



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Καθ. Η. Ν. Γλύτσης, Τηλ.: 210-7722479 - e-mail: eglytsis@central.ntua.gr - www: <http://users.ntua.gr/eglytsis/>

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Β (2019-2020)

ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Νο. 1

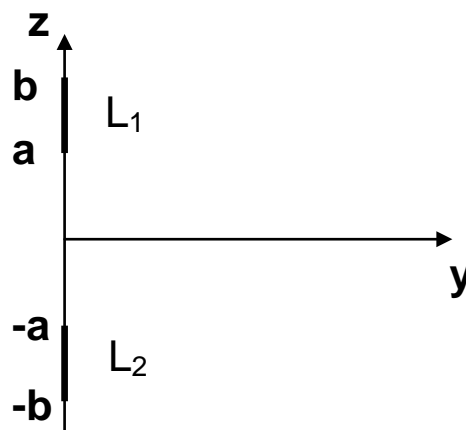
Ασκήσεις για εξάσκηση: No. 1,2,3,4,5

Ασκήσεις για παράδοση: No. 6, 7, 8

Ημερομηνία Παράδοσης: **4 Νοεμβρίου 2019**

Άσκηση 1:

Δίδονται δύο γραμμικές κατανομές ηλεκτρικού φορτίου μήκους L_1 ($a \leq z \leq b$) και L_2 ($-b \leq z \leq -a$) με ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα φορτίου ίση με λ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η επιτρεπτότητα παντού στο χώρο είναι ϵ_0 .

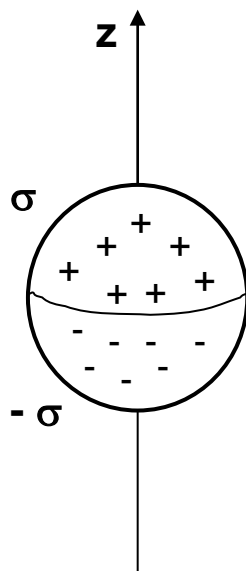


(α) Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για τα σημεία του άξονα των y όταν οι δύο πυκνότητες φορτίου είναι ομόσημες (π.χ. θετικές).

(β) Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για τα σημεία του άξονα των y όταν οι δύο πυκνότητες φορτίου είναι ετερόσημες [$+\lambda$ για το L_1 ($a \leq z \leq b$) και $-\lambda$ για το L_2 ($-b \leq z \leq -a$)].

Άσκηση 2:

Να βρεθεί το δυναμικό, και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία του άξονα z , καθώς και η ροπή του ηλεκτρικού δίπολου από την φορτισμένη σφαίρα ακτίνας a του σχήματος. Το ηλεκτρικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια της σφαίρας με θετική πυκνότητα φορτίου σ στο άνω ημισφαίριο και αρνητική πυκνότητα φορτίου $-\sigma$ στο κάτω.



Άσκηση 3:

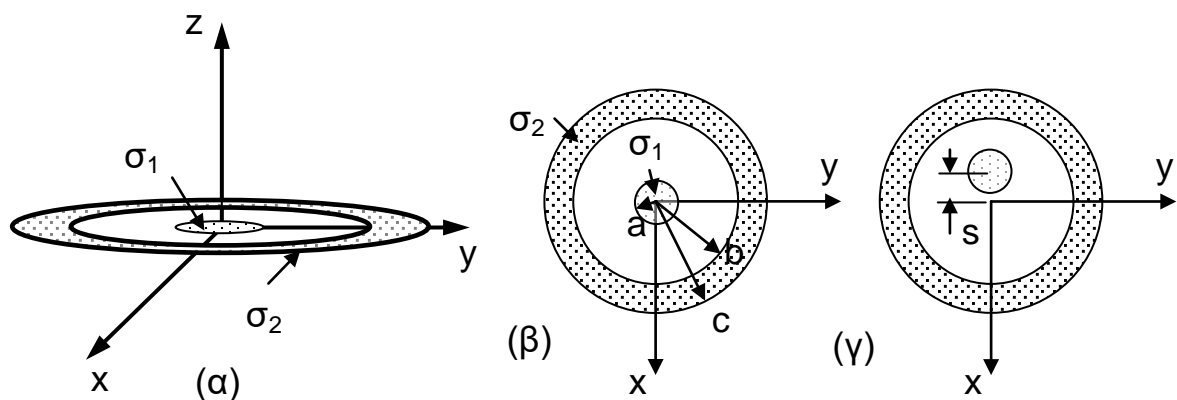
Επιφανειακή κατανομή ηλεκτρικού φορτίου βρίσκεται πάνω σε μια διάταξη ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας a (ομοιόμορφης επιφανειακής πυκνότητας σ_1) και κυκλικού δακτυλίου εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c (ομοιόμορφης επιφανειακής πυκνότητας σ_2). Το σύστημα του δίσκου και του δακτυλίου είναι αμελητέου πάχους και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xy (σχήματα (α) και (β)). Η επιτρεπτότητα είναι παντού ϵ_0 .

(α) Να εκφρασθεί το δυναμικό στο τυχαίο σημείο (x_0, y_0, z_0) του χώρου (με σημείο αναφοράς το άπειρο) υπό μορφή ολοκληρώματος. Να ορισθούν όσο καλύτερα γίνεται οι όροι του ολοκληρώματος.

(β) Να υπολογισθεί το δυναμικό για το τυχαίο σημείο $(0, 0, z_0)$ του άξονος z .

(γ) Να βρεθεί ο λόγος μεταξύ των ολικών φορτίων του δίσκου και του δακτυλίου ώστε το δυναμικό στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων να είναι μηδενικό.

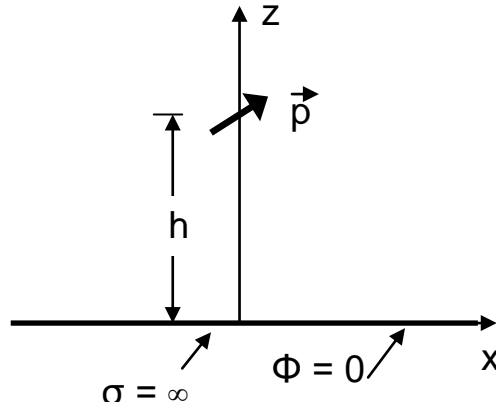
(δ) Εάν ο δίσκος μετακινηθεί κατά μήκος του άξονος των x κατά απόσταση s και οι πυκνότητες φορτίου σ_1 και σ_2 είναι τέτοιες ώστε τα ολικά φορτία του δίσκου και του δακτυλίου να είναι ίσα και αντίθετα να προσδιορισθεί (δείχνοντας σαφώς όλα τα επιμέρους βήματα) η διπολική ροπή του συστήματος των δύο αυτών ηλεκτρικών κατανομών (σχήμα (γ)).



Άσκηση 4:

Ένα ηλεκτρικό δίπολο με διπολική ροπή \vec{p} τοποθετείται σε απόσταση h πάνω από γειωμένο απέραντο αγωγίμο επίπεδο όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Το ηλεκτρικό δίπολο σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των z . Η επιτρεπτότητα του χώρου είναι ϵ_0 . Όλες οι αποστάσεις θεωρούνται μεγάλες σε σύγκριση με το μέγεθος του δίπολου.

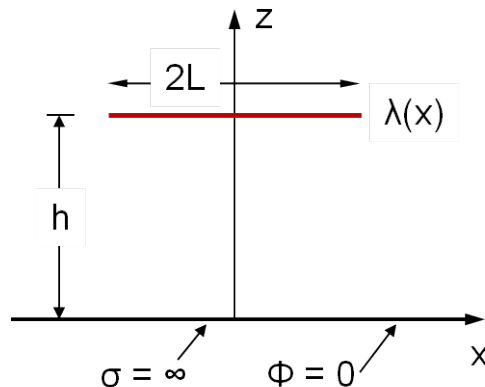
- (α) Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο (x_0, z_0) του επιπέδου xz όπου $z_0 > 0$. Να προσδιορίσετε το δυναμικό σαν συνάρτηση των συντεταγμένων του τυχαίου σημείου, των συντεταγμένων του δίπολου, του μέτρου της διπολικής ροπής, και της γωνίας θ .
- (β) Να βρεθεί η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ πάνω στο γειωμένο επίπεδο.
- (γ) Να βρεθεί η στρεπτική ροπή που ασκείται πάνω στο ηλεκτρικό δίπολο από το γειωμένο επίπεδο.



Άσκηση 5:

Γραμμική κατανομή ηλεκτρικού φορτίου $\lambda(x)$ και μήκους $2L$ βρίσκεται σε ύψος h (στο επίπεδο xz) πάνω από γειωμένο επίπεδο που συμπίπτει με το επίπεδο xy όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα. Ο χώρος έχει παντού επιτρεπτότητα ϵ_0 .

- (α) Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο (x, y, z) του χώρου αν $\lambda(x) = \lambda_0$ (σταθερό).
- (β) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο του άξονα z (εξαιρουμένου του $z = h$ όπου απειρίζεται λόγω του γραμμικού φορτίου. Και πάλι να υποθέσετε ότι $\lambda(x) = \lambda_0$ (σταθερό).
- (γ) Τώρα υποθέσετε ότι η γραμμική κατανομή φορτίου $\lambda(x)$ βρίσκεται πάνω σε νηματοειδή αγωγό όπου είναι μόνο γνωστό ότι το συνολικό φορτίο του είναι Q . Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ρομών περιγράψετε όσο πιο λεπτομερώς μπορείτε πως μπορεί να βρεθεί η κατανομή φορτίου $\lambda(x)$ και μετά πως μπορεί να βρεθεί το δυναμικό στο τυχαίο σημείο (x, y, z) του χώρου. Τι μορφή περιμένετε να έχει η $\lambda(x)$;



Άσκηση 6: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [50%]

Κυκλικό τμήμα τόξου ακτίνας d (μη αγώγιμο), μήκους $2L$, και αμελητέας διατομής φέρει σταθερή γραμμική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου λ . Το τόξο τοποθετείται σε απόσταση d από το κέντρο αγώγιμης γειωμένης σφαίρας ακτίνας a όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα ($d > a$) πάνω στο επίπεδο xz και συμμετρικά ως προς τον άξονα z . Θεωρήστε ότι σημείο αναφοράς του δυναμικού είναι στο άπειρο και η επιτρεπτικότητα είναι παντού ϵ_0 .

(α) [5%] Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό για το τυχαίο σημείο του χώρου υπό την μορφή ολοκληρώματος με όλους τους όρους ορισμένους όσο πληρέστερα μπορείτε.

(β) [5%] Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο για το τυχαίο σημείο του χώρου υπό την μορφή ολοκληρώματος με όλους τους όρους ορισμένους όσο πληρέστερα μπορείτε.

(γ) [5%] Να γραφεί το δυναμικό κατά μήκος του άξονος z με την βοήθεια του μη-πλήρους ελλειπτικού ολοκληρώματος a' είδους όπως ορίζεται δίπλα από το κάτωθι σχήμα.

(δ) [5%] Τι θα άλλαζε στις εκφράσεις του δυναμικού και του ηλεκτρικού πεδίου των ερωτημάτων α και β αν η σφαίρα αντί να είναι γειωμένη έφερε συνολικό φορτίο Q ;

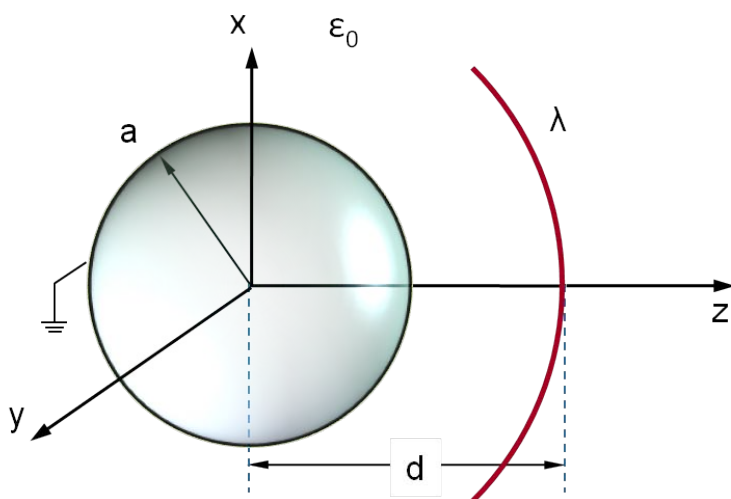
ΓΙΑ ΤΑ ΕΠΟΜΕΝΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΘΕΩΡΕΙΣΤΕ ΤΗΝ ΣΦΑΙΡΑ ΓΕΙΩΜΕΝΗ.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):

(ε) [10%] Να βρεθεί η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου πάνω στην σφαίρα αλλά μόνο για $y=0$ (δηλαδή να παραμείνετε στο επίπεδο xz). Να γίνει η γραφική παράσταση της επαγόμενης επιφανειακής πυκνότητας φορτίου σαν συνάρτηση της πολικής γωνίας θ για $\theta = 0-2\pi$. Θεωρήστε $a = 1\text{m}$ (όλες οι αποστάσεις σε m) και $V_0 = \lambda/(4\pi\epsilon_0) = 1$ (σε V), $d/a = 2$, και $L/a = 1.5$.

(στ) [10%] Να γίνει (με την βοήθεια της *MatLab* ή ισοδύναμου υπολογιστικού πακέτου) γραφική απεικόνιση του ηλεκτροστατικού δυναμικού. Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,Φ)**, **shading interp** (ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του ηλεκτροστατικού δυναμικού στο επίπεδο xz . Επίσης να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες (γραμμές) στο επίπεδο xz με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Να κανονικοποιήσετε το δυναμικό θεωρώντας ότι $V_0 = \lambda/(4\pi\epsilon_0) = 1$ (σε V). Οι ισοδυναμικές γραμμές να βρεθούν για κανονικοποιημένα δυναμικά 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.15, 0.175, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.25, 1.5, 2, 3, και 5. Θεωρήστε $a = 1\text{m}$ (όλες οι αποστάσεις σε m) και $d/a = 2$, $L/a = 1.5$. Επίσης θεωρήστε τον κυκλικό χώρο $a \leq r \leq 4d$ (με $0 \leq \theta \leq 2\pi$) για να υπολογίσετε το δυναμικό.

(ζ) [10%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο xz για $y=0$ στον σφαιρικό χώρο $a \leq r \leq 4d$ (με $0 \leq \theta \leq 2\pi$). Θεωρείστε τις αριθμητικές τιμές που δίδονται στο ερώτημα (στ). Εάν κάνετε χρήση του λογισμικού *MatLab* προτείνω την χρήση της συνάρτησης **quiver**. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο απειρίζεται πάνω στον τόξο (όπως και το δυναμικό) κανονικοποιείτε το ηλεκτρικό πεδίο ώστε όλα τα διανύσματα να έχουν το ίδιο μήκος και να αναπαριστάται μόνο η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.



Μη-πλήρες
Ελλειπτικό Ολοκλήρωμα
Α' Είδους

$$F(\beta_0, k) = \int_0^{\beta_0} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}$$

Άσκηση 7: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [20%]

Κυκλικός δακτύλιος ακτίνας a φέρει ομοιόμορφο γραμμικό φορτίο γραμμικής πυκνότητας λ .

(α) [5%] Να βρεθεί το δυναμικό στο τυχαίο σημείο του χώρου. Για την επίλυση θα χρειαστείτε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα το ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους $K(k)$ (όπως δίδεται κατωτέρω).

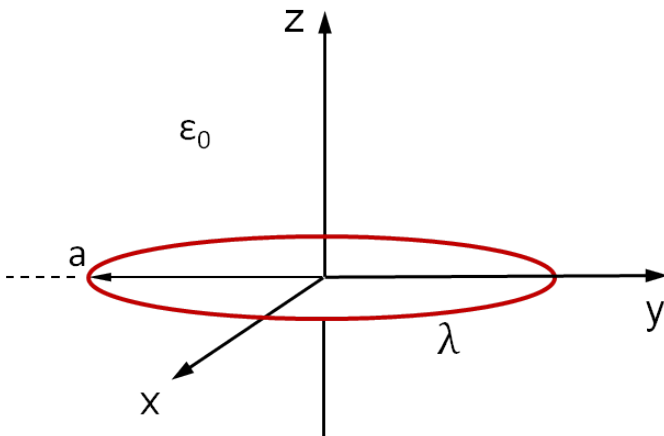
Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):

(β) [5%] Τώρα θα πρέπει να γίνει εφαρμογή του (α) με αριθμητικές τιμές.

Υποθέσετε ότι $a = 1\text{m}$ και ότι $\lambda/2\epsilon_0 = V_0 = 1.0\text{Volt}$. Να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες για $\Phi = 0.10V_0, 0.20V_0, 0.30V_0, 0.40V_0, 0.50V_0, 0.60V_0, 0.70V_0, 0.80V_0, 0.90V_0, 1.0V_0, 1.1V_0$, και $1.2V_0$. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε κάποιο λογισμικό. Μια επιλογή είναι η *MatLab* με τις ρουτίνες **ezplot** και **ezcontour** (πληροφορίες σχετικά με αυτές τις ρουτίνες μπορούν να βρεθούν στο διαδίκτυο). Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ισοδυναμικών επιφανειών στο επίπεδο r_T, z καθώς και οι τρισδιάστατες ισοδυναμικές επιφάνειες λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας παράγονται από απλή περιστροφή των δισδιάστατων επιφανειών γύρω από τον άξονα z .

(γ) [5%] Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο του χώρου. Για την επίλυση θα χρειαστείτε να χρησιμοποιήσετε κατάλληλα τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δευτέρου είδους $K(k), E(k)$ (όπως δίδονται κατωτέρω).

(δ) [5%] Να γίνει μια γραφική απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο xz για $y=0$. Θεωρείστε τις αριθμητικές τιμές που δίδονται στο ερώτημα (β). Εάν κάνετε χρήση του λογισμικού *MatLab* προτείνω την χρήση της συνάρτησης **quiver**. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο απειρίζεται πάνω στον δακτύλιο (όπως και το δυναμικό) κανονικοποιείτε το ηλεκτρικό πεδίο ώστε όλα τα διανύσματα να έχουν το ίδιο μήκος και να αναπαριστάται μόνο η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.



$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$
$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$
$$\frac{dK}{dk} = \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)}$$
$$\frac{dE}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}$$

Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [30%]

Κυκλικός βρόχος (μη αγώγιμος), ακτίνας a , φέρει γραμμικό φορτίο με σταθερή γραμμική πυκνότητα λ και βρίσκεται σε αποστάσεις d και h από γειωμένα αγωγίμα άπειρα επίπεδα που σχηματίζουν ορθή γωνία όπως φαίνεται στο σχήμα (το επίπεδο του βρόχου είναι παράλληλο προς το επίπεδο xz και το κέντρο του είναι στο επίπεδο $z=0$). Ο χώρος έχει παντού επιτρεπτότητα ϵ_0 .

(α) [5%] Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο του χώρου (x,y,z) υπό μορφή ενός ολοκληρώματος με όλους τους όρους πλήρως ορισμένους. Να εκφραστεί στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του σχήματος.

(β) [5%] Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο του χώρου (x,y,z) υπό μορφή ενός ολοκληρώματος με όλους τους όρους πλήρως ορισμένους. Να εκφραστεί στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του σχήματος. Να σχεδιαστούν οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου.

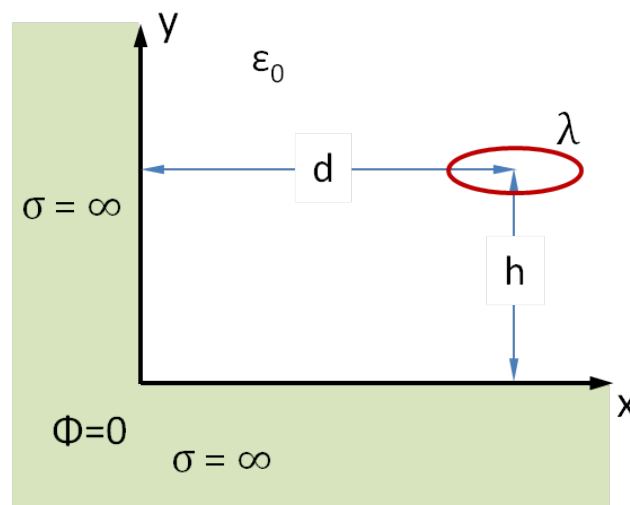
(γ) [5%] Να βρεθεί η επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου πάνω στο γειωμένο επίπεδο $y = 0$.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):

(δ) [15%] Αυτό το ερώτημα αποτελεί αριθμητική εφαρμογή των ανωτέρω ερωτημάτων. Στις γραφικές σας παραστάσεις να κανονικοποιήσετε το δυναμικό, Φ/V_0 , θεωρώντας ότι $V_0 = \lambda/(4\pi\epsilon_0) = 1$ (σε V). Οι ισοδυναμικές γραμμές να βρεθούν για κανονικοποιημένα δυναμικά 0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.0, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5, 6, και 7.5. Να κανονικοποιήσετε το ηλεκτρικό πεδίο, E_w/E_0 ($w=x,y,z$), θεωρώντας ότι $E_0 = \lambda a/(4\pi\epsilon_0) = 1$ (σε Vm). Θεωρήστε $a = 0.1m$ (όλες οι αποστάσεις σε m) και $d = h = 1m$. Να σχεδιαστούν επακριβώς οι ισοδυναμικές επιφάνειες (γραμμές στο επίπεδο xy) και οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες (γραμμές στο επίπεδο xy) και οι δυναμικές γραμμές να σχεδιαστούν στο επίπεδο xy με $0 < x < 2d = 2m$ και $0 < y < 2h = 2m$. Σχηματίσετε αντίστοιχα πλέγματα (grids) για την απεικόνιση τόσο του δυναμικού όσο και του πεδίου.

Επίσης να σχεδιαστούν οι καμπύλες (contours) της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου στο επίπεδο $y = 0$ στην επιφάνεια διάστασης $0 < x < 2m$ και $-2m < z < 2m$.

Προτείνω την χρήση των **quiver** και **streamslice** ή ισοδυνάμων (Matlab). Προαιρετικά όσοι ενδιαφέρονται μπορούν να υπολογίσουν τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο xy κάνοντας χρήση της συνάρτησης **streamline**. Μια 2D βελτιωμένη έκδοση της **stream2** (που χρησιμοποιεί η **streamline**) βρίσκεται στο αποθηκευτήριο MatLab Exchange (με το όνομα **mmstream2**) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/38860-improved-2-d-streamlines>.



Σημείωση: Σε όλες από τις ασκήσεις για παράδοση χρησιμοποιήσετε προγράμματα (σε matlab ή σε άλλα υπολογιστικά πακέτα) θα πρέπει υποχρεωτικά (για να πάρετε τον βαθμό του αντιστοίχου ερωτήματος της άσκησης) στις απαντήσεις σας να συμπεριλάβετε και ένα αντίγραφο (printout) του κώδικα που έχετε χρησιμοποιήσει.