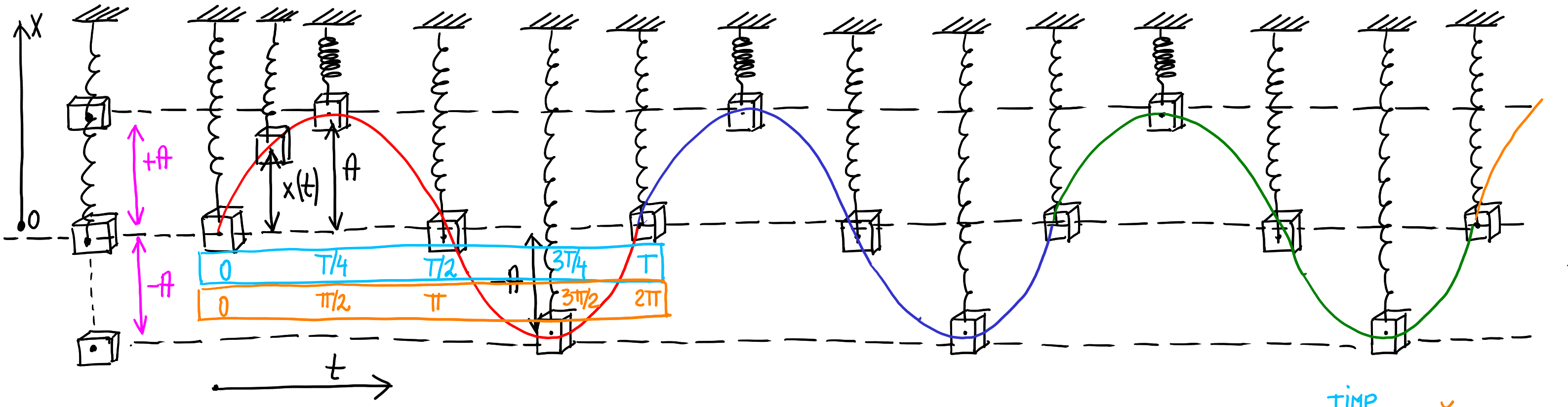
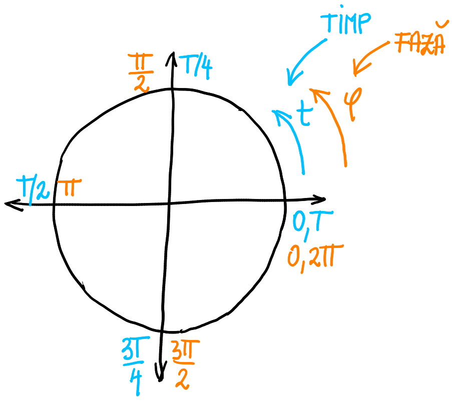
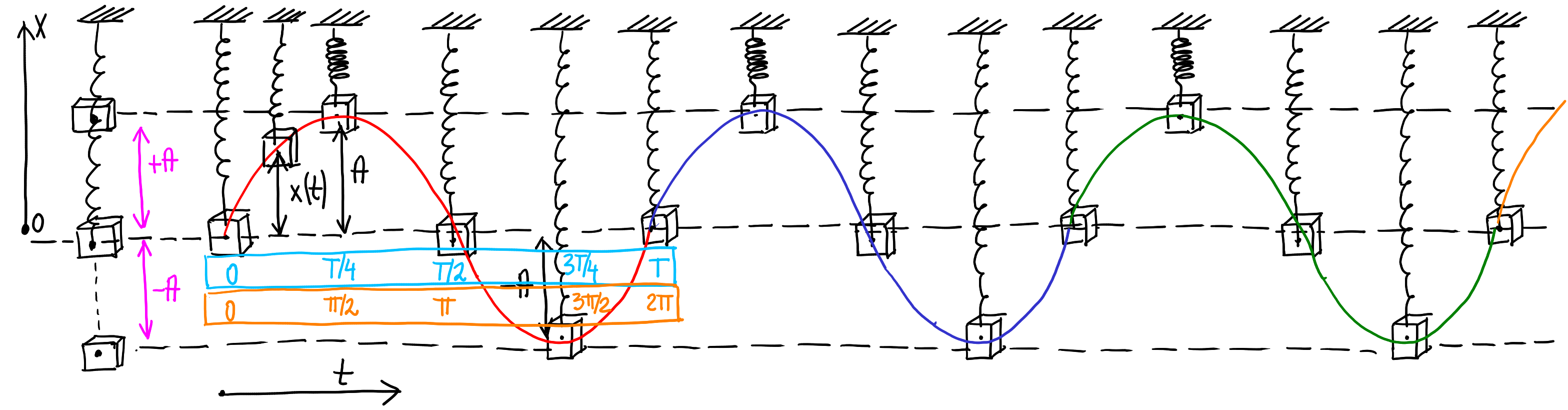
OSCILATORUL LINIAR ARMONIC FĂRĂ FRECĂRI

Mișcare oscilatorie $\stackrel{def}{=}$ deplasare alternativă efectuată de un corp, de-o parte și de alta față de o poziție de echilibru

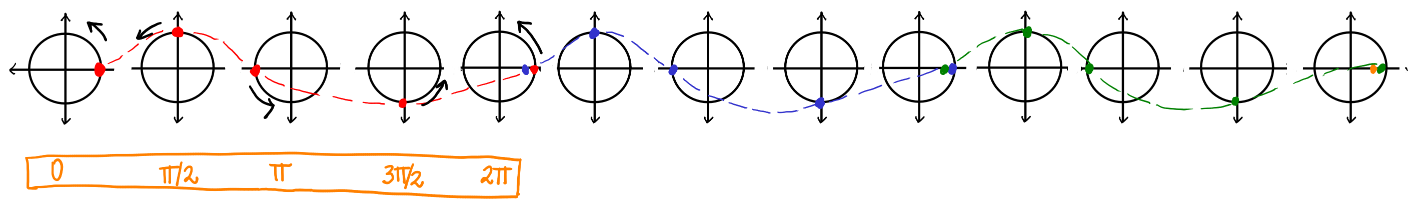


$x(t)$ = elongație
A = elongație maximă = amplitudine
T = perioada → timpul necesar unei oscilații complete
ν = frecvența → numărul de oscilații dintr-o secundă
φ = fază → unghi pe cerc corespunzător momentului de timp





FAZE PE CERC



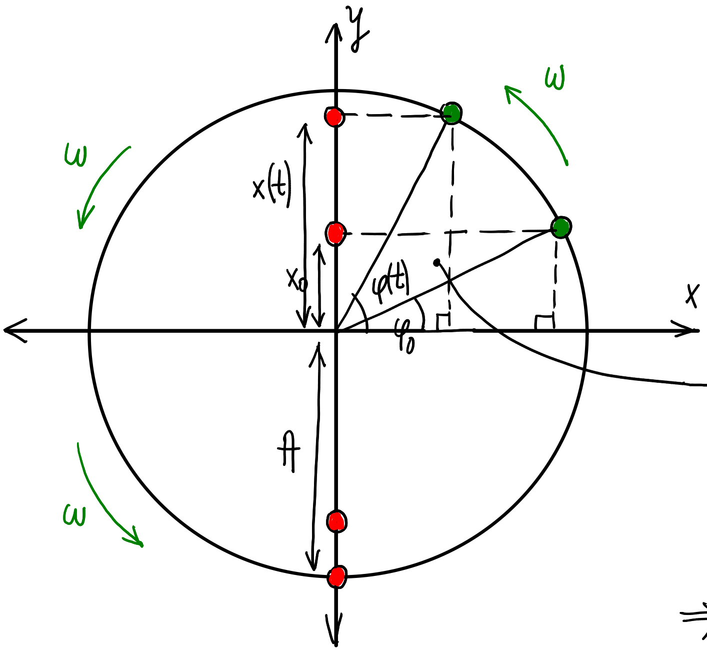
la momentul $t=0$ corespunde $\varphi=0$ pe cerc
la momentul $t=T/4$ corespunde $\varphi=\pi/2$ pe cerc
la momentul $t=T/2$ corespunde $\varphi=\pi$ pe cerc
la momentul $t=3T/4$ corespunde $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ pe cerc
la momentul $t=T$ corespunde $\varphi=2\pi$ pe cerc

! Obs

1 secundă ..... ν oscilații
T secunde ..... 1 oscilație

$$\Rightarrow \frac{1}{T}=\frac{\nu}{1} \Rightarrow \boxed{\nu=\frac{1}{T}} \quad [\nu]_{S.I.}=\frac{1}{s}=Hz$$

LEGEA MIȘCĂRII $\underline{\underline{x(t)}}$ A OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC



Considerăm un mobil • în mișcare circulară uniformă (ω = const) pe un cerc. Proiectăm mișcarea mobilului de pe cerc pe axa verticală Oy și obținem o mișcare oscilatorie liniară •, sus-jos pe axa Oy, față de centrul cercului.

→ triunghi dreptunghic: $\sin \varphi(t) = \frac{CO}{IP}$

$\sin \varphi(t) = \frac{x(t)}{A}$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{x(t)}}}_{}^{MRUV} = \overbrace{A\sin(\varphi(t))}^{MCU}$$, dar $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ din legea mișcării circulare uniforme

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)}$$ LEGEA MIȘCĂRII OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

$x(t)$ = elongația

A = amplitudinea

ω = pulsația (viteza unghiulară)

φ_0 = faza inițială

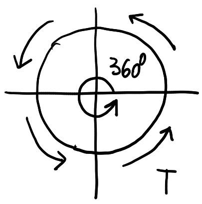
A, ω, φ_0 – mărimile caracteristice unei oscilații

!Obs

ω = viteza unghiulară (pulsație pe cerc)

ν = frecvența (frecvența pe axă)

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \Rightarrow \boxed{\omega = 2\pi\nu}$$



!Obs

- $A\uparrow \Rightarrow$ mișcarea devine mai amplă
- $\omega\uparrow \Rightarrow$ mișcarea devine mai agitată
- $\varphi_0\uparrow \Rightarrow$ mișcarea este translatată (defazată)

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$\boxed{\varphi_0 = 0}$

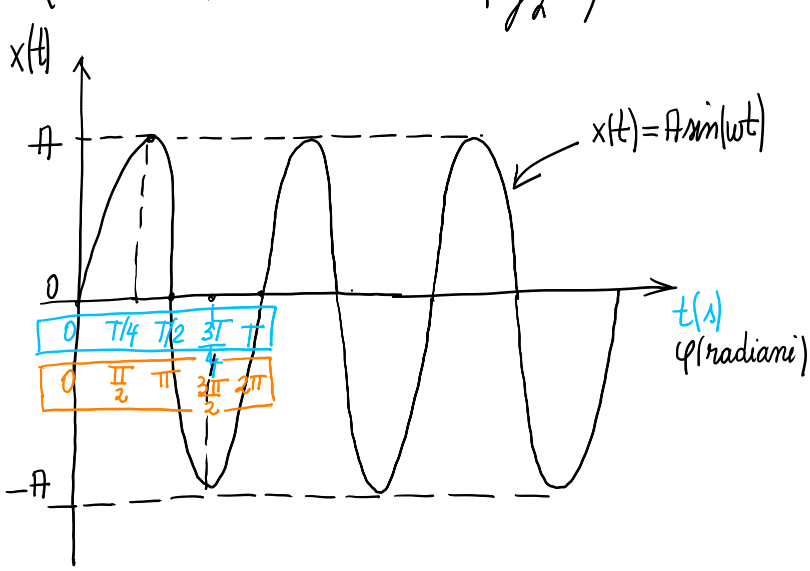
$x(0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) = 0$

$x\left(\frac{T}{4}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) = A\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{1} = +A$

$x\left(\frac{T}{2}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) = A\cancel{\sin(\pi)}^{0} = 0$

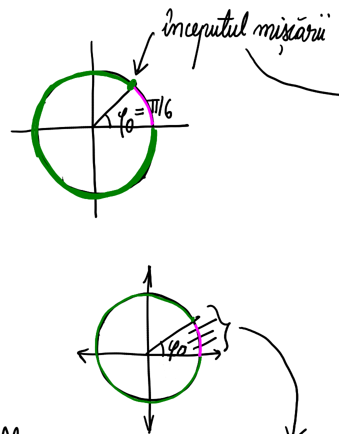
$x\left(\frac{3T}{4}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}\right) = A\cancel{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^{-1} = -A$

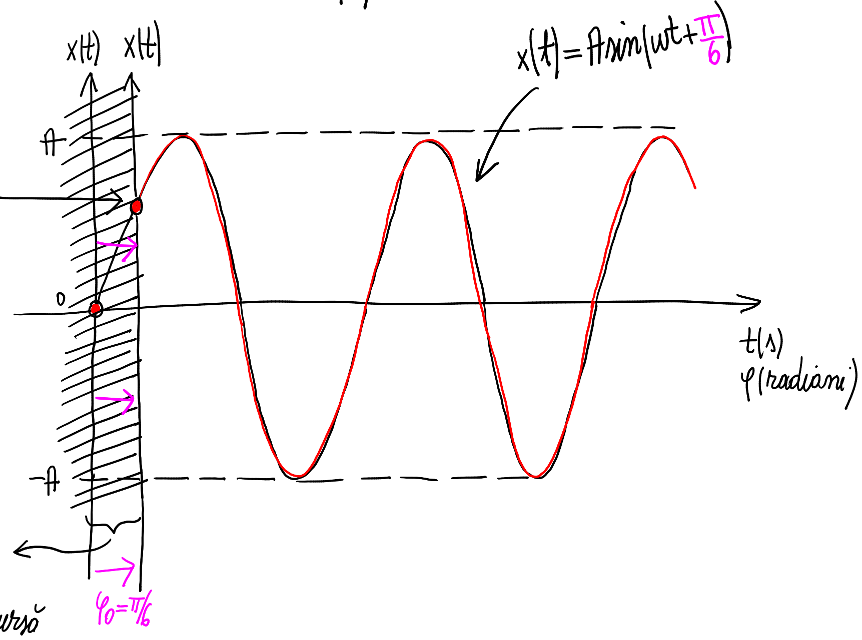
$x(T) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) = A\cancel{\sin(2\pi)}^{0} = 0$



FAZA INIȚIALĂ (φ_0)

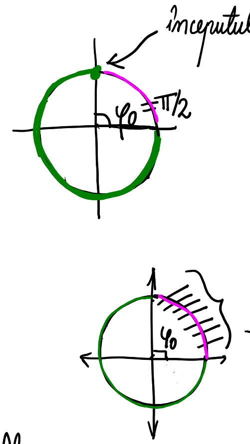
$\boxed{\varphi_0 = \pi/6}$ $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

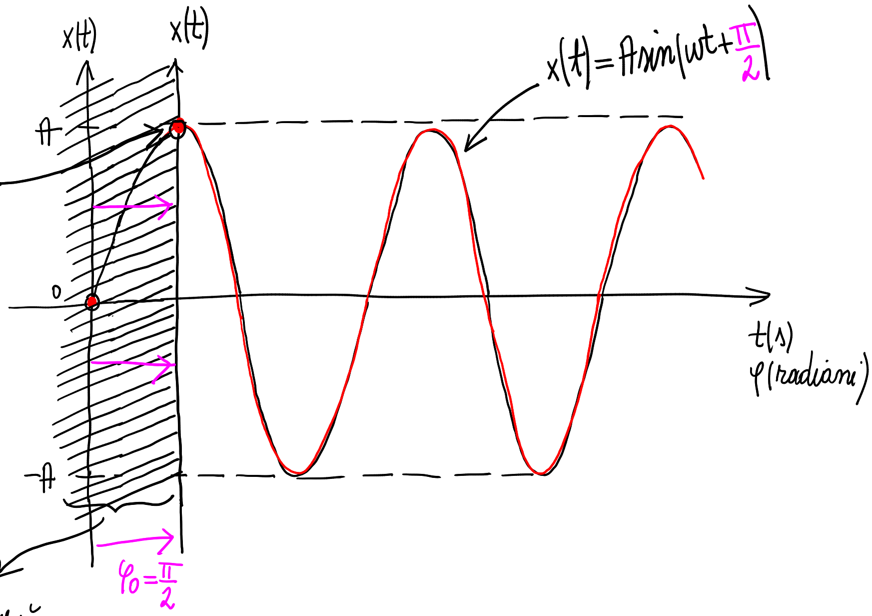




! Obs Mișcarea de la 0 la $\varphi_0 = \pi/6$ este ca și cum ar fi fost parcursă deja!

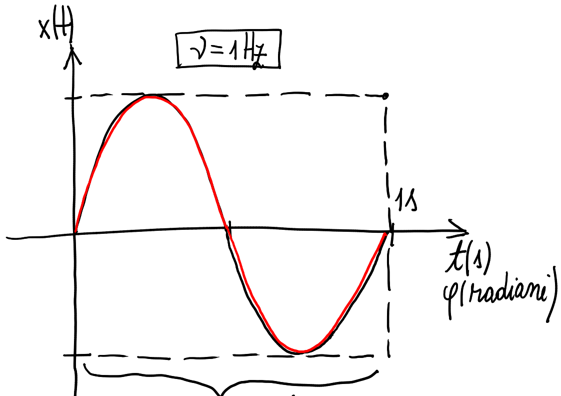
$\boxed{\varphi_0 = \pi/2}$ $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$



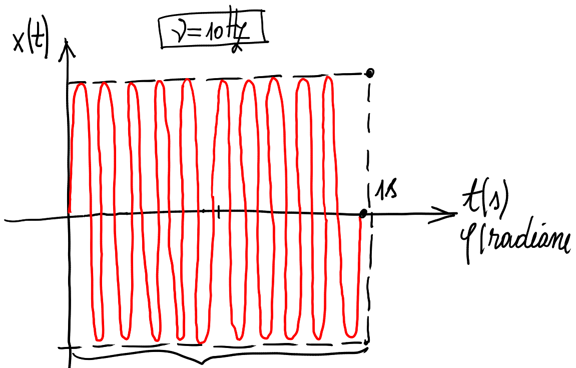


! Obs Mișcarea de la 0 la $\varphi_0 = \pi/2$ este ca și cum ar fi fost parcursă deja!

FRECVENȚA (ν)



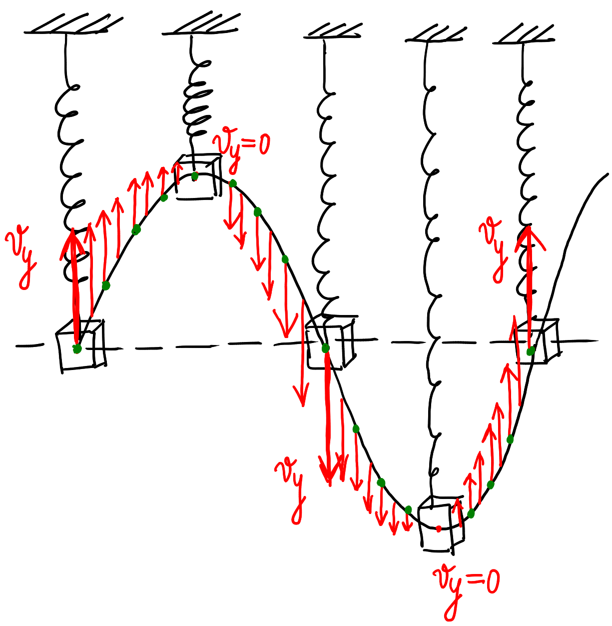
$\boxed{1\,s,\ 1\ oscilație} \Rightarrow \nu = 1\,Hz$

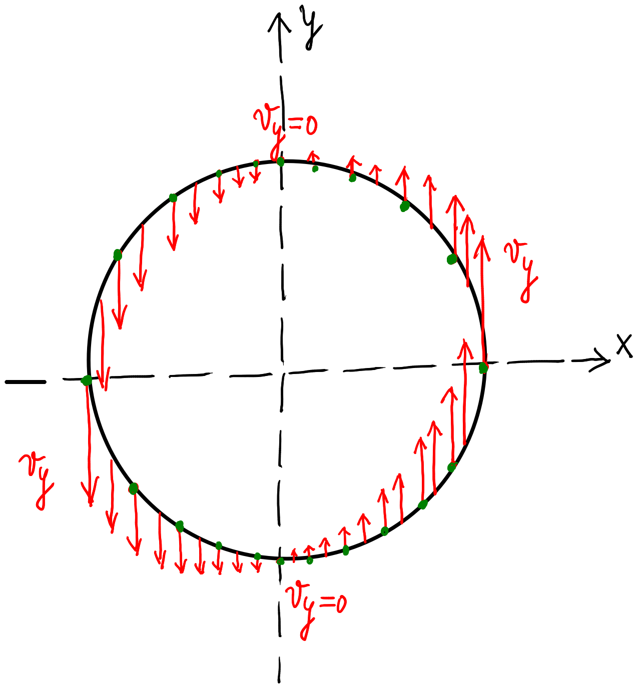


$\boxed{1\,s,\ 10\ oscilații} \Rightarrow \nu = 10\,Hz$

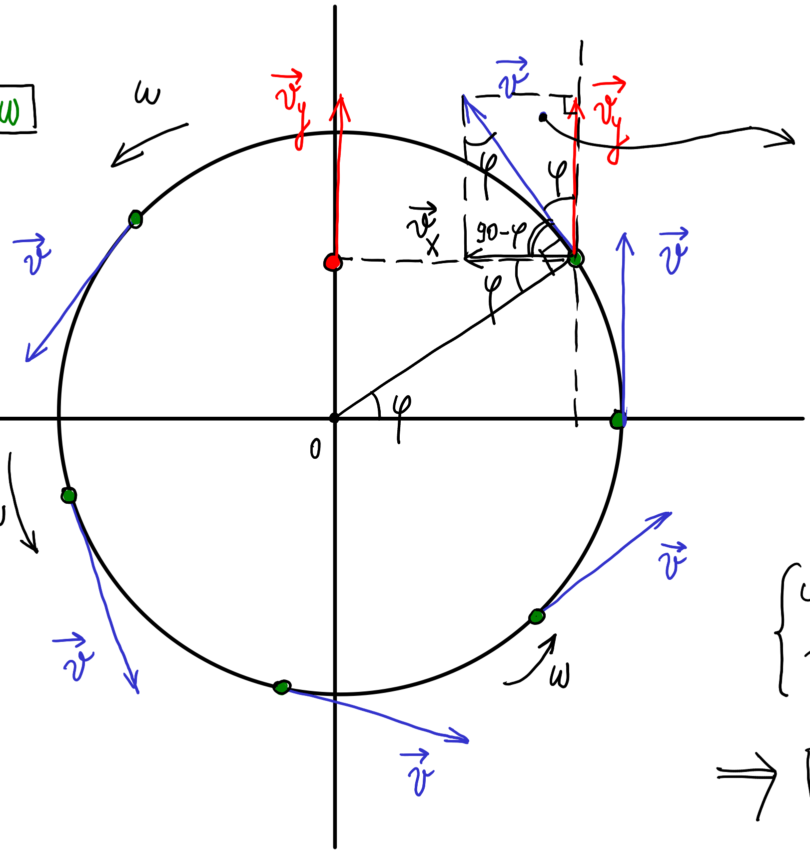
$\nu \uparrow \Rightarrow$ oscilația devine mai agitată

VITEZA $v_y(t)$ A OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC





$\boxed{v = R\cdot\omega}$



$$\cos\varphi = \frac{CA}{IP}$$

$$\cos\varphi(t) = \frac{v_y}{v}$$

$$\boxed{v_y = v\cos(\varphi(t))}$$

Din mișcarea circulară uniformă (M.C.U.) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t \\ v = R\cdot\omega \text{ și din faptul } R = A \end{cases}$$

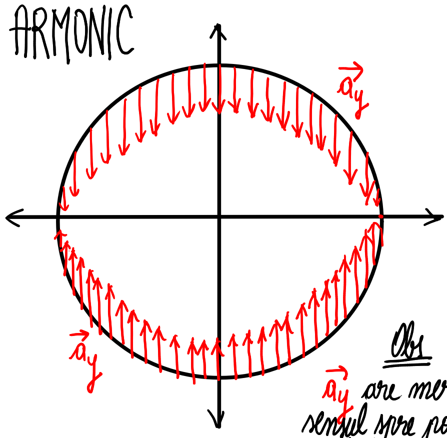
$$\Rightarrow \boxed{v_y = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

LEGEA VITEZEI OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

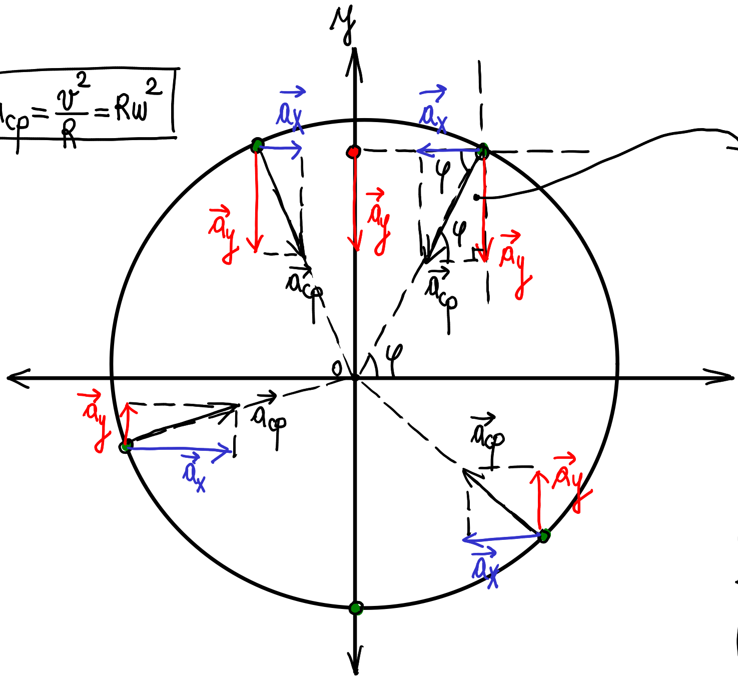
! Obs $v_{y_{max}} = A\omega$

! Obs $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{v_y(t) = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$

ACCELERAȚIA $a_y(t)$ A OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC



$$\boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2}$$



$$\sin\varphi = \frac{CO}{IP}$$

$$\sin\varphi(t) = \frac{-a_y}{a_{cp}}$$

$$\boxed{a_y = -a_{cp} \cdot \sin\varphi(t)}$$

Obs $\vec{a}_y$ are mereu sensul spre poziția de echilibru.

Din mișcarea circulară uniformă (M.C.U.) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t \\ a_{cp} = R\omega^2 \text{ și din faptul } R = A \end{cases}$$

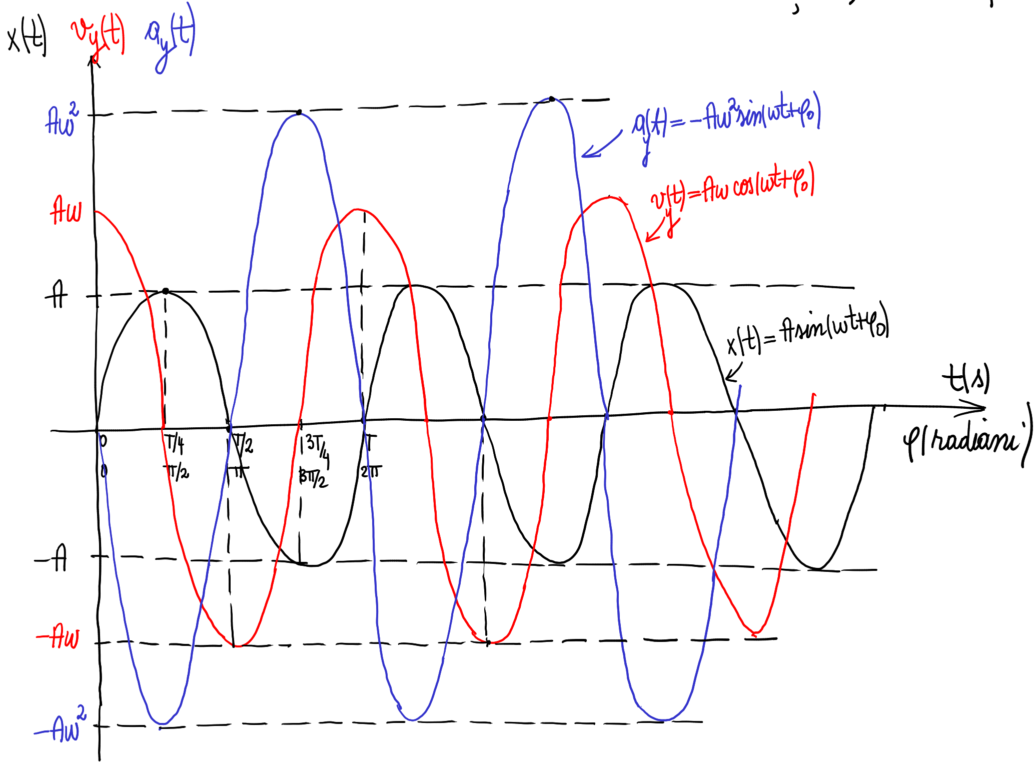
$$\Rightarrow \boxed{a_y = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)}$$

LEGEA ACCELERAȚIEI OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

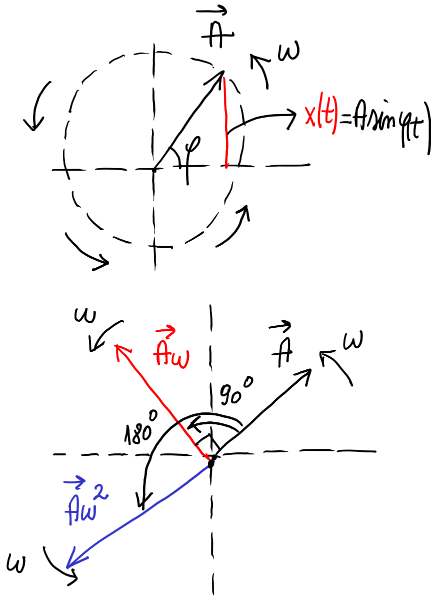
! **Obs** $a_{y_{max}} = A\omega^2$

! **Obs** $-\sin\alpha = \sin(\alpha + \pi) \Rightarrow \boxed{a_y(t) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)}$

REPREZENTAREA GRAFICĂ A POZIȚIEI, VITEZEI ȘI ACCELERAȚIEI



REPREZENTARE FAZORIALĂ



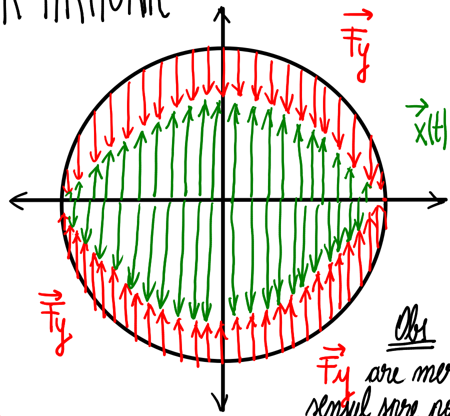
FAZOR = VECTOR ROTITOR

FORȚA $F_y(t)$ A OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

CINEMATICĂ

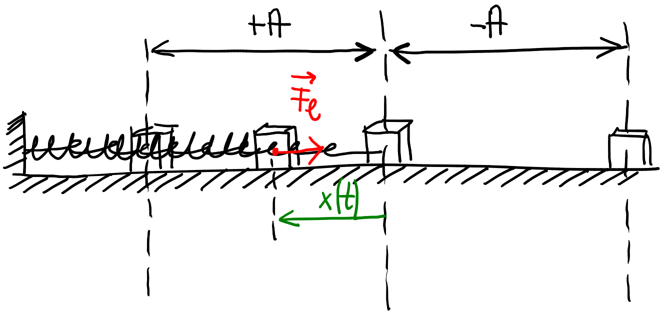
$$F_y(t) = m \cdot a_y(t)$$
$$F_y(t) = -mA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$F_y(t) = -m\omega^2 \cdot A\sin(\omega t + \varphi_0)$$
$$F_y(t) = -m\omega^2 \cdot x(t)$$

$F_y(t)$ se opune elongației $x(t)$



Obs
$\vec{F_y}$ are mereu sensul spre poziția de echilibru!

DINAMICĂ



$\vec{F_e}$ se opune mereu elongației $x(t)$, $\vec{G}$ și $\vec{N}$ se anulează.

$$F_e = -k \cdot \Delta l$$
$$\boxed{F_e = -k \cdot x(t)}$$

În cazul general, rezultanta forțelor $F_y(t)$ într-o mișcare oscilatorie mereu se opune existenței unei elongații $x(t)$, încercând să readucă mobilul în poziția de echilibru.

$$\boxed{F_y(t) = -k \cdot x(t)}$$

$F_y(t)$ = forță de revenire
k = constantă
$x(t)$ = elongație

$\Rightarrow$ $F_y(t) = -m\omega^2 x(t)$ (cinematic)
$F_e(t) = -k \cdot x(t)$ (dinamic)

CRITERIU DE CLASIFICARE A UNEI MIȘCĂRI DREPT MIȘCARE OSCILATORIE LINIARĂ DIN PUNCT DE VEDERE DINAMIC

$$\boxed{k = m\omega^2}$$
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

!!! Obs

Perioada oscilatorului depinde doar de constanta elastică (k) a arcului și de masa (m) legată de arc.
Perioada și frecvența oscilatorului nu se schimbă dacă lovim inițial mai puternic oscilatorul!
Perioada și frecvența oscilatorului depind doar de natura cum a fost fabricat oscilatorul (k, m)!

Numim $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ frecvența proprie sau frecvența naturală proprie a oscilatorului liniar armonic.

Orice corp care oscilează are o frecvență naturală proprie (ν_0) de oscilații care depinde doar de natura oscilatorului.

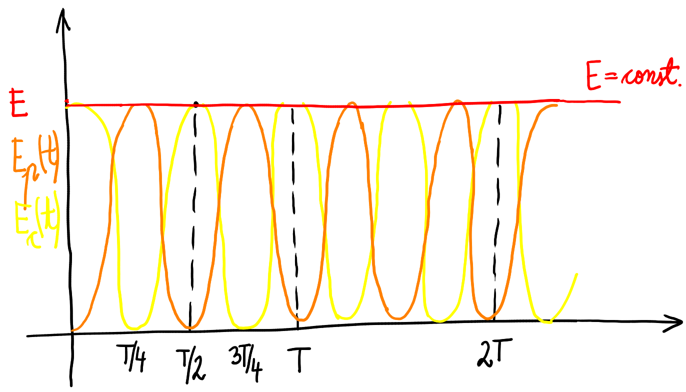
ENERGIA OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

$E_p(t), E_c(t), E(t)$

$$E_c(t) = \frac{m \cdot v^2(t)}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p(t) = \frac{k \cdot x^2(t)}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = E_c(t) + E_p(t) = \frac{mA^2\omega^2}{2} = const$$



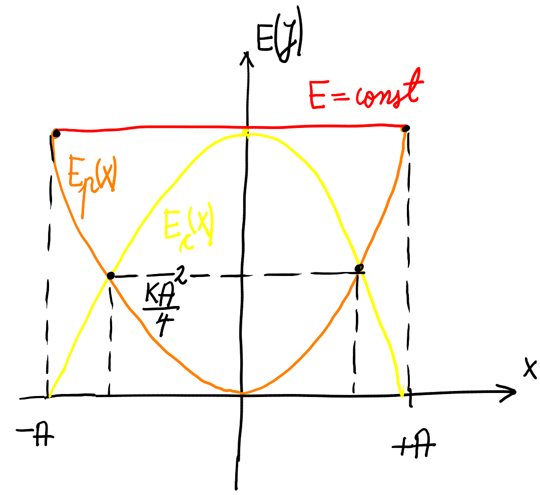
$E_p(x), E_c(x), E(x)$

$$\boxed{E_p(x) = \frac{k \cdot x^2}{2}}$$

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

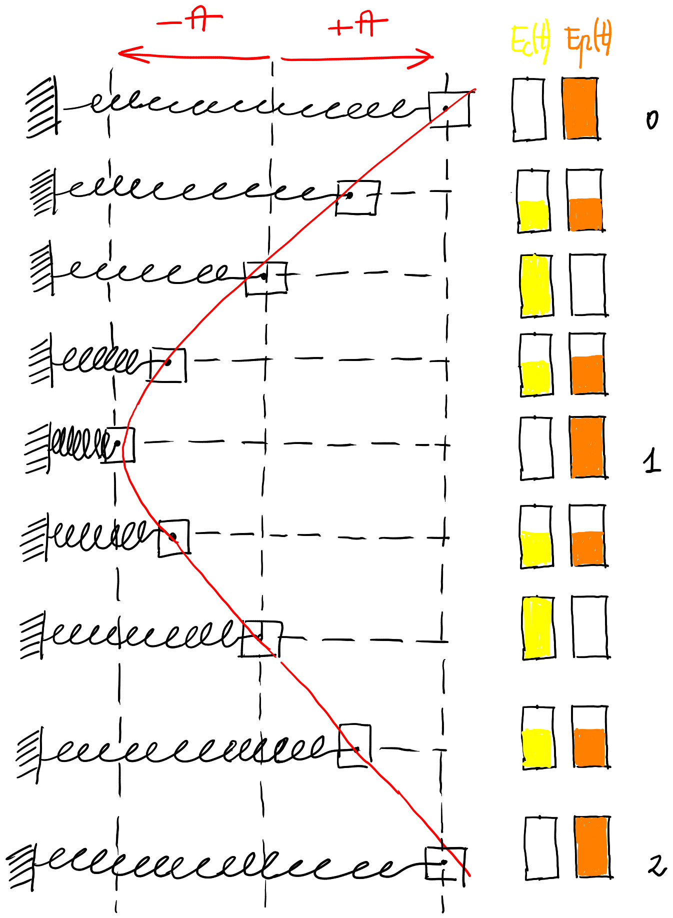
$$E_c = E - E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}(A^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c(x) = E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}$$



! Obs $E_{c_{max}} = \frac{m v_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}$

$$E_{p_{max}} = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$



! Obs Într-o oscilație completă $E_p(t)$ și $E_c(t)$ execută două oscilații complete.

$E_p(t)$ și $E_c(t)$ sunt armonice cu perioada $\frac{T}{2}$.