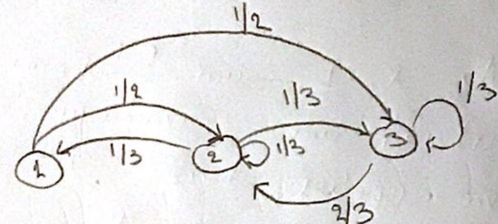
$\boxed{\text{Άσκηση 20}}$ $\quad X = \{1,2,3\}$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ p & 2/3-p & 1/3 \end{bmatrix}$$



α) $p=0$ $\quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

Αναζητώ ιδιοτιμές

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{vmatrix} = 0 \iff -\lambda\left[(1/3-\lambda)^2 - \frac{2}{9}\right] - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\left(1/3-\lambda\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9} = 0 \iff$$

$$-\lambda(1/3-\lambda)^2 + \frac{2}{9}\lambda - \frac{1}{6}(1/3-\lambda) + \frac{1}{9} = 0 \iff$$

$$-\lambda\left(1/9 - \frac{2}{3}\lambda + \lambda^2\right) + \frac{2}{9}\lambda - \frac{1}{18} + \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{9} = 0 \iff$$

$$-\frac{\lambda}{9} + \frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{2}{9}\lambda + \frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{18}$$

$$-\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{5}{18}\lambda + \frac{1}{18} = 0$$

3 ρίζες Προφανής ρίζα 1 και από Vieta έχω

$$-\frac{2/3}{-1} = \rho_1 + \rho_2 + 1 \iff \rho_2 = -1/3 - \rho_1 \quad (1)$$

$$(-1)^3 \cdot \frac{1/18}{-1} = \rho_1\rho_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \rho_1(-1/3-\rho_1) = \frac{1}{18} \iff$$

$$\iff -\rho_1/3 - \rho_1^2 = 1/18 \iff \rho_1^2 + \rho_1/3 + \frac{1}{18} = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{9} - 4\frac{1}{18} = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$\rho_{1,2} = \frac{-\frac{1}{3} \pm i\sqrt{1/9}}{2} = -\frac{1}{6} \pm i\frac{1}{6}$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{6} + i\frac{1}{6}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{6} - i\frac{1}{6}$

Για να βρούμε το $P[X_n=1 \mid X_0=1]$ αρκεί να βρούμε την τιμή του στοιχείου $(0,0)$ του πίνακα $P^{(n)}$

Άρα ο P είναι διαγωνοποιήσιμος και

$$P = M\Delta M^{-1} \quad \text{όπου} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6}-i\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6}+i\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Επίσης ξέρω ότι $\quad P^{(n)} = M\Delta^{(n)}M^{-1} \quad$ όπου $\Delta^{(n)} = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}-i\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{6}+i\frac{1}{6}\right)^n \end{bmatrix}$

Τότε μπορώ να γράψω το στοιχείο $P_{00}^{(n)}$ ως γραμ. συνδυασμό των ιδιοτιμών.

Δηλαδή $P_{00}^{(n)} = a\,1^n + b\left(-\frac{1}{6}-i\frac{1}{6}\right)^n + c\left(-\frac{1}{6}+i\frac{1}{6}\right)^n$ (2)

όπου για $n=1$ έχουμε $0 = a + b\left(-\frac{1}{6}-i\frac{1}{6}\right) + c\left(-\frac{1}{6}+i\frac{1}{6}\right)$

για $n=0$ έχουμε $1 = a + b + \gamma$ (1)

για $n=2$ έχουμε $1/6 = a + b\left(-\frac{1}{6}-i\frac{1}{6}\right)^2 + c\left(-\frac{1}{6}+i\frac{1}{6}\right)^2$ (3)

Άρα
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{6}-i\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}+i\frac{1}{6} \\ 1 & \left(-\frac{1}{6}-i\frac{1}{6}\right)^2 & \left(-\frac{1}{6}+i\frac{1}{6}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Άρα $a = 0,16$, $b = 0,42 - 0,06j$, $c = 0,42 + 0,06j$

και $P_{00}^{(n)} = 0,16 + (0,42-0,06j)\left(-\frac{1}{6}-i\frac{1}{6}\right)^n + (0,42+0,06j)\left(-\frac{1}{6}+i\frac{1}{6}\right)^n$

Για την πράξη πινάκων χρησιμοποίησα επιλυτικό κομπιουτεράκι.

Επίσης μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $\frac{1+i}{6} = \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{3\pi i/4}$ και $\frac{1-i}{6} = \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{-3\pi i/4}$

Άρα γίνεται $P_{00}^{(n)} = 0,16 + (0,42-0,06j)\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^n e^{\frac{j3\pi n}{4}} + (0,42+0,06j)\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^n e^{-\frac{j n 3\pi}{4}}$

β) Για $p = 1/6$ έχουμε
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Τώρα όπως και πριν αναζητούμε ιδιοτιμές του P όπου έχουμε $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{6}$ Άρα ο P δεν είναι διαγωνοποιήσιμος οπότε μπορούμε να το γράψουμε σε μορφή Jordan όπου
$$P = J\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/6 & 1 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}J^{-1}$$
Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι
$$P^{(n)} = J\begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1/6)^n & n\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{bmatrix}$$

Άρα υπάρχουν πραγματικές τιμές $P_{00}^{(n)} = a + (b + cn)\left(-\frac{1}{6}\right)^n$

Για $n=0$ έχουμε $1 = a + b$

Για $n=1$ έχουμε $0 = a + (b+c)\left(-\frac{1}{6}\right) = a - \frac{b}{6} - \frac{c}{6}$

Για $n=2$ έχουμε $\frac{1}{4} = a + (b+2c)\left(-\frac{1}{6}\right)^2 = a + \frac{b}{36} + \frac{c}{18}$

Άρα έχουμε
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,20408 \\ 0,79592 \\ 0,42857 \end{bmatrix}$$

Άρα $P_{00}^{(n)} = 0,9 + \left(0,796 + 0,4286\,n\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^n$

δ) Για $p = 2/3$ έχουμε $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα του P θα είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{6}$, $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{3}+1}{6}$

όμοια με το (α) έχουμε ότι $P^{(n)} = M \Delta^{(n)} M^{-1}$

όπου $\Delta^{(n)} = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sqrt{3}-1}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)^n \end{bmatrix}$ Άρα θα προκύψει κανονικά ότι $P_{00}^{(n)} = a 1^n + b\left(\frac{\sqrt{3}-1}{6}\right)^n + c\left(\frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)^n$

όπου για $n=0$ έχουμε $1 = a + b + c$

για $n=1$ έχουμε $0 = a + b\left(\frac{\sqrt{3}-1}{6}\right) + c\left(\frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)$

για $n=2$ έχουμε $1/2 = a + b\left(\frac{\sqrt{3}-1}{6}\right)^2 + c\left(\frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)^2$

Άρα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}-1}{6} & \frac{\sqrt{3}+1}{6} \\ 1 & \left(\frac{\sqrt{3}-1}{6}\right)^2 & \left(\frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1,1675 \\ 3,2642 \\ -3,426 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

Άρα $P_{00}^{(n)} = 1,1675 + 3,2642\left(\frac{\sqrt{3}-1}{6}\right)^n - 3,426\left(\frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)^n$

Όσον αφορά το $\lim_{n\to\infty} P^n$ θα λέγαμε διαισθητικά και μόνο ότι εφόσον είναι στοχαστικός ισχύει

1: θα έχει πάντα μια ιδιοτιμή το 1 και η τάξη θα είναι πολλαπλότητα του 1

2: οι ιδιοτιμές

Τότε διακρίνω 2 περιπτώσεις

1 Να καταλήξει σε μηδενικό πίνακα

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$

2 Αν είναι Διαγώνιος και του κανονικά δηλαδή

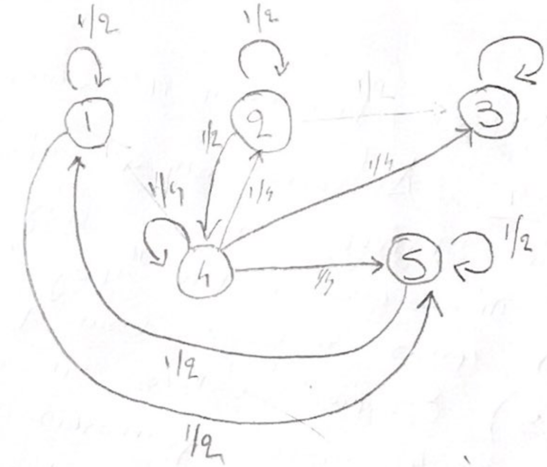
Αν π.χ. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{n\to\infty} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Δηλαδή αν είναι διαγώνιος τότε δεν θα μηδενιστεί.

Άσκηση 23

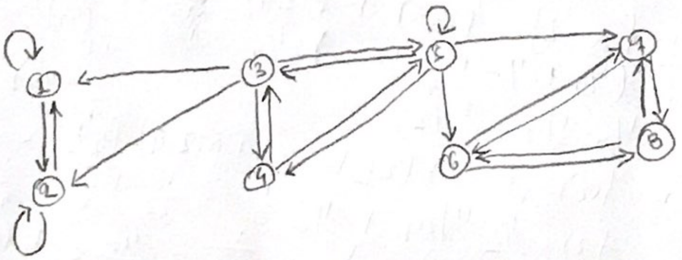
$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$



Συνολικά βλέπουμε ότι το παραπάνω γράφημα χωρίζεται σε 3 κλάσεις "επικοινωνίας". Τις $\{1,5\}$, $\{3\}$, $\{2,4\}$. Από τις οποίες οι $\{1,5\}$ και $\{3\}$ είναι κλειστές και επαναληπτικές, πιο συγκεκριμένα η $\{3\}$ είναι απορροφητική, και η κλάση $\{2,4\}$ είναι ανοιχτή και παροδική.

Άσκηση 24

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Από τον γράφο της Σελ 4 διακρίνουμε 3 κλάσεις επικοινωνίας τις $\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6,7,8\}$ εκ των οποίων οι $\{1,2\}$ και $\{6,7,8\}$ είναι κλειστές και επαναληπτικές ενώ η $\{3,4,5\}$ είναι ανοικτή και παροδική.

Αν $X_0=1$ και δεδομένου ότι η κλάση $\{1,2\}$ είναι κλειστή και επαναληπτική γνωρίζουμε ότι η αλυσίδα μπορεί να βρεθεί μόνο στις καταστάσεις $\{1\}$ και $\{2\}$.
Άρα ήδη ξέρουμε ότι $P[X_n=k]=0$ $\forall n \in N_0$ και $\forall k \in \{3,4,5,6,7,8\}$

Άρα αν περιοριστούμε στην κλάση $\{1,2\}$ έχουμε ότι

$$P_{reduced} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

όπου επειδή ο $P_{reduced}$ είναι στοχαστικός πίνακας έχει σίγουρα ιδιοτιμή το 1. Άρα $\lambda_1=1$ και επίσης ξέρω ότι $tr(P_{reduced}) = \lambda_1+\lambda_2$ $\Leftrightarrow$ $1/2 + 3/4 = 1 + \lambda_2$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_2 = 1/4$

Άρα εφόσον καταλήξαμε με 2 διακριτές ιδιοτιμές ξέρουμε ότι ο $P_{reduced}$ διαγωνοποιείται έτσι:

$$P_{reduced} = M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} M^{-1}$$

Άρα από την θεωρία ξέρουμε

$$P_{reduced}^{(n)} = M \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1/4)^n \end{bmatrix} M^{-1}$$

όπου το M είναι διανυσματική βάση του R^2.

Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα $P[X_n=1]$ και $P[X_n=2]$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των δυνάμεων λ_1 και λ_2

Άρα $P[X_n=1] = a + \frac{b}{4^n}$ και $P[X_n=2] = c + \frac{d}{4^n}$

όπου για $n=0$ $P[X_0=1]=1 \Leftrightarrow a+b=1$ (1)

και $P[X_0=2]=0 \Leftrightarrow c+d=0 \Leftrightarrow \boxed{c=-d}$ (2)

επίσης για $n=1$ $P[X_1=1]=1/2 \Leftrightarrow a+\frac{b}{4}=1/2 \overset{(1)}{\Rightarrow} a+\frac{1-a}{4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4a+1-a=2 \Leftrightarrow \boxed{a=1/3} \Rightarrow \boxed{b=2/3}$

και $P[X_1=2]=1/2 \Leftrightarrow c+\frac{d}{4}=\frac{1}{2} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} c+\frac{-c}{4}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{c=\frac{2}{3}}$ και $\boxed{d=\frac{-2}{3}}$

Άρα $P[X_n=1] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4^n}$ και $P[X_n=2] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{4^n}$

* SMP = Strong Markov Property

$\boxed{\text{Άσκηση } 26}$

MC: $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $T_x = \inf\{n > 10 : X_n = x\}$

Ορίζουμε την MC $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ η οποία είναι η μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ αλλά μετά από χρόνο 11 βημάτων.

Από την θεωρία ξέρουμε ότι μια MC είναι ανεξάρτητη του παρελθόντος άρα οι $\{X_n\}$ και $\{Y_n\}$ θα είναι SMP* ίδιες αλλά $\Pi_{Y_0} = \Pi_{X_{11}}$ δηλαδή η αρχική κατάσταση της $\{y_n\}$ είναι η κατάσταση που θα βρεθεί η $\{X_n\}$ μετά από 11 βήματα. Επειδή από το "Παράδειγμα 14" του βιβλίου γνωρίζουμε ότι ο χρόνος πρώτης αφίξης της $\{Y_n\}$ στο $X_n = x$ $\underline{T_x = \inf\{n \geq 0 : X_n = x\}}$ είναι και χρόνος διακοπής εφόσον η F_n είναι κλειστή ως προς τις τομές. Βέβαια πρέπει να λάβουμε υπόψην αν T_{10} είναι $\boxed{T_{10} < \infty}$. Αυτό σημαίνει με το ∞ δηλαδή πρέπει στ' αλήθεια γιατί π.χ. μπορεί να βρισκόμαστε σε κλειστή κλάση που δεν ανήκει το X και να μην μπορούμε να το φτάσουμε ποτέ.

$\boxed{\text{Άσκηση } 27}$ X.Δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

$T = \inf\{k \geq S : X_k = X_2\}$

$T = \inf\{k \geq S : X_k = X_2\} = \inf\{k - S \geq 0 : X_k = X_2\} \overset{k=\lambda+S}{=\!=} T_S + \inf\{\lambda \geq 0 : X_\lambda = X_2\}$

$T = \inf\{\lambda \geq 0 : X_{\lambda+S} = X_2\} =$ όπου το T_S είναι ο χρόνος για S βήματα στην αλυσίδα $\{X_n\}$ με τον ίδιο πίνακα μεταβάσεων με την $\{Y_n\}$ με το X_2 συνέβη πριν το X_S για (SMP)*. Επίσης ορίζουμε την $\{Y_n\}$ και αυτό X_2 να το θεωρήσουμε δεδομένο. $\{X_n\}$ και $\Pi_{Y_0} = X_5$ οπότε μπορούμε

Είναι ένα γεγονός

Άρα το $\inf\{\lambda \geq 0 : Y_\lambda = X_2\}$ είναι χρόνος πρώτης αφίξης άρα και χρόνος διακοπής.

Άσκηση 28

T : χρόνος διακοπής και $A \subset X$, $S = \inf\{k > T : X_k \in A\}$

$S = \inf\{k - T - 1 \geq 0 : X_k \in A\} = \inf\{\lambda \geq 0 : X_{\lambda+T+1} \in A\} =$

$= T+1 + \inf\{\lambda \geq 0 : X_\lambda \in A\}$

Όπου αφού το T είναι stopping time σημαίνει ότι $T+1 < \infty$ και το $T_y = \inf\{\lambda \geq 0 : X_\lambda \in A\}$ είναι ο χρόνος πρώτης αφίξης και ισχύει $X_\lambda \in A$ μιας αλυσίδας Markov όμοιας της $\{X_n\}$ και από S.M.P. $\exists \{Y_n\}$ με αρχική κατάσταση $Y_0 = X_{T+1}$ και T_y χρόνος πρώτης άφιξης τότε

Άρα αφού $T+1 < \infty$ και T_y χρόνος διακοπής.

σίγουρα ο S είναι χρόνος διακοπής.

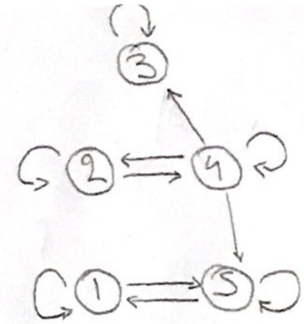
Άσκηση 29

Αρχικά, μετά από αρκετή σκέψη κατέληξα στο ότι μια αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων δεν μπορεί να έχει μόνο ανοικτές κλάσεις. Προσπάθησα να μοντελοποιήσω το πρόβλημα με θεωρία γραφημάτων. Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή άκυκλου απλού γραφήματος όπου κάθε κόμβος έχει τουλάχιστον μια ακμή. Όπως από την θεωρία γνωρίζουμε πρέπει ότι πεπερασμένος ένας γράφος να μην έχει κύκλους αν n είναι οι κόμβοι να έχει το πολύ n-1 ακμές.

Έτσι αναγκαστικά θα πάμε σε παράδειγμα άπειρου χώρου καταστάσεων. Με πιο συνηθισμένο το $\mathbb{N}$. Άρα ας πάρουμε $P(x, x+1) = 1$, $\forall x \in \mathbb{N}$ όπου ένα τυχαίο περίπατο που κινείται

Άσκηση 30

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$



$P[T_4^+ < +\infty \mid X_0 = 4] = ?$ Δηλαδή ζητείται η πιθανότητα να ξαναβρεθώ στην κατάσταση $\underline{4}$. Δεδομένου ότι η κλάση $\{2,4\}$ είναι ανοικτή και παροδική σημαίνει ότι αν φύγω δεν θα επιστρέψω. Άρα ζητείται η πιθανότητα να μην "φύγω" από την κλάση $\{2,4\}$. Ο μόνος τρόπος να φύγω είναι με τις ακμές $(4,3)$ και $(4,5)$. Θεωρώ δεδομένο ότι αν δεν "φύγω" από την κλάση $\{2,4\}$ τότε ξεκινώντας από την 4 σίγουρα θα ξαναβρεθώ σε αυτήν δηλαδή $P[T_4^+ < \infty \mid X_0 = 4] = 1$. Άρα ζητείται η πιθανότητα 1 − P"φυγής" αν $X' = \{2,4\}$ $= 1 - P(4,5) - P(4,3) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Δηλαδή $P[T_4^+ < \infty \mid X_0 = 4] =$

$E[V(4) \mid X_0 = 4] = ?$

Από το "Θεώρημα 4" του βιβλίου γνωρίζουμε ότι αφού η κατάσταση 4 είναι παροδική

$E[V(4) \mid X_0 = 4] = \frac{1}{1 - f(4)} \; (< \infty)$ και $f(x) = \sum_{y \in X} p(x,y) P_y[T_x < \infty]$

Άρα $f(4) = \sum_{\{1,2,3,4,5\}} p(4,y) P_y[T_4 < \infty] = \cancel{P(4,1)} \cdot P_1[T_4 < \infty] + P(4,2) \cdot P_2[T_4 < \infty] + P(4,5) \cancel{P_5[T_4 < \infty]} =$

$+ P(4,3) \cdot \cancel{P_3[T_4 < \infty]} + P(4,4) P_4[T_4 < \infty] + \dots$

$\Leftrightarrow f(4) = 1/4 \cdot 1 + 1/4 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(4) = \frac{3}{8}$ Άρα $E_4[V(4)] = \frac{1}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{8}{5} = \underline{1{,}6}$

Για την 2 έχουμε $P[T_2^+ < +\infty \mid X_0 = 2] = p(2,2) + p(2,4) \cdot P[\text{"να μείνω στο 4"}] \cdot p(4,2)$

$P[T_2^+ < +\infty \mid X_0 = 2] = 1/2 + 1/2 \cdot (1/4 + 1/4^2 + \frac{1}{4^3} + \dots) \cdot 1/4$ όπου $\sum_{n=0}^{\infty} (1/4)^n = \frac{4}{3}$ άρα $\sum_{n=1}^{\infty} (1/4)^n = \frac{1}{3}$

$P[T_2^+ < +\infty \mid X_0 = 2] = 1/2 + 1/2 \cdot 1/3 \cdot 1/4 = 13/24$

και $E(V(2) \mid X_0 = 2) = \frac{1}{1 - f(2)}$ όπου $f(2) = p(2,2) P_2[T_2 < \infty] + p(2,4) \cdot P_4[T_2 < \infty] \Leftrightarrow$

$f(2) = 1/2 \cdot 13/24 + 1/2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{48} + \frac{1}{6} = \frac{21}{48}$

Άρα $E(V(2) \mid X_0 = 2) = \frac{1}{1 - \frac{21}{48}} = \frac{1}{\frac{27}{48}} = \frac{48}{27} = \underline{1{,}78}$

Άσκηση 31

$y \in X$: Παροδική $\longrightarrow$ $E_x[V(y)] = \dfrac{P_x[T_y < +\infty]}{P_y[T_y^+ = +\infty]}$

όπου $P_x[T_y < +\infty]$ είναι η πιθανότητα ξεκινώντας από την $x \in X$ να βρεθώ στην $y \in X$ κάποια στιγμή.
και $P_y[T_y^+ = +\infty]$ είναι η πιθανότητα να μην ξαναβρεθώ στην y

Επίσης γνωρίζουμε ότι $E_x[V(x)] = \dfrac{1}{1-f(x)}$, $f(x) = \sum_{y \in X} P(x,y) P_y[T_x < \infty]$
Άρα για να τη συνδυάσουμε θα γράψουμε (με επιφύλαξη ότι)

$E_x[V(y)] = P_x[T_y < +\infty] \cdot E_y[V(y)]$

Άρα για να μετρήσω 1 φορά στην y μετά πρώτη να βρεθώ (άφιξη) για πρώτη φορά είναι όπου η πιθανότητα από την $x \in X$ στην $y \in X$ είναι $P_x[T_y < +\infty]$ και έπειτα θα μετρήσω πόσες φορές ξαναβρέθηκα από την $y \to y$ άρα έφρασα είναι για πρώτη φορά.
$E_y[V(y)]$ δεδομένου ότι

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τι σημαίνει η $1 - f(x)$ υποθέτουμε κατά αρχή η $f(x)$ είναι η πιθανότητα να βρεθώ από οποιαδήποτε κατάσταση πίσω στην x άρα $1 - f(x)$ είναι η πιθανότητα να μην ξαναβρεθώ στην x άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι και έτσι αποδείξαμε ότι

$1 - f(x) = P_y[T_y^+ = +\infty]$

$E_x[V(y)] = \dfrac{P_x[T_y < +\infty]}{P_y[T_y^+ = +\infty]}$

Άσκηση 32

Z μ.τ. $X_0 = 0$, $p(x,x+1) = q \in (0,1)$ $\underline{\forall x \in \mathbb{N}}$

$p(x,x-1) = 1-q$

Use SMP $\to$ x-1 $T_{x-1} = \inf\{k \geq 0 : X_k = x-1\}$

ΝΔΟ $P_x[T_0 < \infty] = (P_1[T_0 < \infty])^x$

Εδώ αν καταλαβαίνω καλά λέει ότι η πιθανότητα ξεκινώντας από το X να επιστρέψω στο 0 είναι ίση με την πιθανότητα ξεκινώντας από το 1 να επιστρέψω στο 0 είσταν δύναμη X

Η ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα μας λέει ότι αν ο T_{x-1} είναι χρόνος διακοπής δηλαδή $T_{x-1} < \infty$ τότε υπάρχει μαρκοβιανή αλυσίδα $\{Y_n\}$ με $p(x,x+1) = q$ και $p(x,x-1) = 1-q$ και $Y_0 = x-1$ συμβαίνει ότι

Οπότε αν ο T_{x-1} είναι χρόνος διακοπής

Χρησιμοποιώντας μόνο την διαίσθηση μας θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν υπάρχει πιθανότητα να γυρίσει η αλυσίδα από το X τότε σίγουρα θα μπορούσε να γυρίσει και από το 1 και καθώς έτσι καλύπτει το 1 καλύπτει όλα τα πιθανά μονοπάτια τις πιθανότητες για οποιοδήποτε X.

+1
+1 −2
+2 −3
+3 −4
⋮

Μια άλλη σκέψη είναι να πάμε αναδρομικά στο $P_1[T_0 < \infty]$

Γνωρίζω ότι $p^n(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} q^n (1-q)^n$

$$P_1[T_0 < \infty] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} q^n (1-q)^{n+1}$$

$$P_2[T_0 < \infty] = P_1[T_0 < \infty] \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} q^n (1-q)^{n+1}$$

$\vdots$

$$P_x[T_0 < \infty] = P_{x-1}[T_0 < \infty] \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} q^n (1-q)^{n+1}$$

$\Rightarrow P_1[T_0 < \infty] = (P_1[T_0 < \infty])^x$

και γυρνάω στο x-1

που σημαίνει ότι κάνω ένα περίπατο από το x