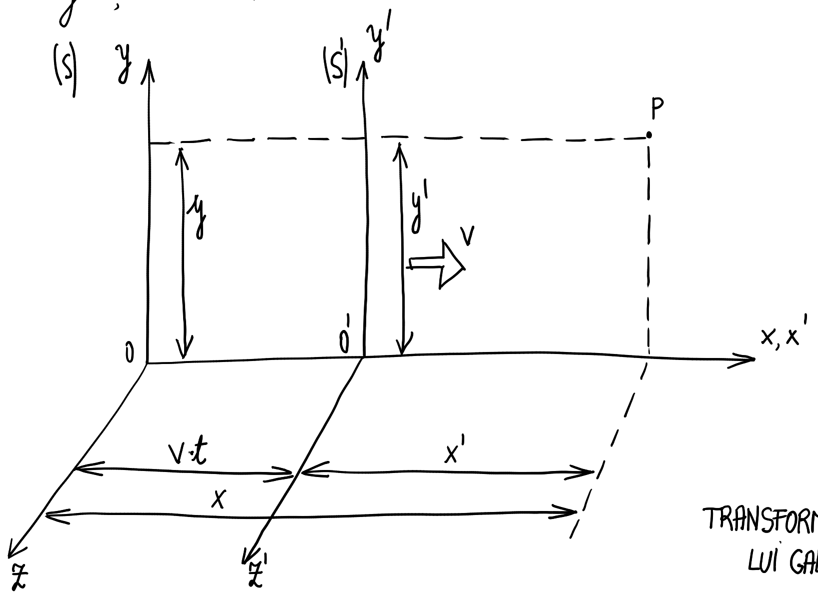
TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

RELATIVITATEA CLASICĂ

Relativitatea clasică se referă la fenomene mecanice raportate la sisteme de referință inerțiale (SRI) care se mișcă uniform. Sistemele de referință neinerțiale (SRNi) se mișcă accelerat.

Poziția unui punct material, viteza și traiectoria acestuia sunt relative, deoarece depind de sistemul de referință ales.



inițial : $0 \equiv 0'$

SRI fix $\Rightarrow (S)$

SRI mobil $\Rightarrow (S')$

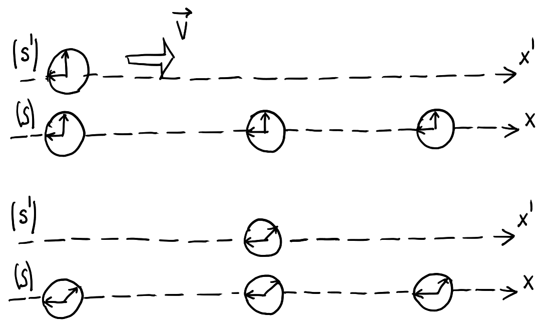
$V = v_{transport} \Rightarrow$ viteza lui (S') față de (S)

$v_x' = v_{relativă} \Rightarrow$ viteza lui P relativ la (S')

$v_x = v_{absolută} \Rightarrow$ viteza lui P relativ la (S)

TRANSFORMĂRILE LUI GALILEI

$$\begin{cases} x = x' + V \cdot t \\ y = y' \\ z = z' = 0 \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$



(S) (S')

$t = t'$

$$\Downarrow \frac{d(.)}{dt} \qquad\qquad \Downarrow \frac{d(.)}{dt}$$

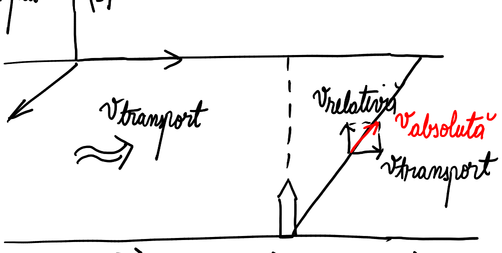
$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + V \qquad\qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V$$

LEGEA CLASICĂ A COMPUNERII VITEZELOR

$$\boxed{v_x = v_x' + V} \qquad\qquad v_x' = v_x - V$$

$$\boxed{v_{abs} = v_{rel} + v_{transport}}$$

Exemplu:



$$\vec{v}_{absolută} = \vec{v}_{relativă} + \vec{v}_{transport}$$

(S) (S') (S'-S)

$$\Downarrow \frac{d(.)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x'}{dt}}$$

$$\boxed{a = a'}$$

$\Rightarrow$ Legile mecanicii sunt aceleași în oricare SRI.

?

Există eterul?

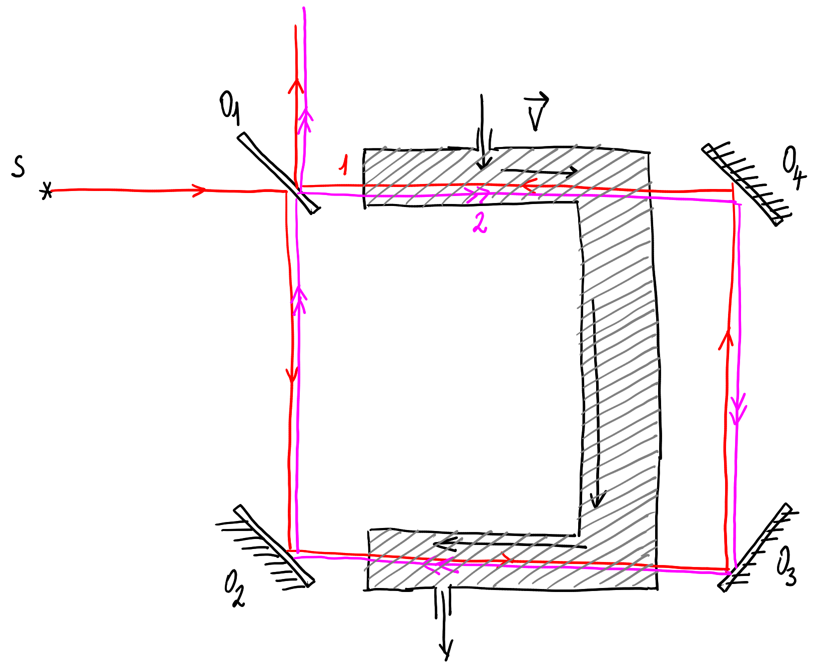
Unde elastice $\Rightarrow$ mediu elastic

Unde luminoase $\Rightarrow$ eter (?)

?

Viteza luminii se supune legii clasice a compunerii vitezelor?

EXPERIMENTUL FIZEAU



Viteza de propagare a luminii în raport cu lichidul este $c_1 = \frac{c}{n}$.

$\boxed{\text{Teoretic}}$: Diferența de timp între raza ① și raza ② este: $\Delta t = \frac{2l}{c_1 - v} - \frac{2l}{c_1 + v} = \frac{4lv}{c_1^2 - v^2} \underset{v \ll \frac{c}{n}}{\approx} \frac{4lv}{c_1^2}$

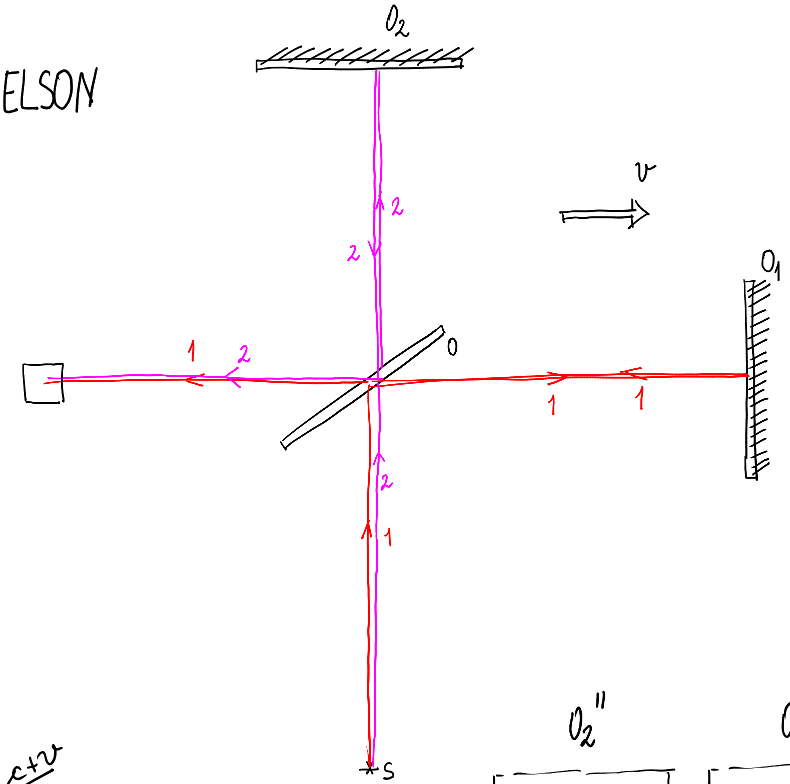
$$\Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \simeq 2\pi \frac{4lvn^2}{c^2 T} = 2\pi \frac{4lvn^2}{c \cdot \lambda} \text{, unde } \lambda = c \cdot T$$

$\boxed{\text{Practic}}$: Pe figura de interferență s-a observat că franjele nu s-au deplasat față de situația când lichidul nu mai curge ($v = 0$)

$\Rightarrow$ Ipoteza eterului nu a fost confirmată

$\Rightarrow$ Regula clasică de compunere a vitezelor în cazul luminii nu a fost confirmată.

EXPERIMENTUL MICHELSON



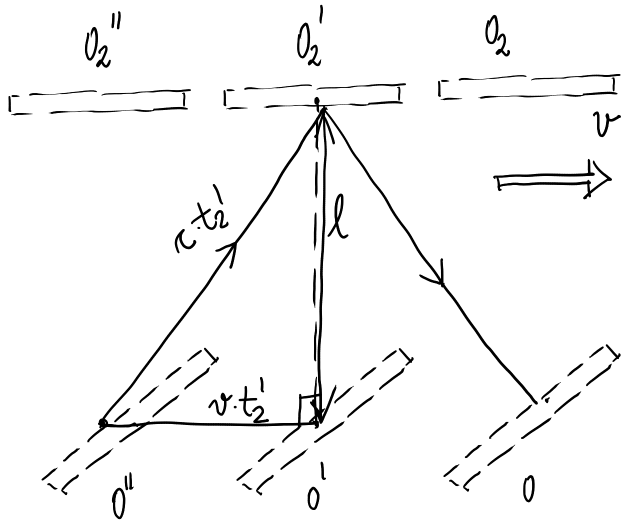
$t_1' = \dfrac{l}{c+v}$, $c+v$

$t_1'' = \dfrac{l}{c-v}$, $c-v$

$$t_1 = t_1' + t_1'' = \frac{\overset{c-v}{l}}{c+v} + \frac{\overset{c+v}{l}}{c-v}$$

$$t_1 = \frac{2lc}{c^2-v^2} = \frac{2l}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{2l}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$



$$(c\cdot t_2')^2 = l^2 + (v\cdot t_2')^2$$

$$t_2' = \frac{l}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{l}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 = 2\cdot t_2' = \frac{2l}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{t_2 = \frac{2l}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$\Delta t = t_1 - t_2$

$\Delta t \neq 0 \Rightarrow \Delta\varphi \neq 0 \Rightarrow$ fenomen de interferență cu interfranje defazate

$$\Delta t = \frac{2l}{c}\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$\Delta t \simeq \dfrac{l}{c}\cdot\dfrac{v^2}{c^2}$, $v \ll c$

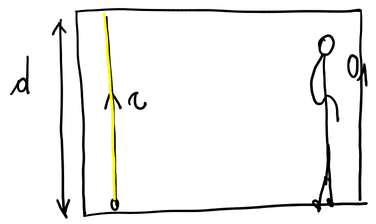
$\Delta t \neq 0$ (teoretic)

Practic $\Delta\varphi = 0$!! $\Rightarrow$ Ipoteza eterului nu a fost confirmată

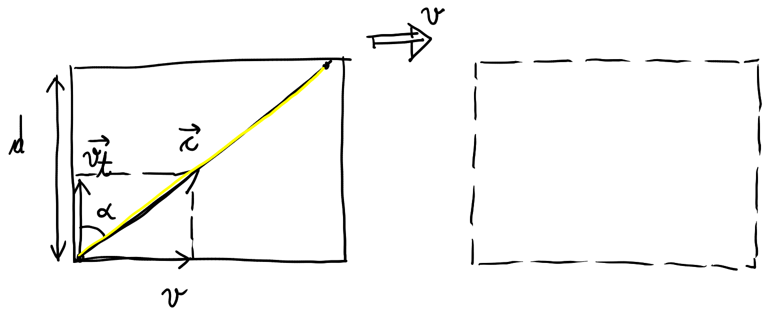
franje nedefazate $\Rightarrow$ Regula clasică de compunere a vitezelor în cazul luminii nu a fost confirmată

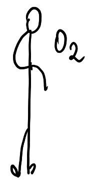
POSTULATELE TEORIEI RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

1. Legile fizicii sunt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale
2. Viteza de propagare a luminii în vid are aceeași valoare în toate direcțiile din toate sistemele de referință inerțiale, adică nu depinde de mișcarea sursei de lumină sau a observatorului.



$$t_1 = \frac{d}{c}$$





$$t_2 = \frac{v_t}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{IP} = \frac{v_t}{c} \Rightarrow v_t = c \cdot \cos\alpha$$

$$v_t = c \cdot \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \quad , \sin\alpha = \frac{CO}{IP} = \frac{v}{c}$$

$$v_t = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{d}{c} \qquad t_2 = \frac{d}{v_t} = \frac{d}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad v<c \Rightarrow \gamma>1$$

$$\Rightarrow \boxed{t_2 = \gamma t_1} \quad \text{unde } \gamma \overset{v<c}{>} 1$$

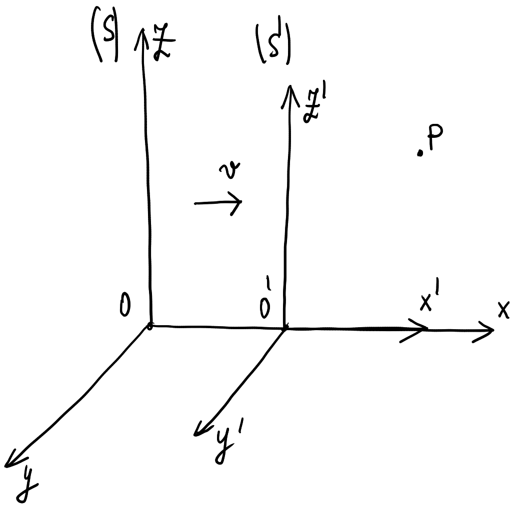
Pentru observatorul O_2 din sistemul de referință fix timpul este măsurat ca fiind mai mult timpul este dilatat de γ ori, unde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

! Observații

Cu cât $\boxed{v\uparrow \Rightarrow v_t\downarrow \Rightarrow t_2\uparrow}$

$$\boxed{v \to c \Rightarrow v_t \to 0 \Rightarrow t_2 \to \infty}$$

TRANSFORMĂRILE LORENTZ



- inițial $t=0$ $x=x'=0 \Rightarrow O=O'$
- S' se mișcă cu viteza v relativ la S
- $S' \to S$, transformarea de coordonate este liniară din cauza $\begin{cases} \text{omogenității și izotropiei spațiu-timpului} \\ \text{sistemelor de referință inerțiale} \end{cases}$
- viteza luminii este aceeași în toate sistemele de referință inerțiale
- considerăm mișcarea pe direcția x (analog mișcarea producându-se pe direcția y și z)

- Transformarea de coordonate din S în S' este o aplicație liniară

$$\boxed{x' = Ax + Bt} \qquad \boxed{t' = Cx + D\cdot t}$$

cu coeficienți necunoscuți A, B, C, D care pot depinde de v și c.

- Originea lui S' este $x'=0$. În sistemul de referință S, originea sistemului S' se mișcă cu $x = vt$.

$$\Rightarrow \quad 0 = x' = A\cdot(vt) + Bt \Rightarrow \boxed{B = -Av}$$

$$\Rightarrow \quad x' = A(x - vt)$$

- Un semnal luminos în sensul pozitiv al axei Ox în S dă $x = ct$. În sistemul de referință S' se observă $x' = c\cdot t'$. Înlocuind:

$$\Rightarrow \quad x' = A(ct - vt) = A(c-v)t$$

$$\Rightarrow \quad t' = C\cdot(ct) + Dt = (Cc + D)t$$

Deci pentru mișcarea semnalului luminos către dreapta (în sensul pozitiv al lui Ox)

$$\frac{x'}{t'} = c = \frac{A(c-v)\cancel{t}}{(Cc+D)\cancel{t}} \Rightarrow A(c-v) = c\,(Cc + D) \qquad (1)$$

Pentru semnalul luminos către stânga (în sensul negativ al axei Ox) în S, $x = -ct$. În sistemul de referință S' se observă $x' = -c\cdot t'$

$$\Rightarrow \quad x' = A\cdot(-ct - vt) = -A(c+v)t$$

$$\Rightarrow \quad t' = C\cdot(-ct) + Dt = (-Cc + D)t$$

$$\frac{x'}{t'} = -c = \frac{-A(c+v)}{(-Cc+D)} \Rightarrow -A(c+v) = -c\,(-Cc + D) \qquad (2)$$

$$\xRightarrow{(1)+(2)} \quad 2Ac = 2cD \Rightarrow \boxed{D = A}$$

$$\xRightarrow{(2)-(1)} \quad 2Av = -2Cc^2 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{Av}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = A(x - vt) \\ t' = -\frac{Av}{c^2} \cdot x + At \end{cases}$$

— $x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2$ *invarianța spațiu-timpului pentru orice eveniment*

Înlocuind x' *și* t' $\Rightarrow$ $\left[A(x - vt)\right]^2 - c^2 \cdot \left[-\frac{Av}{c^2} \cdot x + At\right]^2 = x^2 - c^2t^2$

$$A^2 \cdot (x^2 - 2xvt + v^2t^2) - c^2\left(\frac{A^2v^2}{c^4}x^2 + A^2t^2 - 2\frac{A^2vxt}{c^2}\right) = x^2 - c^2t^2$$

$$A^2x^2 - \cancel{2A^2xvt} + A^2v^2t^2 - \frac{A^2v^2x^2}{c^2} - c^2A^2t^2 + \cancel{2A^2vxt} = x^2 - c^2t^2$$

$$x^2 \cdot \left(A^2 - \frac{A^2v^2}{c^2}\right) + t^2\left(A^2v^2 - c^2A^2\right) = x^2 - c^2t^2$$

$$\Rightarrow \quad A^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$\boxed{A = \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$v \to 0 \Rightarrow A \to 1$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= Ax + Bt \Rightarrow x' = \gamma x - \gamma vt \Rightarrow \boxed{x' = \gamma(x - vt)} \\ t' &= Cx + Dt \Rightarrow t' = -\frac{\gamma v}{c^2} x + \gamma t \Rightarrow \boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)} \end{aligned} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

TRANSFORMĂRILE LORENTZ

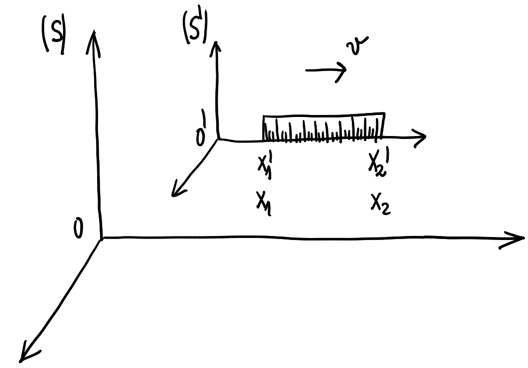
$$\boxed{x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad v \ll c \Rightarrow \boxed{x' = x - vt}$$

$$\boxed{t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \qquad v \ll c \Rightarrow \boxed{t' = t}$$

Pentru viteze mici obținem TRANSFORMĂRILE GALILEI

CONSECINȚELE TRANSFORMĂRILOR LORENTZ

1 CONTRACȚIA LUNGIMILOR



$$x_1' = \frac{x_1 - v t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad x_2' = \frac{x_2 - v \cdot t_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \boxed{t_1 = t_2}$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

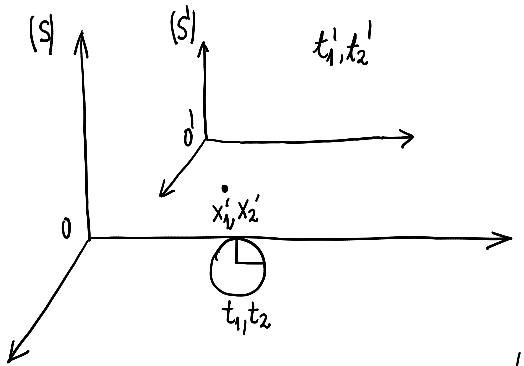
$l = x_2 - x_1 \ (S)$

$l_0 = x_2' - x_1' \ (S')$

$$\boxed{l = l_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1 \Rightarrow \underset{(S)\ (S')}{l < l_0} \Rightarrow$ Din sistemul de referință S obiectul este mai scurt față de lungimea observată din S'

2. DILATAREA DURATELOR



$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} \cdot x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t_0 = t_2' - t_1' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \cdot \Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

dar $x_2' = \dfrac{x_2 - v t_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_1' = \dfrac{x_1 - v t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$x_1' = x_2'$

$$0 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow x_2 - x_1 = v \cdot \Delta t$$

$$0 = \frac{\Delta x - v \cdot \Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \Delta x = v \cdot \Delta t$$

Înlocuind:

$$\Rightarrow \quad x_1' = x_2' \ , \quad \Delta t_0 = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}(v \cdot \Delta t)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} > 1$$

$\Delta t_0 < \Delta t$

Din sistemul de referință S timpul este mai mare față de timpul observat din S'

3. LEGEA COMPUNERII RELATIVISTE A VITEZELOR

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ dx' &= \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\}$$

$$x' + dx' = \frac{x + dx - v(t+dt)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\left.\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ dt' &= \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{dt - \frac{v}{c^2}dx}\Big\backslash dt = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

$$\boxed{u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2}\cdot u}}$$

$$v \ll c \Rightarrow u' = u - v$$

LEGEA CLASICĂ DE COMPUNERE A VITEZELOR

! Obs O confirmare a consecințelor transformărilor Lorentz a fost obținută la dezintegrarea spontană a mezonilor din radiația cosmică care intră în atmosfera Pământului.

ELEMENTE DE DINAMICĂ RELATIVISTĂ

Din ciocnirea elastică a două particule identice ținând cont de legea relativistică de compunere a vitezelor și respectând conservarea impulsului obținem masa și impulsul relativist.

$$\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad \boxed{p=\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}=v\frac{dm}{dt}+m\frac{dv}{dt}=v\frac{dm}{dt}+ma$$

Dacă $\frac{dm}{dt}=0$, când $m=$ const. atunci viteza particulelor ar crește nelimitat sub acțiunea forței F și ar depăși viteza luminii. $\Rightarrow$ Principiul II rescris dar relativist:

Principiul II $\boxed{F=\frac{d(mv)}{dt}}$, unde $\boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\approx 1+\frac{1}{2}x^2, \text{ unde } x\ll 1 \Rightarrow m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx m_0\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) \Big| \cdot c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{mc^2\approx m_0c^2+\frac{m_0v^2}{2}}$$

$$\boxed{E \simeq E_0 + E_c}$$

$$\boxed{E=mc^2}$$
$$\boxed{E_0=m_0c^2}$$
$$\boxed{\Delta E=c^2\Delta m}$$

$E=$ energia totală corespunzătoare masei de mișcare a particulei

$E_0=$ energia totală de repaus

$E_c=$ energia cinetică

$$\boxed{E_c=E-E_0}$$

Energia cinetică a unei particule reprezintă diferența dintre energia totală E și energia de repaus E_0

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\simeq 1+\frac{v^2}{2c^2}, \text{ când } v<c \text{ și } v^2\ll c^2$$

$$\Rightarrow E_c=E-E_0=mc^2-m_0c^2$$
$$=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\approx m_0c\left(1+\frac{v^2}{2c^2}-1\right)=\frac{m_0v^2}{2}$$

Alte relații utile:

$$\boxed{E_c=\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}-m_0c^2} \qquad \boxed{E^2=p^2c^2+E_0^2} \qquad \boxed{E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

EXERCIȚII

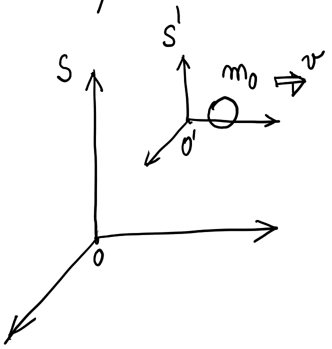
① Un atom de oxigen cu masa de repaus $m_0 = 16u$ $(1u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,Kg)$ se deplasează cu viteza $v = 0{,}6c$. Să se afle elementul care pare a fi văzut în mișcare din sistemul fix.

(S') $m_0 = 16u$

$u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,Kg$

$v = 0{,}6 \cdot c$

(S) $m = ?$



$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m = \frac{16u}{\sqrt{1-\frac{(0{,}6)^2c^2}{c^2}}}$$

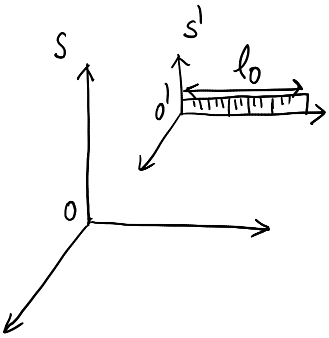
$$m = \frac{16u}{0{,}8} = \frac{160u}{8} = 20u \quad (\text{Neon})$$

② O navetă spațială cu lungimea proprie $l_0 = 80m$ se îndepărtează de Pământ cu viteza $v = 0{,}5c$. Să se afle ce lungime a navei măsoară un observator de la sol.

(S') $l_0 = 80m$

$v = 0{,}5c$

(S) $l = ?$



$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ (vezi contracția lungimilor consecință a Transformărilor Lorentz)

$$l = 80\sqrt{1-\frac{(0{,}5)^2c^2}{c^2}}$$

$$l = 80 \cdot \sqrt{\frac{75}{100}} = 8 \cdot 5\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$$

$$l = 69{,}28m$$

$$\begin{cases} l_0 = 80m \ (S') \\ l = 69{,}28m \ (S) \end{cases}$$

③ Alpha Centauri se află la distanța de 4 ani lumină de Pământ. O navă cosmică pornește de pe Pământ spre Alpha Centauri cu viteza $v=0{,}9\cdot c$. Să se afle distanța măsurată de un pasager al navei.

(S) $d = 4$ ani lumină

$v = 0{,}9c$

(S') $d' = ?$

$$d' = d\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$d = c\cdot t = 3\cdot 10^8\frac{m}{s}\cdot 4\cdot 365\cdot 24\cdot 3600 = 378432000\cdot 10^8\,m = 3{,}78\cdot 10^{16}\,m$$

$$d' = 3{,}78\cdot 10^{16}\cdot\sqrt{1-\frac{(0{,}9)^2 c^2}{c^2}}$$

$$d' = 3{,}78\cdot 10^{16}\cdot\sqrt{0{,}19}$$

$$\Rightarrow d' = 1{,}64\cdot 10^{16}\,m$$

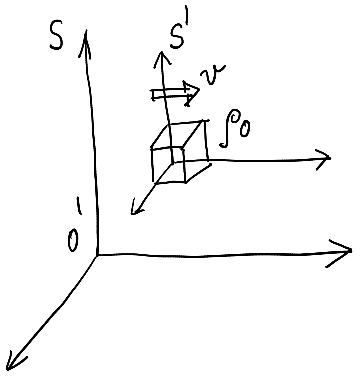
$\Rightarrow d' = 1{,}74$ ani lumină

④ Un cub cu densitatea $\rho_0 = 2700\frac{kg}{m^3}$ în sistemul de referință propriu se deplasează cu viteza $v=0{,}4c$ față de un sistem fix. Să se afle densitatea cubului măsurată de observatorul aflat în sistemul de referință inerțial aflat în mișcare.

(S') $\rho_0 = 2700\frac{kg}{m^3}$

$v = 0{,}4c$

(S) $\rho = ?$



(S) $\rho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{m_0}{S\cdot l_0}$ (1)

(S) $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}{S\cdot l}$ (2)

$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ (3)

Raportând $\frac{(1)}{(2)}$ și folosind (3) $\Rightarrow$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\left(\frac{\cancel{m_0}}{\cancel{S\cdot l_0}}\right)}{\left(\frac{\frac{\cancel{m_0}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\cancel{S\cdot l_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

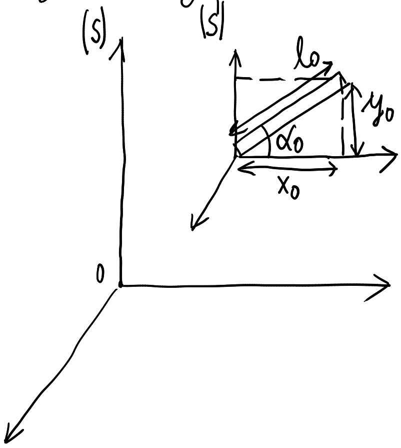
$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{2700}{\left[1-\frac{(0{,}4)^2c^2}{c^2}\right]} = 3214{,}3\,\frac{kg}{m^3}$$

(5) O riglă cu lungimea proprie $l_0 = 1m$ este înclinată față de axa Ox a sistemului de referință propriu cu unghiul $\alpha_0 = 30°$. Sub ce unghi se vede rigla dintr-un referențial care se deplasează cu viteza $v = 2c/3$ după direcția axei Ox și ce lungime are rigla?

$(S')\begin{cases} l_0 = 1m \\ \alpha_0 = 30° \end{cases}$

$(S)\begin{cases} l = ? \\ \alpha = ? \end{cases}$

$v = 2c/3$



$l_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ $\quad tg\alpha_0 = \frac{y_0}{x_0}$

$l = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad tg\alpha = \frac{y}{x}$

$\begin{cases} y = y_0 \\ x = x_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{cases}$, contracția lungimilor pe Ox

$$\Rightarrow l = \sqrt{x_0^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + y_0^2}$$

$\cos\alpha_0 = \frac{x_0}{l_0} \Rightarrow x_0 = l_0\cos\alpha_0$

$\sin\alpha_0 = \frac{y_0}{l_0} \Rightarrow y_0 = l_0\sin\alpha_0$

$$\longrightarrow \boxed{l = \sqrt{l_0^2\cos^2\alpha_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + l_0^2\sin^2\alpha_0}}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{y_0}{x_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$\Rightarrow l = 0{,}816m$

$tg\alpha \cong 0{,}77 \Rightarrow \alpha \simeq 37{,}76°$

(6) Cea mai apropiată galaxie de Pământ este Proxima Centauri și se află la o distanță de 2 milioane de ani lumină. Să se afle timpul după care ar trebui să ajungem în această galaxie dacă ne-am deplasa cu o navetă cosmică cu viteza $v = 0{,}99c$. Să se afle viteza cu care ar trebui să ne deplasăm ca să ajungem în această galaxie în 28 de ani.

a) $d = d_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{d_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v} \approx 2{,}84 \cdot 10^6 \text{ ani!}$$

b) $\Delta t = 28$ ani

$v = ?$

$$\Delta t = \frac{d_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}$$

$$\Delta t^2 = \frac{d_0^2}{v^2}\cdot\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Delta t^2 = \frac{d_0^2}{v^2} - \frac{d_0^2}{c^2}$$

$$\frac{d_0^2}{v^2} = \Delta t^2 + \frac{d_0^2}{c^2}$$

$$\frac{v^2}{d_0^2} = \frac{1}{\Delta t^2 + \frac{d_0^2}{c^2}}$$

$$v = \frac{d_0}{\sqrt{\Delta t^2 + \frac{d_0^2}{c^2}}} \cong 0{,}9998 \cdot c = 2{,}9994 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

(7) Să se afle viteza cu care se deplasează un fascicul de electroni monoenergetici cu energia cinetică $E_c = 4 \cdot 10^{-14}$ J

electroni nerelativiști $\Rightarrow$ $E_c = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} \approx 2{,}98 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ dar v se apropie de c!

$$\boxed{E_c = E - E_0}$$

$$E_c = mc^2 - m_0c^2$$

$$E_c = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2 - m_0c^2$$

$$\Rightarrow E_c + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Big| \cdot \frac{1}{m_0c^2}$$

$$\frac{E_c}{m_0c^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Big| \cdot (\,)^{-1}$$

$$\frac{1}{1+\frac{E_c}{m_0c^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Big| (\,)^2$$

$$\frac{1}{\frac{(E_c+m_0c^2)^2}{m_0^2c^4}} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2c^4}{(E_c+m_0c^2)^2}$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2c^4}{(E_c+m_0c^2)^2}}$$

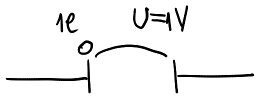
$$v = c\sqrt{\frac{E_c^2 + 2E_cm_0c^2 + \cancel{m_0^2c^4} - \cancel{m_0^2c^4}}{E_c+m_0c^2}}$$

$$\boxed{v = \frac{c\sqrt{E_c(E_c+2m_0c^2)}}{E_c+m_0c^2}}$$

$$v \simeq 2{,}21 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

(8) Să se afle viteza imprimată unui electron cu sarcina $1e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,C$ și masa de repaus $m_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}\,kg$, dacă acesta este accelerat din repaus sub o tensiune $U = 10^6\,V$.

! Obs



$$L = \quad = 1e\cdot 1V = 1eV$$
$$= 1{,}6\cdot10^{-19}\,C\cdot 1V$$

$$\Rightarrow 1eV = 1{,}6\cdot10^{-19}\,J$$

$$\boxed{L = E - E_0}$$

$$\boxed{eU = mc^2 - m_0c^2}$$

$$\boxed{eU = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2}$$

$$\Rightarrow eU + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0c^2}{eU+m_0c^2} \quad \Big|\,(\,)^2$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0^2c^4}{(eU+m_0c^2)^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2c^4}{(eU+m_0c^2)^2}$$

$$v = c\sqrt{1-\frac{m_0^2c^4}{(eU+m_0c^2)^2}}$$

$$v = \frac{c}{eU+m_0c^2}\cdot\sqrt{e^2U^2+2m_0c^2eU+\cancel{m_0^2c^4}-\cancel{m_0^2c^4}}$$

$$\boxed{v = \frac{c\cdot\sqrt{e^2U^2+2eUm_0c^2}}{eU+m_0c^2}} \approx 2{,}82\cdot10^8\,\frac{m}{s}$$

(9) Un proton cu masa de repaus $m_0 = 1,66\cdot10^{-27}$ Kg și energia $E_c = 25$ GeV traversează o galaxie al cărei diametru este de 10^5 ani lumină. Să se afle timpul de traversare indicat de un ceas legat de proton și impulsul protonului.

$m_0 = 1,66\cdot10^{-27}$ Kg

$E_c = 25$ GeV

$d = 10^5$ ani lumină

$\Delta t_0 = ?$

$p_0 = ?$

$$E_c = E - E_0$$

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

$$E_c + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{E_c + m_0 c^2} \qquad v = \frac{c\sqrt{E_c(E_c+2m_0c^2)}}{E_c + m_0 c^2}$$

Dilatarea timpului:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_0 = \Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t > \Delta t_0 \qquad \Delta t_0 = \frac{d}{v}\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\boxed{\Delta t_0 = \frac{d}{v}\cdot\frac{m_0 c^2}{E_c + m_0 c^2}} \approx 3610 \text{ ani}$$

$$p = m\cdot v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{c\sqrt{E_c(E_c+2m_0c^2)}}{E_c+m_0c^2}$$

$$= \frac{\cancel{m_0}}{\frac{\cancel{m_0}c^2}{\cancel{E_c+m_0c^2}}}\cdot\frac{c\sqrt{E_c(E_c+2m_0c^2)}}{\cancel{E_c+m_0c^2}}$$

$$= \frac{1}{c}\cdot\sqrt{E_c(E_c+2m_0c^2)} \approx 1,38\cdot10^{-17}\ \text{Ns}$$

(10) Un proton relativist cu masa de repaus $m_0 = 1,66 \cdot 10^{-27} Kg$ are impulsul $p = 10^{-18} Ns$. Să se afle energia totală a protonului.

$m_0 = 1,66 \cdot 10^{-27} Kg$
$p = 10^{-18} Ns$

$E = ?$

$$E = mc^2$$

$$\begin{cases} E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ p = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v \end{cases}$$

$$\div \Rightarrow \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}$$

$$v = \frac{pc^2}{E}$$

$$\Rightarrow E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2 c^4}{E^2 c^2}}}$$

$$E\sqrt{1 - \frac{p^2 c^2}{E^2}} = m_0 c^2$$

$$\sqrt{E^2 - p^2 c^2} = m_0 c^2$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$\boxed{E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}} \approx 3,35 \cdot 10^{-10} J$$