1η Θεωρητική Εργασία

Αλέξανδρος Κυριακάκης 03112163

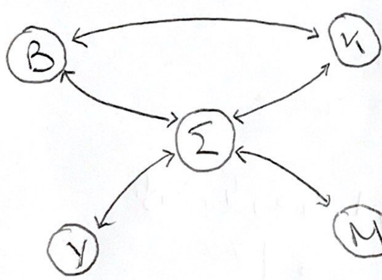
Άσκηση 4

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 1/5 & 7/10 \end{bmatrix}$$

Πρέπει το άθροισμα των στοιχείων της καθε γραμμής να ισούται με 1 αφού ο πίνακας είναι στοχαστικός

$$\sum_{i \in X} P(i,j) = 1 \quad \forall j \in X$$

Άσκηση 5



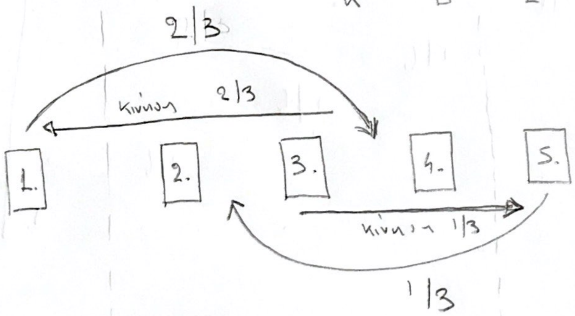
$$\mathbb{X} = \{K, B, \Sigma, Y, M\}$$

$$\Pi_0(x) = P[X_0 = x] = \delta_0(x) = \begin{cases} 1, & x = M \\ 0, & x \neq M \end{cases}$$

$$P = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} K \\ B \\ \Sigma \\ Y \\ M \end{matrix} \\ \begin{matrix} K & \;B & \;\Sigma & \;Y & \;M \end{matrix} & \end{array}$$

Άσκηση 6

Θέσεις :



Τότε $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

και

$$P = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1. & \;2. & \;3. & \;4. & \;5. \end{matrix} & \end{array}$$

Άσκηση 7

Για την περιγραφή αυτού του παιχνιδιού κατασκευάσαμε τον πίνακα μεταβάσεων. Ο στοχαστικός πίνακας μεταβάσεων P αποδεικνύει και την ύπαρξη μαρκοβιανής αλυσίδας από το θεώρημα συνέπειας Kolmogorov.

Έστω ο χώρος καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$

όπου $0 \to \emptyset$, $1 \to 6$, $2 \to 66$, $3 \to 666$, $4 \to 6666$, $5 \to 66666$

Τότε έχουμε τον στοχαστικό πίνακα μεταβάσεων:

$$P = \begin{array}{l}\begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{l} \emptyset \\ 6 \\ 66 \\ 666 \\ 6666 \\ 66666 \end{array}$$

ομοίως για "65656" έχουμε $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$

$$P = \begin{array}{l}\begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{l} \emptyset \\ 6 \\ 65 \\ 656 \\ 6565 \\ 65656 \end{array}$$

Άσκηση 8

- Στην περίπτωση που $X_n = S_n \bmod 5$ θα δείξουμε ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα από το θεώρημα συνέπειας του Κολμογόροφ.
- Για την εύρεση του πίνακα μεταβάσεων θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της πράξης modulo:

► $(a+b) \bmod m = (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m$

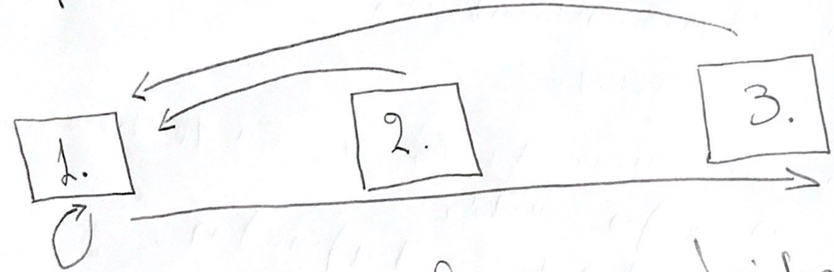
Άρα έχουμε στοχαστικό πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ \end{array}$$

Με $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\} = (\mathbb{X} = \mathbb{N} \bmod 5)$

Άσκηση 11

A: Algebra (p), B: Basic Topology (q), C: Calculus (r)



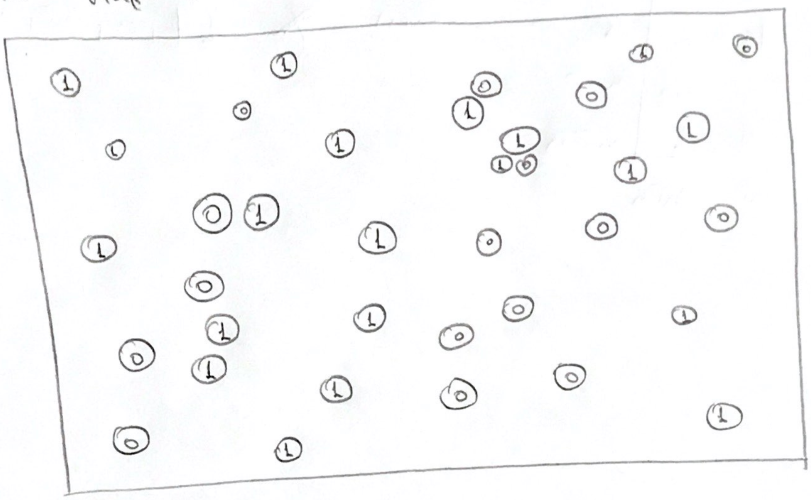
Γνωρίζουμε ότι όλες οι δυνατές αναδιατάξεις 3 αντικειμένων είναι $3! = 6$. Άρα θα κατασκευάσουμε τον πίνακα μετάβασης από τις δυνατές αναδιατάξεις. Έτσι:

$$P = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} p & 0 & q & 0 & r & 0 \\ 0 & p & q & 0 & r & 0 \\ p & 0 & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & r & 0 & q \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & q \\ p & 0 & 0 & r & 0 & q \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} ABC & ACB & BAC & CBA & CAB & BCA \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} ABC \\ ACB \\ BAC \\ CBA \\ CAB \\ BCA \end{matrix}$$

Με $X = \{ABC, ACB, BAC, CBA, CAB, BCA\}$

Άσκηση 12

Μοντέλο διάχυσης Ehrenfest



Έστω ότι τα σωματίδια με 1 είναι στο Part A και με 0 είναι στο Part B. Σε κάθε βήμα αλλάζουμε ένα τυχαίο σωματίδιο από $0 \to 1$ ή $1 \to 0$. Τότε ο πίνακας μεταβάσεων του πλήθους των σωματιδίων στο Part A θα είναι:

Σημείο ευσταθούς ισορροπίας

$$P = \begin{array}{c|l}
0 & 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \\
1 & \frac{1}{N} \quad 0 \quad \frac{N-1}{N} \\
2 & 0 \quad \frac{2}{N} \quad 0 \quad \frac{N-2}{N} \\
3 & 0 \quad 0 \quad \frac{3}{N} \quad 0 \quad \frac{N-3}{N} \\
\vdots & \vdots \\
N/2 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \frac{N}{2} \quad 0 \quad \frac{N}{2} \quad \cdots \\
\vdots & \vdots \\
N-3 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \frac{N-3}{N} \quad 0 \quad \frac{3}{N} \\
N-2 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \frac{N-2}{N} \quad 0 \quad \frac{2}{N} \\
N-1 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \frac{N-1}{N} \quad 0 \quad N \\
N & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 1 \quad 0
\end{array}$$

Άσκηση 13

Ο χώρος καταστάσεων είναι $\mathcal{X} = \{\phi, \kappa, \kappa\Gamma, \kappa\Gamma\kappa\}$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \phi \\ \kappa \\ \kappa\Gamma \\ \kappa\Gamma\kappa \end{matrix} \\ \begin{matrix} \phi & \kappa & \kappa\Gamma & \kappa\Gamma\kappa \end{matrix} & \end{array}$$

Άσκηση 14