

MISCARA RECTILINIE UNIFORM VARIATA (M.R.U.V.)

EXERCITII

$a = \text{const}$

$v \neq \text{const} \rightarrow \text{VITEZA VARIAZĂ UNIFORM}$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{a \cdot (t - t_0)^2}{2}$$

LEGEA MISCARII RECTILINIUII
UNIFORM VARIATE

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

LEGEA VARIATIEI
VITEZEI

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2}$$

VITEZA MEDIE
IN MRUV.

$$v^2(x) = v^2(x_0) + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

FORMULA LUI
GAULEI

① Legea de mișcare a unui mobil este $x(t) = 3 + 5t - 2t^2$. Sa se afle:

a) ecuația vitezei și să se reprezinte grafic

$$x(t) = 3 + 5t - 2t^2$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= 3 \text{ m} \\ v_0 &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a &= -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

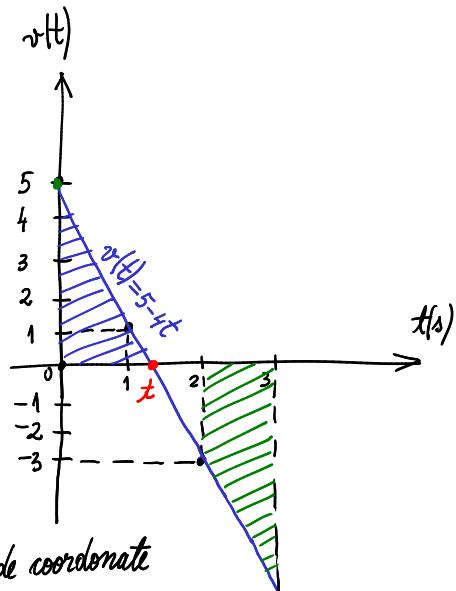
$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$\boxed{v(t) = 5 - 4t}$$

$$v(0) = 5$$

$$v(1) = 1$$

$$v(2) = -3$$



b) acă reprezintă fizic intersecțiile curbei vitezei cu axele de coordonate

Intersecția dreptei graficului vitezei $v(t)$ cu axa OY este punctul $(0, 5)$ $\xrightarrow{\text{reprezintă}}$ momentul initial și viteza initială
Intersecția dreptei graficului vitezei $v(t)$ cu axa OX este punctul $(\frac{5}{4}, 0)$ $\xrightarrow{\text{reprezintă}}$ momentul când viteza devine zero

$$v(t) = 5 - 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{4} \text{ s}$$

c) acă reprezintă fizic aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și axa vitezei

Aria hășurată cu albastru reprezintă distanța parcursă de mobil în timpul t în care viteza scade de la $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ la $0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$A_D = d = \frac{v_0 \cdot t_0}{2} = \frac{5 \cdot \frac{5}{4}}{2} = 3,125 \text{ m}$$

d) distanța parcursă în a treia secundă de la începutul mișcării

$$t \in (2, 3)$$

Aria hășurată cu verde reprezintă distanța parcursă de mobil în intervalul de timp $t \in (2, 3)$

$$A_I = \frac{(b+B) \cdot h}{2} = \frac{v(2) + v(3)}{2} \cdot (3s - 2s)$$

$$= \frac{3+4}{2} \cdot 1 = 5 \text{ m}$$

(2) Un mobil se mișcă uniform variat din originea axei Ox cu viteză initială $v_0 = 20 \text{ m/s}$ la $t_0 = 0$. Prin punctul de abscisă $x = 150 \text{ m}$ mobilul trcește la momentul t cu viteză $v = -10 \text{ m/s}$. În ce fel:

a) acceleratia mobilului:

$$v_0 = 20 \text{ m/s}, x_0 = 0 \text{ m}$$

$$v = -10 \text{ m/s}, x = 150 \text{ m}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0) \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(-10)^2 - 20^2}{2 \cdot (150 - 0)} = \frac{-300}{300} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) momentul de timp la care mobilul trcește prin punctul de coordonată x

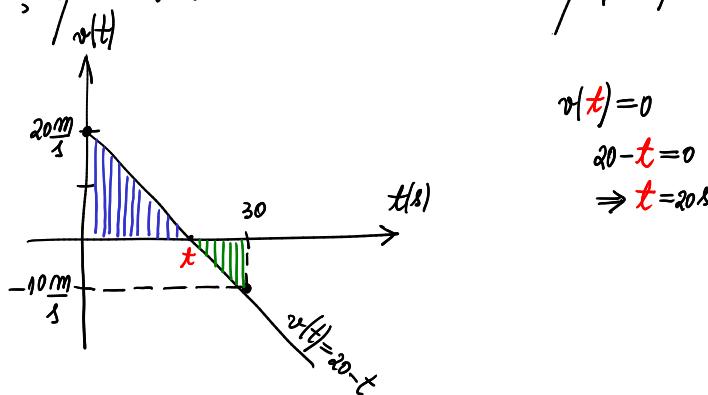
$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{-10 - 20}{-1} = 30 \text{ s}$$

c) viteză medie a mobilului în intervalul de timp $(0, t)$

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{20 + (-10)}{2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d) distanță parcursă de mobil în intervalul de timp $(0, 30 \text{ s})$



$$\begin{aligned} v(t) &= 0 \\ 20 - t &= 0 \\ \Rightarrow t &= 20 \text{ s} \end{aligned}$$

distanță parcursă în sensul pozitiv al axei Ox este $d = A_{\Delta} = \frac{C_1 C_2}{2} = \frac{20 \cdot 20}{2} = 200 \text{ m}$. Apoi mobilul se oprește.
distanță parcursă în sensul negativ al axei Ox este $d = A_{\nabla} = \frac{C_1 \cdot C_2}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ m}$

e) viteză în modul mediu a mobilului în intervalul de timp $(0, 30 \text{ s})$

$$v_m = \frac{|v_{total}|}{t_{total}} = \frac{250 \text{ m}}{30 \text{ s}} = 8,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

f) viteză medie a mobilului în intervalul de timp $(0, 30 \text{ s})$

$$v_m = \frac{x_f - x_i}{t} = \frac{150 \text{ m}}{30 \text{ s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- 3) Un automobil pornind din repaus, $v_0 = 0 \frac{m}{s}$, atinge în mișcare uniform accelerată viteză $v_1 = 18 \frac{km}{h}$ după ce a parcurs $d_1 = 10m$. Se cere astfel:

a) timpul după care automobilelul atinge la v_1

$$v_1 = 18 \frac{km}{h} = 18 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 5 \frac{m}{s}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2 \cdot (x_1 - x_0) \cdot a \quad | \text{ Galileo}$$

$$\Rightarrow a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2 \cdot d_1} = \frac{5^2 - 0^2}{2 \cdot 10} = 1,25 \frac{m}{s^2}$$

$$v_1 = v_0 + a \cdot t \quad (\text{legea variației vitezei})$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_1 - v_0}{a} = \frac{5 - 0}{1,25} = 4s$$

b) distanță parcursă din momentul pornirii pînă în momentul în care a atins $v_2 = 42 \frac{km}{h}$

$$v_2 = 42 \frac{km}{h} = \frac{42 \cdot 1000m}{3600s} = 20 \frac{m}{s}$$

$$v_2^2 = v_0^2 + 2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot a$$

$$\Rightarrow x_2 - x_0 = \frac{v_2^2 - v_0^2}{2a}$$

$$d_2 = \frac{20^2 - 0^2}{2 \cdot 1,25} = 160m$$

c) viteză medie a automobilelui după ce acesta parcurge distanța $d_3 = 40m$

$$v_m = \frac{v_0 + v_3}{2}$$

$$v_3^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x_3 - x_0)$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a \cdot d_3}}{2} = \frac{\sqrt{2ad_3}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 1,25 \cdot 40}}{2} = 5 \frac{m}{s}$$

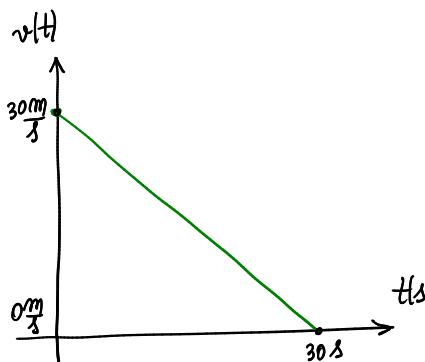
(4) Un tren electric se mișă cu viteză $v_0 = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. În urma unei pere de curenț electric, trenul se oprește într-un interval de timp $\Delta t = 30\text{s}$. Să se afle:

- accelerația trenului
- distanța parcursă
- viteză medie până la oprire

$$v_0 = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 108 \cdot \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta t = 30\text{s}$$

- $a = ?$
- $d = ?$
- $v_m = ?$



$$a) a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{30\text{s}} = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$b) d = \bar{v} \cdot \Delta t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \Delta t = \frac{30 + 0}{2} \cdot 30 = 450 \text{ m}$$

$$c) v_m = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{0 + 30}{2} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

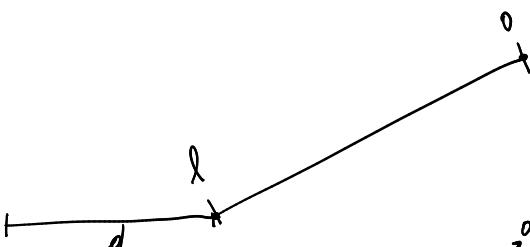
(5) O sare roboară liber uniform accelerat pe un deal cu lungimea $l = 60\text{m}$ într-un timp $t = 10\text{s}$.
Să se afle:

- accelerația cu care roboara sare dealul
- viteză pe care o are sarea la baza dealului
- distanța parcursă în vîrfului inertiei, dacă mișcarea sarei se continuă pe un plan orizontal cu acelerație $a_1 = -g \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$l = 60\text{m}$$

$$t = 10\text{s}$$

- $a = ?$
- $v = ?$
- $d = ?$



$$a) x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

$$l = \frac{a t^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2l}{t^2} = \frac{2 \cdot 60}{10^2} = 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$b) v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$v = a \cdot t = 1,2 \cdot 10 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c) v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a_1 \cdot d$$

$$\Rightarrow d = \frac{v^2 - v_0^2}{2 a_1} = \frac{-12^2}{2 \cdot (-g)} = 8\text{m}$$

(6)

Un mobil porneste uniform accelerat cu viteza initiala $v_0 = 4 \text{ m/s}$ si ajunge in punctul de absisa $x = 400 \text{ m}$ dupa un timp $t = 40 \text{ s}$.
Sa se afle:

- accelerarea mobilului
- viteza mobilului la momentul de timp t
- viteza medie cand mobilul se afla in punctul de absisa $x_1 = 93,75 \text{ m}$

$$v_0 = 4 \text{ m/s}$$

$$x = 400 \text{ m}$$

$$t = 40 \text{ s}$$

$$\text{a) } a = ?$$

$$\text{b) } v = ?$$

$$\text{c) } v_m = ?, x_1 = 93,75 \text{ m}$$

$$\text{a) } x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

$$x = v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{(x - v_0 t) \cdot 2}{t^2} = \frac{(400 - 4 \cdot 40) \cdot 2}{40^2} = 0,3 \text{ m/s}^2$$

$$\text{b) } v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$v = 4 + 0,3 \cdot 40 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{c) } v_m = \frac{v_0 + v_1}{2}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x_1}}{2} = \frac{4 + \sqrt{4^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 93,75}}{2} = 6,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

7) În urma străpungorii unui blindaj, viteza unui proiectil mărește de la valoarea $v_0 = 500 \text{ m/s}$ la valoarea $v = 300 \text{ m/s}$, dacă grosimea stratului de blindaj este $d = 0,2 \text{ m}$. Se cere să se calculeze:

- acceleratia cu care se mișcă proiectilul în blindaj
- tempul în care proiectilul va străpunge blindajul
- grosimea maximă a stratului de blindaj pe care-l poate străpunge proiectilul

$$v_0 = 500 \text{ m/s}$$

$$v = 300 \text{ m/s}$$

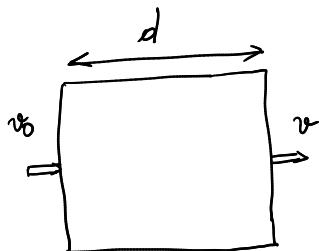
$$d = 0,2 \text{ m}$$

a) $a = ?$

b) $t = ?$

c) $D = ?$

a)



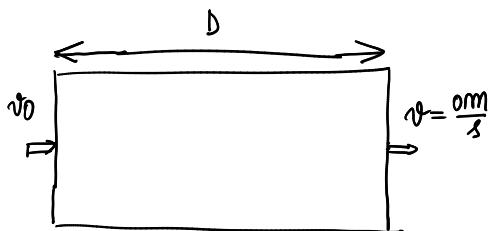
$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot d$$

$$\Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2d} = \frac{300^2 - 500^2}{2 \cdot 0,2} = -400000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

b) $v = v_0 + a \cdot t$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{300 - 500}{-400000} = 0,0005 \text{ s} = 0,5 \text{ ms}$$

c)



$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot D$$

$$\Rightarrow D = \frac{-v^2}{2a} = \frac{-500^2}{2 \cdot (-400000)} = 0,3125 \text{ m}$$

$$D = 31,25 \text{ cm}$$

- 8) Un corp trănește uniform cu acelărță $a = -0,5 \text{ m/s}^2$ pornind la momentul initial cu viteză $v_0 = 10 \text{ m/s}$.
 Să se afle:
 a) distanța parcursă de corp pînă la oprire și timpul după care se oprește acesta
 b) distanța parcursă de la $t=5\text{s}$ de la începerea mișcării
 c) distanța parcursă de corp în a patra secundă de la începerea mișcării

$$a = -0,5 \text{ m/s}^2$$

$$v_0 = 10 \text{ m/s}$$

a) $d_{op} = ?$

b) $d = ?, \Delta t = 5\text{s}$

c) $d = ?, t \in (3,4)\text{s}$

a) $v(t) = v_0 + a \cdot t$

$$\boxed{v = 10 - 0,5t}$$

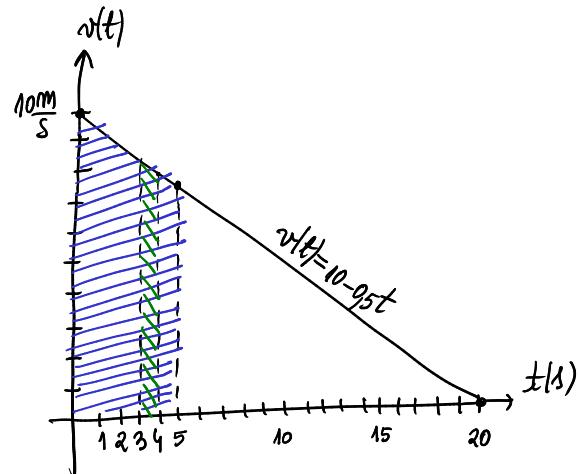
$$v(0) = 10$$

$$v(2) = 9$$

$$v(4) = 8$$

$$v(6) = 7$$

$$v(20) = 0$$



(soluție) Galilei: $x^0 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot d_{op}$

$$d_{op} = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-10^2}{2 \cdot (-0,5)} = 100 \text{ m}$$

$$d_{op} = \bar{d}_{\Delta} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{10 \cdot 20}{2} = 100 \text{ m}$$

b) $v(5) = 10 - 0,5 \cdot 5 = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$\underline{d} = \bar{d}_{\Delta} = \frac{v(0) + v(5)}{2} \cdot \Delta t = \frac{10 + 7,5}{2} \cdot 5 = 43,75 \text{ m}$$

(soluție) $d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(7,5)^2 - (10)^2}{2 \cdot (-0,5)} = 43,75 \text{ m}$

c) $v(3) = 10 - 0,5 \cdot 3 = 8,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$v(4) = 10 - 0,5 \cdot 4 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\underline{d} = \bar{d}_{\Delta} = \frac{v(3) + v(4)}{2} \cdot 1s = \frac{8,5 + 8}{2} \cdot 1 = 8,25 \text{ m}$$

(soluție) $d = \frac{v^2(4) - v^2(3)}{2a} = \frac{8^2 - 8,5^2}{2 \cdot (-0,5)} = 8,25 \text{ m}$

- 9) Metroul parcurge distanță dintre două stații successive în timpul $t = 2\text{ min}$. Dacă acceleratia initială este egală cu modulul accelerării finale, $a = 1\text{ m/s}^2$ și viteza maximă la care ajunge trenul este $v_{\max} = 108\frac{\text{km}}{\text{h}}$ să se afle:
- distanța pe care acelerață trenul
 - distanța parcursă de metrou în mod uniform
 - distanța dintre cele două stații

$$t = 2\text{ min}$$

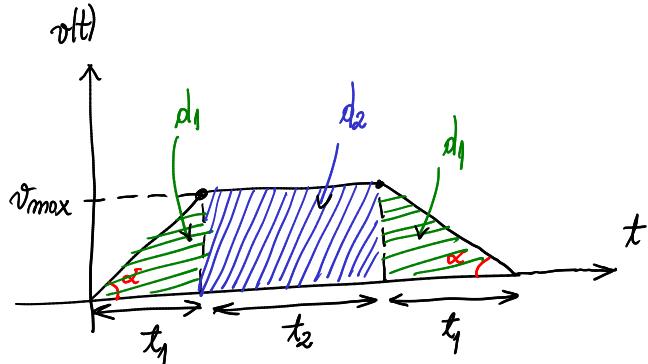
$$a = 1\text{ m/s}^2$$

$$v_{\max} = 108\frac{\text{km}}{\text{h}} = 108 \cdot \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 30\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) $d_1 = ?$

b) $d_2 = ?$

c) $d = ?$



$$d_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 = \frac{c_1 c_2}{2} = \frac{v_{\max} \cdot t_1}{2}$$

$$d_2 = v_{\max} \cdot t_2$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{\max} - 0}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{v_{\max}}{a} = \frac{30\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 30\text{s}$$

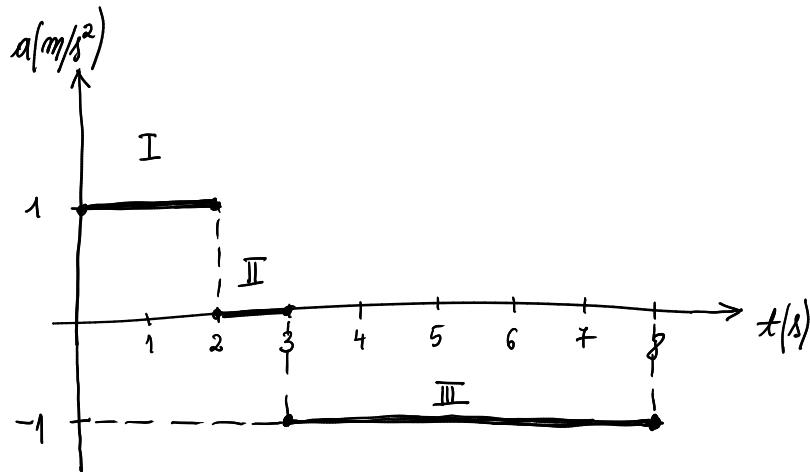
$$\Rightarrow d_1 = \frac{30 \cdot 30}{2} = 450\text{m}$$

$$d_2 = v_{\max} \cdot (t - 2t_1) = 30 \cdot (120 - 2 \cdot 30) = 1800\text{m}$$

$$d = d_1 + d_2 = 450 + 1800 = 2250\text{m}$$

10) Graficul din figura alăturată reprezintă dependența accelerării unui mobil care pornește din repaus. Se poate afirma:

- dependența vitezei în funcție de timp pe întreg parcursul mișării
- coordonata finală a mobilului
- distanța parcursă de mobil în decursul mișării



a)

$$\text{I: } a_I = 1 \text{ m/s}^2$$

$$v_I(t) = v_0 + a_I \cdot t$$

$$v_I(1) = t$$

$$v_I(1) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_I(2) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{II: } a_{II} = 0 \text{ m/s}^2$$

$$v_{II} = \text{const} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta t = 1\text{s}$$

$$\text{III: } a_{III} = -1 \text{ m/s}^2$$

$$v_{III}(t) = v_0 + a_{III}(t-t_0)$$

$$v_{III}(3) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

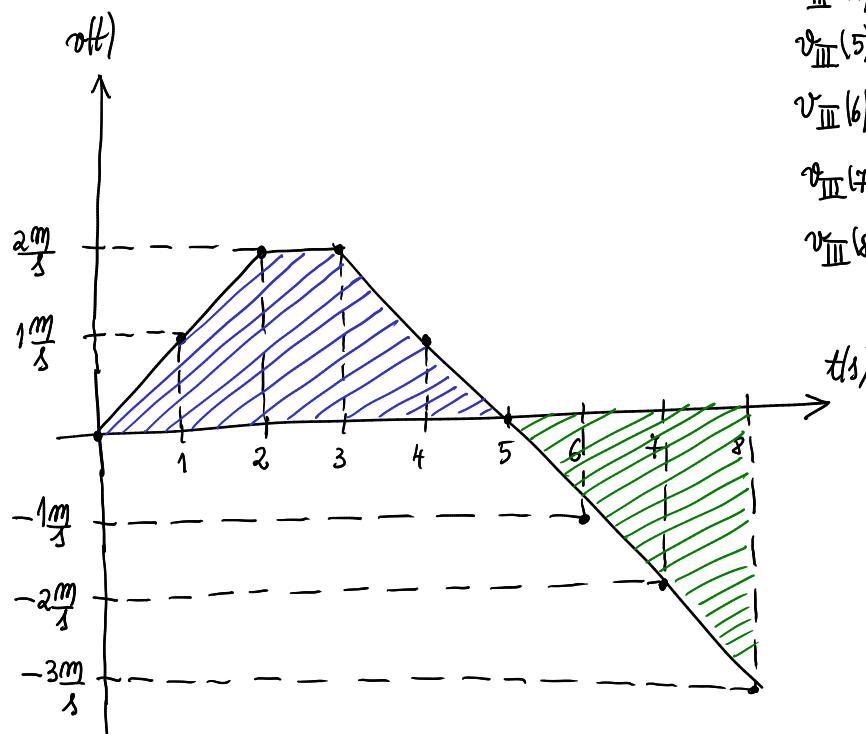
$$v_{III}(4) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{III}(5) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{III}(6) = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{III}(7) = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{III}(8) = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



$$\text{b) } x = d_1 - d_2 = \left(\frac{b+b}{2}\right) \cdot h - \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \left(\frac{1+5}{2}\right) \cdot 2 - \frac{3 \cdot 3}{2} = 6 - 4,5 = 1,5 \text{ m}$$

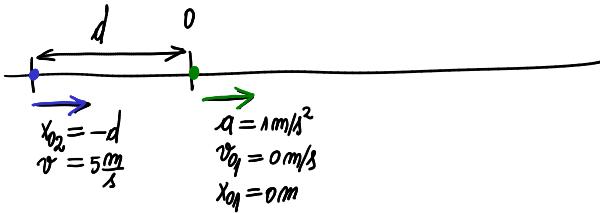
$$\text{c) } d = d_1 + d_2 = 6 + 4,5 = 10,5 \text{ m}$$

(11) O masină porneste de la stop cu acceleratia $a=1 \text{ m/s}^2$. În același moment în spatele sărișorului la $d=8\text{m}$, se află o altă masină în mișcare rectilinie și uniformă cu viteză $v=5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Să se afle:

- momentele de timp la care se întâlnesc masinile și să se interpreteze rezultatul
- distanța masinării de la stop la care se întâlnesc masinile
- valorile vitezelor relative cu care se depărțesc masinile

$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ m/s}^2 \\ v_0 &= 0 \text{ m/s} \\ d &= 8 \text{ m} \\ v &= 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

a)



- $t_x = ?$
- $x_x = ?$
- $v_{rel} = ?$

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01} + v_{01}t + \frac{at^2}{2} \\ x_2(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = x_{02} + v \cdot t \\ x_2(t) = -8 + 5t \end{cases}$$

Întâlnirea se produce când $x_1(t) = x_2(t)$

$$\frac{t^2}{2} = 5t - 8$$

$$\frac{t^2}{2} - 5t + 8 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \text{ s} \\ t_2 = 8 \text{ s} \end{cases}$$

Masina se are o mișcare uniformă și prinide din urmă pe cea care pleacă accelerat de la stop. Apoi, masina care se mișcă accelerat o prinide din urmă pe cea care se mișcă uniform.

b)

$$\begin{aligned} x_1(2s) &= \frac{2^2}{2} = 2 \text{ m} \\ x_1(8s) &= \frac{8^2}{2} = 32 \text{ m} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v_{01} + a \cdot t \\ v_1(2) &= 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{rel} = v - v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_1(8) &= 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{rel} = v_1 - v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

- (12) Două masini trăc prin dreptul unui stop în mișcare rectilinie astfel: prima uniform accelerat cu $a=2 \text{ m/s}^2$ și viteză initială $v_0=5 \text{ m/s}$, iar a doua uniform cu $v=15 \text{ m/s}$, datorită unei întârzieri $\Delta t=1 \text{ s}$ făcă de prima. Să se afle:
- momentele de timp la care se întâlnesc masinile și să se interpreteze rezultatul
 - distanța măsurată de la stop la care se întâlnesc masinile
 - după ce interval de timp trebuie să treacă prin dreptul stopului masina a doua pentru a se întâlni cu singura dată

$$a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$v_{01} = 5 \text{ m/s}$$

$$v = 15 \text{ m/s}, \Delta t = 1 \text{ s}$$

$$a) t_1 = ?$$

$$b) x_1 = ?$$

$$c) \Delta t' = ?$$

a)

$$\begin{array}{l} \alpha = 2 \text{ m/s}^2 \\ v_{01} = 5 \text{ m/s} \\ x_{01} = 0 \text{ m/s} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} v = 15 \text{ m/s} \\ \Delta t = 1 \text{ s} \\ x_{02} = 0 \text{ m/s} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = x_{01} + v_{01}t + \frac{\alpha t^2}{2} \\ x_1(t) = 5t + t^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = x_{02} + v \cdot (t - \Delta t) \\ x_2(t) = 15 \cdot (t - 1) \end{array} \right.$$

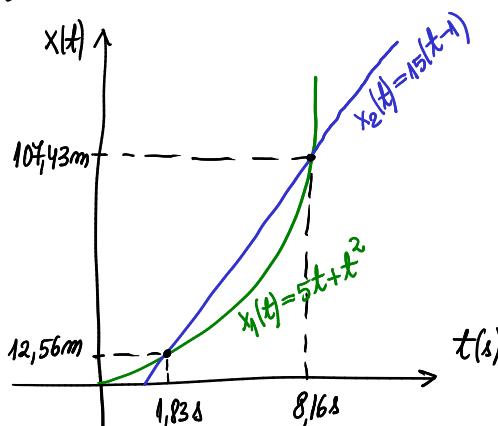
Întâlnirea se produce când $x_1(t) = x_2(t)$

$$5t + t^2 = 15(t - 1)$$

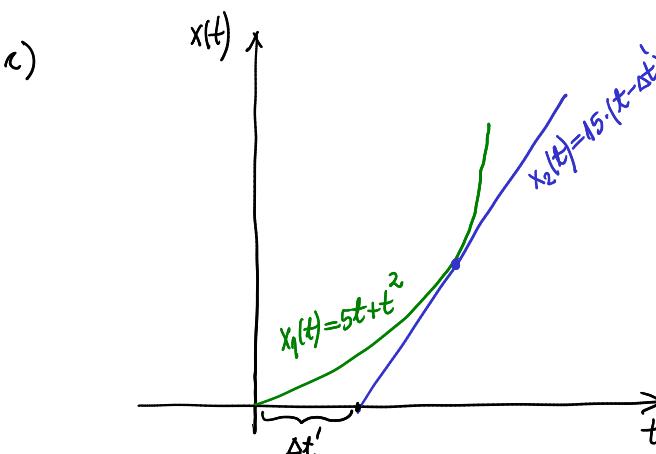
$$15 - 10t + t^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 15 \cdot 1}}{2} \Rightarrow t_1 = 1,83 \text{ s} \\ t_2 = 8,16 \text{ s}$$

Masinile se întâlnesc de două ori: Prima dată la $t_1 = 1,83 \text{ s}$ când masina care se mișcă uniform o preia de la urmă pe cea care se mișcă accelerat. A doua dată la $t_2 = 8,16 \text{ s}$ când masina care se mișcă accelerat o depășește pe cea care se mișcă uniform.



$$b) x_1(1,83) = x_2(1,83) = 12,56 \text{ m} \\ x_1(8,16) = x_2(8,16) = 107,43 \text{ m}$$



$$\begin{array}{l} x_1(t) = 5t + t^2 \\ x_2(t) = 15 \cdot (t - \Delta t') \end{array}$$

Pentru ca mobilele să se întâlnească o singură dată trebuie să rezolvăm ecuația $5t + t^2 = 15(t - \Delta t')$. Ea are o singură soluție $\Rightarrow \Delta t' = 0$

$$15\Delta t' - 10t + t^2 = 0$$

$$\Delta t' = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{100 - 4 \cdot 15 \cdot 1} = 0 \\ \Rightarrow 4 \cdot 15 \cdot \Delta t' = 100 \Rightarrow \Delta t' = 1,67 \text{ s}$$

(13) O piatră cade liber de la înălțimea $h=80\text{ m}$. Se cere astfel:

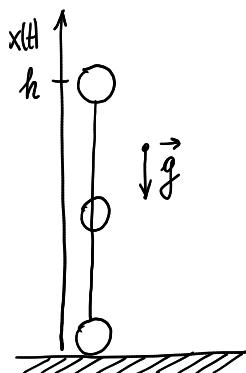
- tempul de coborâre
- viteză cu care atinge piatră solul
- spațialul parcurs în ultima secundă de cădere

$$\begin{cases} h = 80\text{ m} \\ v_0 = 0\text{ m/s} \end{cases}$$

- $t_c = ?$
- $v_{\max} = ?$
- $s = ?$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

a)



$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \\ \Rightarrow x(t) &= h - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_0 = h \\ v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a = -g \end{cases}$$

Obs: g este în sensul negativ
al axei verticale x

$$x(t_c) = h - \frac{gt_c^2}{2} = 0\text{ m}$$

$$\Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{10}} = 4\text{ s}$$

b) $v(t) = v_0 + a \cdot t$

$$v(t) = g \cdot t$$

$$v(t_c) = g \cdot t_c = v_{\max} \Rightarrow v_{\max} = 10 \cdot 4 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c) $t \in (3,4)\text{ s}$

$$x(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

$$x(t) = 80 - 5t^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x(3) = 80 - 5 \cdot 3^2 = 35\text{ m} \\ x(4) = 80 - 5 \cdot 4^2 = 0\text{ m} \end{array} \right\} s = x(3) - x(4) = 35 - 0 = 35\text{ m}$$

(14)

Un corp cade liber de la înălțimea $h = 2000 \text{ m}$. Să se afle:

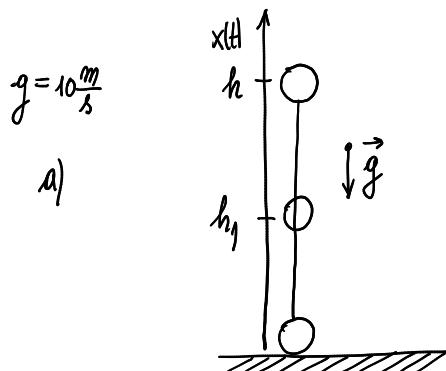
- a) intervalul de timp în care sunt parcursi ultimii $h_1 = 420 \text{ m}$
- b) spațialul parcurs în a doua secundă de cădere

$$h = 2000 \text{ m}$$

$$v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) $\Delta t = ?$, $h_1 = 420 \text{ m}$

b) $\lambda = ?$, $t \in (1,2)\lambda$



$$x(t)$$

$$h$$

$$h_1$$

$$\vec{g}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

$$\begin{cases} x_0 = h \\ v_0 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ a = -g \end{cases}$$

Obs: g este în sensul negativ
al axei verticale O_x

$$\vec{G} = m\vec{g}$$

$$x(t) = 2000 - 5t^2$$

$$h_1 = 2000 - 5 \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2000 - 420}{5}} = 16 \text{ s}$$

$$0 = 2000 - 5 \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2000 - 0}{5}} = 20 \text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 16 = 4 \text{ s}$$

b)

$$x(t) = 2000 - 5t^2$$

$$x(1) = 2000 - 5 \cdot 1^2 = 1995 \text{ m}$$

$$x(2) = 2000 - 5 \cdot 2^2 = 1980 \text{ m}$$

$$\lambda = x(1) - x(2) = 1995 - 1980 = 15 \text{ m}$$

15) Un mobil este aruncat vertical în sus de la sol cu viteză initială $v_0 = 35 \text{ m/s}$. Neglijăm forțele de fricare cu aerul.

Trebuie să se calculeze:

- înălțimea maximă la care urcă corpul
- tempul după care corpul se întoarce pe Pământ
- distanța parcursă de corp în secunda a patra de mișcare

$$x_0 = 0 \text{ m}$$

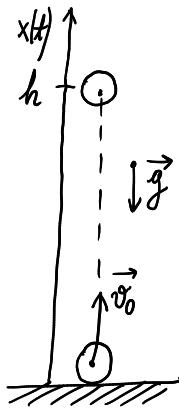
$$v_0 = 35 \text{ m/s}$$

a) $h = ?$

b) $t = ?$

c) $s = ? \quad t \in (3,4)$

a)



$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \\ x(t) &= v_0 t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

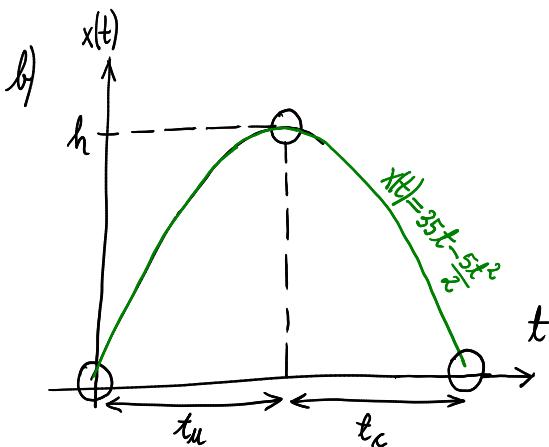
$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ v(t) &= v_0 - gt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v(t_u) = v_0 - g \cdot t_u = 0 \Rightarrow t_u = \frac{v_0}{g} = \frac{35 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2} = 3,5 \text{ s}$$

tempul de urcare, $t_u = 3,5 \text{ s}$

$$x(t_u) = 35t_u - 5t_u^2 = 61,25 \text{ m}$$

înălțimea maximă, $h = 61,25 \text{ m}$



din simetrie tempul de urcare este egal cu tempul de coborâre.

$$t = t_u + t_c = 2t_u = 7 \text{ s}$$

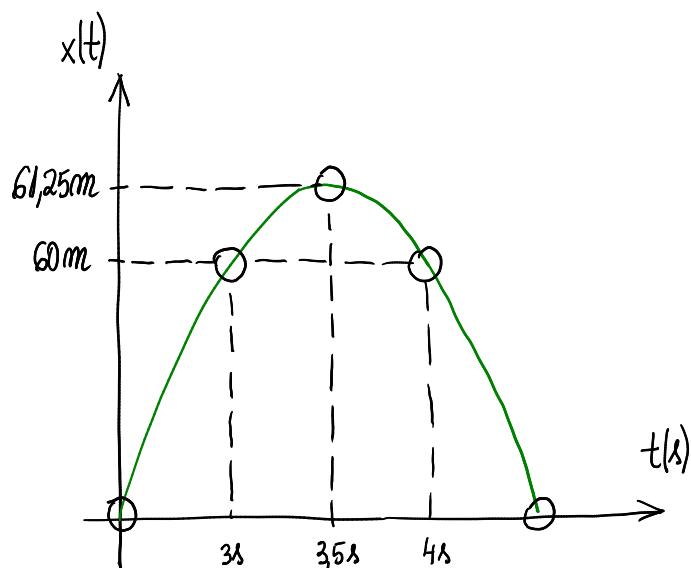
c)

$$x(t) = 35t - 5t^2$$

$$x(3) = 35 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 60 \text{ m}$$

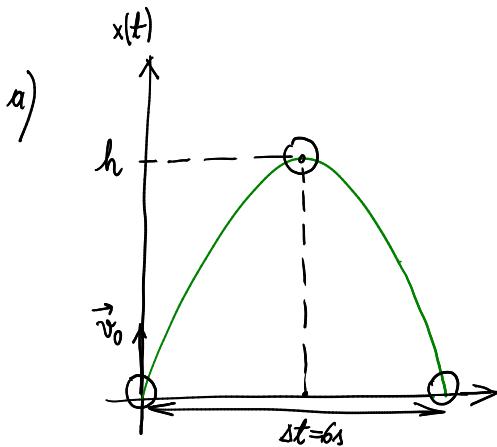
$$x(4) = 35 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 60 \text{ m}$$

$$s = 1,25 \text{ m} \cdot 2 = 2,5 \text{ m}$$



- (16) Un corp este aruncat vertical în sus de la sol și revine pe Pământ după $\Delta t = 6\text{s}$ din momentul aruncării. Se neglijază fricația cu aerul. Își seafe:
- viteză initială a corpului
 - înălțimea maximă la care a urcat corpul

$$\frac{\Delta t = 6\text{s}}{a) v_0 = ? \\ b) h = ?}$$



$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a \cdot t \\ v(t) &= v_0 - g \cdot t \end{aligned}}$$

$$v(t_u) = v_0 - g \cdot t_u = 0$$

$$\Rightarrow v_0 = g \cdot t_u = g \cdot \frac{\Delta t}{2}$$

$$\Rightarrow v_0 = 10 \cdot \frac{6}{2} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)

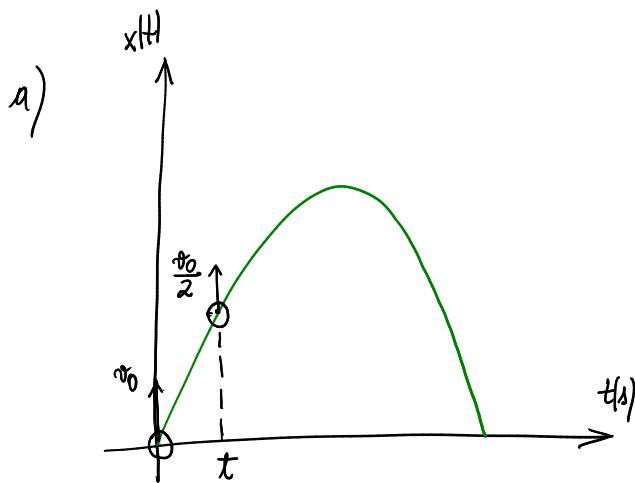
$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2} \\ x(t) &= 30t - 5t^2 \\ h = x(3) &= 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 45\text{m} \end{aligned}$$

17) Un mobil este aruncat pe verticală în sus cu viteză inițială $v_0 = 40 \text{ m/s}$. Se neglijază fricțiile.
Să se afle:

- momentul de timp la care viteză mobilului este jumătate din ea inițială
- distanța parcursă de mobil până în momentul calculat la punctul a)
- distanța parcursă de mobil în a treia secundă de lansare

$$v_0 = 40 \text{ m/s}$$

- $t = ?$, $v(t) = \frac{v_0}{2}$
- $s = ?$
- $s = ?$, $t \in (2, 3) \text{ s}$



$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + a \cdot t \\ \boxed{v(t)} &= v_0 - g \cdot t \end{aligned}$$

$$\frac{v_0}{2} = v_0 - g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_0}{2g} = \frac{40}{2 \cdot 10} = 2 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} b) \quad x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2} \\ x(t) &= 40t - 5t^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(2) = 40 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 60 \text{ m} \Rightarrow s = 60 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} c) \quad x(t) &= 40t - 5t^2 \\ x(2) &= 40 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 60 \text{ m} \\ x(3) &= 40 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 45 \text{ m} \end{aligned}$$

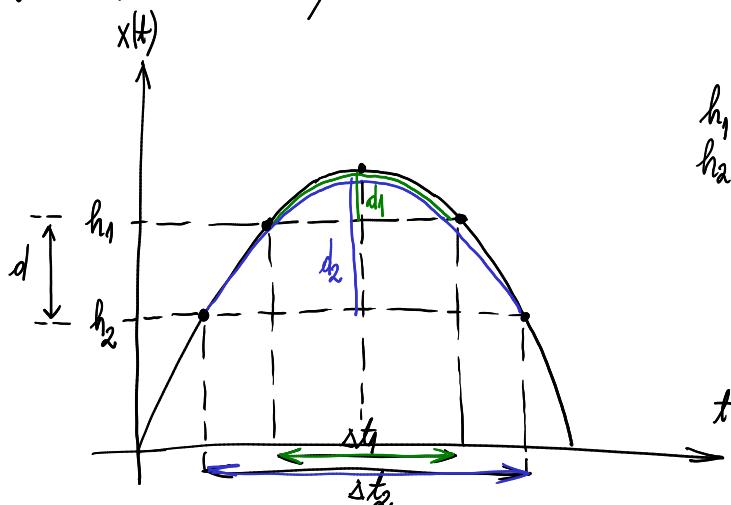
$$\Rightarrow s = x(3) - x(2) = 45 - 60 = 15 \text{ m}$$

18 Un om se află pe o platformă orizontală și vede un corp întrecându-se prin fața lui după un timp $\Delta t_1 = 2\text{s}$, măsurat din momentul urcării. Un al doilea om este sătul mai jos decât primul, pe o altă platformă orizontală și vede același corp coborând prin fața lui după un timp $\Delta t_2 = 6\text{s}$ măsurat din momentul urcării. Se neglijăza greutatea aerului.
Se cere:

- viteză cu care trece corpul prin fața omului care este pe platformă superioară
- distanța dintre platforma înfricoasă și cea superioară

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= 2\text{s} \\ \Delta t_2 &= 6\text{s}\end{aligned}$$

- $v_0 = ?$
- $d = ?$



h_1 - înălțimea platformei superioare
 h_2 - înălțimea platformei înfricoasă

a) $v_0 = 0\text{m/s}$ în maximul parabolei

în urcăre $\Rightarrow v(t) = v_0 + g \cdot t$

$$v_1 = v_0 - g \cdot \left(\frac{\Delta t_1}{2}\right) \Rightarrow 0 = v_0 - 10 \cdot 1 \Rightarrow v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

în urcăre $\Rightarrow v(t) = v_0 + g \cdot t$

$$v_2 = v_0 - g \cdot \left(\frac{\Delta t_2}{2}\right) \Rightarrow 0 = v_0 - 10 \cdot 3 \Rightarrow v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Galilei: $v_{0_1}^2 = v_{0_2}^2 + 2 \cdot g \cdot (d_2 - d_1)$

$$\Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{v_{0_2}^2 - v_{0_1}^2}{-2g}$$

$$h_1 - h_2 = \frac{30^2 - 10^2}{20} = \frac{800}{20} = 40\text{m}$$

(19) Un circas aruncă o bilă vertical în sus cu viteză $v_{01} = 10 \text{ m/s}$. După un interval de timp egal cu $\Delta t = 1\text{s}$ circas aruncă din același punct o a doua bilă tot vertical în sus cu viteză $v_{02} = 20 \text{ m/s}$. Neglijăm forțele de fricare cu aerul.

Să se afle:

- momentul de timp marcat din momentul aruncării primei bile la care se întâlnesc bilele
- distanța făcă de punctul de lansare la care se întâlnesc bilele
- intervalul de timp care desparte sosirea bilelor în punctul de lansare
- vale sunt limitele permise ale intervalului de timp pentru ca cele două bile să se întâlnească în același punctul de lansare, dacă bila a doua este lansată cu $v_{02} = 5 \text{ m/s}$

$$v_{01} = 10 \text{ m/s}$$

$$v_{02} = 20 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 1\text{s}$$

a) $t_x = ?$

b) $x_x = ?$

c) $\Delta t_{\text{permis}} = ?$

d) $\Delta t_{\text{permis}} = ?, v_{02} = 5 \text{ m/s}$

a) $\begin{cases} v_1(t) = v_{01} + a \cdot t \\ v_1(t) = 10 - 10t \end{cases}$

$$\Rightarrow t_u = 1\text{s}$$

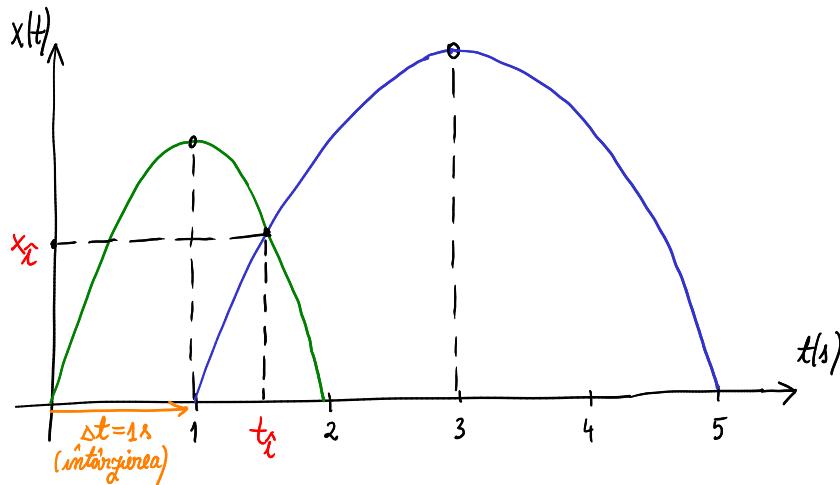
$$t_c = 1\text{s}$$

$$\begin{cases} v_2(t) = v_{02} + a \cdot t \\ v_2(t) = 20 - 10t \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_u = 2\text{s}$$

$$t_c = 2\text{s}$$

Obs: A doua bilă este decalată temporal cu $\Delta t = 1\text{s}$



$$x_1(t) = x_{01} + v_{01}t + \frac{at^2}{2}$$

$$x_1(t) = 10t - 5t^2$$

$$x_2(t) = x_{02} + v_{02}t + \frac{at^2}{2}$$

$$x_2(t) = 20(t-1) - 5(t-1)^2$$

Întâlnirea bilor se produce când $x_1(t) = x_2(t)$

$$10t - 5t^2 = 20(t-1) - 5(t-1)^2$$

~~$$10t - 5t^2 = 20t - 20 - 5t^2 + 10t - 5$$~~

$$25 = 20t$$

$$\Rightarrow t_x = \frac{25}{20} = 1,25\text{s}$$

b) $\Rightarrow x_x = x_1(t_x) = x_2(t_x) = 10 \cdot \frac{5}{4} - 5 \left(\frac{5}{4} \right)^2 = 4,68\text{m}$

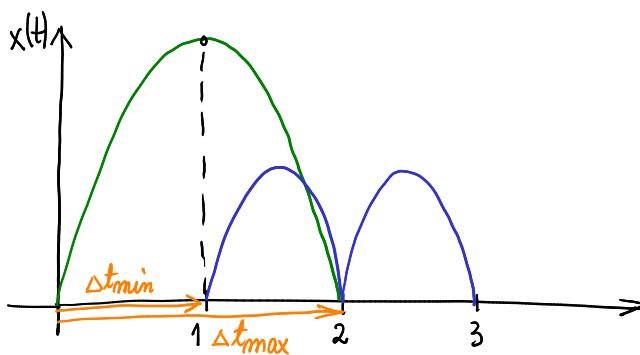
c) Din grafic $\Delta t_{\text{min}} = 5\text{s} - 2\text{s} = 3\text{s}$

d) $v_2(t) = v_{02} + a \cdot t$

$$v_2(t) = 5 - 10t$$

$$\Rightarrow t_u = 0,5\text{s}$$

$$t_c = 0,5\text{s}$$



$\Delta t_{\text{min}} = 1\text{s}$, întârzierea minimă

$\Delta t_{\text{max}} = 2\text{s}$, întârzierea maximă

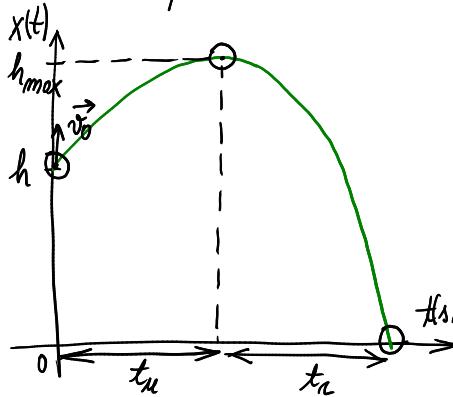
$\Rightarrow \Delta t_{\text{permis}} \in [1,2] \text{ s}$

(20) De la înălțimea $h = 40\text{ m}$ fata de sol se arunca vertical in sus un corp cu viteză $v_0 = 10\text{ m/s}$. Neglijăm forțele de fricare. Să se afle:

- tempul după care corpul ajunge la sol
- intervalul de timp după care trebuie lăsat liber din același punct un alt doară corp astfel încât cel două corpori să ajungă simultan la sol
- vitezele cu care ajung cele două corpori la sol

$$\begin{aligned} h &= 40\text{ m} \\ v_0 &= 10\text{ m/s} \end{aligned}$$

- $\Delta t = ?$
- $\Delta t_x = ?$
- $v_1, v_2 = ?$



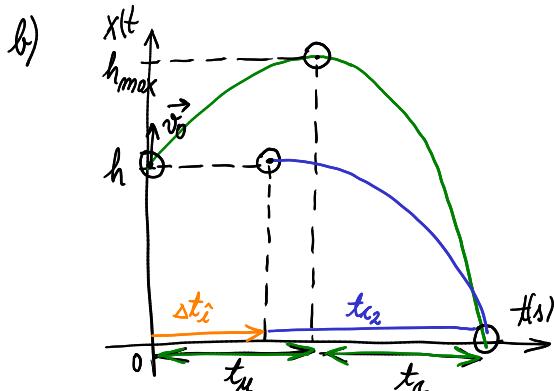
In urcare: $v(t) = v_0 + a \cdot t$
 $v(t) = v_0 - g \cdot t$
 $v(t_u) = 10 - 10 \cdot t_u = 0 \Rightarrow t_u = 1\text{ s}$

Galilei: $0^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (h_{\max} - h)$
 $h_{\max} - h = \frac{-v_0^2}{2g} = \frac{-10^2}{-2 \cdot 10} = 5\text{ m}$
 $\Rightarrow h_{\max} = 45\text{ m}$

In urcare: Galilei: $v_{\max}^2 = 0^2 + 2 \cdot a \cdot h_{\max}$
 $v_{\max} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_{\max}} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 45} = -30\text{ m/s}$
 $\Rightarrow v_1 = -30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

legea variației:
viteze: $v(t) = v_0 + a \cdot t$
 $v_{\max} = v(t_c) = g \cdot t_c$
 $\Rightarrow t_c = \frac{v_{\max}}{g} = \frac{-30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3\text{ s}$ $\Rightarrow \Delta t = t_u + t_c = 1 + 3 = 4\text{ s}$

(alt)
 $x_1(t) = h + v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$
 $0 = h + v_0 \cdot \Delta t - \frac{g \Delta t^2}{2}$
 $0 = 40 + 10 \cdot \Delta t - 5 \Delta t^2$
 $\Delta t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 40 \cdot (-5)}}{2 \cdot (-5)}$
 $\Delta t_{1,2} <^{4s} -2\text{ s} \Rightarrow \Delta t = 4\text{ s}$



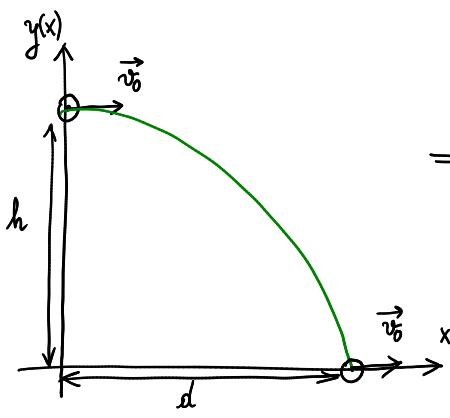
$\Delta t_{\text{intârziere}} = (t_u + t_n) - t_{c_2}$
 $x_2(t) = h - \frac{gt^2}{2}$
 $x_2(t_{c_2}) = 40 - 5 \cdot \frac{t_{c_2}^2}{2} = 0$
 $\Rightarrow t_{c_2} = 2\sqrt{2}\text{ s}$ $\Rightarrow \Delta t_x = 4\text{ s} - 2\sqrt{2}\text{ s} = 1,17\text{ s}$

c) $v_1 = -30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $v_2 = v_0 + a \cdot t = g \cdot t_{c_2} = -10 \cdot 2\sqrt{2} = -28,28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- (21) Un copil împinge cu viteză $v_0 = 1 \text{ m/s}$, o carte aflată pe o masă cu înălțimea $h = 80 \text{ cm}$. Se neglijăza fricția cu aerul. În ce caz:
- traiectoria corpului: $y(x) = ?$
 - tempul în care căzută cartea la sol
 - distanța unde căzută pe podea față de marginea masăi

$$\begin{aligned}v_0 &= 1 \text{ m/s} \\h &= 80 \text{ cm} \\a) \quad y(x) &=? \\b) \quad t_c &=? \\c) \quad d &=?\end{aligned}$$

a)



Corpul este supus la două mișări în același timp:
 $\Rightarrow \begin{cases} \text{MRU pe axa } Ox \text{ cu viteză constantă} \\ \text{MRUV pe axa } Oy \text{ cu viteză variabilă } (g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \end{cases}$

$$\begin{aligned}y(t) &= y_0 + v_{0y} t + \frac{gt^2}{2} \\y(t) &= h - \frac{gt^2}{2} \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + v_{0x} t \\x(t) &= v_0 \cdot t \quad (1) \\v_x(t) &= v_0 = \text{const}\end{aligned}$$

$$\text{din (1)} \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

$$\text{Inlocuind } t \text{ în } y(t) \text{ obținem } y(x) \Rightarrow y = h - \frac{g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2}{2}$$

$$y = h - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

$$\boxed{y(x) = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2} \quad \text{ecuația traiectoriei} \Rightarrow \text{PARABOLA}$$

$$\boxed{y(x) = 0,8 - 5x^2}$$

$$\begin{aligned}b) \quad y(t_c) &= h - \frac{g \cdot t_c^2}{2} = 0 \\&\Rightarrow 0,8 - 5t_c^2 = 0 \\t_c &= \sqrt{\frac{0,8}{5}} = 0,4 \text{ s}\end{aligned}$$

$$c) \quad d = x(t_c) = v_0 \cdot t_c = 1 \cdot 0,4 = 0,4 \text{ m}$$

- (22) O piatră este aruncată pe orizontală cu viteză $v_0 = 15 \text{ m/s}$ de pe acoperisul unui bloc și cade pe sol sub unghiul $\alpha = 60^\circ$ față de orizontală. Se neglijăza fricția cu aerul. Se căsează:
- tempul de mișcare al pietrei și înălțimea blocului
 - viteză cu care ajunge piatră la sol
 - distanța față de bloc unde cade piatră

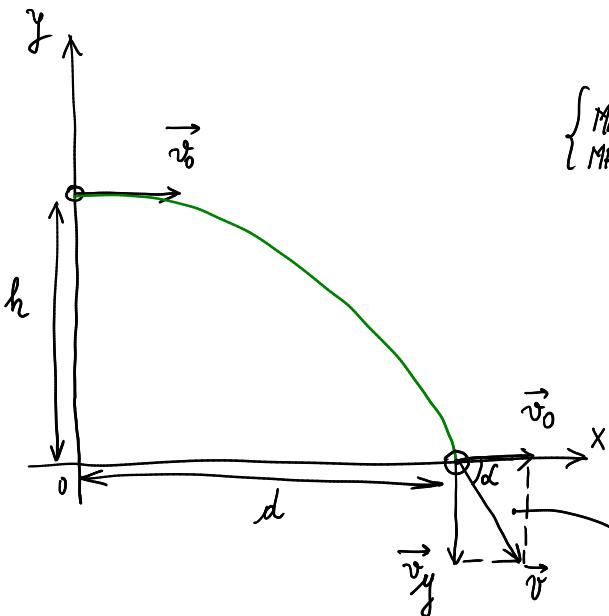
$$v_0 = 15 \text{ m/s}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$a) t_c = ?, h = ?$$

$$b) v = ?$$

$$c) d = ?$$



Corpul este supus la două mișări în același timp:
 { MRU pe axa Ox cu viteză constantă
 { MRUV pe axa Oy cu viteză variabilă ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

$$y(t) = y_0 + v_{oy}t + \frac{at^2}{2}$$

$$y(t) = h - \frac{gt^2}{2} \quad |(2)$$

$$v_y(t) = gt$$

$$x(t) = x_0 + v_{ox} \cdot t$$

$$x(t) = v_0 t \quad |(1)$$

$$v_x(t) = v_0 = \text{const}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{v_0}{v} \Rightarrow v = \frac{v_0}{\cos \alpha} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad b) \\ v_y = \sqrt{v^2 - v_0^2} = \sqrt{30^2 - 15^2} = -15\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

Legea variației vitezei: $v_y(t) = g \cdot t$

pe Oy $v_y(t_c) = g \cdot t_c = 15\sqrt{3}$

$$\Rightarrow t_c = \frac{-15\sqrt{3}}{-10} = 1,5\sqrt{3} = 2,59 \text{ s}$$

Galilei: $v_y^2 = 0^2 + 2 \cdot a \cdot h$
 pe Oy $\Rightarrow h = \frac{v_y^2}{2a} = \frac{15^2 \cdot 3}{2 \cdot 10} = -33,75 \text{ m}$

b) $v = \frac{v_0}{\cos \alpha} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $d = v_0 \cdot t_c = 15 \cdot 2,59 = 38,95 \text{ m}$

(23)

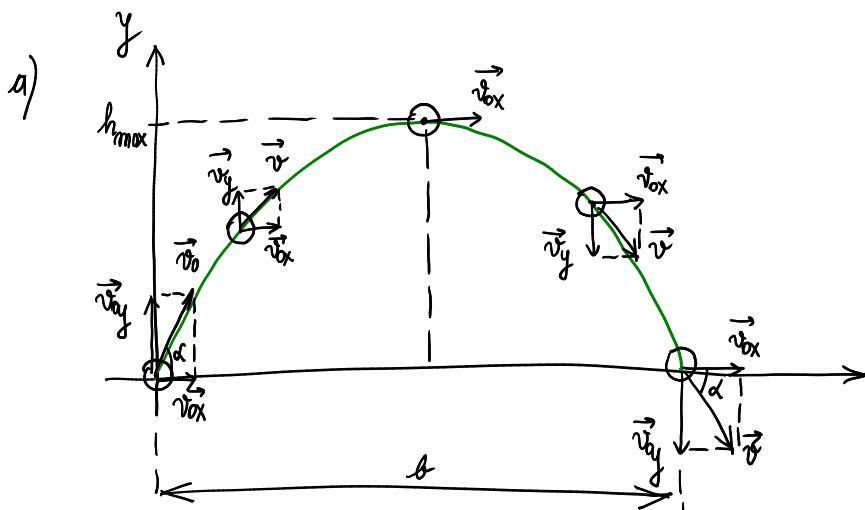
Se aruncă de pe Pământ sub un unghi $\alpha = 60^\circ$ un corp cu viteză $v_0 = 10\sqrt{3} \text{ m/s}$. În ce afle, dacă neglijăm efectul forțelor de fricare cu aerul:

- traiectoria pietrei.
- bătăia - distanța la care loveste pietra Pământul măsurată din punctul de aruncare
- înălțimea maximă la care urcă pietra
- velocitatea viteză pietrei la momentul $t = 1s$

$$v_0 = 10\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

- $y(x) = ?$
- $b = ?$
- $h_{\max} = ?$
- $v(t=1s) = ?$



MRU pe $Ox \Rightarrow x(t) = v_{0x} \cdot t$

$$x(t) = v_{0x} \cos \alpha \cdot t \quad (1)$$

$v_{0x} = \text{const.}$

MRUV pe $Oy \Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{at^2}{2}$

$$y(t) = v_{0y} \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} + a \cdot t \\ v_y(t) &= v_{0y} \sin \alpha - gt \end{aligned} \quad (3)$$

din (1) $t = \frac{x}{v_{0x} \cos \alpha}$ și îl înlocuim în (2)

$$\Rightarrow y = v_{0y} \sin \alpha \left(\frac{x}{v_{0x} \cos \alpha} \right) - g \cdot \frac{\left(\frac{x}{v_{0x} \cos \alpha} \right)^2}{2}$$

$$y(x) = x \cdot \tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$$

$$y(x) = x \cdot \sqrt{3} - \frac{10}{2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4}} \cdot x^2$$

$$y(x) = \sqrt{3} \cdot x - \frac{1}{15} x^2 \quad \text{ecuația traiectoriei} \Rightarrow \text{PARABOLA}$$

b) bătăia $b = ?$

$$v_y(t_u) = v_{0y} \sin \alpha - g \cdot t_u = 0 \rightarrow t_u = \frac{v_{0y} \sin \alpha}{g}$$

$$10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 \cdot t_u = 0$$

$$\Rightarrow t_u = 1,5 \text{ s}$$

$$\text{din simetrie } t_c = 1,5 \text{ s}$$

$$\Rightarrow b = v_{0x} \cdot (t_u + t_c) = v_{0x} \cos \alpha \cdot (t_u + t_c) = 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = 15\sqrt{3} = 25,98 \text{ m}$$

c) $h_{\max} = ?$ Galileu pe $Oy \quad v^2 = (v_{0y} \sin \alpha)^2 - 2g \cdot h_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_{0y}^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{10^2 \cdot \frac{3}{4}}{2 \cdot 10} = \frac{10^2 \cdot \frac{3}{4}}{2 \cdot 10} = 11,25 \text{ m}$

d) $v_y(t=1s) = v_{0y} \sin \alpha - g \cdot t = 10\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 10 \cdot 1 = 5 \text{ m/s}$

$$v_x(t=1s) = v_{0x} = v_{0x} \cos \alpha = 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} b = v_{0x} \cos \alpha \cdot \frac{2v_{0y} \sin \alpha}{g} \\ b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \\ b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \\ \text{Ob} \\ b = b_{\max} \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ \\ b_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \end{cases}$$

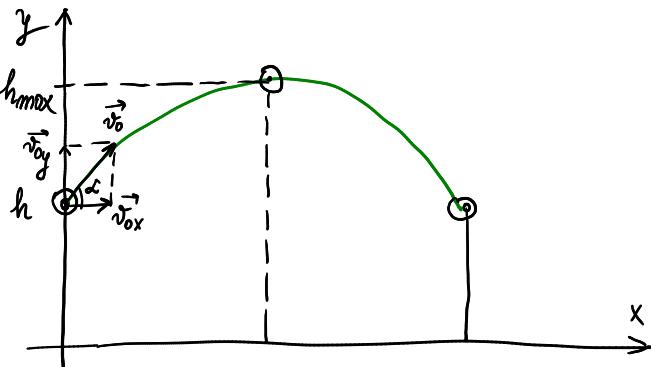
(24) Dacă copil cu înălțimea de $h = 1,2\text{ m}$ picarește jocătorul aruncând-o unul altul. Stând cu mingea zboră de la un copil la altul, să se afle, dacă neglijăm fricția cu aerul:

- înălțimea maximă măsurată față de sol atinsă de mingea în timpul jocului, dacă mingea zboră de la un copil la altul timp de $t = 2\text{s}$
- distanța maximă la care se poate arunca copilul, dacă viteză cu care este aruncată initial mingea este $v_0 = 10\text{ m/s}$, și unghiea sub care trebuie aruncată mingea
- tempul de zbor al mingii în condițiile punctului b)

$$h = 1,2\text{ m}$$

- $h_{\max} = ?$, $t_u + t_c = 2\text{s}$
- $v_0 = 10\text{ m/s}$, $d_{\max} = ?$, $\alpha = ?$
- $t_u + t_c = ?$ în condițiile b)

a)



$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x} \cdot t \\ y(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = h + v_{0y} t + \frac{at^2}{2} \\ y(t) = h + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow h_{\max} = y(t_u) = h + v_0 \sin \alpha \cdot t_u - \frac{g \cdot t_u^2}{2}, \quad t_u = t_n = 1\text{s}$$

$$h_{\max} = 1,2 + 10 \sin \alpha - 5$$

din legea variației vitezei:

$$\begin{cases} v_y(t) = v_{0y} + a \cdot t \\ v_y(t) = v_0 \sin \alpha - g \cdot t \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_y(t_u) = 0 = v_0 \sin \alpha - g \cdot t_u \Rightarrow v_0 \sin \alpha = g \cdot t_u = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow h_{\max} = 1,2 + 10 - 5 = 6,2\text{ m}$$

b)

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x} \cos \alpha \cdot t \\ y(t) &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

$$d = b = v_{0x} \cdot (2 \cdot t_u) = v_0 \cos \alpha \cdot 2 \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \Rightarrow b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \Rightarrow b = \boxed{b = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

$$\begin{aligned} 0 &= v_{0y} - g \cdot t_u \\ \Rightarrow t_u &= \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \end{aligned}$$

$$b \rightarrow b_{\max} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1, \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\Rightarrow b = \frac{v_0^2}{g} = \frac{10^2}{10} = 10\text{ m}$$

c)

$$t_u = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ s}$$

$$t = 2t_u = \sqrt{2} = 1,41\text{ s}$$

- (25) Din vârful unui stâlp cu înălțimea $h = 10\text{m}$ își ia zborul orizontal o piatră cu viteză $v_1 = 14,05\text{m/s}$. Concomitent cu copilul lăsăză din imediata vecinătate a solului o piatră sprijinită cu viteză inițială $v_2 = 30\text{m/s}$ sub unghiul $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală. Să se afle:
- momentele de timp după care piatra poate lovi piatră
 - distanțele de la care trebuie aruncată piatră, măsurate de la baza stâlpului
 - viteză piatră când aceasta loveste piatră

$$h = 10\text{m}$$

$$v_1 = 14,05\text{m/s}$$

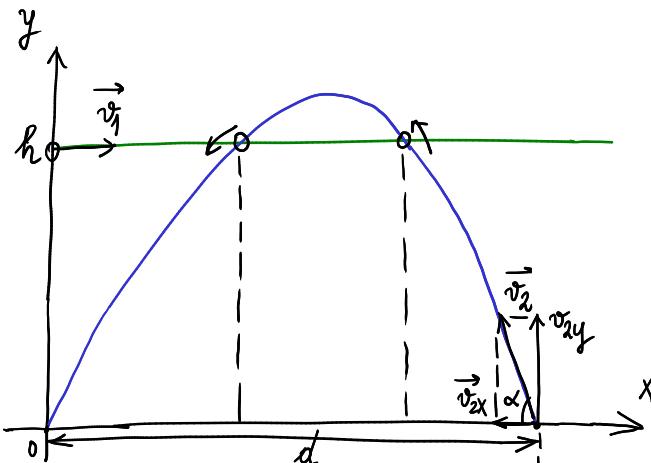
$$v_2 = 30\text{m/s}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$a) t_1 = ?$$

$$b) d = ?$$

$$c) v = ?$$



$$v_{2x} = v_2 \cos \alpha$$

$$v_{2y} = v_2 \sin \alpha$$

$$\begin{cases} x_1(t) = v_1 \cdot t \\ y_1 = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = x_{02} + v_{2x} \cdot t \\ x_2(t) = d - v_{2x} \cos \alpha \cdot t \\ y_2(t) = y_{02} + v_{2y} \cdot t + \frac{gt^2}{2} \\ y_2(t) = v_2 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Întâlnirea se produce când

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) \\ y_1(t) = y_2(t) \end{cases} \Rightarrow v_1 \cdot t = d - v_2 \cos \alpha \cdot t$$

$$h = v_2 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$10 = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot t - 5t^2$$

$$10 = 15t - 5t^2$$

$$10 - 15t + 5t^2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 10 \cdot 5}}{2 \cdot 5}$$

$$t_1 = 1\text{s} \quad (\text{momentul când piatră în urcă loveste piatră})$$

$$t_2 = 2\text{s} \quad (\text{momentul când piatră în coborâre loveste piatră})$$

$$a) d = v_1 \cdot t + v_2 \cos \alpha \cdot t$$

$$d_1 = 14,05 \cdot 1 + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = 40,03\text{m}$$

$$d_2 = 14,05 \cdot 2 + 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 80,06\text{m}$$

$$c) v_{2x} = v_2 \cos \alpha = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}\text{ m/s}$$

$$v_{2y1} = v_{2y} - gt_1 = 30 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 1 = 5\text{ m/s} \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y1}^2} = \sqrt{15^2 + 5^2} = 26,45\text{ m/s}$$

$$v_{2y2} = v_{2y} - gt_2 = 30 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot 2 = -5\text{ m/s} \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y2}^2} = \sqrt{15^2 + (-5)^2} = 26,45\text{ m/s}$$