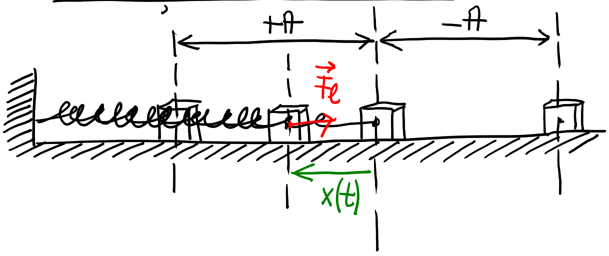
OSCILATORUL LINIAR ARMONIC CU FRECĂRI

OSCILAȚII FĂRĂ FRECĂRI

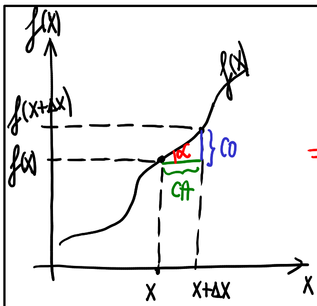


$F_f = 0$

Principiul II: $\vec{F_e} + \cancel{\vec{G} + \vec{N}} = m \cdot \vec{a}$ (MRUV)

$-k \cdot x = m \cdot a$

$\boxed{k \cdot x + m \cdot a = 0}$



DERIVATA UNEI FUNCȚII. SEMNIFICAȚIE

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$

$\Downarrow$

$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$

$v(t) = x'(t) = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = \dot{x}$

$a(t) = x''(t) = \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = \ddot{x}$

$F(t) = m \cdot a(t) = -m\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0)$

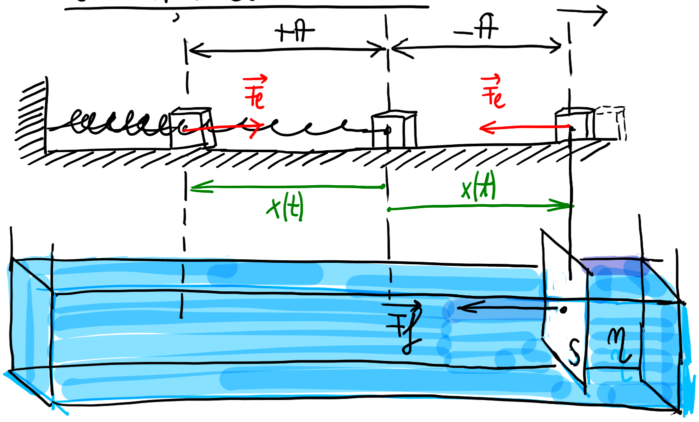
$F_e(t) = -k \cdot x(t)$

$\Rightarrow \boxed{kx + m\ddot{x} = 0}$ ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL II OMOGENĂ $\longrightarrow$

! Obs: Ecuații în care pe lângă variabila x apare și vitezele de variație ale lui x, adică derivatele lui x.

SOLUȚIE: $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)}$

OSCILAȚII CU FRECĂRI



La avansarea corpului cu viteza v, el trage după el o placă de suprafață (S) legată solidar care se mișcă într-o cuvă cu un lichid de vâscozitate (η).

Forța de frecare (F_f) este considerată direct proporțională cu viteza (v)

aproximație $\Rightarrow \boxed{F_f \sim v}$ $\quad \boxed{\vec{F_f} = -C \cdot \vec{v}}$

$v\uparrow \Rightarrow F_f\uparrow$

C = constantă

C depinde de geometria sistemului (de S)

C depinde de natura fluidului (de η)

$F_f = -C \cdot v$

Principiul II: $\vec{F_e} + \vec{F_f} + \cancel{\vec{G} + \vec{N}} = m \cdot \vec{a}$ (MRUV)

$-k \cdot x - Cv = m \cdot a$

$kx + Cv + m \cdot a = 0$

dar $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\dot{x}$

dar $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t}=\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2}=\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$ $\Rightarrow$ $\boxed{kx+c\cdot\dot{x}+m\cdot\ddot{x}=0}$

ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL II OMOGENĂ ÎN CARE APARE PE LÂNGĂ x ȘI VITEZA VARIAȚIEI LUI x ($\dot{x}$) ȘI VITEZA VARIAȚIEI VARIAȚIEI LUI x ($\ddot{x}$)

SOLUȚIE: $\boxed{x(t)=\underbrace{A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot t}}_{A(t)}\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)}$

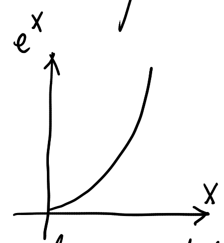
A(t) amplitudine variabilă în timp

amplitudinea scade exponențial în timp

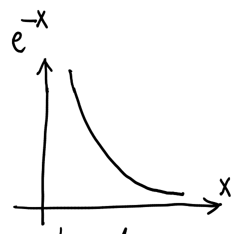
$$A(t)=\underbrace{A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}\cdot t}}=\underbrace{A_0\cdot e^{-\delta\cdot t}}$$

$\boxed{\delta=\frac{c}{2m}}$ δ = Coeficient de amortizare

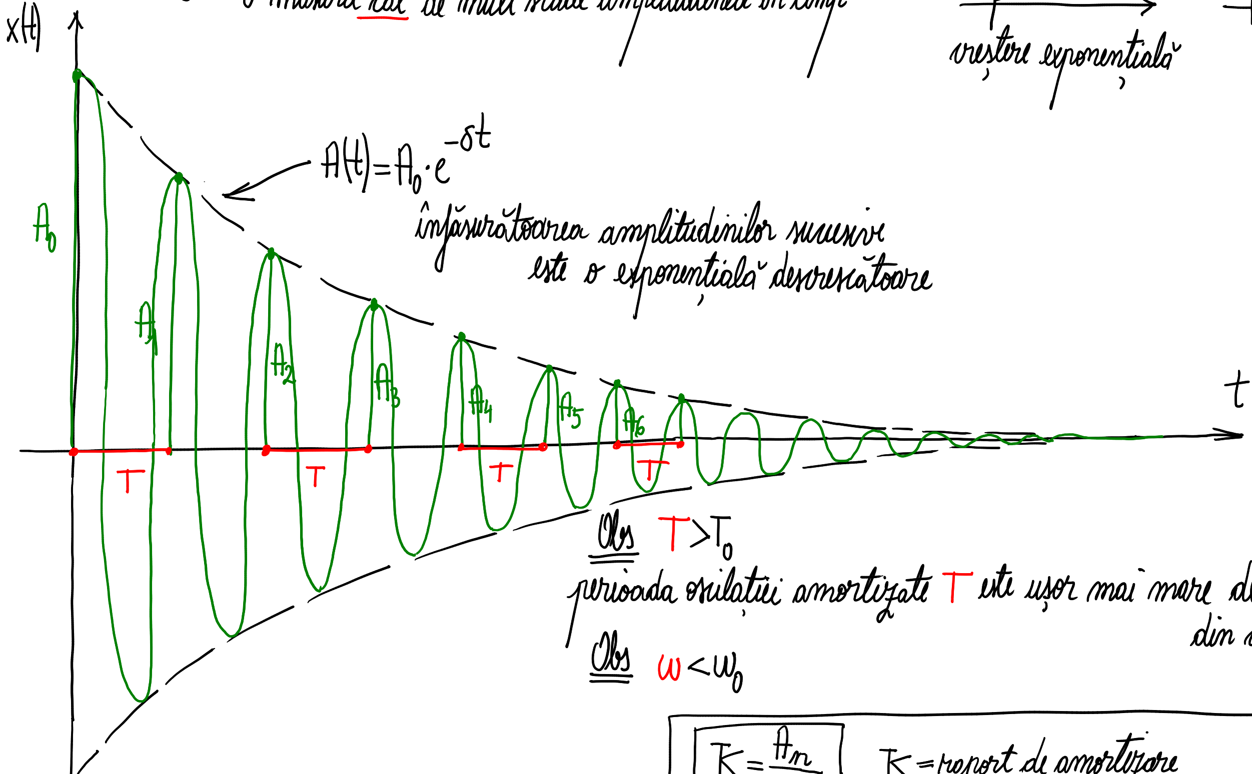
δ = o măsură cât de mult scade amplitudinea în timp



creștere exponențială



descreștere exponențială



Obs $T>T_0$

perioada oscilației amortizate T este ușor mai mare decât perioada proprie T_0 din cazul fără frecări

Obs $\omega<\omega_0$

$\boxed{A(t)=A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}t}}$

$t=0\Rightarrow A(t)=A_0$

$t=T\Rightarrow A(T)=A_1=A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}(T)}$

$t=2T\Rightarrow A(2T)=A_2=A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}(2T)}$

$t=3T\Rightarrow A(3T)=A_3=A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}(3T)}$

$t=4T\Rightarrow A(4T)=A_4=A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}(4T)}$

... ...

$t=(n-1)T\Rightarrow A(t)=A_{n-1}=A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}[(n-1)T]}$

$t=nT\Rightarrow A(t)=A_n=A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}[nT]}$

$\boxed{K=\frac{A_n}{A_{n-1}}}$ K = raport de amortizare

K = o măsură cât scad amplitudinile succesive

! Doar pentru frecările de tipul $\vec{F_f}=-c\cdot\vec{v}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow K=\frac{A_1}{A_0}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{A_3}{A_2}=\dots=\frac{A_n}{A_{n-1}}=\frac{A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}[nT]}}{A_0\cdot e^{-\frac{c}{2m}[(n-1)T]}}=e^{-\frac{c}{2m}\cdot T}=e^{-\delta\cdot T}$$

$$\Rightarrow \boxed{K=\frac{A_n}{A_{n-1}}=e^{-\delta T}}=\text{constant}$$

! Fie n oscilații. $\frac{A_n}{A_0}=\frac{A_1}{A_0}\cdot\frac{A_2}{A_1}\cdot\frac{A_3}{A_2}\cdot\frac{A_4}{A_3}\cdot\ldots\cdot\frac{A_{n-1}}{A_{n}}\cdot\frac{A_n}{A_{n-1}}$ $\Big|\ln(\,)$

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right)=\ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right)+\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)+\ln\left(\frac{A_3}{A_2}\right)+\dots+\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$$

$$\boxed{\delta=\frac{\ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right)}{nT}}\Leftarrow \ln\left(\frac{A_n}{A_0}\right)=(-\delta T)+(-\delta T)+\dots+(-\delta T)=-\delta(nT)$$