

ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL

1

Vectorii \vec{a} și \vec{b} au același modul $a=b=10$ și formează cu direcția pozitivă a axei Ox unghiiurile $\alpha=30^\circ$, respectiv $\beta=135^\circ$. În se determină modulul vectorului rezultant \vec{r} și unghiuul făcut de acesta cu axa Ox .

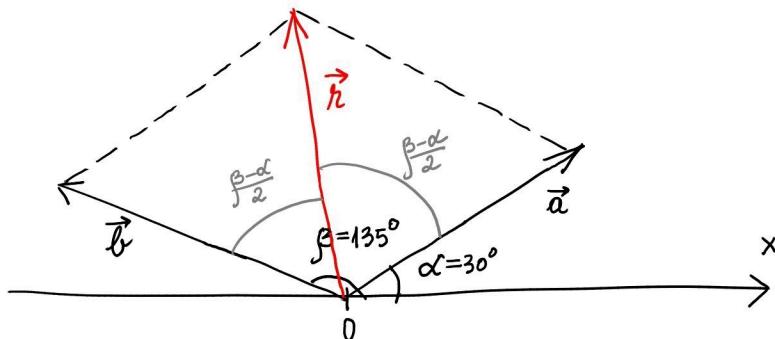
$$a = b = 10$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 135^\circ$$

$$|\vec{r}| = ?$$

$$\gamma = ?$$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta - \alpha)}$$

$$r = \sqrt{10^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos(135 - 30)}$$

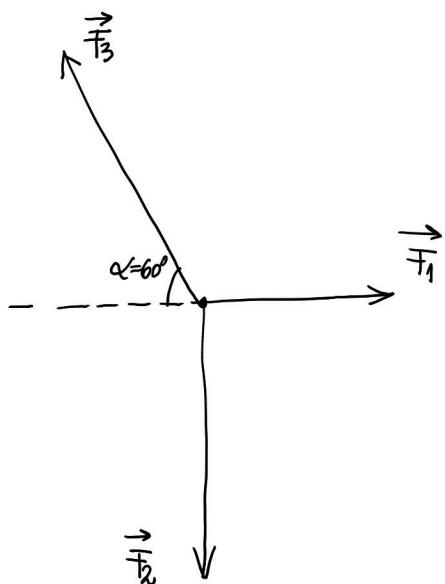
$$r = 12,14$$

vectorul \vec{r} face cu orizontala unghiuul $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2} + \alpha$

$$\varepsilon = 82,5^\circ$$

2

Foțele \vec{F}_1 , \vec{F}_2 și \vec{F}_3 din figura au rezultanta egală cu zero. Stând că $F_3=10N$, să se determine modulele celorlalte două forțe.



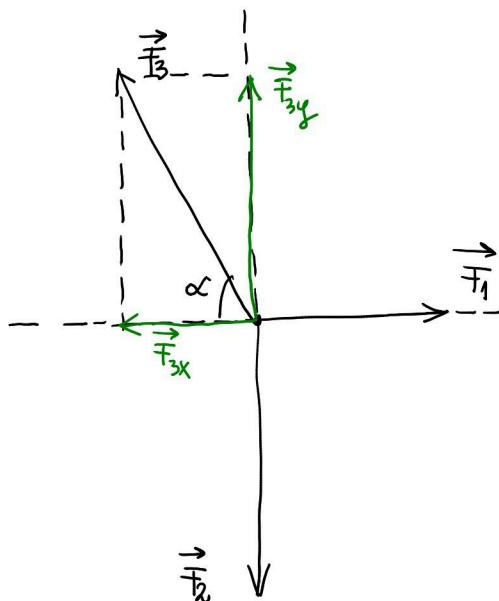
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

$$F_3 = 10N$$

$$F_1 = ? \quad F_2 = ?$$

$$F_{3x} = F_3 \cos \alpha$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha$$

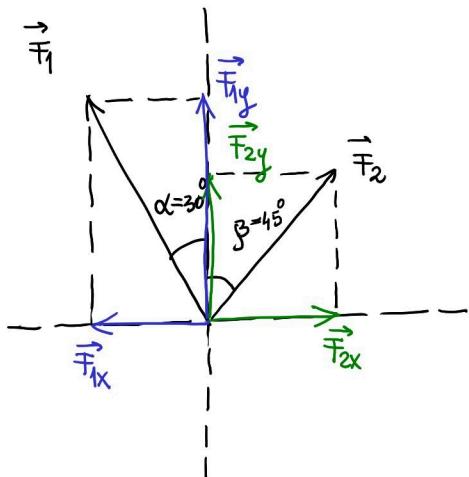


$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 = F_{3x} = F_3 \cos \alpha = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5N \\ F_2 = F_{3y} = F_3 \sin \alpha = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,66N \end{cases}$$

3

Fortele \vec{F}_1 și \vec{F}_2 fac ună verticală, de o parte și de alta a ei, unghiuire de 30° , respectiv 45° . Stând că rezultanta lor are direcția verticală și modulul $F=100N$, să se afle modulele forțelor \vec{F}_1 și \vec{F}_2 .

$$\begin{aligned}\alpha &= 30^\circ \\ \beta &= 45^\circ \\ F &= 100N \\ \vec{F}_1 = ? & \quad \vec{F}_2 = ?\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\vec{F}_{1x} &= F_1 \sin \alpha \\ \vec{F}_{1y} &= F_1 \cos \alpha \\ \vec{F}_{2x} &= F_2 \sin \beta \\ \vec{F}_{2y} &= F_2 \cos \beta\end{aligned}$$

$$\begin{cases} F = F_{1y} + F_{2y} \\ F_{1x} = F_{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100 = F_1 \cdot \cos 30^\circ + F_2 \cdot \cos 45^\circ \\ F_1 \cdot \sin 30^\circ = F_2 \cdot \sin 45^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100 = F_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ F_1 \frac{1}{2} = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \end{cases}$$

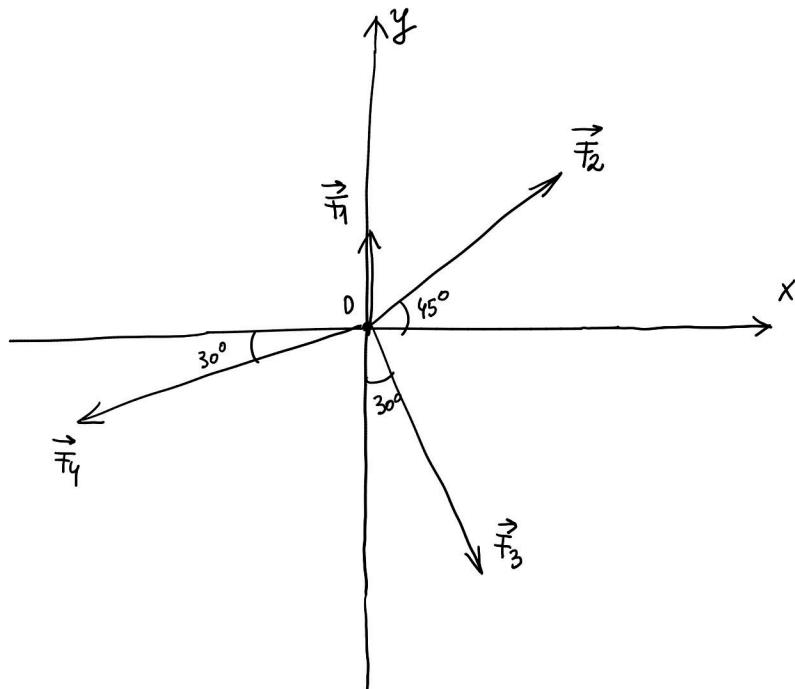
(2) în (1)

$$\Rightarrow 100 = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_2 = \frac{200}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 51,76 N$$

$$F_1 = 43,20 N$$

4) Forțele din figura au modulele $F_1 = 2N$, $F_2 = F_3 = 4N$, $F_4 = 6N$. să se determine modulul forței rezultante și unghiul făcut de aceasta cu axa Ox.



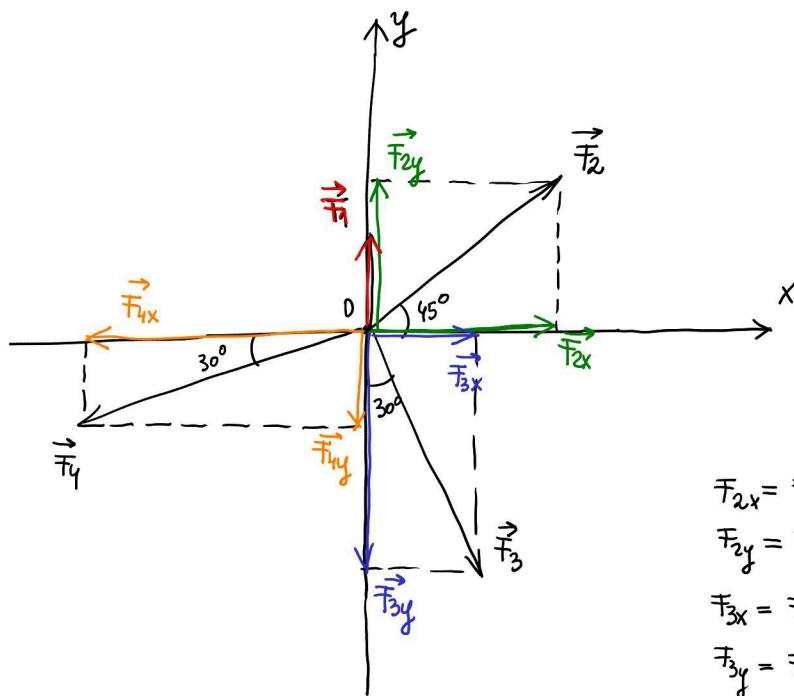
$$F_1 = 2N$$

$$F_2 = F_3 = 4N$$

$$F_4 = 6N$$

$$R = ?$$

$$\gamma = ?$$



$$F_{2x} = F_2 \cos 45^\circ$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 45^\circ$$

$$F_{3x} = F_3 \sin 30^\circ$$

$$F_{3y} = F_3 \cos 30^\circ$$

$$F_{4x} = F_4 \cos 30^\circ$$

$$F_{4y} = F_4 \sin 30^\circ$$

$$Ox: R_x = F_{2x} + F_{3x} - F_{4x}$$

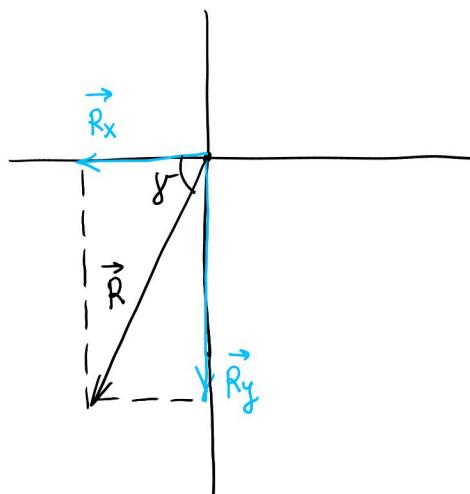
$$Oy: R_y = F_1 + F_{2y} - F_{3y} - F_{4y}$$

$$Ox: R_x = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Oy: R_y = 2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} R_x = 2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{3} \\ R_y = 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_x = -0,367 \\ R_y = -1,635 \end{cases}$$



$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = 1,67 \text{ N}$$

vectorul \vec{R} face cu orizontala unghiul γ :

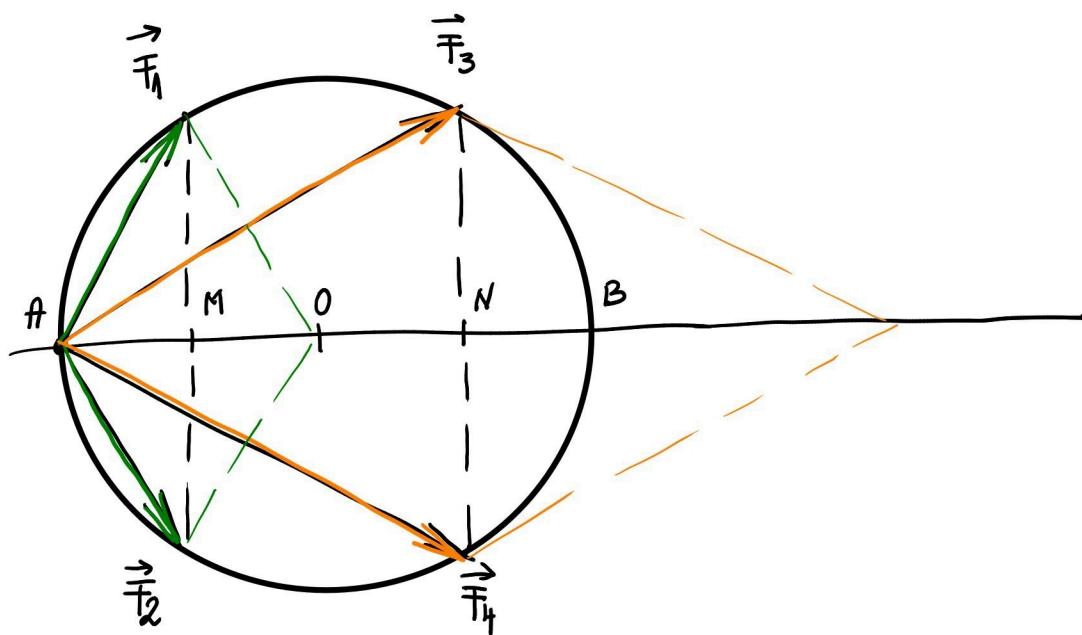
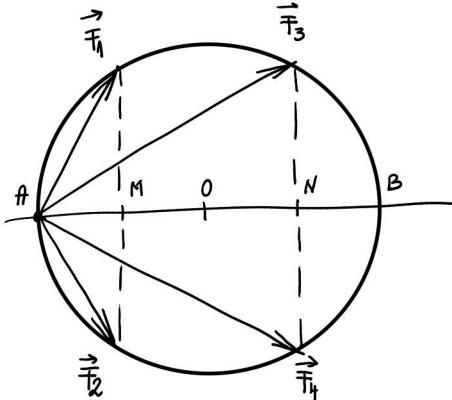
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{CO}{CA} = \frac{R_y}{R_x}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-1,635}{-0,367}$$

$$\gamma = \arctg 4,44$$

$$\gamma = 77,32^\circ$$

- 5) Cele patru forțe din figura au modulele egale cu coardele respective ale cercului de rază r . Stînga și punctele M și N sunt simetrice față de centru O al cercului, să se determine modulul forței rezultante.



Regula paralelogramului:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$|\vec{F}_{12}| = AO = r$$

Regula paralelogramului:

$$\vec{F}_{34} = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

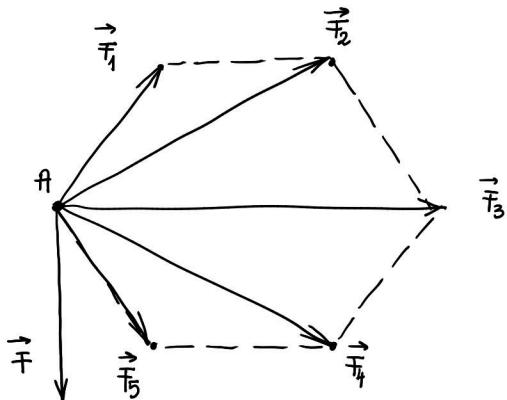
$$|\vec{F}_{34}| = 2 \cdot AN = 2 \cdot \left(r + \frac{r}{2}\right) = 3r$$

Rezultanta: $\vec{R} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{34}$

$$|R| = r + 3r = 4r$$

\vec{R} are direcție orizontală

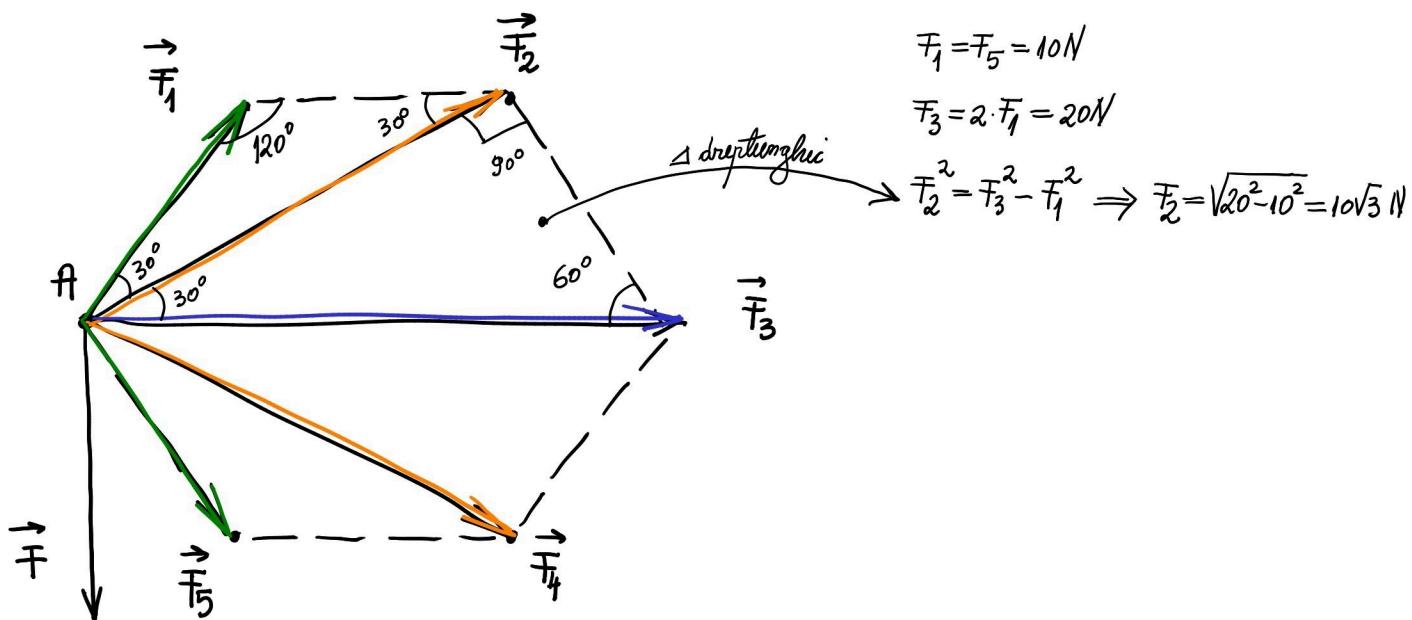
6 În vîrful A al unui hexagon regulat actionează cinci forțe îndreptate după laturile și diagonalele hexagonului și o forță verticală \vec{F} . Stînd că $F_1 = 10N$ și că rezultanta \vec{R} a celor cinci forțe are direcția forței F_5 , să se afle modulele forțelor \vec{F} și rezultantei \vec{R} .



$$F_1 = 10N$$

\vec{R} are direcția lui \vec{F}_5

$$F, R = ?$$



$$\vec{F}_{15} = \vec{F}_1 + \vec{F}_5$$

$$F_{15} = \sqrt{F_1^2 + F_5^2 + 2F_1 F_5 \cos 120^\circ}$$

$$F_{15} = \sqrt{10^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot \frac{-1}{2}}$$

$$F_{15} = 10N$$

$$\vec{F}_{24} = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$$

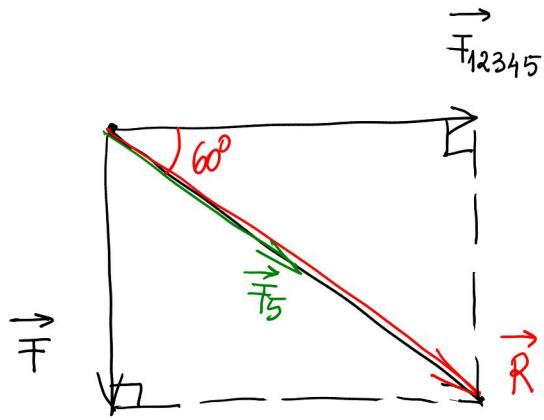
$$F_{24} = \sqrt{F_2^2 + F_4^2 + 2 \cdot F_2 F_4 \cdot \cos 60^\circ}$$

$$F_{24} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{3})^2 + 2 \cdot (10\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$F_{24} = 30N$$

Rezultanta celor 5 forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, \vec{F}_5$ are direcție orizontală

$$F_{12345} = F_{15} + F_{24} + F_3 = 10 + 20 + 30 = 60N$$



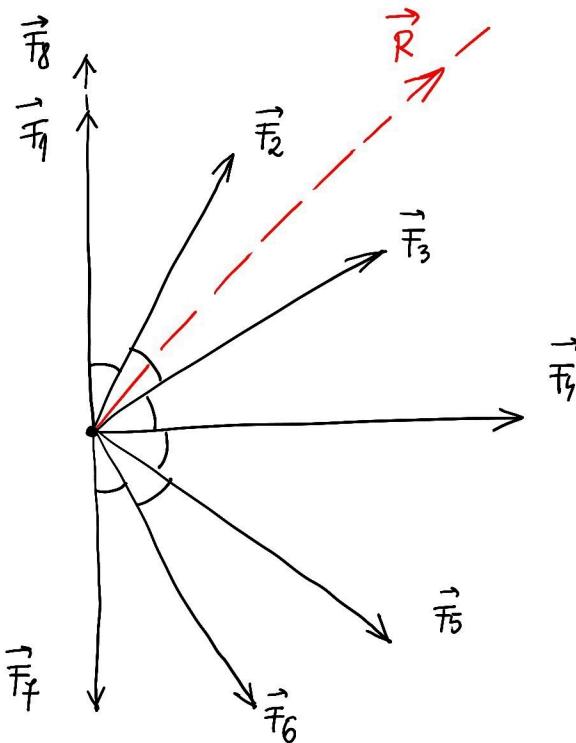
\vec{R} are directia lui \vec{F}_5

$$\vec{R} = \vec{F}_{12345} + \vec{F}$$

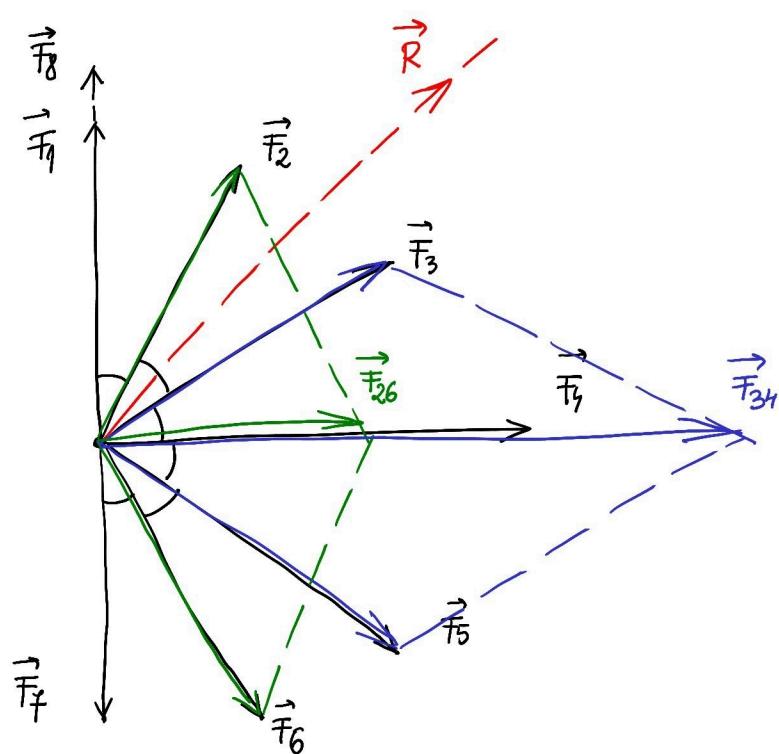
din teorema unghiului de 30° : $F_{12345} = \frac{R}{2} \Rightarrow R = 2 \cdot 60 = 120 N$

din teorema lui Pitagore : $F = \sqrt{R^2 - F_{12345}^2} = \sqrt{120^2 - 60^2} = 60\sqrt{3} N$
 $(103,92 N)$

7) Cele șapte forțe din figura formeză între ele unghiuri egale și au același modul $F=50N$. Care ar trebui să fie modulul unei forțe \vec{F}_8 , care are direcția și sensul lui \vec{F}_7 , astfel încât rezultantele celor opt forțe să aibă direcția bisectoarei unghiului format format de \vec{F}_2 și \vec{F}_3 ?



Comunem forțele
folosindu-ne de simetria
configurației forțelor!



$$Ox: \quad R_x = F_{26} + F_{35} + F_7$$

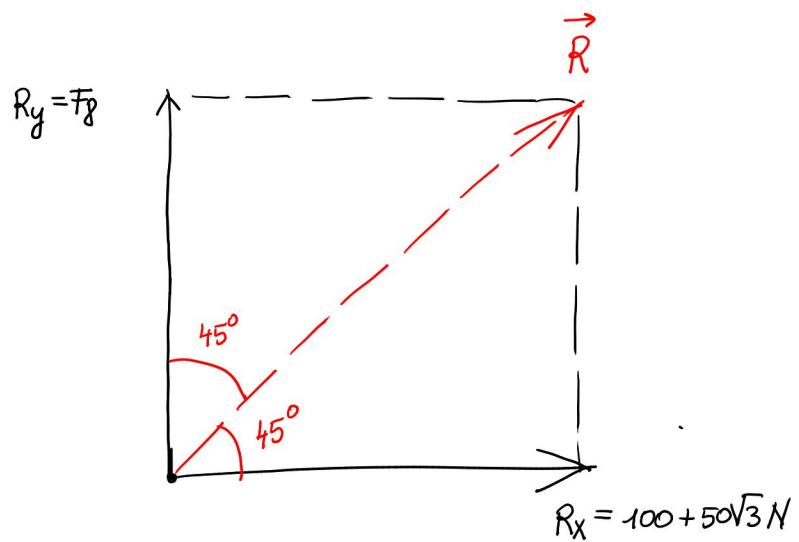
$$F_{26} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2FF \cos 120^\circ}$$

$$Oy: \quad R_y = F_1 + F_8 - F_4$$

$$F_{26} = F = 50N$$

$$F_{35} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2FF \cos 60^\circ}$$

$$F_{35} = F\sqrt{3} = 50\sqrt{3}N$$



$$\begin{aligned}
 R_x &= F_{26} + F_{35} + F_y \\
 &= 50 + 50\sqrt{3} + 50 \\
 &= 100 + 50\sqrt{3} \text{ N}
 \end{aligned}$$

din geometria configurației $\Rightarrow R_y = R_x$

$$F_8 = 100 + 50\sqrt{3} \text{ N}$$

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\
 R &= (100 + 50\sqrt{3})\sqrt{2} \text{ N}
 \end{aligned}$$

8

Să se afle unghiul format de vectorii \vec{a} și \vec{b} ale căror expresii analitice sunt:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

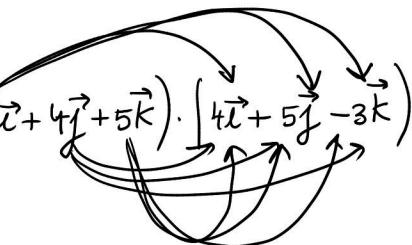
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 16 + 25} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 25 + 9} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}) \cdot (4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k})$$


$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3\vec{i} \cdot 4\vec{i} + 3\vec{i} \cdot 5\vec{j} + 3\vec{i} \cdot (-3)\vec{k} \\ &\quad + 4\vec{j} \cdot 4\vec{i} + 4\vec{j} \cdot 5\vec{j} + 4\vec{j} \cdot (-3)\vec{k} \\ &\quad + 5\vec{k} \cdot 4\vec{i} + 5\vec{k} \cdot 5\vec{j} + 5\vec{k} \cdot (-3)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\text{deci } \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = |\vec{i}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3\vec{i} \cdot 4\vec{i} + 3\vec{i} \cdot 5\vec{j} + 3\vec{i} \cdot (-3)\vec{k} \\ &\quad + 4\vec{j} \cdot 4\vec{i} + 4\vec{j} \cdot 5\vec{j} + 4\vec{j} \cdot (-3)\vec{k} \\ &\quad + 5\vec{k} \cdot 4\vec{i} + 5\vec{k} \cdot 5\vec{j} + 5\vec{k} \cdot (-3)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 12\vec{i} \cdot \vec{i} + 20\vec{j} \cdot \vec{j} + (-15)\vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= 12 + 20 - 15 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{17}{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{17}{50}}$$

$$\boxed{\alpha = \arccos \frac{17}{50}}$$

9) Expresile analitice a doi vectori în spațiu sunt: $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$
 $\vec{b} = \vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$

Să se determine valoarea constantei m astfel încât cele două vectori să fie perpendiculare:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= m\vec{i} \cdot \vec{i} + m\vec{i} \cdot m\vec{j} + m\vec{i} \cdot (-7\vec{k}) \\ &\quad + 3\vec{j} \cdot \vec{i} + 3\vec{j} \cdot m\vec{j} + 3\vec{j} \cdot (-7\vec{k}) \\ &\quad + 4\vec{k} \cdot \vec{i} + 4\vec{k} \cdot m\vec{j} + 4\vec{k} \cdot (-7\vec{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= m\vec{i} \cdot \vec{i} + \cancel{m\vec{i} \cdot m\vec{j}}^0 + \cancel{m\vec{i} \cdot (-7\vec{k})}^0 \\ &\quad + \cancel{3\vec{j} \cdot \vec{i}}^0 + \cancel{3\vec{j} \cdot m\vec{j}}^0 + \cancel{3\vec{j} \cdot (-7\vec{k})}^0 \\ &\quad + \cancel{4\vec{k} \cdot \vec{i}}^0 + \cancel{4\vec{k} \cdot m\vec{j}}^0 + \cancel{4\vec{k} \cdot (-7\vec{k})}^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= m\vec{i} \cdot \vec{i} + 3m\vec{j} \cdot \vec{j} - 28\vec{k} \cdot \vec{k} \\ &= m + 3m - 28 \end{aligned}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow m + 3m - 28 = 0$$

$$4m - 28 = 0$$

$$\boxed{m = 7}$$

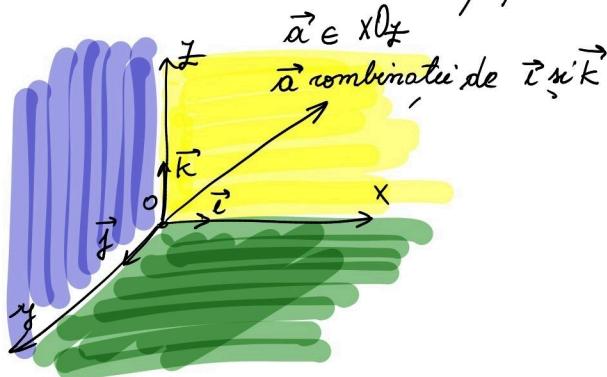
10) Să se determine vectorul \vec{a} din planul xOz de modul $|\vec{a}|=2$ și perpendicular pe vectorul $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

$$\vec{a} \in xOz$$

$$|\vec{a}|=2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \longrightarrow (a_x, a_y, a_z)$$

$$\boxed{\vec{a} \in xOz} \Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + a_z \vec{k} \longrightarrow (a_x, 0, a_z)$$

$$\boxed{|\vec{a}|=2} \Rightarrow \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_x^2 + 0^2 + a_z^2} = 2$$

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$$

$$(a_x \vec{i} + 0 \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = 0$$

$$3a_x \vec{i} \cdot \vec{i} + 0 \cdot (-2) \vec{j} \cdot \vec{j} + 4a_z \vec{k} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow 3a_x + 4a_z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a_x^2 + a_z^2} = 2 \\ 3a_x + 4a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x^2 + a_z^2 = 4 \\ 3a_x + 4a_z = 0 \rightarrow a_z = -\frac{3}{4}a_x \end{cases}$$

$$\text{Inlocuind} \Rightarrow a_x^2 + \left(-\frac{3}{4}a_x\right)^2 = 4$$

$$a_x^2 + \frac{9a_x^2}{16} = 4 \quad | \cdot 16$$

$$16a_x^2 + 9a_x^2 = 16 \cdot 4$$

$$25a_x^2 = 16 \cdot 4$$

$$a_x^2 = \frac{16 \cdot 4}{25}$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5}$$

$$a_z = -\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$a_x = \frac{8}{5}$$

$$a_z = -\frac{6}{5}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{8}{5}\vec{i} + 0\vec{j} - \frac{6}{5}\vec{k}} \quad \left(\frac{8}{5}, 0, -\frac{6}{5} \right)$$

11) Care este valoarea unghiului α dintre doi vectori dacă produsul scalar al acestora este egal cu modulul produsului lor vectorial?

$$\alpha = ?$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

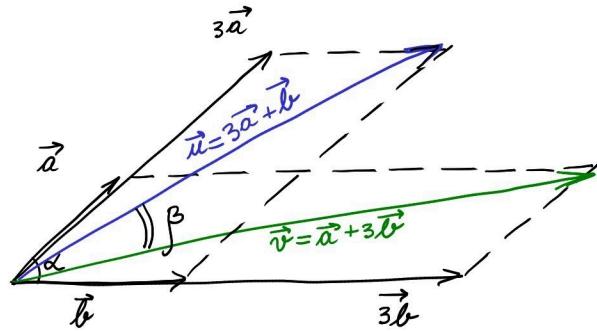
$$\cos \alpha = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$$

(12)

Unghiul dintre vectorii \vec{a} și \vec{b} de module $a=b=1$ este $\alpha = 30^\circ$.

Să se calculeze aria paralelogramului care are drept laturi vectorii: $\vec{u} = \vec{a} + 3\vec{b}$
 $\vec{v} = 3\vec{a} + \vec{b}$



- $A_{\square} = |\vec{u} \times \vec{v}|$

$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

- $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{10 + 3\sqrt{3}}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{10 + 3\sqrt{3}}$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \beta$

$$\cos \beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\cos \beta = \frac{(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})}{\sqrt{10+3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{10+3\sqrt{3}}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| |\vec{b}| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\cos \beta = \frac{3\vec{a}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + 3\vec{b}\vec{a} + 3\vec{b}\vec{b}}{10+3\sqrt{3}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \beta = \frac{3 \cdot 1 + 10 \vec{a} \vec{b} + 3 \cdot 1}{10 + 3\sqrt{3}}$$

$$\cos \beta = \frac{6 + 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10 + 3\sqrt{3}}$$

$$\cos \beta = \frac{6 + 5\sqrt{3}}{10 + 3\sqrt{3}}$$

- $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{6+5\sqrt{3}}{10+3\sqrt{3}} \right)^2} = \sqrt{\frac{(10+3\sqrt{3})^2 - (6+5\sqrt{3})^2}{(10+3\sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{100 + 60\sqrt{3} + 27 - 36 - 60\sqrt{3} + 25}{10+3\sqrt{3}}} = \frac{4}{10+3\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow A_{\square} = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \beta = \frac{(10+3\sqrt{3}) \cdot 4}{(10+3\sqrt{3})}$$

$$\boxed{A_{\square} = 4}$$

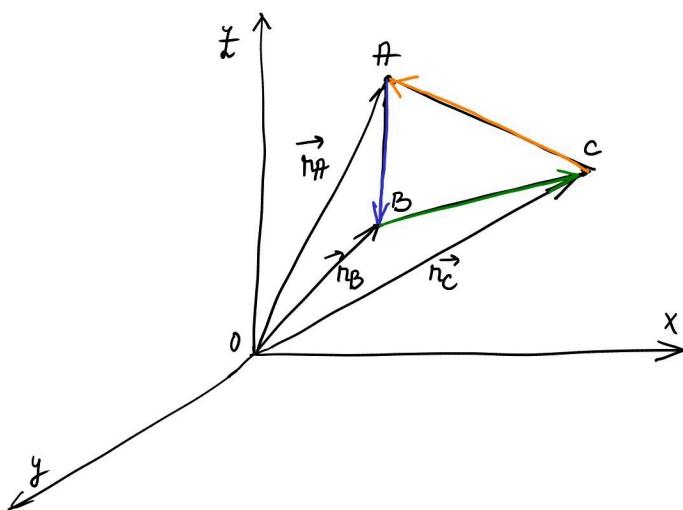
(13) Vectorii de poziție a trei puncte A, B, C din spate sunt:

$$\vec{r}_A = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{r}_B = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{r}_C = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

În următoarele triunghiuri ABC este echilateral.



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{r}_{CB} = \vec{r}_C - \vec{r}_B \\ \vec{r}_{AC} = \vec{r}_A - \vec{r}_C \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{r}_{BA} = (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 2\vec{i} + 0\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{r}_{CB} = (\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) - (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_{AC} = (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) - (\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{array}$$

lungimile laterilor triunghiului ABC :

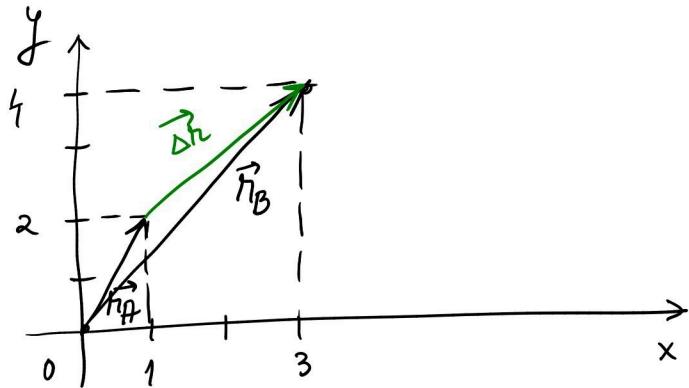
$$|\vec{r}_{BA}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|\vec{r}_{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \text{ este echilateral}$$

$$|\vec{r}_{AC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

(14)

Un mobil se deplasează în planul Oxy între punctele $A(1,2)$ și $B(3,4)$.
Se construiește modulul vectorului deplasare și să se calculeze lungimea sa.



$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\vec{\Delta r} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) - (\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$\vec{\Delta r} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

15) Un mobil se deplasează pe traiectoria ABCD, cele patru puncte având coordonatele (exprimate în metri): A(1,1), B(4,5), C(6,5), D(9,1). Să se determine modulul vectorului deplasare și distanța totală parcursă de cop.

$$\vec{r}_A = \vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{r}_B = 4\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{r}_C = 6\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{r}_D = 9\vec{i} + \vec{j}$$

deplasarea de la A la B: $\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (4\vec{i} + 5\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

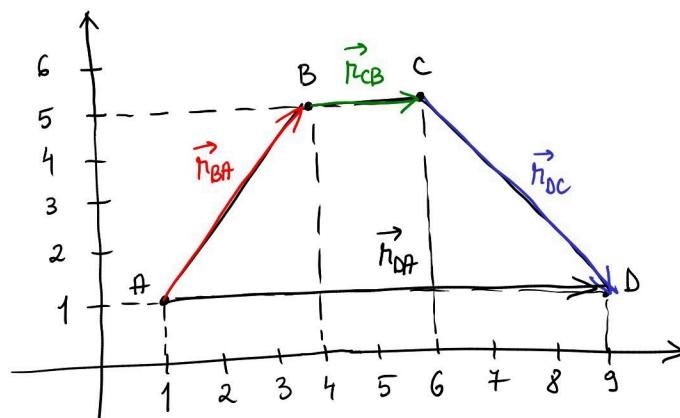
$$|\vec{r}_{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

deplasarea de la B la C: $\vec{r}_{CB} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = (6\vec{i} + 5\vec{j}) - (4\vec{i} + 5\vec{j}) = 2\vec{i} + 0\vec{j}$

$$|\vec{r}_{BC}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2 \text{ m}$$

deplasarea de la C la D: $\vec{r}_{DC} = \vec{r}_D - \vec{r}_C = (9\vec{i} + \vec{j}) - (6\vec{i} + 5\vec{j}) = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

$$|\vec{r}_{CD}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ m}$$



vectorul deplasare totală $\vec{r}_{DA} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = (9\vec{i} + \vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}) = 8\vec{i} + 0\vec{j}$ $|\vec{r}_{DA}| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8 \text{ m}$

distanța totală parcursă este $|\vec{r}_{BA}| + |\vec{r}_{CB}| + |\vec{r}_{CD}| = 5 \text{ m} + 2 \text{ m} + 5 \text{ m} = 12 \text{ m}$

16) Un vehicul se deplasează spre est pe o distanță de 50 km, apoi spre nord cu 30 km și în continuare spre nord-est cu 25 km. În ceea ce urmărește modulul și direcția vectorului deplasare al vehiculului:

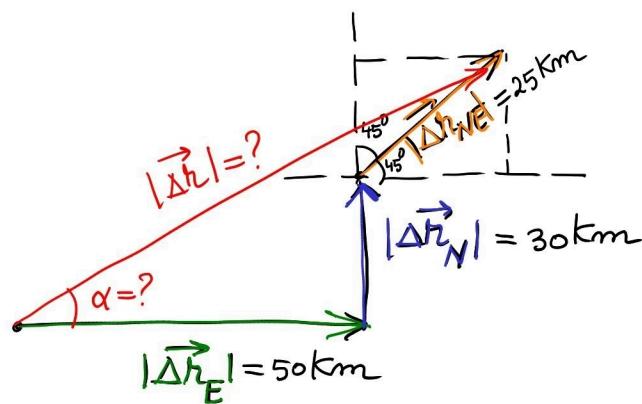
$$\vec{\Delta r}_E = 50\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$\vec{\Delta r}_N = 0\vec{i} + 30\vec{j}$$

$$\vec{\Delta r}_{NE} = 25\sqrt{2}\vec{i} + 25\sqrt{2}\vec{j}$$

$$|\vec{\Delta r}| = ?$$

$$\alpha = ?$$



$$\vec{\Delta r} = \vec{\Delta r}_E + \vec{\Delta r}_N + \vec{\Delta r}_{NE}$$

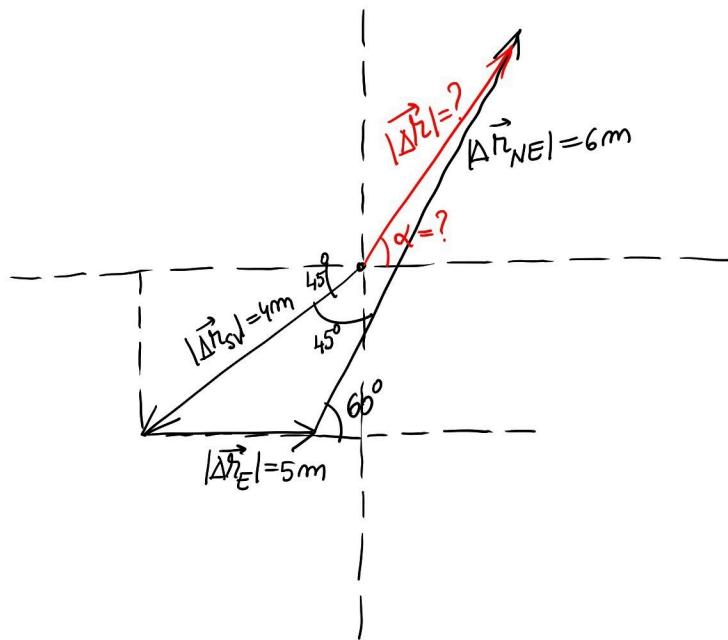
$$\vec{\Delta r} = (50\vec{i} + 0\vec{j}) + (0\vec{i} + 30\vec{j}) + (25\sqrt{2}\vec{i} + 25\sqrt{2}\vec{j})$$

$$\vec{\Delta r} = (50 + 25\sqrt{2})\vec{i} + (30 + 25\sqrt{2})\vec{j}$$

$$|\vec{\Delta r}| = \sqrt{(50 + 25\sqrt{2})^2 + (30 + 25\sqrt{2})^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{30 + 25\sqrt{2}}{50 + 25\sqrt{2}}$$

(14) Un punct material efectuează trei deplasări successive într-un plan xOy după cum urmează: 4 m spre sud-vest, 5 m spre est, 6 m spre nord-est într-o direcție care face 60° cu direcția est. Să se afle mărimea și direcția deplasării rezultante.



$$\Delta r_{SV} = -4\sqrt{2}\vec{i} - 4\sqrt{2}\vec{j}$$

$$\Delta r_E = 5\vec{i} + 0\vec{j}$$

$$\Delta r_{NE} = 6 \cos 60^\circ \vec{i} + 6 \sin 60^\circ \vec{j} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_R &= \Delta r_{SV} + \Delta r_E + \Delta r_{NE} \\ &= (-4\sqrt{2} + 5 + 3)\vec{i} + (-4\sqrt{2} + 0 + 3\sqrt{3})\vec{j}\end{aligned}$$

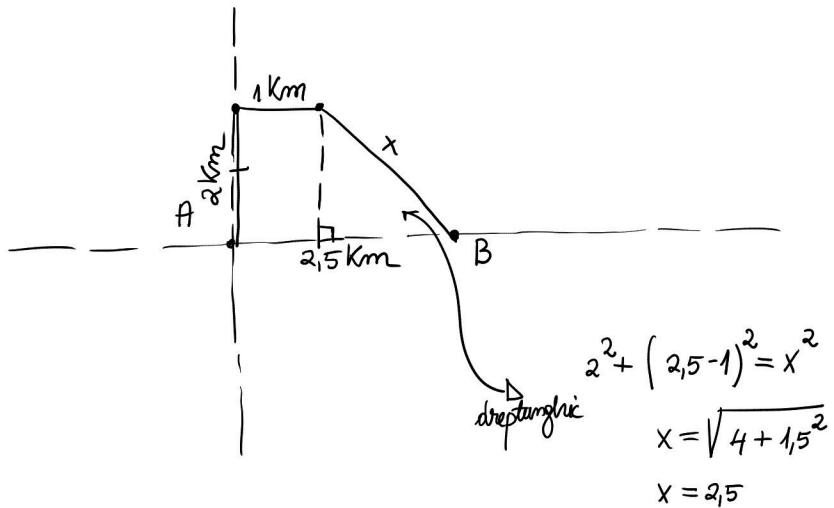
$$\vec{r}_R = (8 - 4\sqrt{2})\vec{i} + (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2})\vec{j}$$

$$|\vec{r}_R| = \sqrt{(8 - 4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2})^2}$$

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{8 - 4\sqrt{2}}}$$

(18)

Un turist pleacă din punctul A și merge 2km către nord, apoi 1km către est. În continuare el se deplasează către sud-est și ajunge într-un punct B astfel încât la est de A. Câte km a mers turistul?



$$d = 2\text{ km} + 1\text{ km} + x\text{ km}$$

$$d = 2 + 1 + 2,5$$

$$d = 5,5 \text{ km}$$

(19) Expresiile analitice ale vectorilor de pozitie la două momente diferite din timpul mișcării unui punct material sunt: $\vec{r}_1 = 5\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$.
 Să se determine modulul și direcția vectorului deplasare.

$$\vec{r}_1 = 5\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-2\vec{i} + 3\vec{j}) - (5\vec{i} + \vec{j}) \\ \Delta \vec{r} = -7\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{(-7)^2 + (2)^2} = \sqrt{53}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{-7}$$

(20) Într-un interval de timp $\Delta t = 2\text{s}$, un mobil se deplasă între două puncte care au vectorii de poziție $\vec{r}_1 = 5\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Se determină viteza medie a mobilului între cele două puncte. Distanțele sunt exprimate în metri.

$$\vec{r}_1 = 5\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\Delta t = 2\text{s}$$

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{\Delta r} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) - (5\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{\Delta r} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{-3\vec{i} + 4\vec{j}}{2}$$

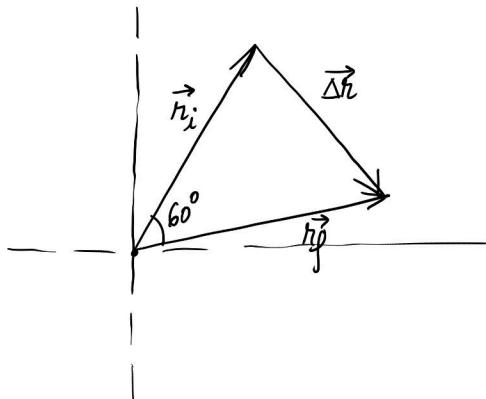
$$\boxed{\vec{v} = -1,5\vec{i} + 2\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}}$$

$$v_x = -1,5 \text{ m/s} \quad \text{viteza pe } ox$$

$$v_y = +2 \text{ m/s} \quad \text{viteza pe } oy$$

(21) După $\Delta t = 1,5\text{s}$ de la începerea mișcării unui punct material vectorul său de poziție are hulaxi modul $r = 6\text{m}$, dar direcția modificată în $\alpha = 60^\circ$. Care este modulul vitezii medii a punctului material pe intervalul de timp considerat?



$|r_i| = |r_f| = 6\text{m} \Rightarrow$ triunghiul este isoscel
 $\alpha = 60^\circ \Rightarrow$ triunghiul este echilateral

$$|\vec{\Delta r}| = 6\text{ m}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$|\vec{v}| = \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta t} = \frac{6\text{ m}}{1,5\text{s}}$$

$$\underline{\underline{|\vec{v}| = 4\text{ m/s}}}$$

(22) Dependenta de timp a vectorului de pozitie al unui punct material este data de ecuatie $\vec{r} = at\vec{i} + b\vec{j}$. Care este expresia analitica a vitezei punctului material?

$$\vec{r} = at\vec{i} + b\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{at_2 - at_1}{t_2 - t_1} = a$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{b - b}{\Delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = a\vec{i} + 0\vec{j}}$$