1$^{\eta}$ Σειρά Θεωρητικών Ασκήσεων στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Αλέξανδρος Κυριακάκης (03112163)

Μάρτιος 2020

1η Θεωρητική Εργασία

Αλέξανδρος Κυριακάκης 03112163

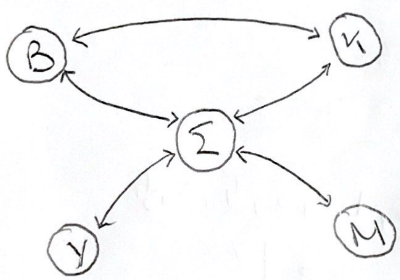
Άσκηση 4

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 1/5 & 7/10 \end{bmatrix}$$

Πρέπει το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής να ισούται με 1 αφού ο πίνακας είναι στοχαστικός

$$\sum_{i \in X} P(i,j) = 1 \quad \forall j \in X$$

Άσκηση 5



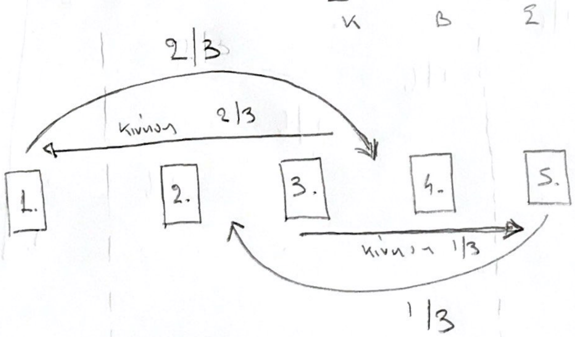
$$\mathbb{X} = \{Κ, Β, Σ, Υ, Μ\}$$

$$\Pi_0(x) = P[X_0 = x] = \delta_0(x) = \begin{cases} 1, & x = M \\ 0, & x \neq M \end{cases}$$

$$P = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} Κ \\ Β \\ Σ \\ Υ \\ Μ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} Κ & Β & Σ & Υ & Μ \end{array} \end{array}$$

Άσκηση 6

Θέσεις:



Τότε $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

και

$$P = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \end{array} \end{array}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 7}}$

Για την περιγραφή αυτού του παιχνιδιού κατασκευάσαμε τον πίνακα μεταβάσεων. Ο στοχαστικός πίνακας μεταβάσεων P αποδεικνύει και την ύπαρξη μαρκοβιανής αλυσίδας από το θεώρημα συνέπειας Kolmogorov.

Έστω ο χώρος καταστάσεων $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$

όπου $0 \to \emptyset$, $1 \to 6$, $2 \to 66$, $3 \to 666$, $4 \to 6666$, $5 \to 66666$

Τότε έχουμε τον στοχαστικό πίνακα μεταβάσεων:

$$P = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \emptyset \\ 6 \\ 66 \\ 666 \\ 6666 \\ 66666 \end{array}$$

όμοια για "65656" έχουμε $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4,5\}$

$$P = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \emptyset \\ 6 \\ 65 \\ 656 \\ 6565 \\ 65656 \end{array}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 8}}$

- Στην περίπτωση που $X_n = S_n \bmod 5$ θα δείξουμε ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα από το θεώρημα συνέπειας του Kolmogorov.
- Για την εύρεση του πίνακα μεταβάσεων θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της πράξης modulo:

$$(a+b) \bmod m = (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m$$

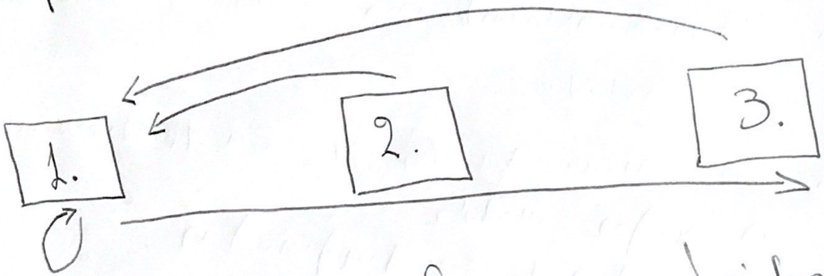
Άρα έχουμε στοχαστικό πίνακα μεταβάσεων

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 0 & \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 \end{array} \end{array}$$

Με $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4\} = (\mathbb{X} = \mathbb{N} \bmod 5)$

Άσκηση 11

A	B	C
Algebra	Basic Topology	Calculus
p	q	r



Γνωρίζουμε ότι όλες οι δυνατές αναδιατάξεις 3 αντικειμένων είναι $3! = 6$. Άρα θα κατασκευάσουμε τον πίνακα μετάβασης από τις δυνατές αναδιατάξεις. Έτσι:

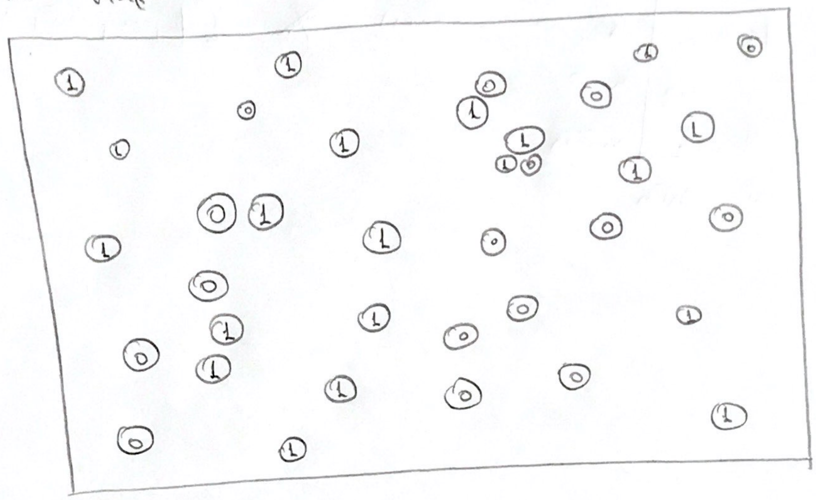
$$P = \begin{array}{c} \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} p & 0 & q & 0 & r & 0 \\ 0 & p & q & 0 & r & 0 \\ p & 0 & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & r & 0 & q \\ r & p & 0 & 0 & 0 & q \\ p & 0 & 0 & r & 0 & q \end{array}\right]\begin{array}{l} ABC \\ ACB \\ BAC \\ CBA \\ CAB \\ BCA \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} ABC & ACB & BAC & CBA & CAB & BCA \end{array}$$

Με $X = \{ABC, ACB, BAC, CBA, CAB, BCA\}$

Άσκηση 12

Μοντέλο διάχυσης Ehrenfest



Έστω ότι τα σωματίδια με 1 είναι στο Part A και με 0 είναι στο Part B. Σε κάθε βήμα αλλάζουμε ένα τυχαίο σωματίδιο από $0 \to 1$ ή $1 \to 0$. Τότε ο πίνακας μεταβάσεων του πλήθους των σωματιδίων στο Part A θα είναι:

Σημείο ευσταθούς ισορροπίας

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N/2 \\ \vdots \\ N-3 \\ N-2 \\ N-1 \\ N \end{array} \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & & & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & & & & & & & \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{3}{N} & 0 & \frac{N-3}{N} & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{N}{2} & 0 & \frac{N}{2} & \cdots \\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & \cdots & \frac{N-3}{N} & 0 & \frac{3}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & \cdots & \frac{N-2}{N} & 0 & \frac{2}{N} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & \cdots & \frac{N-1}{N} & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & & \cdots & \cdot & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ασκηση 13

$$P = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \phi \\ \kappa \\ \kappa\Gamma \\ \kappa\Gamma\kappa \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \phi & \kappa & \kappa\Gamma & \kappa\Gamma\kappa \end{array} & \end{array}$$

Ο χωρος καταστασεων ειναι $\mathcal{X} = \{\phi, \kappa, \kappa\Gamma, \kappa\Gamma\kappa\}$

Ασκηση 14

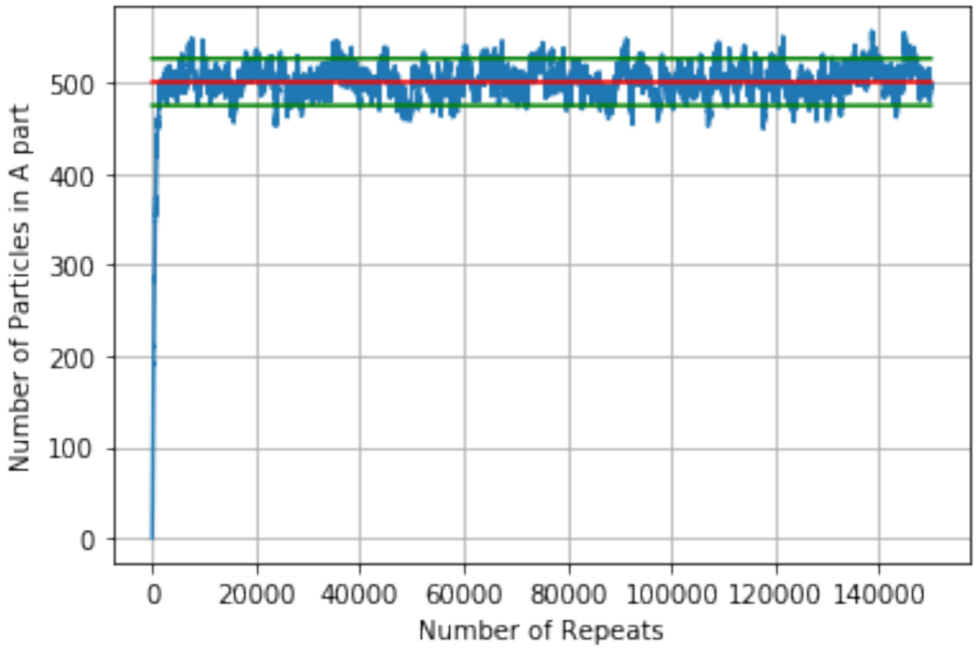
Erhenfest

An attemp to recreate Ehrenfet's model using python.

In [17]:

```
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

a = [False for x in range(1000)]
track = []
N = 150000
for i in range(N):
    b = rd.choice(range(1000))
    a[b] = not a[b]
    track.append(sum(a))
    #print (rd.choice(a))
kapa = np.mean(track)
b = [kapa for x in range(N)]
lapa = np.std(track)
c = [lapa + kapa for x in range(N)]
d = [-lapa + kapa for x in range(N)]
plt.plot(track)
plt.plot(b, color = "red")
plt.plot(c, color = "green")
plt.plot(d, color = "green")
plt.xlabel("Number of Repeats")
plt.ylabel("Number of Particles in A part")
plt.grid()
plt.show()
print ("STD = ",np.std(track), " Mean = ", kapa)
```




```
STD =  25.760194975656187  Mean =  500.70038666666
665
```