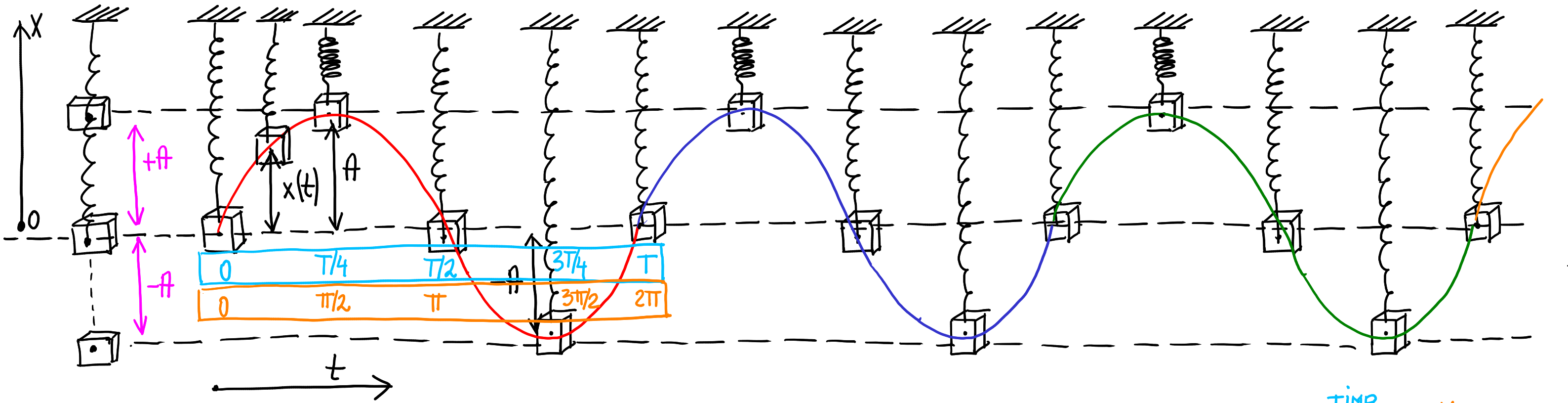
OSCILATORUL LINIAR ARMONIC FĂRĂ FRECĂRI

Mișcare oscilatorie $\stackrel{def}{=}$ deplasare alternativă efectuată de un corp, de-o parte și de alta față de o poziție de echilibru



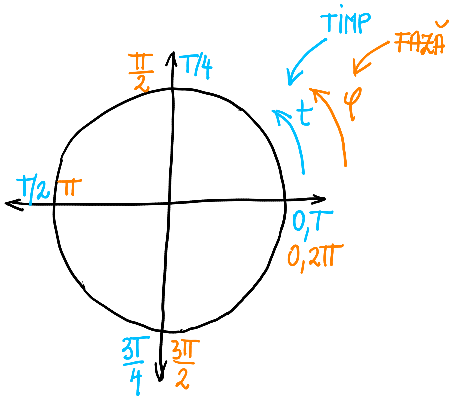
$x(t)$ = elongație

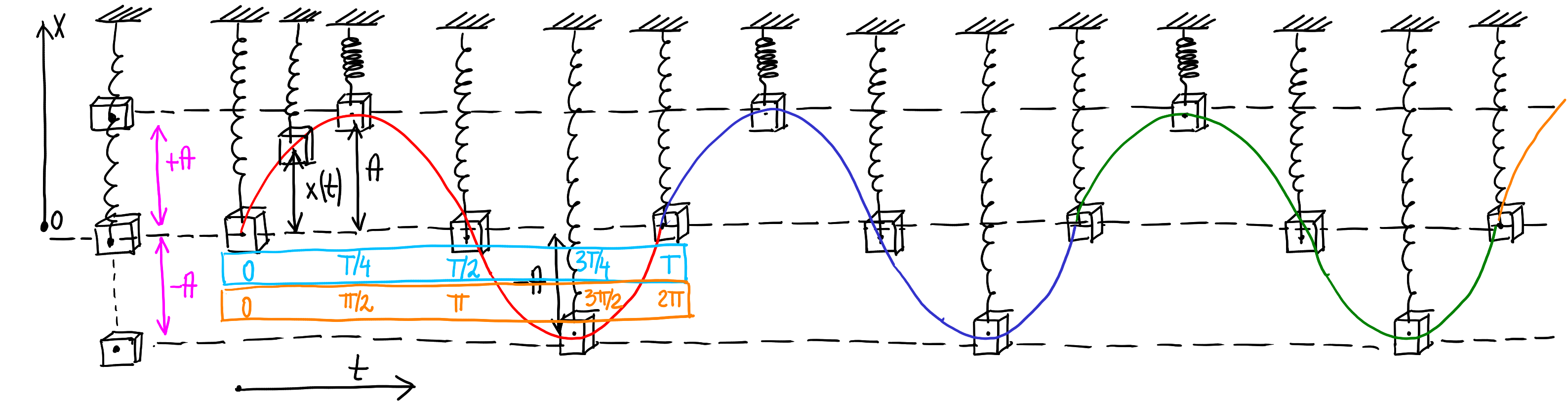
A = elongație maximă = amplitudine

T = perioada → timpul necesar unei oscilații complete

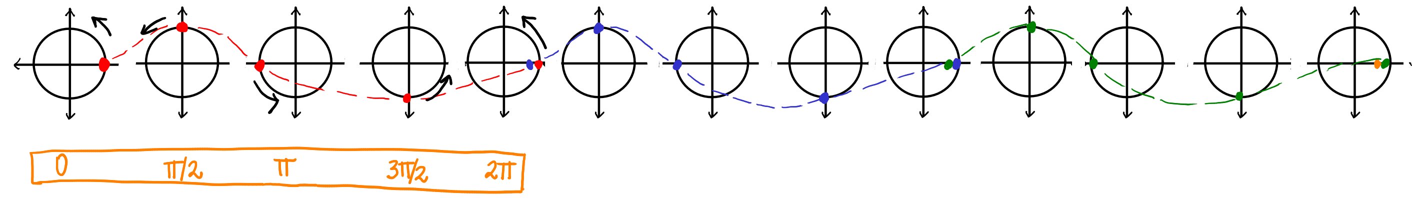
ν = frecvența → numărul de oscilații dintr-o secundă

φ = fază → unghi pe cerc corespunzător momentului de timp





FAZE PE CERC



la momentul $t=0$ corespunde $\varphi=0$ pe cerc

la momentul $t=T/4$ corespunde $\varphi=\pi/2$ pe cerc

la momentul $t=T/2$ corespunde $\varphi=\pi$ pe cerc

la momentul $t=3T/4$ corespunde $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ pe cerc

la momentul $t=T$ corespunde $\varphi=2\pi$ pe cerc

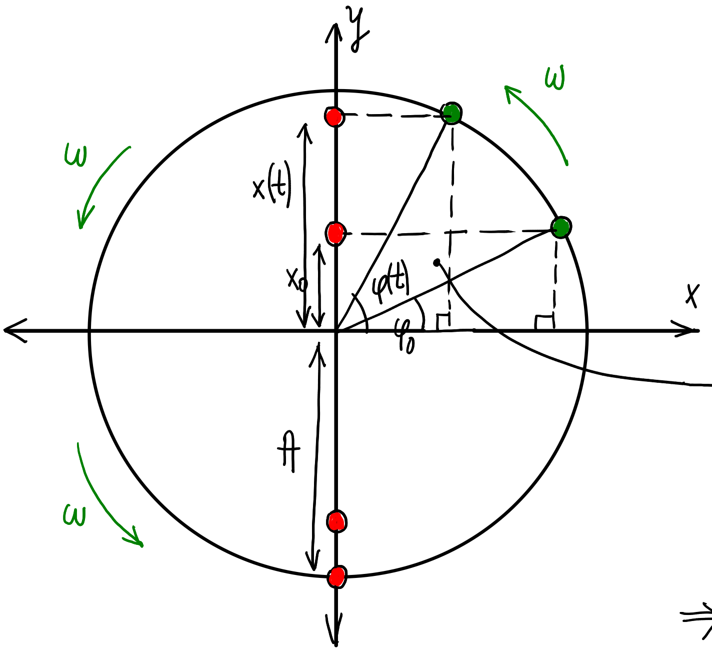
! Obs

1 secundă ..... ν oscilații

T secunde ..... 1 oscilație

$$\Rightarrow \frac{1}{T}=\frac{\nu}{1} \Rightarrow \boxed{\nu=\frac{1}{T}} \qquad [\nu]_{S.I.}=\frac{1}{s}=Hz$$

LEGEA MIȘCĂRII $x(t)$ A OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC



Considerăm un mobil ● în mișcare circulară uniformă ($\omega = const$) pe un cerc. Proiectăm mișcarea mobilului de pe cerc pe axa verticală Oy și obținem o mișcare oscilatorie liniară ●, sus-jos pe axa Oy, față de centrul cercului.

△ triunghi dreptunghic: $\sin\varphi(t) = \frac{CO}{IP}$

$\sin\varphi(t) = \frac{x(t)}{A}$

$$\Rightarrow \overbrace{\underline{x(t)}}^{MRUV} = \overbrace{A\sin(\varphi(t))}^{MCU}$$, dar $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$ din legea mișcării circulare uniforme

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)}$$ LEGEA MIȘCĂRII OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

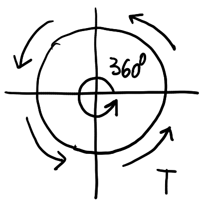
$x(t)$ = elongația
A = amplitudinea
ω = pulsația (viteza unghiulară)
φ_0 = faza inițială

A ω φ_0 mărimile caracteristice unei oscilații

! Obs

ω = viteza unghiulară (pulsație pe cerc)
ν = frecvența (frecvența pe axă)

$\boxed{\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}$ $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \Rightarrow \boxed{\omega = 2\pi\nu}$



! Obs

$A\uparrow \Rightarrow$ mișcarea devine mai amplă
$\omega\uparrow \Rightarrow$ mișcarea devine mai agitată
$\varphi_0\uparrow \Rightarrow$ mișcarea este translatată (defazată)

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$\boxed{\varphi_0 = 0}$

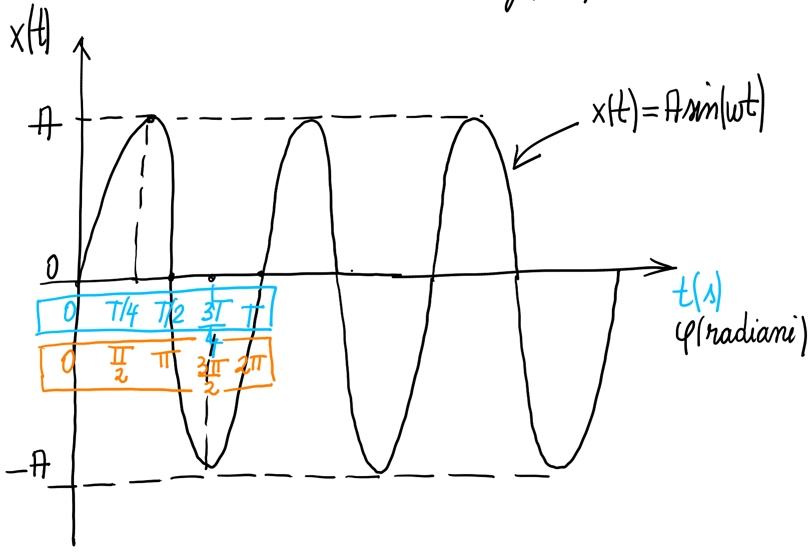
$x(0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right) = 0$

$x\left(\frac{T}{4}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) = A\overset{1}{\cancel{\sin}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = +A$

$x\left(\frac{T}{2}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) = A\overset{0}{\cancel{\sin}}(\pi) = 0$

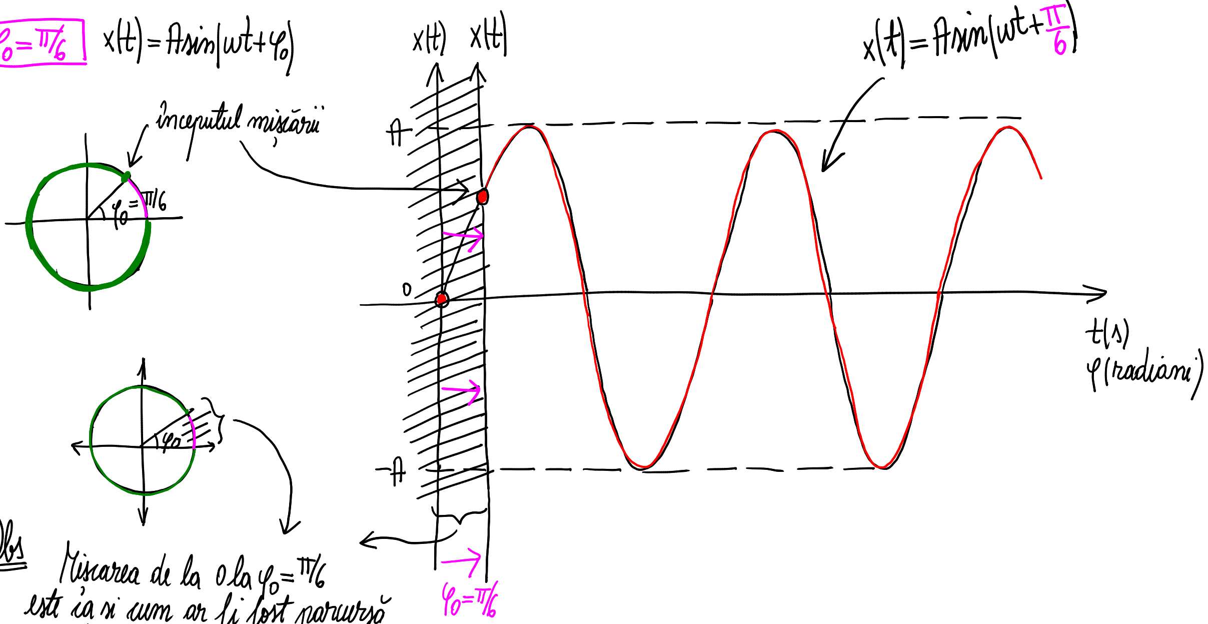
$x\left(\frac{3T}{4}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}\right) = A\overset{-1}{\cancel{\sin}}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -A$

$x(T) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot T\right) = A\overset{0}{\cancel{\sin}}(2\pi) = 0$



FAZA INIȚIALĂ (φ_0)

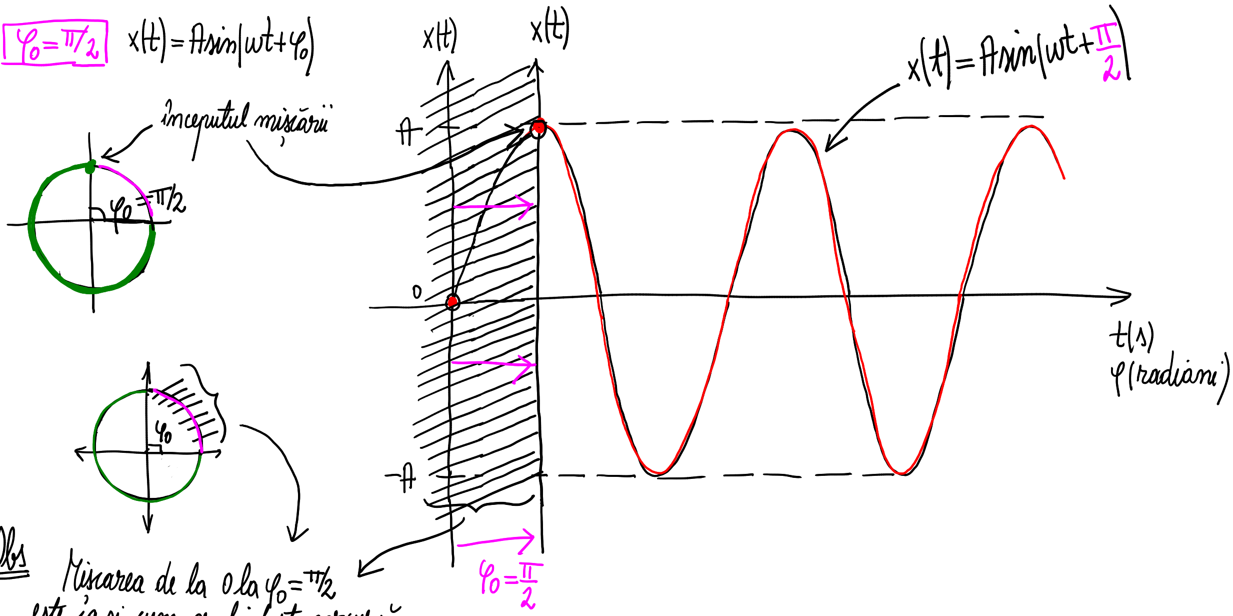
$\boxed{\varphi_0 = \pi/6}$ $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$



! **Obs**

Mișcarea de la 0 la $\varphi_0 = \pi/6$ este ca și cum ar fi fost parcursă deja!

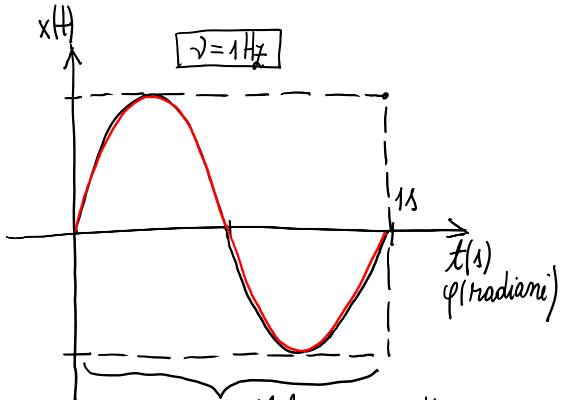
$\boxed{\varphi_0 = \pi/2}$ $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$



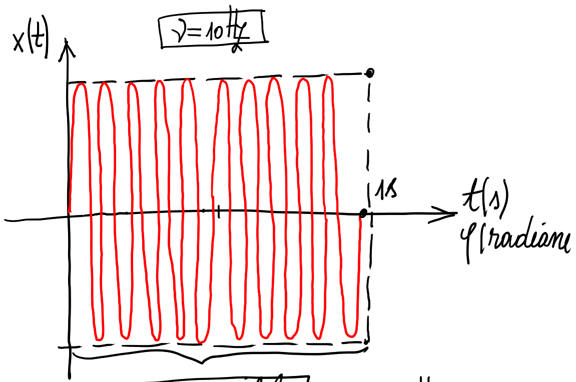
! **Obs**

Mișcarea de la 0 la $\varphi_0 = \pi/2$ este ca și cum ar fi fost parcursă deja!

FRECVENȚA (ν)



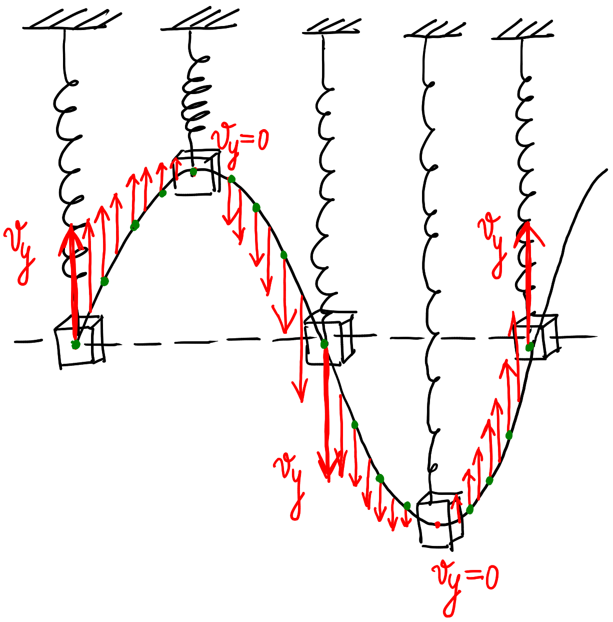
$\boxed{1s,\ 1\ \text{oscilație}} \Rightarrow \nu = 1Hz$

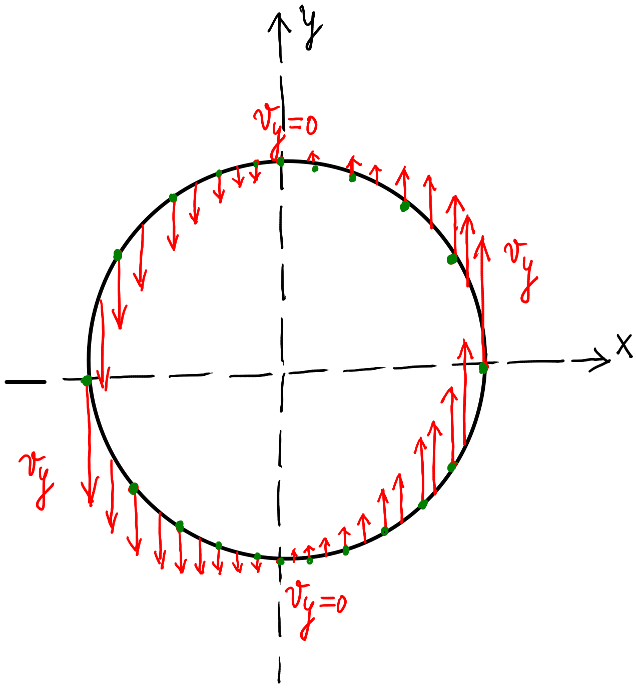


$\boxed{1s,\ 10\ \text{oscilații}} \Rightarrow \nu = 10Hz$

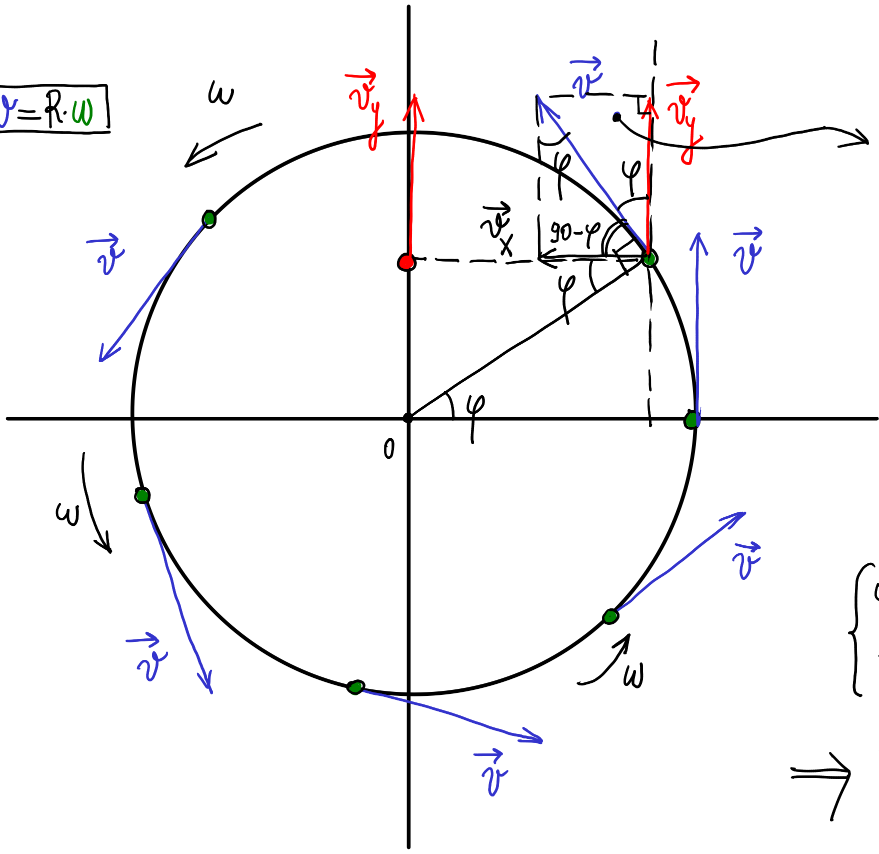
$\nu \uparrow \Rightarrow$ oscilația devine mai agitată

VITEZA $v_y(t)$ A OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC





$\boxed{v = R\cdot\omega}$



$$\cos\varphi = \frac{CA}{IP}$$

$$\cos\varphi(t) = \frac{v_y}{v}$$

$$\boxed{v_y = v\cos(\varphi(t))}$$

Din mișcarea circulară uniformă (M.C.U.) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t \\ v = R\cdot\omega \text{ și din faptul } R = A \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_y = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)}$$

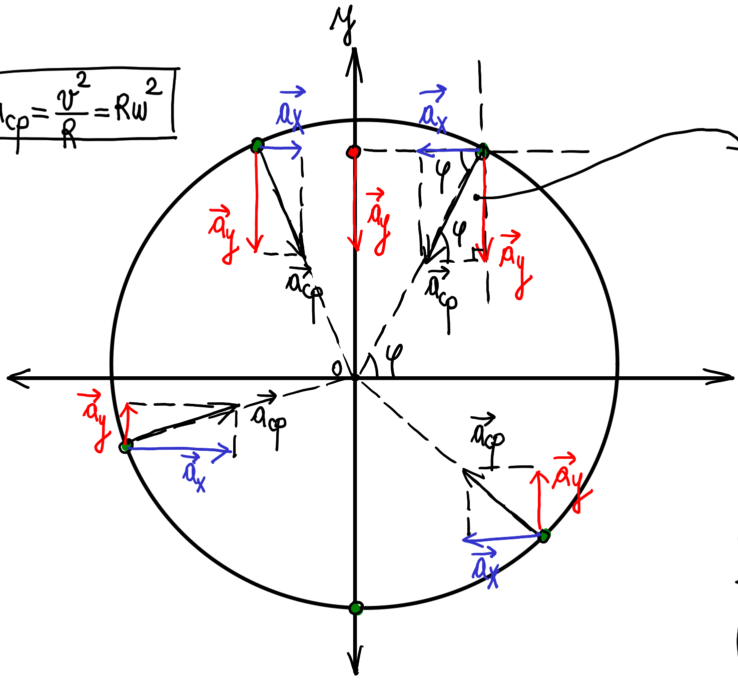
LEGEA VITEZEI OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

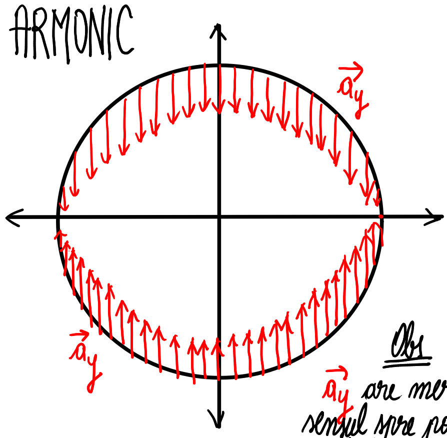
! Obs $\quad v_{y_{max}} = A\omega$

! Obs $\quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{v_y(t) = A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$

ACCELERAȚIA $a_y(t)$ A OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

$$\boxed{a_{cp} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2}$$





Obs $\vec{a}_y$ are mereu sensul spre poziția de echilibru!

$$\sin\varphi = \frac{CO}{IP}$$

$$\sin\varphi(t) = \frac{-a_y}{a_{cp}}$$

$$\boxed{a_y = -a_{cp} \cdot \sin\varphi(t)}$$

Din mișcarea circulară uniformă (M.C.U.) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t \\ a_{cp} = R\omega^2 \text{ și din faptul } R = A \end{cases}$$

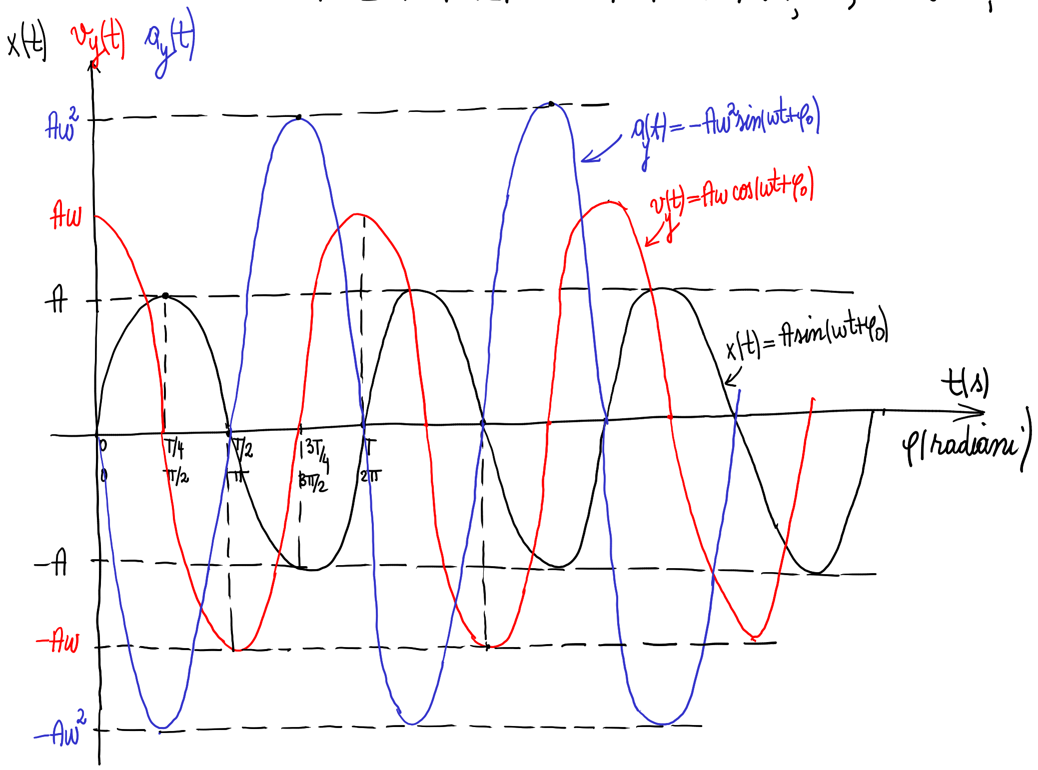
$$\Rightarrow \boxed{a_y = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)}$$

LEGEA ACCELERAȚIEI OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

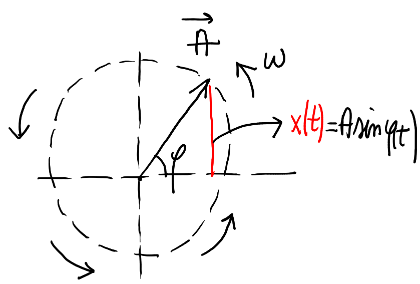
! **Obs** $a_{y\,max} = A\omega^2$

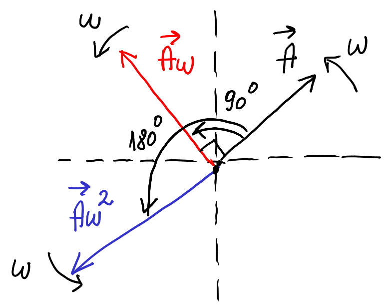
! **Obs** $-\sin\alpha = \sin(\alpha + \pi) \Rightarrow \boxed{a_y(t) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)}$

REPREZENTAREA GRAFICĂ A POZIȚIEI, VITEZEI ȘI ACCELERAȚIEI



REPREZENTARE FAZORIALĂ





FAZOR = VECTOR ROTITOR

FORȚA $F_y(t)$ A OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

CINEMATICĂ

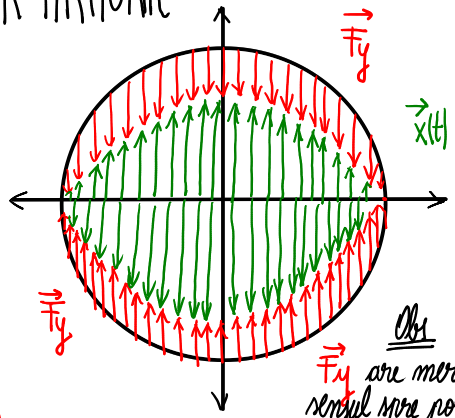
$$F_y(t) = m\cdot a_y(t)$$

$$F_y(t) = -mA\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$F_y(t) = -m\omega^2\cdot A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$F_y(t) = -m\omega^2\cdot x(t)$$

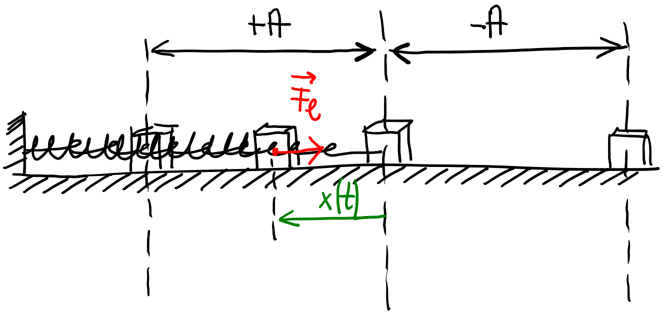
$F_y(t)$ se opune elongației $x(t)$



Obs

$\vec{F_y}$ are mereu sensul spre poziția de echilibru!

DINAMICĂ



$\vec{F_e}$ se opune mereu elongației $x(t)$, $\vec{G}$ și $\vec{N}$ se anulează.

$$F_e = -k\cdot\Delta l$$

$$\boxed{F_e = -k\cdot x(t)}$$

$$\Rightarrow F_y(t) = -m\omega^2\cdot x(t) \quad \text{(cinematic)}$$

$$F_e(t) = -k\cdot x(t) \quad \text{(dinamic)}$$

În cazul general, rezultanta forțelor $F_y(t)$ într-o mișcare oscilatorie mereu se opune existenței unei elongații $x(t)$, încercând să readucă mobilul în poziția de echilibru.

$$\boxed{F_y(t) = -k\cdot x(t)}$$

$F_y(t)$ = forță de revenire

k = constantă

$x(t)$ = elongație

CRITERIU DE CLASIFICARE A UNEI MIȘCĂRI DREPT MIȘCARE OSCILATORIE LINIARĂ DIN PUNCT DE VEDERE DINAMIC

$$\boxed{k = m\omega^2}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

!!! Obs

Perioada oscilatorului depinde doar de constanta elastică (k) a arcului și de masa (m) legată de arc.

Perioada și frecvența oscilatorului nu se schimbă dacă lovim inițial mai puternic oscilatorul!

Perioada și frecvența oscilatorului depind doar de natura cum a fost fabricat oscilatorul (k, m)!

Numim $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ frecvența proprie sau frecvența naturală proprie a oscilatorului liniar armonic.

Orice corp care oscilează are o frecvență naturală proprie (ν_0) de oscilații care depinde doar de natura oscilatorului.

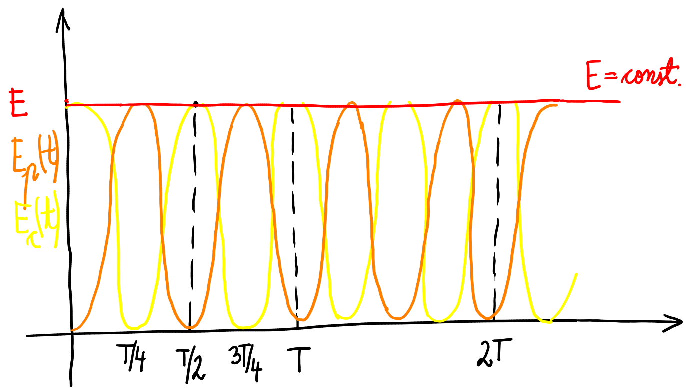
ENERGIA OSCILATORULUI LINIAR ARMONIC

$E_p(t), E_c(t), E(t)$

$$E_c(t) = \frac{m \cdot v^2(t)}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E_p(t) = \frac{k \cdot x^2(t)}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$E = E_c(t) + E_p(t) = \frac{mA^2\omega^2}{2} = const$$



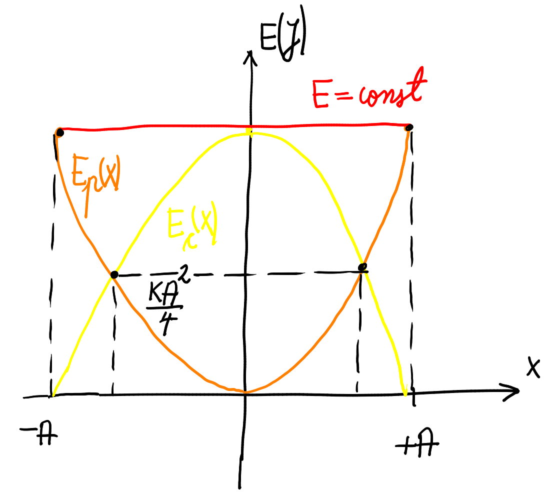
$E_p(x), E_c(x), E(x)$

$$\boxed{E_p(x) = \frac{k \cdot x^2}{2}}$$

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$

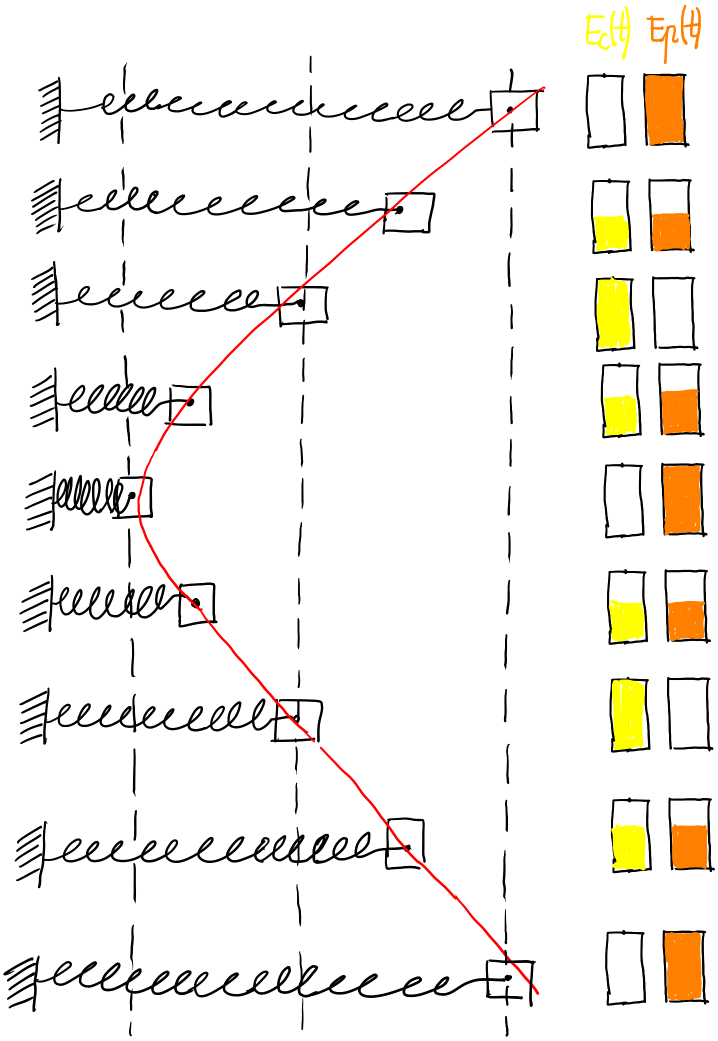
$$E_c = E - E_p = \frac{mA^2\omega^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}(A^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c(x) = E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}}$$



! Obs $E_{c_{max}} = \frac{m v_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}$

$$E_{p_{max}} = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}$$



! Obs Într-o oscilație completă $E_p(t)$ și $E_c(t)$ execută două oscilații complete.

$E_p(t)$ și $E_c(t)$ sunt armonice cu perioada $\frac{T}{2}$.