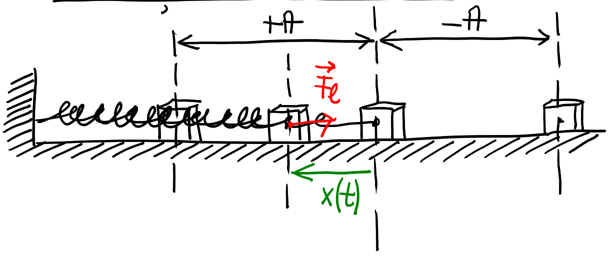
OSCILATORUL LIBER CU FRECĂRI. OSCILAȚII AMORTIZATE.

OSCILAȚII FĂRĂ FRECĂRI



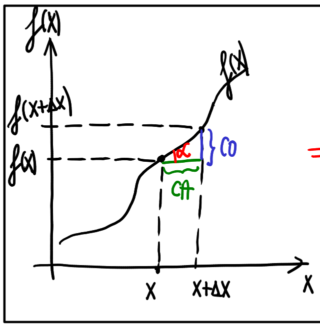
$F_f = 0$

Principiul II: $\vec{F_e} + \cancel{\vec{G} + \vec{N}} = m \cdot \vec{a}$ (MRUV)

$-K \cdot x = m \cdot a$

$\boxed{K \cdot x + m \cdot a = 0}$

DERIVATA UNEI FUNCȚII. SEMNIFICAȚIE



$$\underline{tg\alpha} = \frac{CO}{CA} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \underline{f'(x)}$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$v(t) = x'(t) = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = \dot{x}$

$a(t) = x''(t) = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = \ddot{x}$

$F(t) = m \cdot a(t) = -\underline{m\omega^2} A \sin(\omega t + \varphi_0)$

$F_e(t) = -\underline{K} \cdot x(t)$

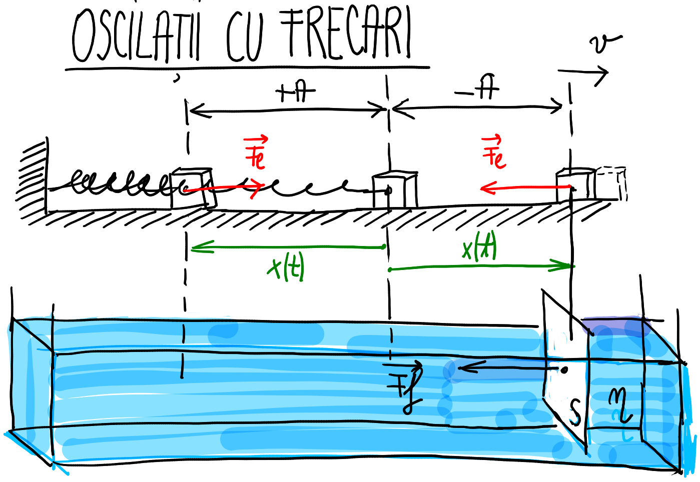
$\boxed{K \cdot x + m \cdot a = 0}$

$\Rightarrow \boxed{K x + m \cdot \ddot{x} = 0}$ ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL II OMOGENĂ $\longrightarrow$

!Obs Ecuație în care pe lângă variabila x apare și vitezele de variație ale lui x, adică derivatele lui x.

SOLUȚIE: $\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)}$

OSCILAȚII CU FRECĂRI



La avansarea corpului cu viteza v, el trage după el o placă de suprafață (S) legată solidar care se mișcă într-o cuvă cu un lichid de vâscozitate (η).

Forța de frecare (F_f) este considerată direct proporțională cu viteza (v)

aproximație $\Rightarrow \boxed{F_f \sim v}$ $\quad \boxed{\vec{F_f} = -C \cdot \vec{v}}$

$v\uparrow \Rightarrow F_f \uparrow$

C = constantă

C depinde de geometria sistemului (de S)

C depinde de natura fluidului (de η)

$\vec{F_f} = -C \cdot v$

Principiul II: $\vec{F_e} + \vec{F_f} + \cancel{\vec{G} + \vec{N}} = m \cdot \vec{a}$ (MRUV)

$-K \cdot x - Cv = m \cdot a$

$Kx + Cv + m \cdot a = 0$

dar $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}$

dar $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{kx + C\cdot\dot{x} + m\cdot\ddot{x} = 0}$

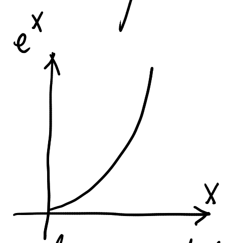
ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL II OMOGENĂ ÎN CARE APARE PE LÂNGĂ x ȘI VITEZA VARIAȚIEI LUI x ($\dot{x}$) ȘI VITEZA VARIAȚIEI VARIAȚIEI LUI x ($\ddot{x}$)

SOLUȚIE: $\boxed{x(t) = \underbrace{A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}\cdot t}}_{A(t)}\cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}$

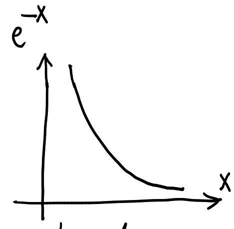
A(t) amplitudine variabilă în timp

amplitudinea scade exponențial în timp

$$A(t) = \underbrace{A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}\cdot t}} = \underbrace{A_0\cdot e^{-\delta\cdot t}}$$



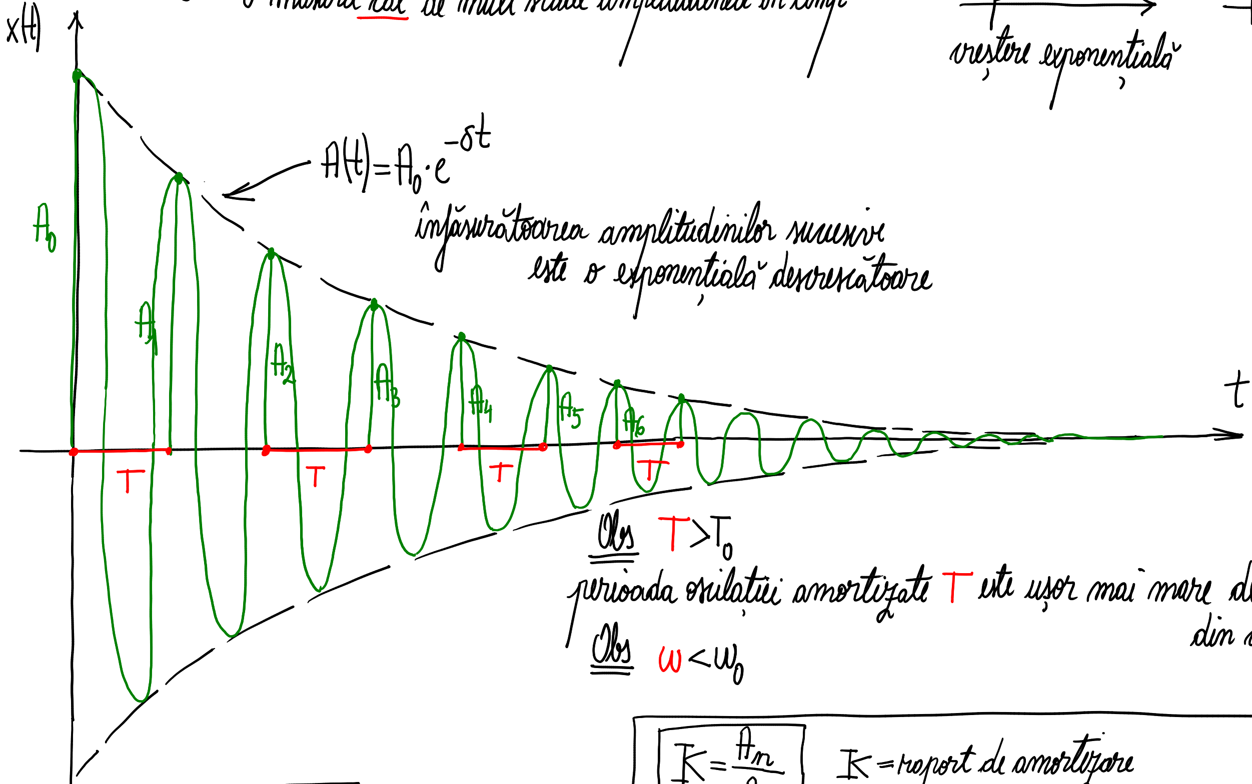
creștere exponențială



descreștere exponențială

$\boxed{\delta = \frac{C}{2m}}$ δ = Coeficient de amortizare

δ = o măsură cât de mult scade amplitudinea în timp



Obs $T > T_0$

perioada oscilației amortizate T este ușor mai mare decât perioada proprie T_0 din cazul fără frecări

Obs $\omega < \omega_0$

$\boxed{A(t) = A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}\cdot t}}$

$t = 0 \Rightarrow A(t) = A_0$

$t = T \Rightarrow A(T) = A_1 = A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}(T)}$

$t = 2T \Rightarrow A(2T) = A_2 = A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}\cdot(2T)}$

$t = 3T \Rightarrow A(3T) = A_3 = A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}(3T)}$

$t = 4T \Rightarrow A(4T) = A_4 = A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}(4T)}$

... ...

$t = (n-1)T \Rightarrow A(t) = A_{n-1} = A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}[(n-1)T]}$

$t = nT \Rightarrow A(t) = A_n = A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}[nT]}$

$\boxed{K = \frac{A_n}{A_{n-1}}}$ K = raport de amortizare

K = o măsură cât scad amplitudinile succesive

! Doar pentru frecările de tipul $\vec{F_f} = -C\cdot\vec{v}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $K = \frac{A_1}{A_0} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \dots = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}[nT]}}{A_0\cdot e^{-\frac{C}{2m}[(n-1)T]}} = e^{-\frac{C}{2m}\cdot T} = e^{-\delta T}$

$\Rightarrow$ $\boxed{K = \frac{A_n}{A_{n-1}} = e^{-\delta T}}$ = constant

! Fie n oscilații. $\frac{A_n}{A_0} = \frac{A_1}{A_0}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot\frac{A_3}{A_2}\cdot\frac{A_4}{A_3}\cdots\frac{A_{n-1}}{A_n}\cdot\frac{A_n}{A_{n-1}}$ $\Big|\ln(\,)$

$\ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right) = \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right) + \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right) + \ln\left(\frac{A_3}{A_2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$

$\boxed{\delta = \frac{\ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right)}{nT}} \Leftarrow \ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right) = (-\delta T) + (-\delta T) + \dots + (-\delta T) = -\delta(nT)$