητες μ_1 και μ_2 αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση h είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του μαγνητικού δίπολου έτσι ώστε να ισχύει η προσέγγιση του διπολικού πεδίου.

(α) Να αποδείξετε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατοπτρισμό με κατάλληλα επιλεγμένα μαγνητικά δίπολα.

(β) Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο του χώρου (x, y, z) (θεωρώντας ότι για το τυχαίο σημείο ισχύει η προσέγγιση του πεδίου του δίπολου). Να εκφραστεί το διανυσματικό δυναμικό στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

(γ) Να γίνει γραφική παράσταση των ισοδυναμικών γραμμών του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο xz για $a = 1\text{m}$, $h = 1\text{m}$, $\mu_1 = 1\mu_0$, $\mu_2 = 100\mu_0$ έστω και αν για αυτά τα αριθμητικά δεδομένα η προσέγγιση του δίπολου να μην είναι απολύτως δικαιολογημένη. Επαναλάβετε αυτό το ερώτημα με την ακριβή λύση για το διανυσματικό δυναμικό.



Άσκηση 7: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [30%]

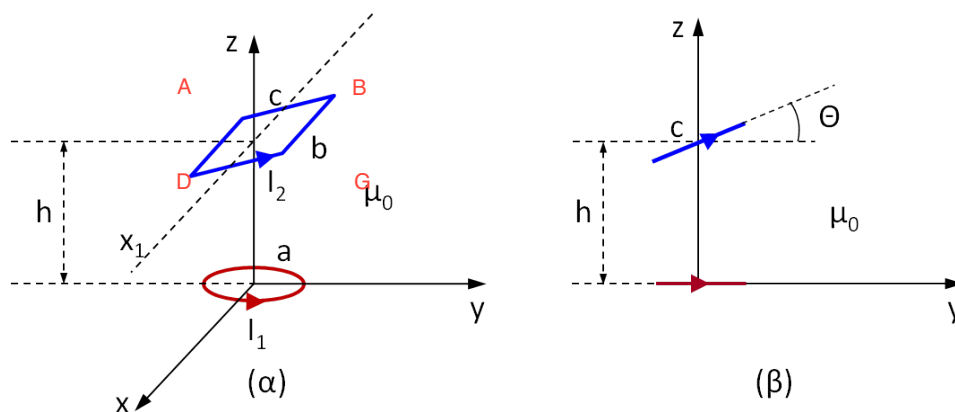
Κυκλικός βρόχος ακτίνας a διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_1 . Σε κατακόρυφη απόσταση $h \gg a$ υπάρχει ένας δευτερός ορθογώνιος βρόχος πλευρών b, c που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_2 . Ο ορθογώνιος βρόχος έχει το κέντρο του πάνω στον άξονα z και μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον άξονα x_1 (που είναι παράλληλος του x όπως φαίνεται και στο σχήμα). Για κάποια δεδομένη κατάσταση ο ορθογώνιος βρόχος σχηματίζει γωνία Θ με τον άξονα y όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Υποθέσετε ότι ο βρόχος ακτίνας a πληροί τις προσεγγίσεις του μαγνητικού δίπολου για όλους τους υπολογισμούς που ζητούνται. Ο χώρος έχει παντού διαπερατότητα μ_0 .

(α) [8%] Να υπολογιστεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής $L_{12}(\Theta)$ μεταξύ των δύο βρόχων.

Τα υπόλοιπα ερωτήματα θα πρέπει να απαντηθούν **αριθμητικά**. Υποθέσετε ότι οι διαστάσεις του προβλήματος είναι $a = 0.025\text{m}$, $b = 0.25\text{m}$, $c = 0.12\text{m}$, και $h = 0.10\text{m}$.

(β) [12%] Να γίνει η γραφική παράσταση του συντελεστού αμοιβαίας επαγωγής $L_{12}(\Theta)$ σαν συνάρτηση της γωνίας Θ για $0 \leq \Theta \leq 720^\circ$. Επίσης να υπολογιστεί η παράγωγος $dL_{12}(\Theta)/d\Theta$ και να γίνει η γραφική της παράσταση σαν συνάρτηση της γωνίας Θ για το ίδιο διάστημα τιμών. Συνίσταται η αριθμητική εύρεση της παραγωγών.

(γ) [10%] Υποθέσετε ότι το ρεύμα που διαρρέει τον κυκλικό βρόχο είναι $I_1 = 20\text{A}$, και ότι ο ορθογώνιος βρόχος αποτελείται από $N = 100$ σπείρες (μονωμένες, από λεπτό αγωγό ώστε να μην αλλάζει η γεωμετρία του σχήματος). Επιπλέον ο ορθογώνιος βρόχος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα με συχνότητα $f = 30\text{Hz}$. Να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη (emf), $e(t)$, στον ορθογώνιο βρόχο σαν συνάρτηση του χρόνου t και να γίνει η γραφική της παράσταση σε διάστημα 5 χρονικών περιόδων. Να βρεθεί (συνίσταται η χρήση FFT της MatLab) ο μετασχηματισμός Fourier $E(f)$ της $e(t)$ και να γίνει η γραφική παράσταση του $|E(f)|^2$ σαν συνάρτηση της συχνότητας f . Τι παρατηρείται; Να βρεθεί προσεγγιστικά η σειρά Fourier που προσεγγίζει την επαγόμενη $e(t)$ (εδώ προτείνεται η χρήση της συνάρτησης *fit* της MatLab αν και ίσως βρείτε καλύτερους τρόπους). Να επαναληφθούν τα (β) και (γ) όταν μεταβληθεί το ύψος h σε $h = 0.20\text{m}$.



$$\int \frac{dx}{[x^2 + (A + Bx)^2 + C^2]^{3/2}} = \frac{AB + x + B^2x}{[A^2 + C^2 + B^2C^2][A^2 + C^2 + 2ABx + x^2 + B^2x^2]^{1/2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + A^2)^{3/2}} = \frac{x}{A^2(x^2 + A^2)^{1/2}}$$

Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) (35%)

Κυκλικός βρόχος ακτίνας a , διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I όπως φαίνεται και στο κάτωθι σχήμα. Το κέντρο του βρόχου βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xy σε αποστάσεις d και h από τέλειο αγωγό (απείρου ειδικής αγωγιμότητας) και σχήματος ορθής γωνίας όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διαπερατότητα του αέρα είναι μ_0 . Όλες οι αποστάσεις που μας ενδιαφέρουν είναι πολύ μεγαλύτερες από την ακτίνα του βρόχου ώστε να ισχύουν πάντα οι προϋποθέσεις της θεωρίας του μαγνητικού δίπολου.

(α) [6%] Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο στον αέρα ($x > 0, y > 0, z$) με σημείο αναφοράς του δυναμικού το κέντρο των αξόνων. Να γίνει χρήση του συστήματος συντεταγμένων x, y, z .

(β) [6%] Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο τυχαίο σημείο στον αέρα. Να γίνει χρήση του συστήματος συντεταγμένων x, y, z .

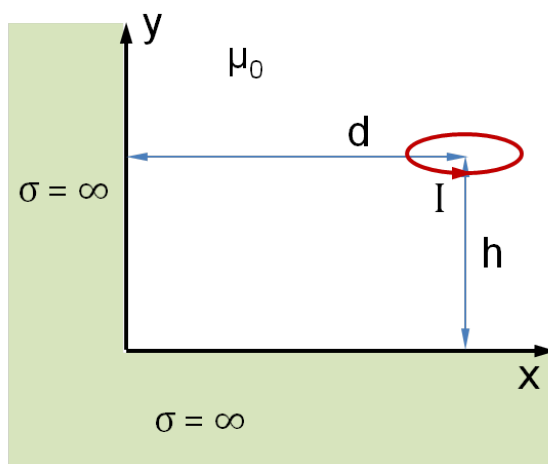
(γ) [5%] Να βρεθούν οι επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος πάνω στις επιφάνειες $x = 0$ και $y = 0$ των τέλειων αγωγίμων επιπέδων.

Για τα επόμενα ερωτήματα θα χρειαστεί η χρήση υπολογιστή με MatLab ή κάποιου άλλου υπολογιστικού πακέτου. **Θεωρείστε ότι $d = 2\text{m}$, $h = 1\text{m}$, $a = 0.1\text{m}$, $I = 1\text{A}$.**

(δ) [5%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο xz για $y = 1\text{m}$. Εάν κάνετε χρήση του λογισμικού *MatLab* προτείνω την χρήση της συνάρτησης **quiver**. Επίσης δείξτε την ροή του διανυσματικού δυναμικού πάνω στο επίπεδο. Και εδώ στην περίπτωση της *MatLab* προτείνω την συνάρτηση **streamslice**. Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για την γραφική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο xy για $z = 2\text{m}$.

(ε) [8%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο xy για $z = 0$. Και πάλι προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων. **Προαιρετικά** όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να υπολογίσουν τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο xy κάνοντας χρήση της συνάρτησης **streamline**. Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines>.

(στ) [5%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση των επαγομένων επιφανειακών ρευματικών κατανομών στα επίπεδα $x = 0$ και $y = 0$. Και πάλι προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων.



Άσκηση 9: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) (35%)

Δύο κυκλικοί βρόχοι ίσων ακτινών a διαρρέονται από ίσα και σταθερά ρεύματα $I_1 = I_2$ αντίστοιχα. Τα επίπεδα των βρόχων είναι παράλληλα στο επίπεδο xy και τα κέντρα τους είναι πάνω στον άξονα z όπως φαίνεται και στο σχήμα. Ο χώρος έχει παντού διαπερατότητα μ_0 . **Δεν ισχύει η προσέγγιση του μαγνητικού δίπολου.** Αυτή είναι η απλοποιημένη διάταξη ενός πηνίου Helmholtz που χρησιμοποιείται για την δημιουργία σχετικά ομοιόμορφου μαγνητικού πεδίου στον χώρο μεταξύ των δύο βρόχων (στην πράξη πηνίων).

(α) [5%] Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο (x,y,z) του χώρου στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς.

(β) [5%] Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο στο τυχαίο σημείο (x,y,z) του χώρου στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Εδώ θα πρέπει να γίνει χρήση των αποτελεσμάτων του προβλήματος που είναι λυμένο στην ιστοσελίδα του μαθήματος http://users.ntua.gr/eglytsis/EM_B/Current_Loop_Magnetic_Field.pdf [χρησιμοποιείτε κατάλληλα τις εξισώσεις (20) και (21)].

(γ) [5%] Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο $H_z(z)$ κατά μήκος του άξονα z . Υπολογίστε την σειρά Taylor του $H_z(z)$ (στο $z = 0$) χρησιμοποιώντας όρους μέχρι και z^4 . Τι παρατηρείται?

Για τα επόμενα ερωτήματα θα χρειαστεί η χρήση υπολογιστή με **MatLab** ή κάποιου άλλου υπολογιστικού πακέτου (Python, Mathematica,...).

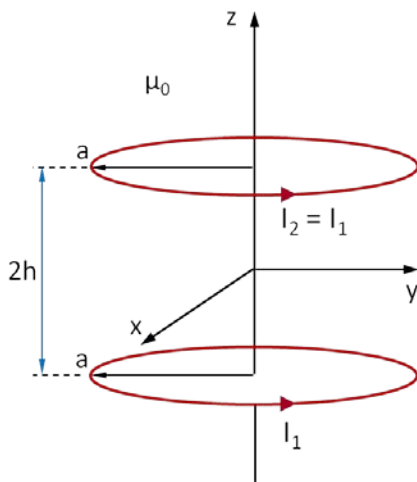
(δ) [5%] Να γίνει η γραφική παράσταση του μαγνητικού πεδίου $H_z(z)$ και των παραγώγων του $d^n H_z/dz^n$ ($n=1,2,3,4$) κατά μήκος του άξονα z για $-2h \leq z \leq 2h$. Θεωρείστε ότι $a = 0.1\text{m}$, $I_1 = I_2 = 1\text{A}$. Χρησιμοποιήστε τρεις διαφορετικές τιμές του $2h = 2a$, a , και $a/2$.

(ε) [5%] Να γίνει η γραφική παράσταση του διανυσματικού δυναμικού $A_\phi(x,y,z)$ (έχει μόνο ϕ -συνιστώσα) στο επίπεδο xz για $-3a \leq x \leq 3a$ και $-(h+2a) \leq z \leq (h+2a)$. Θεωρείστε ότι $2h = a = 0.1\text{m}$, $I_1 = I_2 = 1\text{A}$.

Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση **surface(x,z,A ϕ)**, **shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο xz . Επίσης να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες (γραμμές) στο επίπεδο xz με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Οι ισοδυναμικές γραμμές να βρεθούν για τα δυναμικά $\mu_0[0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.15, 0.175, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 3.0, 5.0]$.

(στ) [5%] Να γίνει η γραφική παράσταση των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο xz για $-3a \leq z \leq 3a$ και $-(h+2a) \leq z \leq (h+2a)$. Θεωρείστε ότι $a = 0.1\text{m}$, $I_1 = I_2 = 1\text{A}$. Χρησιμοποιήστε και πάλι τρεις διαφορετικές τιμές του $2h = 2a$, a , και $a/2$. Προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων (Matlab). **Προαιρετικά** όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να υπολογίσουν τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο xz κάνοντας χρήση της συνάρτησης **streamline**. Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines>.

(ζ) [5%] Να γίνει η γραφική παράσταση του συντελεστή αλληλεπαγωγής των δύο βρόχων (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο που αποδείχθηκε στην τάξη και υπάρχει στις σημειώσεις του μαθήματος) σαν συνάρτηση της ακτίνας των βρόχων a (όπου $0 < a \leq 0.25\text{m}$). Χρησιμοποιήστε τρεις διαφορετικές τιμές του $2h = 0.05\text{m}$, 0.10m , και 0.20m .



Σημείωση: Σε όλες από τις ασκήσεις για παράδοση χρησιμοποιήσετε προγράμματα (σε matlab ή σε άλλα υπολογιστικά πακέτα) θα πρέπει υποχρεωτικά (για να πάρετε τον βαθμό του αντιστοίχου ερωτήματος της άσκησης) στις απαντήσεις σας να συμπεριλάβετε και ένα αντίγραφο (printout) του κώδικα που έχετε χρησιμοποιήσει.