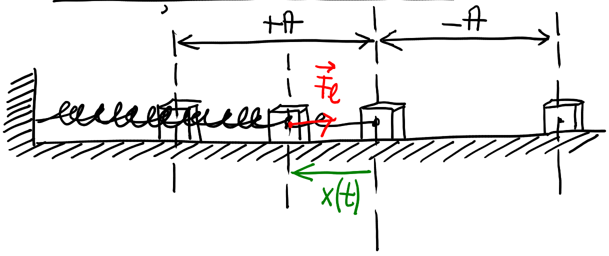
OSCILATORUL LIBER CU FRECĂRI. OSCILAȚII AMORTIZATE.

OSCILAȚII FĂRĂ FRECĂRI



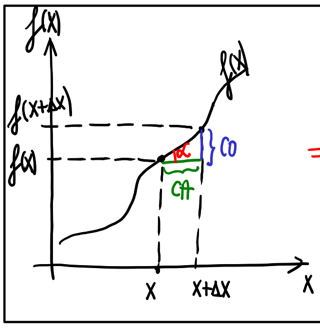
$F_f = 0$

Principiul II: $\vec{F_e} + \cancel{\vec{G} + \vec{N}} = m \cdot \vec{a}$ (MRUV)

$-k \cdot x = m \cdot a$

$$\boxed{k \cdot x + m \cdot a = 0}$$

DERIVATA UNEI FUNCȚII. SEMNIFICAȚIE



$$tg\,\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$v(t) = x'(t) = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = \dot{x}$

$a(t) = x''(t) = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = \ddot{x}$

$F(t) = m \cdot a(t) = -\underline{m\omega^2} A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$F_e(t) = -\underline{k} \cdot x(t)$

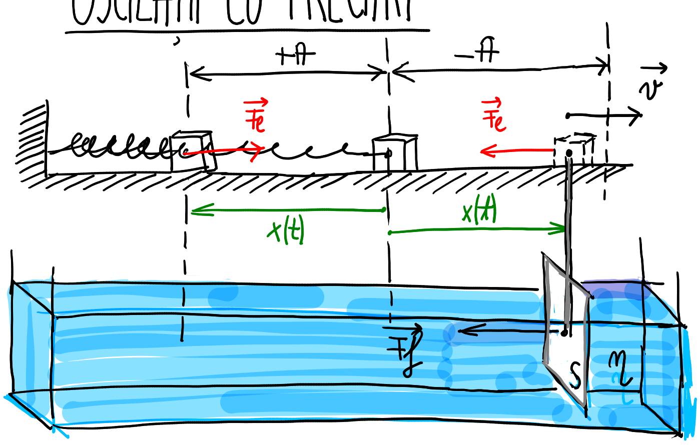
$$\boxed{k \cdot x + m \cdot a = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{kx + m \cdot \ddot{x} = 0}$$

ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL II OMOGENĂ → !Obs Ecuații în care pe lângă variabila x apare și vitezele de variație ale lui x, adică derivatele lui x.

SOLUȚIE: $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)}$

OSCILAȚII CU FRECĂRI



La avansarea corpului cu viteza v, el trage după el o placă de suprafață (S) legată solidar care se mișcă într-o cuvă cu un lichid de vâscozitate (η).

Forța de frecare (F_f) este considerată direct proporțională cu viteza (v)

aproximatie $\Rightarrow \boxed{F_f \sim v}$ $\qquad \boxed{\vec{F_f} = -C \cdot \vec{v}}$

$v \uparrow \Rightarrow F_f \uparrow$

C = constantă

C depinde de geometria sistemului (de S)

C depinde de natura fluidului (de η)

$\vec{F_f} = -C \cdot v$

Principiul II: $\vec{F_e} + \vec{F_f} + \cancel{\vec{G} + \vec{N}} = m \cdot \vec{a}$ (MRUV)

$-k \cdot x - Cv = m \cdot a$

$kx + Cv + m \cdot a = 0$

dar $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}$

dar $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \implies \boxed{kx + c\cdot\dot{x} + m\cdot\ddot{x} = 0}$

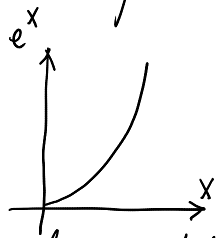
ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL II OMOGENĂ ÎN CARE APARE PE LÂNGĂ X ȘI VITEZA VARIAȚIEI LUI X ($\dot{x}$) ȘI VITEZA VARIAȚIEI VARIAȚIEI LUI X ($\ddot{x}$)

SOLUȚIE: $\boxed{x(t) = \underbrace{A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot t}}_{A(t)} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}$

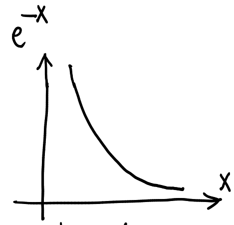
A(t) amplitudine variabilă în timp

amplitudinea scade exponențial în timp

$$A(t) = \underbrace{A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot t}} = \underbrace{A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}}$$



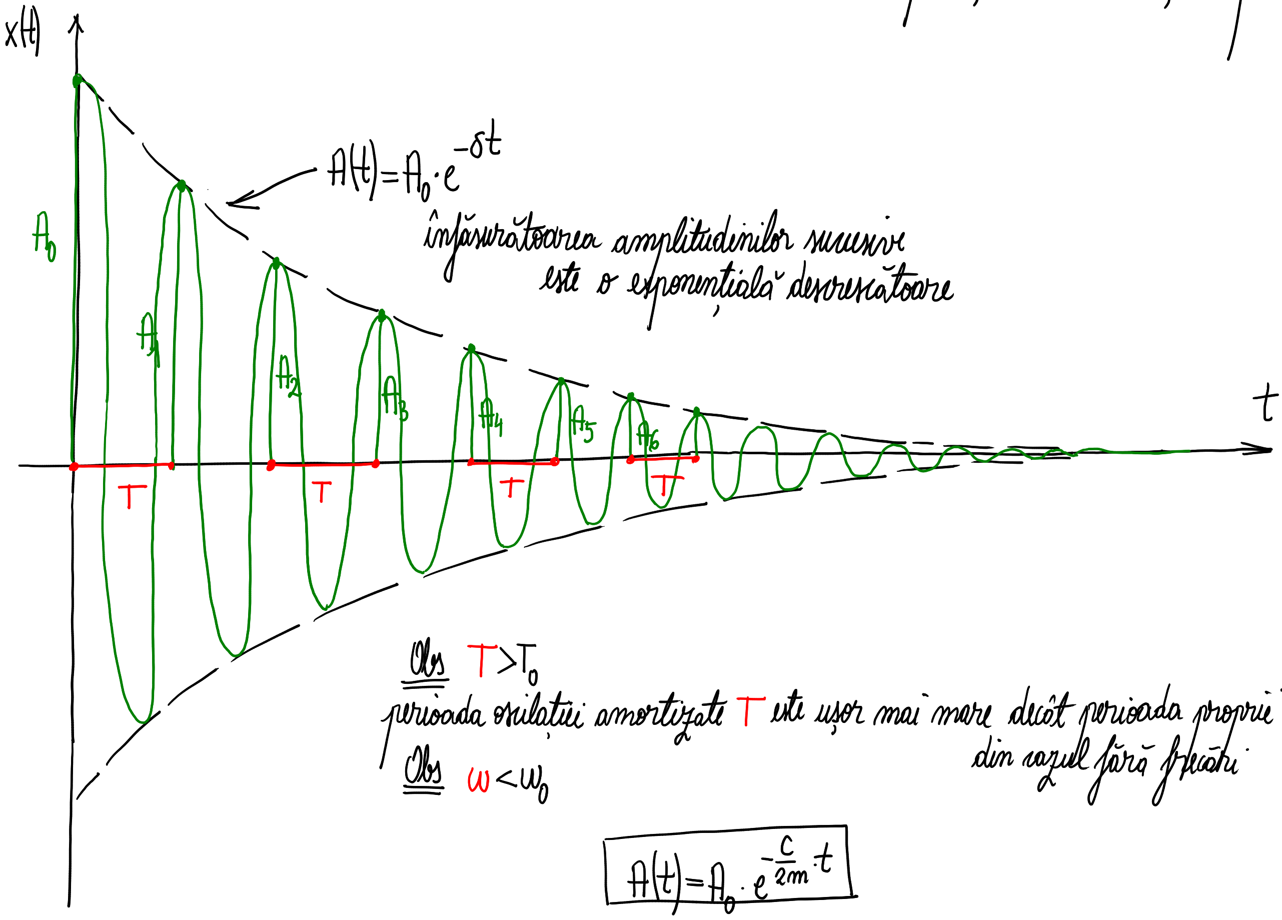
creștere exponențială



descreștere exponențială

$\boxed{\delta = \frac{c}{2m}}$ δ = Coeficient de amortizare

δ = o măsură cât de mult scade amplitudinea în timp



$A(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t}$

înfășurătoarea amplitudinilor succesive este o exponențială descrescătoare

Obs $T > T_0$

perioada oscilației amortizate T este ușor mai mare decât perioada proprie T_0 din cazul fără frecări

Obs $\omega < \omega_0$

$$\boxed{A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot t}}$$

AMPLITUDINILE SUCCESIVE

$A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots A_{n-1}, A_n$

$t = 0 \implies A(t) = A_0$

$t = T \implies A(T) = A_1 = A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}(T)}$

$t = 2T \implies A(2T) = A_2 = A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot(2T)}$

$t = 3T \implies A(3T) = A_3 = A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot(3T)}$

$t = 4T \implies A(4T) = A_4 = A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}(4T)}$

... ...

$t = (n-1)T \implies A(t) = A_{n-1} = A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}[(n-1)T]}$

$t = nT \implies A(t) = A_n = A_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m}[(nT)]}$

RAPORTUL DE AMORTIZARE (K)

$\boxed{K=\frac{A_n}{A_{n-1}}}$ K = raport de amortizare

K = o măsură cât scad amplitudinile succesive

! Doar pentru frecările de tipul $\vec{F_f}=-C\cdot\vec{v}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow K=\frac{A_1}{A_0}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{A_3}{A_2}=\dots=\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}[nT]}}{A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}[(n-1)T]}}=e^{-\frac{c}{2m}\cdot T}=e^{-\delta T}$$

$$\Rightarrow \boxed{K=\frac{A_n}{A_{n-1}}=e^{-\delta T}}=\text{constant}$$

COEFICIENTUL DE AMORTIZARE (δ)

! Fie n oscilații. $\frac{A_n}{A_0}=\frac{A_1}{A_0}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot\frac{A_3}{A_2}\cdot\frac{A_4}{A_3}\cdots\frac{A_{n-1}}{A_n}\cdot\frac{A_n}{A_{n-1}}$ $\Big|\ln()$

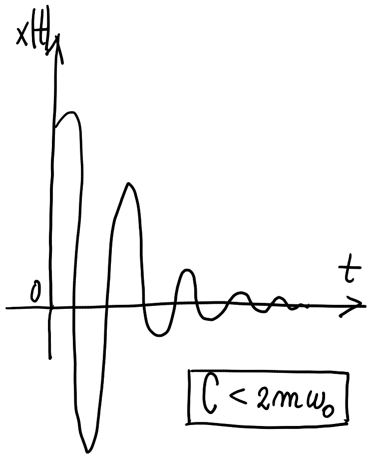
$$\ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right)=\ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right)+\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)+\ln\left(\frac{A_3}{A_2}\right)+\dots+\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$$

, dar $\left(\frac{A_1}{A_0}\right)=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)=\dots=\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)=e^{-\delta T}$

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right)=(-\delta T)+(-\delta T)+\dots+(-\delta T)=-\delta(nT)$$

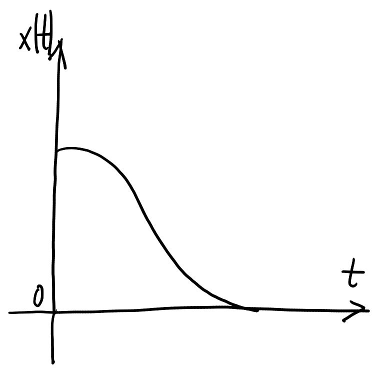
$$\Rightarrow \boxed{\delta=\frac{\ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right)}{nT}}$$

MIȘCARE AMORTIZATĂ



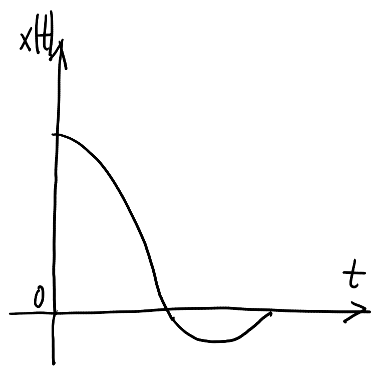
$\boxed{C<2m\omega_0}$

MIȘCARE APERIODICĂ



$\boxed{C>2m\omega_0}$

AMORTIZARE CRITICĂ



$\boxed{C=2m\omega_0}$

$$Kx+Cv+ma=0$$

$$Kx+C\dot{x}+m\ddot{x}=0 \quad \Big|\frac{1}{m}$$

$$\frac{K}{m}x+\frac{C}{m}\dot{x}+\ddot{x}=0 \quad , \text{dar } \omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2x+\frac{C}{m}\dot{x}+\ddot{x}=0}$$ ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL II $\Rightarrow x(t)$