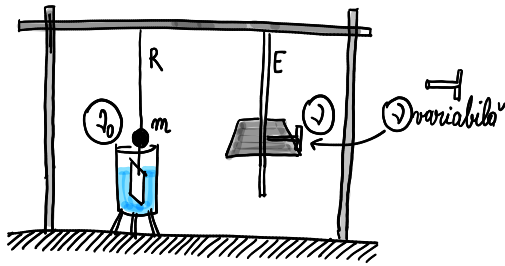


# OSCILATORI CUPLAȚI. OSCILAȚII ÎNTREȚINUTE. OSCILAȚII FORȚATE. REZONANȚĂ.

## EXPERIMENT 1



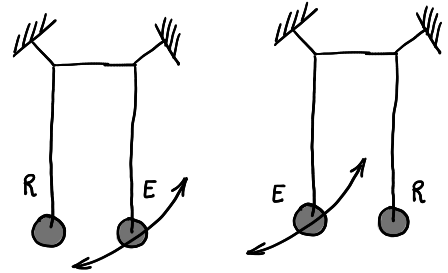
R = receptor  
E = excitator

Obs Atunci când  $\omega \approx \omega_0 \Rightarrow A = A_{\max}(R)$   
 $\Rightarrow$  REZONANȚĂ = transfer maxim de energie de la excitatorul (E) la receptorul (R).

Obs 1 Excitatorul (E) fiind mai mic își impune frecvența  $\omega$  receptorului (R)  $\Rightarrow$  oscilații forțate  
Excitatorul (E), fiind mai mic, mișcarea acestuia este foarte puțin influențată de mișcarea receptorului (R).

Obs 2 Singurul caz în care amplitudinea (R) este mai mare este în cazul în care frecvența excitatorului (E) este egală cu frecvența naturală proprie  $\omega_0$  a receptorului (R).

## EXPERIMENT 2



Obs 1 Când excitatorul (E) și receptorul (R) au max comparabile mișcarea excitatorului (E) este influențată de mișcarea receptorului (R) schimbându-și rolurile între ele.

Obs 2 Punând în oscilație pendulul (E) amplitudinea lui (E) va deveni constant până n/oprste în timp și amplitudinea lui (R) crește constant până s/ egalază pe cea inițială a pendulului E. (E) și (R) n/ au schimbat rolurile n/ continuă să se schimbe în modul descris.

## CONDIȚIA REALIZĂRII STĂRII DE REZONANȚĂ

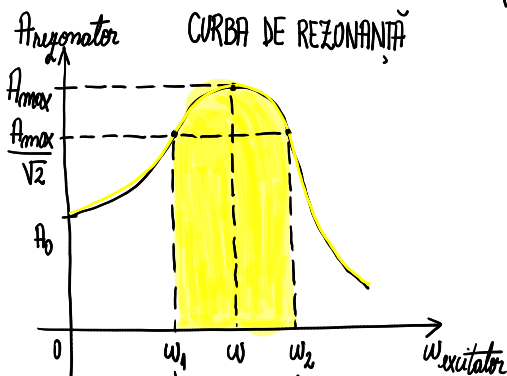
La rezonanță, perioada (frecvența) sistemului excitator (E) trebuie să fie egală sau apropiată de perioada (frecvența) naturală proprie a sistemului receptor (R).

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T \approx T_0 \\ \omega \approx \omega_0 \end{array} \right. \Rightarrow A \rightarrow A_{\max}(R) \Rightarrow \text{Rezonanță!}$$

(E) (R)

Transfer maxim de energie de la (E) la (R).  
Amplitudinea receptorului devine maximă

Pentru a măsura cantitativ rezonanța se reprezintă curba de rezonanță, adică graficul amplitudinilor receptorului (R) în funcție de frecvența impusă de excitator  $\omega \Rightarrow A(\omega)$



BANDA DE TRECERE :  $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$

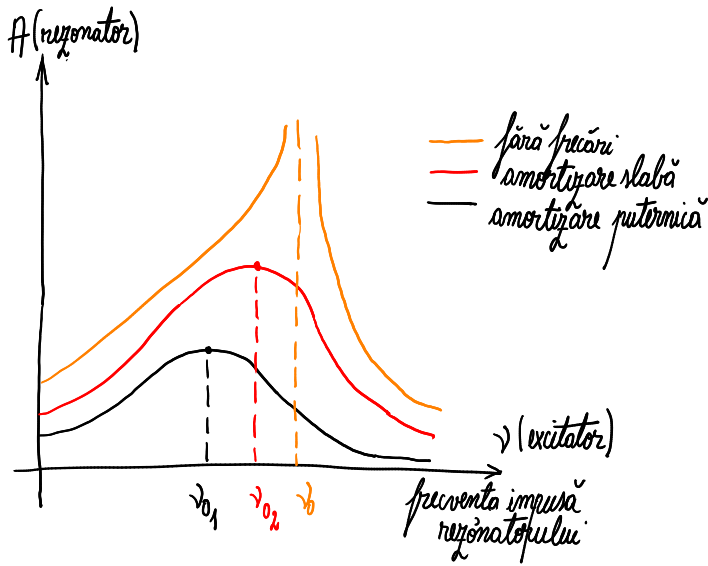
$\Rightarrow$  Amplitudini semnificative :  $A \in [\frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}, A_{\max}]$   
 $\Rightarrow$  Rezonanță

BANDA DE TRECERE  $\Delta \omega$  intervalul de pulsație ale excitatorului (E) pentru care amplitudinea receptorului (R) este semnificativă  $A > \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$

LARGIME DE BANDĂ  $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$

FACTOR DE CALITATE  $Q = \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)}$

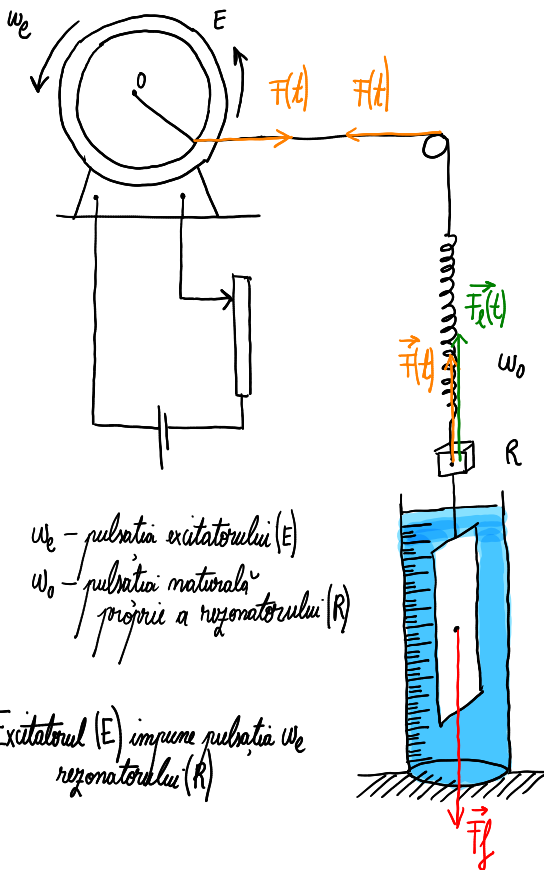
Obs  $\Delta \omega \downarrow \Rightarrow Q \uparrow$



Amplasa rezonatorului (R) acționează periodic excitatorul (E) prin intermediul unei forțe periodice  $F(t) = F_{\max} \sin(\omega_e t)$ .

! Obs La fiecare oscilație a excitatorului (E) rezonatorul (R) mai primește o porție de energie din partea forței periodice  $F(t)$ .

## REZONANȚA (analiză cantitativă)



$\omega_e$  - pulsația excitatorului (E)  
 $\omega_0$  - pulsația naturală proprie a rezonatorului (R)

$$\begin{cases} \vec{F}_k(t) = -k \cdot A \sin(\omega_e t) \\ \vec{F}_f(t) = -C \cdot v = -CA \omega_e \cos(\omega_e t) \\ \vec{F}(t) = F_{\max} \sin(\omega_e t + \varphi_0) \end{cases}$$

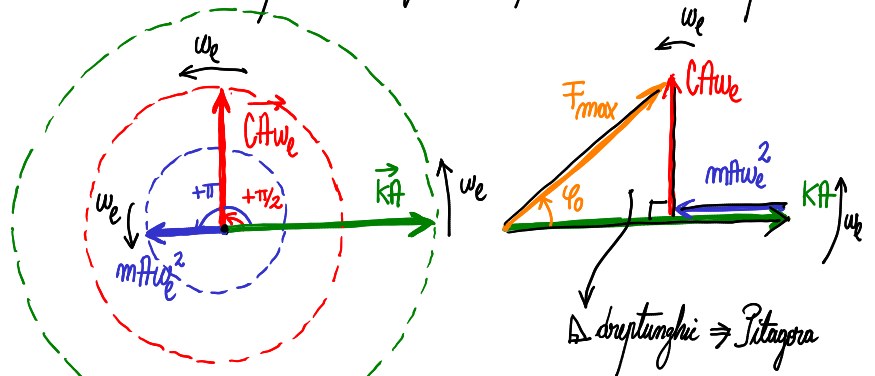
Principiul II:  $\vec{F} + \vec{F}_k + \vec{F}_f = m \vec{a}$  (vectorial)

$$F - kx - Cv = ma$$

$$\Rightarrow F = kx + Cv + ma$$

$$F_{\max} \sin(\omega_e t + \varphi_0) = kA \sin(\omega_e t) + CA \omega_e \cos(\omega_e t) + m A \omega_e^2 \sin(\omega_e t)$$

Folosim reprezentarea fazorială pentru a studia amplitudinea A.



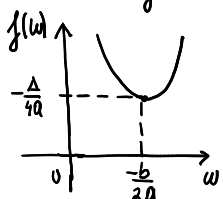
$$F_{\max}^2 = (CA \omega_e)^2 + (kA - m A \omega_e^2)^2$$

$$F_{\max}^2 = A^2 [C^2 \omega_e^2 + (k - m \omega_e^2)^2]$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{(k - m \omega_e^2)^2 + C^2 \omega_e^2}}$$

Fă numitorul  $\Rightarrow f(\omega_e^2) = C^2 \omega_e^2 + (k - m \omega_e^2)^2 = C^2 \omega_e^2 + k^2 - 2km \omega_e^2 + m^2 \omega_e^4$

Notăm  $\omega = \omega_e^2 \Rightarrow f(\omega) = m^2 \omega^2 + (C^2 - 2km) \omega + k^2$



$f(\omega)$  este o parabolă

$$\begin{cases} a = m^2 \\ b = C^2 - 2km \\ c = k^2 \end{cases}$$

$f(\omega)$  prezintă un minim  $\Rightarrow A$  atinge un maxim pentru  $\omega = -\frac{b}{2a} = -\frac{C^2 - 2km}{2m^2} = \frac{2km}{2m^2} - \frac{C^2}{2m^2}$

$$\Rightarrow \omega = \frac{k}{m} - \frac{C^2}{2m^2} \Rightarrow \omega_e = \omega_{\text{rez}, A} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \delta = \frac{C}{2m}$$

$$A = A_{\max} \Leftrightarrow \omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad \text{pulsația de rezonanță a amplitudinilor}$$

$$v = v_{\max} = A\omega_e = \frac{F_{\max} \omega_e}{\sqrt{(K - m\omega_e^2)^2 + C^2 \omega_e^2}} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{K}{\omega_e} - m\omega_e\right)^2 + C^2}}$$

Numitorul este minim pentru  $\frac{K}{\omega_e} - m\omega_e = 0$  adică pentru  $\omega_e = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0$

$v = v_{\max} \Leftrightarrow \omega_e = \omega_0$  pulsatia de rezonanță a vitezei

CONCLUZIE :

viteza, forța rezistentă, puterea transformată ating un maxim pentru  $\omega_e = \omega_0$   
amplitudinea, forța elastică ating un maxim pentru  $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

Arm studiat amplitudinea  $A$ , acum studiem defazajul  $\varphi_0$  dintre excitator (E) și rezonator (R).

$$F_{\max} \sin(\omega_e t + \varphi_0) = K A \sin(\omega_e t) + C A \omega_e \cos(\omega_e t) + m A \omega_e^2 \sin(\omega_e t)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

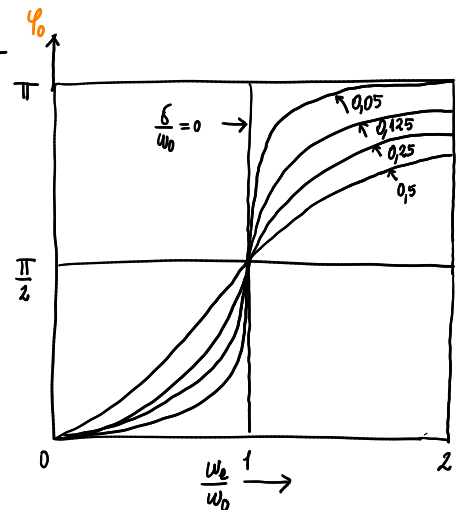
$$\Rightarrow F_{\max} \sin(\omega_e t) \cos \varphi_0 + F_{\max} \sin \varphi_0 \cos(\omega_e t) = C A \omega_e \cos(\omega_e t) + [K A - m A \omega_e^2] \sin(\omega_e t)$$

$$\begin{aligned} \text{dăm valori } \begin{cases} t=0 \Rightarrow \sin(\omega_e t)=0 \\ \cos(\omega_e t)=1 \end{cases} &\Rightarrow F_{\max} \sin \varphi_0 = C A \omega_e \\ \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{T}{4} \Rightarrow \sin(\omega_e t)=1 \\ \cos(\omega_e t)=0 \end{cases} &\Rightarrow F_{\max} \cos \varphi_0 = K A - m A \omega_e^2 \end{aligned}$$

$$\odiv \boxed{\tan \varphi_0 = \frac{C \omega_e}{K - m \omega_e^2}}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi_0 = \frac{\frac{c}{m} \omega_e}{\frac{K}{m} - \omega_e^2}$$

$$\delta = \frac{c}{2m}; \omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \boxed{\tan \varphi_0 = \frac{2\delta \omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}}$$



CONCLUZIE :

Dacă pulsatiile  $\omega_e$  sunt mici, defazajul  $\varphi_0$  este aproape zero (E) și (R) sunt în fază.

Dacă pulsatiile  $\omega_e$  sunt mult mai mari decât  $\omega_0$ , defazajul  $\varphi_0$  este aproape  $\pi$ . (E) și (R) sunt opoziți de fază.

La cât frecvențele sunt mai mici, ob. au stat tranziția de la regimul în fază la regimul în opoziție de fază este mai rapidă

$$\text{Obs } \begin{cases} \omega_e = \omega_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \\ \omega_e < \omega_0 \Rightarrow \varphi_0 \rightarrow 0 \text{ (E) și (R) tind să fie în fază} \\ \omega_e > \omega_0 \Rightarrow \varphi_0 \rightarrow \pi \text{ (E) și (R) tind să fie în opoziție de fază} \end{cases}$$