



# ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Καθ. Η. Ν. Γλύτσης, Τηλ.: 210-7722479 - e-mail: [eglytsis@central.ntua.gr](mailto:eglytsis@central.ntua.gr) - www: <http://users.ntua.gr/eglytsis/>

## ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ Β (2019-2010)

### ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ No. 2

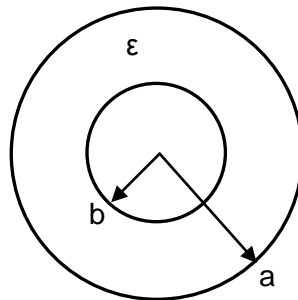
Ασκήσεις για εξάσκηση: No. 1,2,3,4,5,6

Ασκήσεις για παράδοση: No. 7, 8

Ημερομηνία Παράδοσης: **10 Δεκεμβρίου 2019**

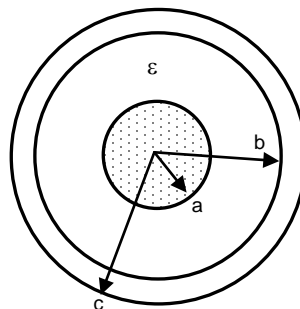
#### Άσκηση 1:

Να υπολογισθούν η διηλεκτρική μετατόπιση ( $\vec{D}$ ), η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ( $\vec{E}$ ), η πόλωση ( $\vec{P}$ ), οι επιφανειακές και οι χωρικές πυκνότητες των ελευθέρων, των δεσμευμένων και των συνολικών φορτίων καθώς και η χωρητικότητα ενός σφαιρικού πυκνωτή εξωτερικής ακτίνας  $a$  και εσωτερικής ακτίνας  $b$ , όταν η σχετική επιτρεπτότητα του μονωτικού μεταξύ των δύο σφαιρικών αγωγών είναι: (α)  $\epsilon_r = \text{γνωστή σταθερά}$  και (β)  $\epsilon_r = k a^2/r^2$ , όπου  $k$  είναι μια γνωστή σταθερά και  $r$  είναι η ακτινική απόσταση από το κέντρο των δύο αγωγών του πυκνωτή. Θεωρήστε ότι η εσωτερική σφαίρα ακτίνας  $b$  είναι σε δυναμικό  $U$  ενώ η εξωτερική ακτίνας  $a$  είναι γειωμένη.



#### Άσκηση 2:

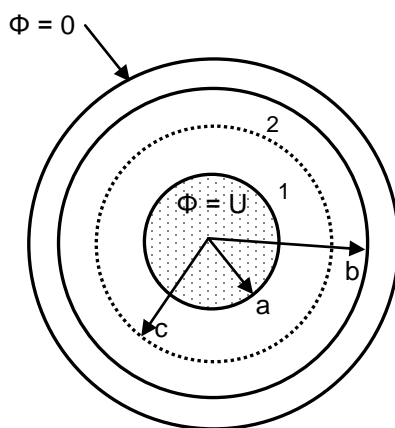
Η αγώγιμη σφαίρα ακτίνας  $a$  είναι ομόκεντρη με το αγώγιμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας  $b$  και εξωτερικής ακτίνας  $c$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογισθούν οι **συντελεστές δυναμικού**, οι **συντελεστές χωρητικότητας**, και οι **μερικές χωρητικότητες** του συστήματος.



### Άσκηση 3:

Για το ομοαξονικό καλώδιο (από τέλειους αγωγούς) απείρου μήκους του κάτωθι σχήματος να προσδιορισθούν τα εξής: (α) η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος, (β) η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, (γ) το δυναμικό, (δ) η διηλεκτρική μετατόπιση, (ε) οι πυκνότητες ηλεκτρικών φορτίων (τόσο οι χωρικές όσο και οι επιφανειακές πυκνότητες), καθώς και (στ) η χωρητικότητα και η αντίσταση μόνωσης ανά μονάδα μήκους για τις εξής δύο περιπτώσεις:

1. Όταν το μονωτικό υλικό αποτελείται από δύο στρώματα με επιτρεπτότητα και ειδική αγωγιμότητα  $\epsilon_1, \sigma_1$  όταν  $a < r_T < c$  και  $\epsilon_2, \sigma_2$  όταν  $c < r_T < b$ .
2. Όταν το μονωτικό υλικό έχει παντού επιτρεπτότητα  $\epsilon = \epsilon_0 (r_T / a)$  ενώ η ειδική αγωγιμότητα του είναι  $\sigma = \sigma_0 (r_T / a)^2$  (όταν  $a < r_T < b$ ). Σ' αυτή την περίπτωση να υπολογισθούν όλα τα μεγέθη πλην της χωρητικότητας.

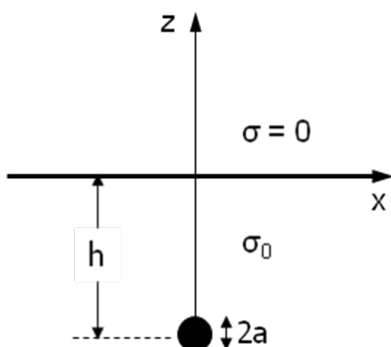


### Άσκηση 4:

Αγώγιμη σφαίρα ακτίνας  $a$  βρίσκεται σε βάθος  $h$  ( $h \gg a$ ) μέσα σε αγώγιμο υλικό με ειδική αγωγιμότητα  $\sigma_0$ . Ο χώρος για  $z > 0$  δεν είναι αγώγιμος ( $\sigma = 0$ ). Σταθερό ρεύμα  $I$  διαχέεται από την σφαίρα μέσα στο αγώγιμο υλικό. Συνίσταται η χρήση κάποιου είδους κατοπτρισμού σε αυτό το πρόβλημα ώστε να ισχύει η κατάλληλη οριακή συνθήκη στο  $z = 0$ . Να υποθέσετε ότι το ρεύμα τόσο από την σφαίρα όσο και από το τυχόν είδωλό της διαχέεται ομοιόμορφα στο χώρο.

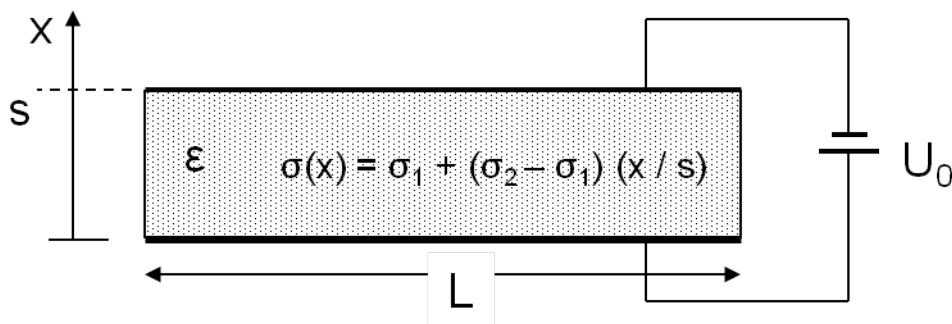
(α) Να βρεθεί η πυκνότητα ρεύματος μέσα στο αγώγιμο υλικό.

(β) Να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό της σφαίρας με δυναμικό αναφοράς στο άπειρο. Ποιά είναι αντίσταση γείωσης της σφαίρας;



### Άσκηση 5:

Ένα ζεύγος παραλλήλων ηλεκτροδίων είναι συνδεδεμένο σε πηγή σταθερής τάσης  $U$ . Τα ηλεκτρόδια απέχουν απόσταση  $s$ , έχουν πλάτος  $L$ , και βάθος  $d$  (κάθετα στο σχήμα). Ένα ωμικό υλικό με σταθερή επιτρεπτικότητα  $\epsilon$  και μεταβλητή ειδική αγωγιμότητα  $\sigma(x) = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)(x/s)$  γεμίζει το χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων. Τα φαινόμενα των άκρων θεωρούνται αμελητέα. (α) Να βρεθεί το δυναμικό στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων. Δυναμικό αναφοράς στο  $x = s$ . (β) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων. (γ) Να βρεθεί η πυκνότητα ρεύματος στο χώρο μεταξύ των ηλεκτροδίων. (δ) Να βρεθεί η ηλεκτρική αντίσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων. (ε) Να βρεθούν οι χωρικές και επιφανειακές πυκνότητες φορτίων καθώς και το ολικό χωρικό φορτίο και το ολικό επιφανειακό φορτίο σε κάθε ηλεκτρόδιο.



### Άσκηση 6:

Μεταξύ δύο μεγάλων αγωγικών παραλλήλων πλακών σε απόσταση  $\ell$  (που βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού  $V_0$  όπως φαίνεται στο σχήμα) βρίσκεται μια μεγάλη πλάκα ηλεκτρίτου με χωρικά μεταβαλλόμενη πόλωση

$\vec{P} = P_0 \left( \frac{z^2}{d^2} \right) \hat{i}_z$ , όπου  $P_0$  γνωστή σταθερά. Οι διαστάσεις των μεγάλων πλακών και του ηλεκτρίτου στις διευθύνσεις  $x, y$  είναι  $L$  και  $w$ , αντίστοιχα, και είναι πολύ μεγαλύτερες από τις  $\ell$  και  $d$  ώστε το ηλεκτροστατικό πρόβλημα να μπορεί να θεωρηθεί σαν μονοδιάστατο ως προς την διεύθυνση  $z$ .

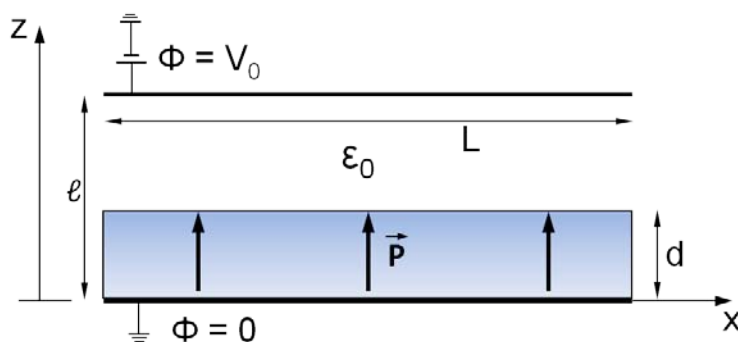
(α) Να βρεθεί το δυναμικό για το τυχαίο σημείο του χώρου μεταξύ των αγωγικών πλακών.

(β) Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο και η διηλεκτρική μετατόπιση για το τυχαίο σημείο του χώρου μεταξύ των αγωγικών πλακών.

(γ) Να βρεθούν όλα τα επιφανειακά και χωρικά φορτία όπου υπάρχουν.

(δ) Να βρεθεί η χωρητικότητα μεταξύ των δύο αγωγικών πλακών και να γίνει η γραφική της παράσταση. Για ποια τιμή του δυναμικού μηδενίζεται η χωρητικότητα?

(ε) Αν  $P_0 = 10^{-4} \text{ C/m}^2$ ,  $\ell = 1 \text{ mm}$ ,  $d = 100 \mu\text{m}$ ,  $V_0 = 10 \text{ V}$ , να γίνει η γραφική παράσταση του δυναμικού, και του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των δύο αγωγικών παραλλήλων πλακών. Να γίνει και η γραφική παράσταση της χωρητικότητας αν η απόσταση  $\ell$  μεταβάλλεται μεταξύ  $0.85\ell$  και  $1.15\ell$  με όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές.



### Άσκηση 7: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [60%]

Γραμμική κατανομή ηλεκτρικού φορτίου  $\lambda(x)$  και μήκους  $2L$  βρίσκεται σε ύψος  $h$  (στο επίπεδο  $xz$ ) πάνω από την επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο διηλεκτρικών περιοχών με επιτρεπτότητες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  όπως φαίνεται στο κάτωθι σχήμα.

(α) [10%] Να βρεθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  του χώρου αν  $\lambda(x) = \lambda_0$  (σταθερό).

(β) [10%] Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  του χώρου. Σαν ειδική περίπτωση υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα  $z$  (εξαιρουμένου του  $z = h$  όπου απειρίζεται λόγω του γραμμικού φορτίου). Και πάλι να υποθέσετε ότι  $\lambda(x) = \lambda_0$  (σταθερό).

(γ) [5%] Τώρα υποθέσετε ότι η γραμμική κατανομή φορτίου  $\lambda(x)$  βρίσκεται πάνω σε λεπτό αγωγό (ακτίνας  $a \ll L$ ) όπου είναι μόνο γνωστό ότι το συνολικό φορτίο του είναι  $Q$ . Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών, περιγράψτε όσο πιο λεπτομερώς μπορείτε, πως μπορεί να βρεθεί η κατανομή φορτίου  $\lambda(x)$  και μετά πως μπορεί να βρεθεί το δυναμικό στο τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  του χώρου. Τι μορφή περιμένετε να έχει η  $\lambda(x)$ ;

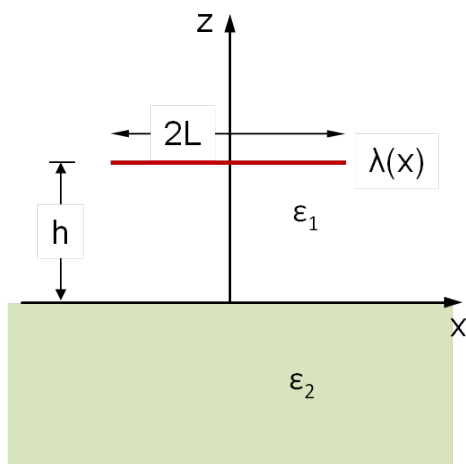
**Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):**

(δ) [20%] Αρχικά θεωρείστε ότι  $L = 0.5\text{m}$ ,  $h = 0.5\text{m}$ , και  $\lambda(x) = \lambda_0$ , με  $\lambda_0/\epsilon_0 = 1\text{Volt}$ . Επίσης  $\epsilon_1 = \epsilon_0$  και  $\epsilon_2 = 5\epsilon_0$ . Να γίνει γραφική παράσταση του ηλεκτροστατικού δυναμικού στο επίπεδο  $xz$ . Επειδή σε αυτό το ερώτημα η ράβδος έχει μηδενική διατομή αποφύγετε να υπολογίσετε το δυναμικό πάνω στην ράβδο. Να χρησιμοποιήσετε την συνάρτηση **surface(x,y,Φ)**, **shading interp** (ή την **imagesc** ή ισοδύναμη) για την χρωματική απεικόνιση του ηλεκτροστατικού δυναμικού στο επίπεδο  $xz$ . Επίσης να βρεθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες (γραμμές) στο επίπεδο  $xz$  με την βοήθεια της συνάρτησης **contour**. Να κανονικοποιήσετε το δυναμικό θεωρώντας ότι  $\lambda/\epsilon_0 = 1$  (σε V). Οι ισοδυναμικές γραμμές να βρεθούν για κανονικοποιημένα δυναμικά 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.075, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, και 0.5.

Να γίνει και μια γραφική απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο  $xz$  για  $y=0$  στον χώρο  $-2\text{m} \leq x, z \leq 2\text{m}$ . Εάν κάνετε χρήση του λογισμικού *MatLab* προτείνω την χρήση της συνάρτησης **quiver**. Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο απειρίζεται πάνω στο γραμμικό φορτίο κανονικοποιείτε το ηλεκτρικό πεδίο ώστε όλα τα διανύσματα να έχουν το ίδιο μήκος και να αναπαριστάται μόνο η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Αποφύγετε και εδώ υπολογισμό του πεδίου πάνω στο γραμμικό φορτίο.

Επαναλάβετε τις γραφικές παραστάσεις για  $\epsilon_1 = 5\epsilon_0$  και  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ .

(ε) [15%] Θεωρείστε ότι  $L = 0.5\text{m}$ ,  $h = 0.5\text{m}$ , και  $Q/\epsilon_0 = 1\text{Vm}$ . Υλοποιήστε την μέθοδο των ροπών του ερωτήματος (γ). Να βρεθεί η γραμμική κατανομή φορτίου  $\lambda(x)/\epsilon_0$ . Να γίνει η γραφική παράσταση της κατανομής  $\lambda(x)/\epsilon_0$  κατά μήκος του γραμμικού φορτίου. Υποθέστε ότι η ακτίνα του κυλινδρικού τώρα αγωγού είναι  $a = 0.0025\text{m}$ . Να υπολογιστεί το δυναμικό πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια ( $z = 0$ ) για  $y = 0$  και  $-2\text{m} \leq x \leq 2\text{m}$  και να γίνει η γραφική του παράσταση.



#### Χρήσιμα Ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} = \ln \left[ (x-a) + \sqrt{(x-a)^2 + b^2} \right]$$
$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

### Άσκηση 8: (Αυτή η άσκηση είναι προς παράδοση) [40%]

Δίδονται δύο τέλει αγωγοί κυλινδρικοί ράβδοι, 1 και 2, μήκους  $L$  και ακτίνας  $a$  έκαστος. Οι αγωγοί βρίσκονται θαμμένοι στην γη η οποία θεωρείται σαν ομογενές υλικό με ειδική αγωγιμότητα  $\sigma_0$ . Τα κέντρα των ράβδων βρίσκονται σε αποστάσεις  $h_1 = h_2 = h$  αντίστοιχα από την επιφάνεια του εδάφους ( $z = 0$ ). Οι ράβδοι είναι τοποθετημένες στο επίπεδο  $y = 0$  όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι ράβδοι απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $D$  ως προς την οριζόντια διεύθυνση  $x$  και είναι συμμετρικά τοποθετημένοι ως προς τον άξονα  $z$ . Ο χώρος πάνω από το έδαφος ( $z > 0$ ) είναι αέρας με μηδενική ειδική αγωγιμότητα ( $\sigma = 0$ ). Οι ράβδοι είναι ηλεκτρικά συνδεδεμένοι (με μονωμένο καλώδιο) χρησιμοποιούνται σαν σύστημα γείωσης μεταλλικών διατάξεων-συσκευών και μέσω αυτής συνεχές ρεύμα  $I$  διαχέεται μέσα στο έδαφος όπως φαίνεται στο σχήμα.

(α) [10%] Χωρίσετε την κάθε ράβδο σε  $N$  ίσα τμήματα (μήκους  $L_i/N$  έκαστο  $i=1,2$ ) υποθέτοντας ότι από κάθε τμήμα διαχέεται σταθερή πυκνότητα ρεύματος. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο των ρομών για να βρείτε την κατανομή του ρεύματος που διαχέεται από τις δύο ράβδους στο έδαφος χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο. Να βρεθεί αρχικά ο πίνακας των αμοιβαίων αντιστάσεων (**VDF** παράγοντες) μεταξύ των τμημάτων των δύο ράβδων. Μετά βρείτε την κατανομή του ρεύματος. Χρησιμοποιήστε αριθμητικές τιμές όπου  $N = 3$ ,  $a = 0.0035\text{m}$ ,  $L = 1.2\text{m}$ ,  $h = 0.80\text{m}$ ,  $D = 1.5\text{m}$ ,  $\sigma_0 = 1/160$  ( $1/\Omega\text{m}$ ), και  $I = 250\text{A}$ . Μην κάνετε τις πράξεις χωρίς την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Τα επόμενα ερωτήματα απαιτούν την χρήση υπολογιστού (MatLab, Python, Mathematica, C++, ή άλλο):

(β) [10%] Να βρεθεί το δυναμικό των ράβδων όπως και η αντίσταση γείωσης της διάταξης για τις παραμέτρους του ερωτήματος (α). Επίσης να βρεθεί και το δυναμικό πάνω στο έδαφος στο σημείο  $O$  (αρχή των αξόνων,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ). Να γίνει γραφική παράσταση του δυναμικού του εδάφους (θεωρώντας  $z = y = 0$ ) με  $x$  στο διάστημα  $[-3\text{m}, 3\text{m}]$ .

(γ) [20%] Επαναλάβετε το ερώτημα (β) για αριθμό ίσων τμημάτων για κάθε ράβδο  $L_i/N$ , όπου  $N = 5-75$  με διαστήματα 5 τμημάτων (5, 10, 15, ...). Παρουσιάσετε τα αποτελέσματά σας σε ένα πίνακα και κάνετε και τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

