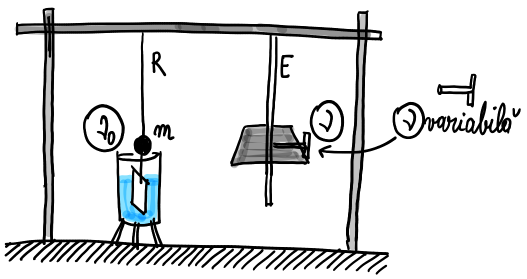
OSCILATORI CUPLAȚI. OSCILAȚII ÎNTREȚINUTE. OSCILAȚII FORȚATE. REZONANȚA

EXPERIMENT 1



R = rezonator
E = excitator

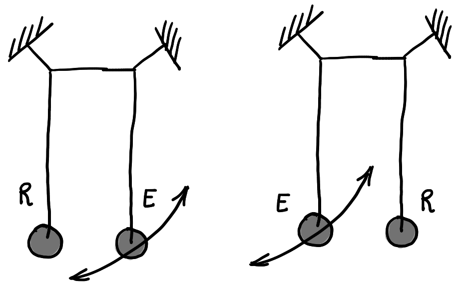
! Obs Atunci când $\boxed{\nu \simeq \nu_0} \Rightarrow \boxed{A = A_{max}(R)}$

$\Rightarrow$ REZONANȚĂ = transfer maxim de energie de la excitatorul (E) la rezonatorul (R).

Obs1 Excitatorul (E) fiind masiv își impune frecvența (ν) rezonatorului (R) $\Rightarrow$ oscilații forțate
Excitatorul (E), fiind masiv, mișcarea acestuia este foarte puțin influențată de mișcarea rezonatorului (R).

Obs2 Singurul caz în care amplitudinea (R) este mai mare este în cazul în care frecvența excitatorului (E) este egală cu frecvența naturală proprie ν_0 a rezonatorului (R).

EXPERIMENT 2



Obs 1 Când excitatorul (E) și rezonatorul (R) au mase comparabile mișcarea excitatorului (E) este influențată de mișcarea rezonatorului (R) schimbându-și rolurile între ele.

Obs 2 Punând în oscilație pendulul (E) amplitudinea lui (E) va descrește constant până se oprește în timp și amplitudinea lui (R) crește constant până o egalează pe cea inițială a pendulului E. (E) și (R) și-au schimbat rolurile și continuă să și le schimbe în modul descris.

CONDIȚIA REALIZĂRII STĂRII DE REZONANȚĂ

La rezonanță, perioada (frecvența) sistemului excitator (E) trebuie să fie egală sau apropiată de perioada (frecvența) naturală proprie a sistemului rezonator (R).

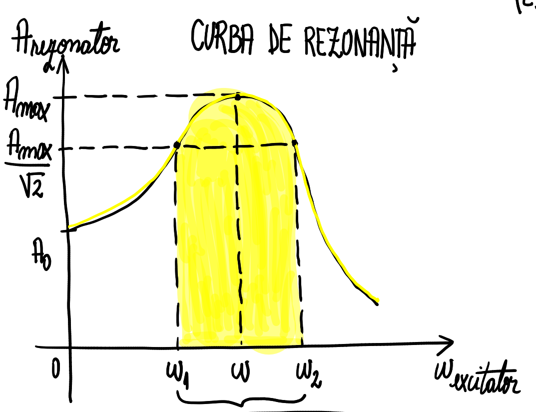
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} T \simeq T_0 \\ \nu \simeq \nu_0 \end{cases} \rightarrow A \rightarrow A_{max}(R) \Rightarrow \text{Rezonanță!}}$$

(E) (R)

Transfer maxim de energie de la (E) la (R)
Amplitudinea rezonatorului devine maximă

Pentru a măsura cantitativ rezonanța se reprezintă curba de rezonanță, adică graficul amplitudinilor rezonatorului (R) în funcție de frecvența impusă de excitator (ν) $\Rightarrow A(\nu)$
(E) (R)

CURBA DE REZONANȚĂ



BANDA DE TRECERE : $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$

$\Rightarrow$ Amplitudini semnificative : $A \in \left[\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}, A_{max}\right]$

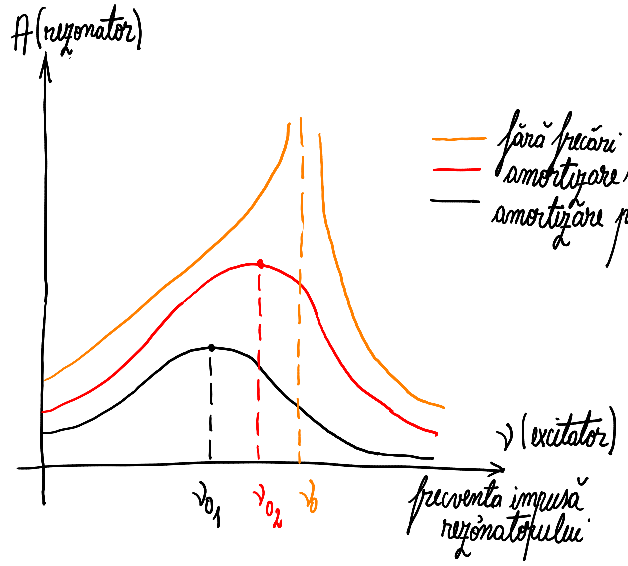
$\Rightarrow$ Rezonanță

BANDA DE TRECERE $\stackrel{def}{=}$ intervalul de pulsații ale excitatorului (E) pentru care amplitudinea rezonatorului (R) este semnificativă $A > \frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$

LĂRGIME DE BANDĂ $\stackrel{def}{=} \boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1}$

FACTOR DE CALITATE $\stackrel{def}{=} \boxed{Q = \frac{\omega_0}{(\omega_2 - \omega_1)}}$

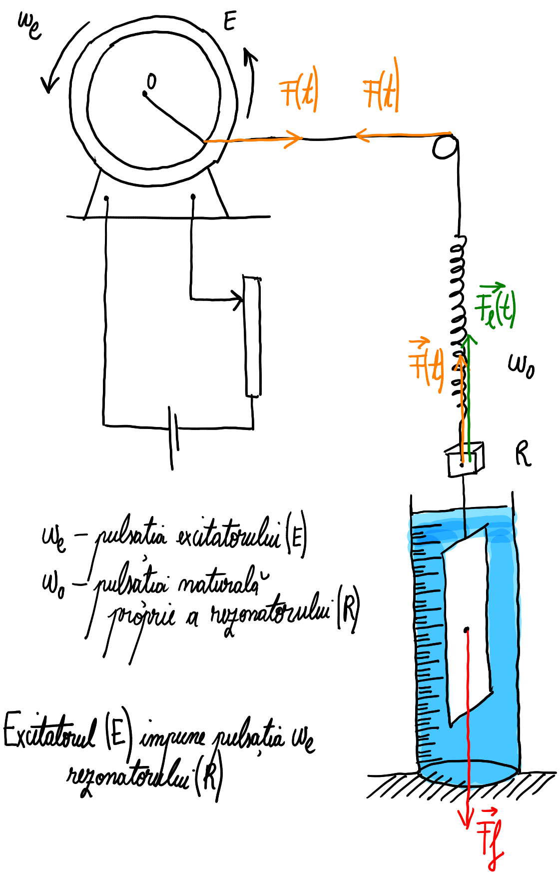
Obs $\Delta\omega \downarrow \Rightarrow Q \uparrow$



Asupra rezonatorului (R) acționează periodic excitatorul (E) prin intermediul unei forțe periodice $F(t) = F_{max} \sin(w_e t)$.

!Obs La fiecare oscilație a excitatorului (E) rezonatorul (R) mai primește o porție de energie din partea forței periodice $F(t)$.

REZONANȚA (analiză cantitativă)



w_e – pulsația excitatorului (E)

w_0 – pulsația naturală proprie a rezonatorului (R)

Excitatorul (E) impune pulsația w_e rezonatorului (R)

$$\begin{cases} F_e(t) = -K \cdot A \sin(w_e t) \\ F_f(t) = -C \cdot v = -C A w_e \cos(w_e t) \\ F(t) = F_{max} \sin(w_e t + \varphi_0) \end{cases}$$

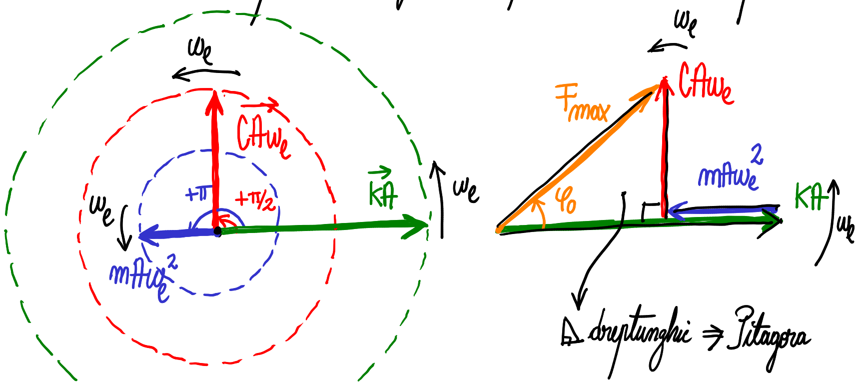
Principiul II: $\vec{F} + \vec{F_e} + \vec{F_f} = m\vec{a}$ (vectorial)

$$F - K \cdot x - Cv = ma$$

$$\Rightarrow \boxed{F = Kx + Cv + ma}$$

$$F_{max} \sin(w_e t + \varphi_0) = KA \sin(w_e t) + C A w_e \cos(w_e t) + m A w_e^2 \sin(w_e t)$$

Folosim reprezentarea fazorială pentru a studia amplitudinea A.



Δ dreptunghic ⇒ Pitagora

$$F_{max}^2 = (CAw_e)^2 + (KA - mAw_e^2)^2$$

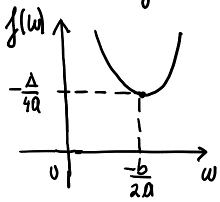
$$F_{max}^2 = A^2\left[C^2 w_e^2 + (K - mw_e^2)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{F_{max}}{\sqrt{(K - mw_e^2)^2 + C^2 w_e^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{F_{max}}{\sqrt{(K - mw_e^2)^2 + C^2 w_e^2}}}$$

Fie numitorul $\Rightarrow f(w_e^2) = C^2 w_e^2 + (K - mw_e^2)^2 = C^2 w_e^2 + K^2 - 2Kmw_e^2 + m^2 w_e^4$

Notăm $w = w_e^2 \Rightarrow f(w) = m^2 w^2 + (C^2 - 2Km)w + K^2$



$f(w)$ este o parabolă

$$\begin{cases} a = m^2 \\ b = C^2 - 2Km \\ c = K^2 \end{cases}$$

$f(w)$ prezintă un minim ⇒ A atinge un maxim pentru $w = \frac{-b}{2a} = -\frac{C^2 - 2Km}{2m^2} = \frac{2Km}{2m^2} - \frac{C^2}{2m^2}$

$$\Rightarrow w = \frac{K}{m} - \frac{C^2}{2m^2} \Rightarrow \boxed{w_e = w_{rez,A} = \sqrt{w_0^2 - 2\delta^2}}$$

$w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$; $\delta = \frac{C}{2m}$

$$\boxed{A = A_{max} \Leftrightarrow w_e = \sqrt{w_0^2 - 2\delta^2}}$$ pulsația de rezonanță a amplitudinilor

$$v = v_{max} = A\omega_e = \frac{F_{max}\,\omega_e}{\sqrt{(K-m\omega_e^2)^2 + C^2\omega_e^2}} = \frac{F_{max}}{\sqrt{\left(\frac{K}{\omega_e} - m\omega_e\right)^2 + C^2}}$$

Numitorul este minim pentru $\frac{K}{\omega_e} - m\omega_e = 0$ adică pentru $\omega_e = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0$

$\boxed{v = v_{max} \Leftrightarrow \omega_e = \omega_0}$ pulsația de rezonanță a vitezei

CONCLUZIE :

viteza, forța rezistivă, puterea transferată ating un maxim pentru $\boxed{\omega_e = \omega_0}$
amplitudinea, forța elastică ating un maxim pentru $\boxed{\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$

Am studiat amplitudinea A, acum studiem defazajul φ_0 dintre excitator (E) și rezonator (R).

$$F_{max}\sin(\omega_e t + \varphi_0) = KA\sin(\omega_e t) + CA\omega_e\cos(\omega_e t) + mA\omega_e^2\sin(\omega_e t)$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

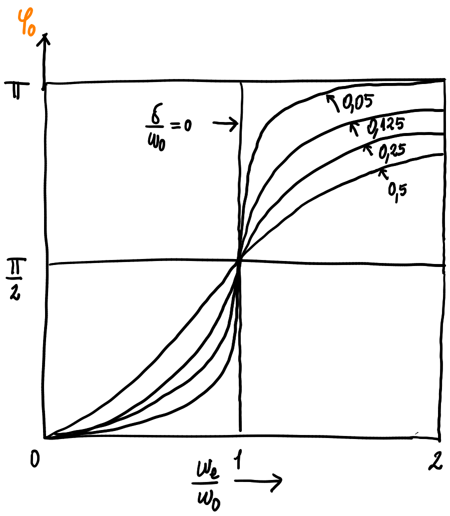
$$\Rightarrow F_{max}\sin(\omega_e t)\cos\varphi_0 + F_{max}\sin\varphi_0\cdot\cos(\omega_e t) = CA\omega_e\cos(\omega_e t) + \left[KA - mA\omega_e^2\right]\sin(\omega_e t)$$

dăm valori $\Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow \begin{cases}\sin(\omega_e t)=0\\ \cos(\omega_e t)=1\end{cases} \Rightarrow F_{max}\sin\varphi_0 = CA\omega_e \\ t=\frac{T}{4} \Rightarrow \begin{cases}\sin(\omega_e t)=1\\ \cos(\omega_e t)=0\end{cases} \Rightarrow F_{max}\cos\varphi_0 = KA - mA\omega_e^2 \end{cases}$

$$\div \quad \boxed{tg\,\varphi_0 = \frac{C\omega_e}{K - m\omega_e^2}}$$

$$\Rightarrow tg\,\varphi_0 = \frac{\frac{C}{m}\omega_e}{\frac{K}{m} - \omega_e^2}$$

$$\delta = \frac{C}{2m}\ ;\ \omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \boxed{tg\,\varphi_0 = \frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}}$$



CONCLUZIE:

Dacă pulsațiile ω_e sunt mici, diferența de fază φ_0 este aproape zero. (E) și (R) sunt în fază.
Dacă pulsațiile ω_e sunt mult mai mari decât ω_0, diferența de fază φ_0 este aproape π. (E) și (R) sunt opoziție de fază.
Cu cât frecările sunt mai mici, δ, cu atât tranziția de la regimul în fază la regimul în opoziție de fază este mai rapidă.

Obs $\begin{cases} \omega_e = \omega_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \\ \omega_e < \omega_0 \Rightarrow \varphi_0 \to 0 \text{ (E) și (R) tind să fie în fază} \\ \omega_e > \omega_0 \Rightarrow \varphi_0 \to \pi \text{ (E) și (R) tind să fie în opoziție de fază} \end{cases}$