ENERGIA MECANICĂ

$$\boxed{E_c = \frac{m \cdot v^2}{2}}$$

$$\boxed{E_{pg} = m \cdot g \cdot h}$$

$$\boxed{E_{pd} = \frac{k \cdot \Delta l^2}{2}}$$

$$i \to f: \quad \boxed{E_i + L_F - |L_{Ff}| = E_f}$$

$$F_f = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta E_c = L_F}$$

$$F_f \neq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta E_c = L_F - |L_{Ff}| = L_R}$$

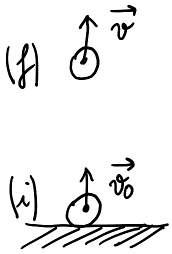
$$\begin{cases} F = 0 \\ F_f = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_i = E_f}$$

$$\boxed{E = E_c + E_{pg} + E_{pd}}$$

(1) O săgeată cu masa $m=40g$ este lansată dintr-un arc cu viteza $v_0=20m/s$, pe verticală în sus. Să se afle energia cinetică a săgeții după o secundă de la lansare.

$m=40g=0{,}04kg$
$v_0=20m/s$

$E_{c_f}=?$, $t=1s$



$$E_{c_f}=\frac{m\cdot v^2}{2}$$

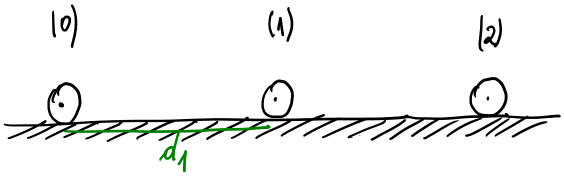
$$v=v_0-gt$$

$$\Rightarrow E_{c_f}=\frac{m\cdot(v_0-gt)^2}{2}=\frac{0{,}04\cdot(20-10\cdot 1)^2}{2}=2J$$

(2) Un corp cu masa $m=1kg$ se mișcă uniform accelerat fără viteză inițială parcurgând în prima secundă distanța $d_1=1m$. Să se afle energia cinetică a corpului după două secunde.

$m=1kg$
$v_0=0\,m/s$
$t_1=1s$, $d_1=1m$

$E_{c_2}=?$, $t_2=2s$



$0\to 1$: $x(t)=x_0+v_0t+\frac{at^2}{2}$ (MRUV)

$$d_1=\frac{a\cdot t_1^2}{2}\Rightarrow a=\frac{2d_1}{t_1^2}$$

$$\Rightarrow v(t)=a\cdot t=\frac{2d_1}{t_1^2}\cdot t \quad \text{(legea variației vitezei)}$$

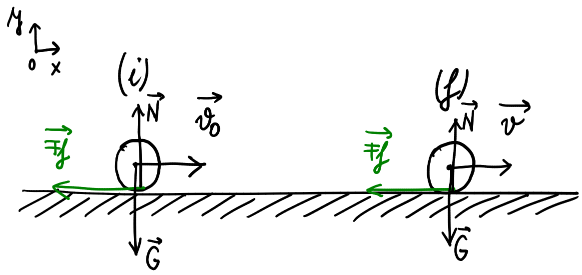
2: $v(t_2)=\frac{2d_1\cdot t_2}{t_1^2}=v_2$

$$\Rightarrow E_{c_2}=\frac{m\cdot v_2^2}{2}=\frac{m\cdot(2\,d_1t_2)^2}{2\cdot t_1^2}=\frac{1(2\cdot 1\cdot 2)^2}{2\cdot 1^2}=8J$$

3) Un corp cu masa $m=500g$ este lansat pe o suprafață orizontală cu viteza inițială $v_0=20\,m/s$. Corpul se mișcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=0{,}05$. Să se afle energia cinetică după $t=4s$ de la lansare.

$m=500g=0{,}5\,kg$
$v_0=20\,m/s$
$\mu=0{,}05$

$E_c=?$, $t=4s$



Principiul II : Ox: $-F_f = ma$

$$-\mu m g = ma$$
$$a = -\mu g$$

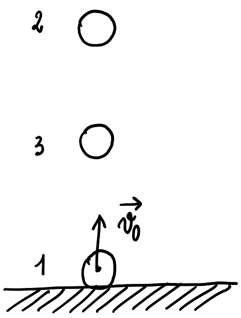
$$v = v_0 + at$$
$$v = v_0 - \mu g t$$

$$\Rightarrow E_{cf} = \frac{mv^2}{2} = m\cdot\frac{(v_0-\mu g t)^2}{2}$$
$$= 0{,}5\cdot\frac{(20-0{,}05\cdot 10\cdot 4)^2}{2} = 81J$$

4) Dintr-un punct se aruncă pe verticală în sus un corp cu masa $m=200g$ cu o viteză inițială $v_0=20\,m/s$. Să se afle la jumătatea înălțimii maxime valoarea energiei potențiale gravitaționale a corpului, dacă în punctul de aruncare $E_p=0$.

$m=200g=0{,}2\,kg$
$v_0=20\,m/s$

$E_p=?$, $h/2$



$1\to 2$: $E_1 + \cancel{L_F}^{0} - |\cancel{L_{F_f}}|^{0} = E_2$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg\,h_{max}$$
$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{20^2}{2\cdot 10} = 20m$$

3 : $E_{pg} = m\cdot g\frac{h}{2} = 0{,}2\cdot 10\cdot\frac{20}{2} = 20J$

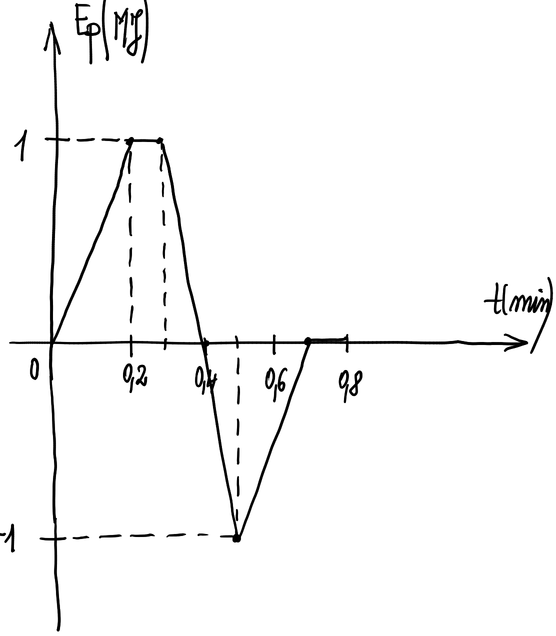
5) Un camion cu masa $m = 10t$ se deplasează cu viteza constantă $v_0 = 45 \frac{km}{h}$ pe un drum dintr-o regiune deluroasă. În graficul alăturat este reprezentată energia potențială E_p a sistemului format din camion și Pământ, în funcție de durata mișcării în intervalul de timp $[0; 0{,}8]$ min. Să se afle:

a) intervalele de timp în care drumul este orizontal

b) diferența de nivel dintre punctul din care a plecat camionul și punctul din care acesta începe să coboare

c) reprezentarea grafică a energiei potențiale E_p a camionului, în funcție de distanța parcursă d

d) variația energiei potențiale a camionului din momentul plecării și până în momentul în care se află la 375m de punctul de pornire



$m = 10t$

$v_0 = 45 \frac{km}{h} = 45 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 12{,}5 \frac{m}{s} = const.$

---

a) $t = ?$, drum orizontal

b) $\Delta h = ?$, $t \in (0; 0{,}3)$

c) $E_p(x) = ?$ grafic

d) $\Delta E_p = ?$, $x \in (0; 375m)$

a) drumul este orizontal când $E_p = const. \Rightarrow \begin{cases} t \in (0{,}2; 0{,}3) min \\ t \in (0{,}7; 0{,}8) min \end{cases}$

b) $t = 0 \Rightarrow E_{pi} = 0J \quad h_i = 0m$

$t = 0{,}3 \Rightarrow E_{pf} = 1MJ \quad h_f = \frac{E_{pf}}{mg} = \frac{1000000}{10000 \cdot 10} = 10m$

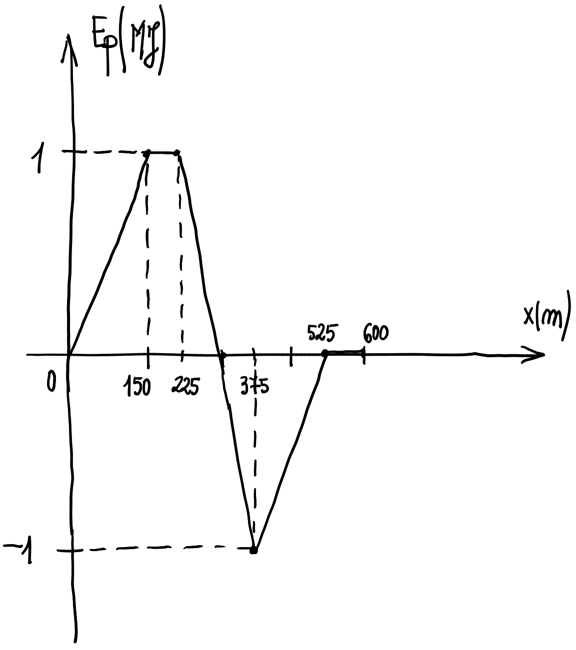
c) $\Delta t_1 \in (0; 0{,}2) min \qquad d_1 = v_0 \Delta t_1 = 12{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 60 = 150m$

$\Delta t_2 \in (0{,}2; 0{,}3) min \qquad d_2 = v_0 \cdot \Delta t_2 = 12{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 60 = 75m \Rightarrow x_2 = 150 + 75 = 225m$

$\Delta t_3 \in (0{,}3; 0{,}5) min \qquad d_3 = v_0 \cdot \Delta t_3 = 12{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 60 = 150m \Rightarrow x_3 = 225 + 150 = 375m$

$\Delta t_4 \in (0{,}5; 0{,}7) min \qquad d_4 = v_0 \cdot \Delta t_4 = 12{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 60 = 150m \Rightarrow x_4 = 375 + 150 = 525m$

$\Delta t_5 \in (0{,}7; 0{,}8) min \qquad d_5 = v_0 \cdot \Delta t_5 = 12{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 60 = 75m \Rightarrow x_5 = 525 + 75 = 600m$



d) $\Delta E_p = ? \quad x \in (0, 375m)$

$\Rightarrow t \in (0; 0{,}5) min$

$\Delta E_p = (-1MJ) - (0MJ)$

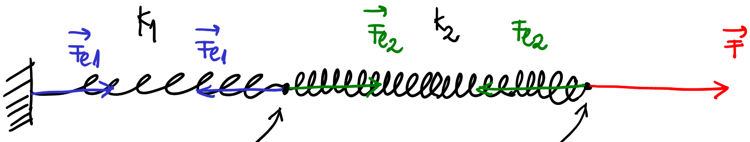
$= -1000000J$

(6) Două resorturi cu constantele elastice $k_1 = 40\ N/m$ și, respectiv, $k_2 = 80\ N/m$ legate în serie susțin un corp. Să se afle raportul energiilor potențiale de deformare ale resorturilor E_{p1}/E_{p2}.

$K_1 = 40 N/m$

$K_2 = 80 N/m$

$\frac{E_{p1}}{E_{p2}} = ?$



repaus $\Rightarrow F_{e2} = F_{e1}$ repaus $\Rightarrow F_{e2} = F$

$$\Rightarrow F_{e1} = F_{e2} = F$$

$$k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 = F$$

$$\Delta l_1 = \frac{F}{k_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{F}{k_2}$$

$$E_{p1} = \frac{k_1 \cdot \Delta l_1^2}{2}$$

$$E_{p2} = \frac{k_2 \cdot \Delta l_2^2}{2}$$

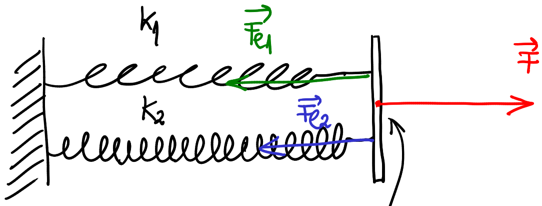
$$\Rightarrow \frac{E_{p1}}{E_{p2}} = \frac{k_1 \cdot \left(\frac{F}{k_1}\right)^2}{k_2 \cdot \left(\frac{F}{k_2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{k_1}}{\frac{1}{k_2}} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{80}{40} = 2$$

(7) Două resorturi cu aceeași lungime inițială se leagă în paralel și sunt alungite de o forță F. Știind că cele două constante elastice ale celor două resorturi sunt $K_1 = 20\frac{N}{m}$ și $K_2 = 60\frac{N}{m}$ să se afle raportul energiilor potențiale elastice E_{p1}/E_{p2}.

$K_1 = 20\frac{N}{m}$

$K_2 = 60\frac{N}{m}$

$\frac{E_{p1}}{E_{p2}} = ?$



$F_{e1} = k_1 \cdot \Delta l$

$F_{e2} = k_2 \cdot \Delta l$

repaus $\Rightarrow$ $F = F_{e1} + F_{e2}$

$F = k_1 \Delta l + k_2 \Delta l$

$$E_{p1} = \frac{k_1 \cdot \Delta l^2}{2}$$

$$E_{p2} = \frac{k_2 \cdot \Delta l^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_{p1}}{E_{p2}} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{20}{60} \cong 0{,}34$$

(8) Un pescar împinge o barcă aflată inițial în repaus cu o forță orizontală de valoare $F=180N$. În barcă se află un prieten cu masa de $m_1=90kg$, fetița sa cu masa de $m_2=20kg$ și soția cu masa de $m_3=65kg$. Masa bărcii goale este de $m_4=75kg$. Forța de rezistență întâmpinată de barcă este de $F_r=80N$. Barca se deplasează orizontal, pe distanța $d=1m$, după care acțiunea forței încetează. Să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de pescar pe distanța d

b) viteza atinsă de barcă imediat după încetarea acțiunii forței

c) distanța parcursă de barcă până la oprire, după încetarea acțiunii forței F

$v_0 = 0\,m/s$

$F = 180N$, $d = 1m$

$m_1 = 90kg$

$m_2 = 20kg$

$m_3 = 65kg$

$m_4 = 75kg$

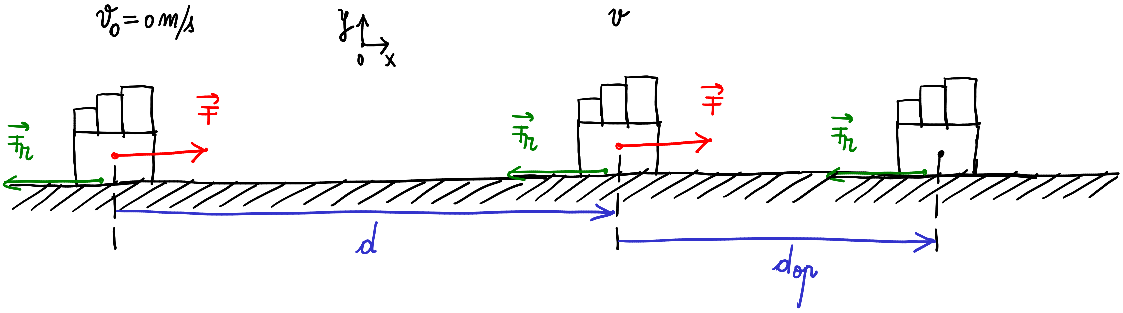
$F_r = 80N$

---

a) $L_F = ?$, d

b) $v = ?$

c) $d_{op} = ?$



a) $L_F = F \cdot d = 180 \cdot 1 = 180J$

b) $\cancel{E_{c_i}}^{\,0} + L_F - |L_{F_f}| = E_{c_f}$

$$F \cdot d - F_r \cdot d = \frac{(m_1+m_2+m_3+m_4)\cdot v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(F-F_r)d}{m_1+m_2+m_3+m_4}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot(180-80)\cdot 1}{90+20+65+75}} = \sqrt{\frac{200}{250}} = 0{,}894\,\frac{m}{s}$$

c) $E_{c_i} + \cancel{L_F}^{\,0} - |L_{F_f}| = \cancel{E_{c_f}}^{\,0}$

$$\frac{m\cdot v^2}{2} = F_f \cdot d_{op}$$

$$d_{op} = \frac{m\cdot v^2}{2F_f} = \frac{\cancel{250}\cdot\frac{200}{\cancel{250}}}{2\cdot 80} = 1{,}25\,m$$

⑨ Asupra unui corp, aflat inițial în repaus pe un plan orizontal pe care se poate mișca fără frecare, acționează pe direcție orizontală o forță constantă $F=4N$. După un timp $\Delta t=2s$, energia cinetică a corpului are valoarea $E_c=8J$. La momentul $t=2s$ asupra corpului începe să acționeze o forță orizontală suplimentară care determină oprirea corpului. Din momentul aplicării forței și până la oprire corpul parcurge distanța $D=0{,}5m$. Să se afle:

a) distanța parcursă de corp în intervalul de timp Δt

b) viteza corpului la momentul $t=2s$

c) masa corpului

d) valoarea forței suplimentare

$v_0=0\frac{m}{s}$

$F_f=0$

$F=4N$

$\Delta t=2s$, $E_c=8J$

F_s, $D=0{,}5m$

---

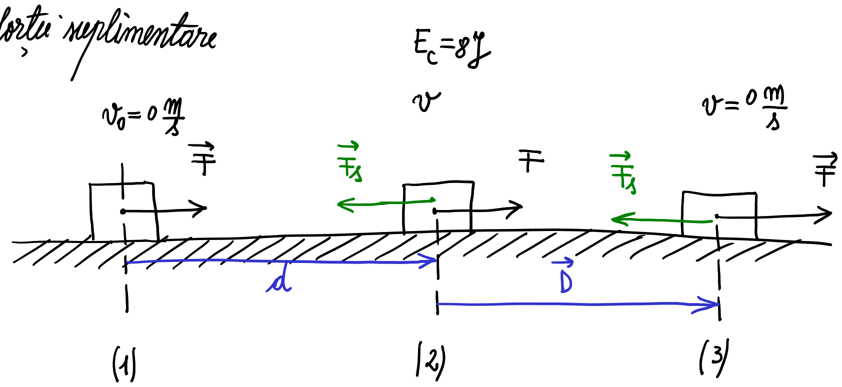
a) $d=?$, $\Delta t=2s$

b) $v(t=2s)=?$

c) $m=?$

d) $F_s=?$

a)



$1\to 2$ $\quad \cancel{E_{c_i}}^{0} + L_F - |\cancel{L_{F_f}}^{0}| = \cancel{E_{c_f}}^{8J}$

$F\cdot d = E_c$

$\Rightarrow d=\frac{E_c}{F}=\frac{8J}{4N}=2m$

b)

$v=\cancel{v_0}^{0}+a\cdot\Delta t \Rightarrow a=\frac{v}{\Delta t}$

$v^2=\cancel{v_0^2}^{0}+2ad$

$v^{\cancel{2}}=2\frac{\cancel{v}}{\Delta t}\cdot d$

$v=\frac{2d}{\Delta t}=\frac{2\cdot 2}{2}=2\frac{m}{s}$

c) $E_c=\frac{m\cdot v^2}{2}\Rightarrow m=\frac{2E_c}{v^2}=\frac{2\cdot 8}{2^2}=4kg$

d) $2\to 3:$ $\quad \cancel{E_c}^{8J}+L_F-|L_{F_s}|=\cancel{E_3}^{0J}$

$E_c+F\cdot D-F_s\cdot D=0$

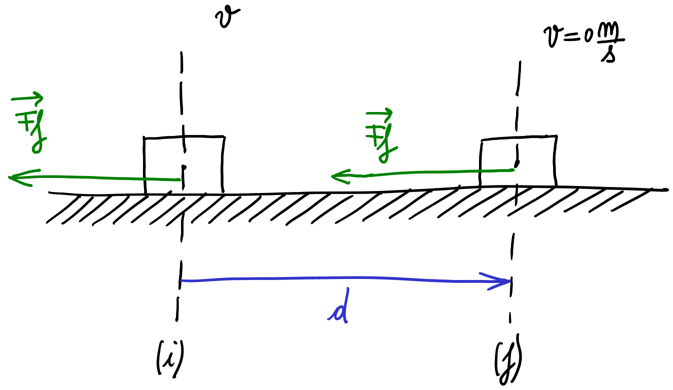
$F_s=\frac{E_c+F\cdot D}{D}=\frac{8+4\cdot 0{,}5}{0{,}5}=20N$

(10) Un autoturism având masa $m=800\,kg$ se deplasează cu viteza constantă $v = 54\,\frac{km}{h}$ pe o șosea orizontală, dezvoltând o putere $P=15\,kW$. La un moment dat motorul se oprește și autoturismul își continuă deplasarea cu motorul oprit, fără a frâna. Considerând că forțele de rezistență la înaintare sunt constante să se afle:

a) lucrul mecanic de forțele de rezistență la înaintare din momentul opririi motorului până la oprirea autoturismului
b) distanța parcursă din momentul opririi motorului până la oprirea autoturismului
c) intervalul de timp în care autoturismul se oprește

$m = 800\,kg$
$v = 54\,\frac{km}{h} = 54 \cdot \frac{1000\,m}{3600\,s} = 15\,\frac{m}{s}$
$P = 15\,kW = 15000\,W$
$F_f = const.$

a) $L_{F_f} = ?$
b) $d = ?$
c) $\Delta t = ?$



a) $i \to f: \quad \frac{m \cdot v^2}{2} + \cancel{L_F}^{\,0} - |L_{F_f}| = 0$

$$|L_{F_f}| = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{800 \cdot 15^2}{2} = 90000\,J$$

b) $P = F \cdot v \Rightarrow F = \frac{P}{v} = \frac{15000}{15} = 1000\,N$

Principiul II: $F - F_f = 0$ (mișcare uniformă)

$$F_f = F = 1000\,N$$

$$\Rightarrow |L_{F_f}| = F_f \cdot d \Rightarrow d = \frac{|L_{F_f}|}{F_f} = \frac{90000}{1000} = 90\,m$$

c) $\overset{0}{\cancel{v}} = \overset{v}{\cancel{v_0}} + a \cdot \Delta t$ (legea variației vitezei)

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{-v}{a}$$

Principiul II: $-F_f = m \cdot a$

$$\Rightarrow a = \frac{-F_f}{m} = \frac{-1000}{800} = -1,25\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{-15}{-1,25} = 12\,s$$

(11) Un tren cu masa $M = 210t$ se deplasează uniform, pe o linie orizontală, cu viteza $v = 108\frac{km}{h}$, sub acțiunea unei forțe de tracțiune constante $F = 42\,kN$. La un moment dat, ultimul vagon de masă $m = 10t$ este decuplat, trenul continuându-și mișcarea sub acțiunea aceleiași forțe de tracțiune. Se consideră că toate forțele de rezistență sunt direct proporționale cu greutățile: $F_f = k\cdot G$. Să se afle:

a) puterea mecanică dezvoltată de tren în timpul mișcării sale uniforme

b) energia cinetică a trenului înainte de decuplarea vagonului

c) accelerația cu care se va mișca trenul după decuplarea ultimului vagon

d) distanța parcursă de vagonul desprins, din momentul desprinderii până în momentul opririi acestuia.

$M = 210t$

$v = 108\frac{km}{h} = 108\cdot\frac{1000m}{3600s} = 30\frac{m}{s} = const.$

$F = 42000N$

$m = 10t$

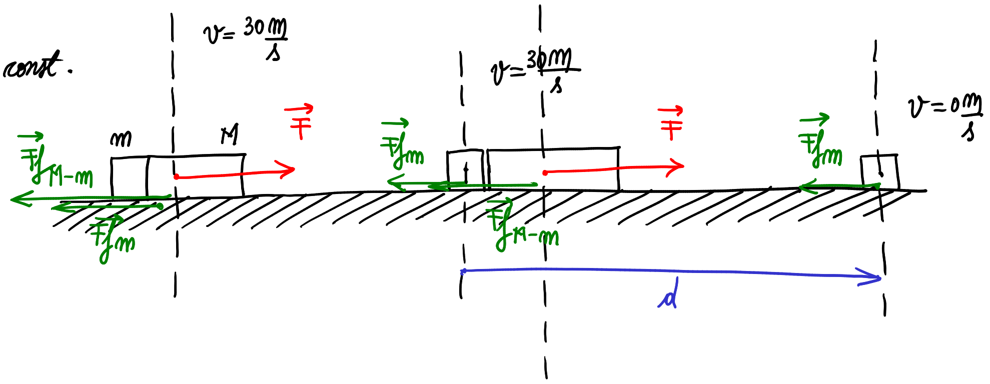
$F_f = k\cdot G$

a) $P = ?$, $v = const.$

b) $E_c = ?$

c) $a = ?$

d) $d = ?$



a) $P = F\cdot v = 42000\cdot 30 = 1{,}26\,MW$

b) $E_c = \frac{M\cdot v^2}{2} = \frac{210\cdot 10^3\cdot 30^2}{2} = 94{,}5\,MJ$

c) Principiul II: $F - F_{f_{M-m}} = (M-m)\cdot a$

$$\Rightarrow a = \frac{F - \mu\cdot\cancel{(M-m)}g}{\cancel{(M-m)}} = \frac{F}{(M-m)} - \mu g$$

Când era în MRU $\Rightarrow$ $F - F_{f_M} = 0$

$$F = \mu M g \Rightarrow \mu = \frac{F}{Mg} = \frac{42\cancel{000}}{210\cancel{000}\cdot 10} = 0{,}02$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{(M-m)} - \frac{F}{M\cancel{g}}\cdot\cancel{g}$$

$$= \frac{42\cancel{000}}{200\cancel{000}} - \frac{42\cancel{000}}{210\cancel{000}} = 42\cdot\left(\frac{1}{200} - \frac{1}{210}\right) = 42\cdot\frac{10}{200\cdot 210} = \frac{\cancel{420}^{2}}{200\cdot 2\cancel{10}} = \frac{1}{100} = 0{,}01\,\frac{m}{s^2}$$

d) $$\frac{m\cdot v^2}{2} + \cancel{L_F}^{0} - |L_{F_{f_m}}| = 0$$

$$|L_{F_{f_m}}| = \mu m g\cdot d = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow d = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{30^2}{2\cdot 0{,}02\cdot 10} = 2250\,m$$

(12) O camionetă de masă $m=1{,}6\,t$ se deplasează pe un drum orizontal, astfel încât viteza acesteia crește liniar în timp. La momentul t_1 viteza sa este $v_1 = 18\,\frac{km}{h}$, iar la un moment ulterior t_2, devine $v_2 = 20\,m/s$. În intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, forța de tracțiune produsă de motorul camionetei efectuează un lucru mecanic $L = 375\,kJ$, dezvoltând o putere medie $P = 75\,kW$. Să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență în intervalul de timp Δt

b) forța de tracțiune dezvoltată de motor și forța de rezistență

c) distanța parcursă de camionetă în intervalul de timp Δt

$m = 1{,}6\,t$

$t_1 \rightarrow v_1 = 18\,\frac{km}{h} = 18 \cdot \frac{1000\,m}{3600\,s} = 5\,m/s$

$t_2 \rightarrow v_2 = 20\,m/s$

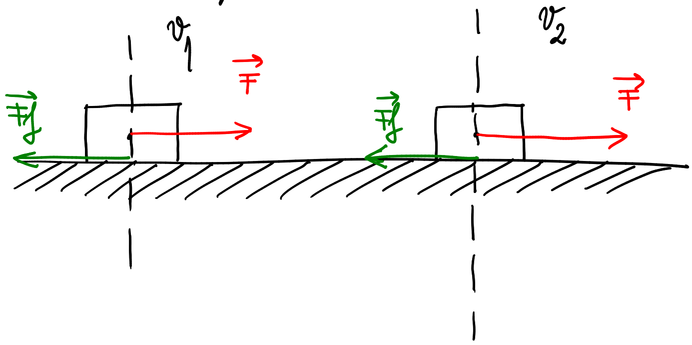
$\Delta t = t_2 - t_1$, $L_F = 375\,kJ$, $P_F = 75\,kW$

---

a) $|L_{F_f}| = ?$

b) $F = ?$, $F_f = ?$

c) $d = ?$



a) $$\frac{m v_1^2}{2} + L_F - |L_{F_f}| = \frac{m v_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow |L_{F_f}| = \frac{m \cdot v_1^2}{2} + L_F - \frac{m \cdot v_2^2}{2}$$

$$= \frac{1600 \cdot (5^2 - 20^2)}{2} + 375000 = 75000\,J$$

c) $$P_F = \frac{L_F}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L_F}{P_F} = \frac{375000}{75000} = 5\,s$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{20-5}{5} = 3\,m/s^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2ad \Rightarrow d = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{20^2 - 5^2}{2 \cdot 3} = 62{,}5\,m$$

b) $$|L_{F_f}| = F_f \cdot d \Rightarrow F_f = \frac{|L_{F_f}|}{d} = \frac{75000}{62{,}5} = 1200\,N$$

Principiul II $\quad F - F_f = m \cdot a$

$$\Rightarrow F = ma + F_f = 1600 \cdot 3 + 1200 = 6000\,N$$

(13) Un tren electric cu masa $m=100t$ care se deplasează cu viteza $v_0=108\ km/h$ se apropie de o stație în care urmează să se oprească. Mecanicul mai întâi oprește alimentarea cu energia electrică la distanța $d=900m$ de stație, apoi este pus în funcțiune sistemul de frânare. Rezistența la înaintare opusă de-alungul drumului este permanent $f_1=\frac{1}{100}$ din greutatea trenului; iar forța de frânare este $f_2=\frac{1}{8}$ din greutatea trenului. Să se afle:

a) distanța față de stație de la care începe frânarea

b) lucrul mecanic efectuat de forța de frânare din momentul punerii în acțiune a sistemului de frânare până la oprire

c) viteza trenului după ce acesta parcurge distanța $d_1=800m$ după oprirea alimentării cu energia electrică

$m=100t$

$v_0=108\frac{km}{h}=108\cdot\frac{1000m}{3600s}=30\frac{m}{s}$

$d=900m$

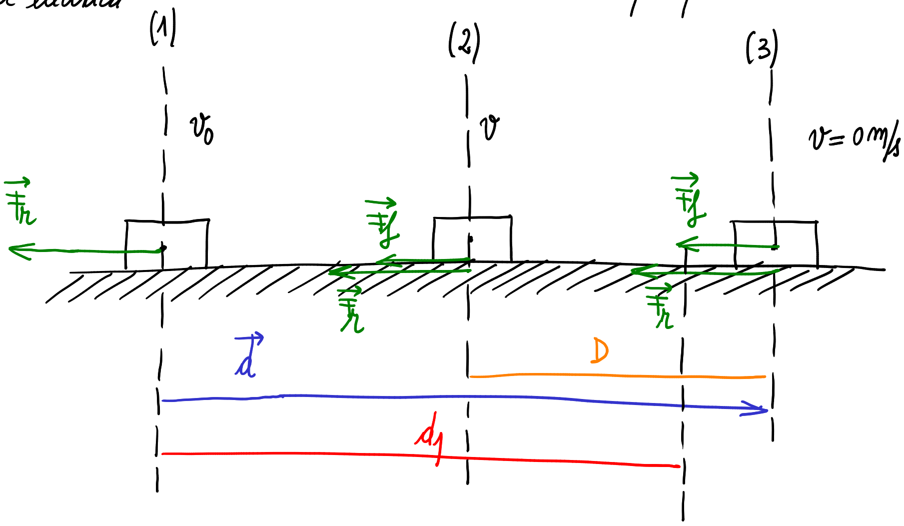
$F_r=\frac{1}{100}G$

$F_f=\frac{1}{8}G$

a) $D=?$

b) $L_{F_f}=?$

c) $v'=?$, $d_1=800m$



a) $1\to2:\quad \frac{m\cdot v_0^2}{2}+\cancel{L_F}^{0}-|L_{F_r}|=\frac{m\cdot v^2}{2}$

$$\frac{m\cdot v_0^2}{2}-f_1 mg\cdot(d-D)=\frac{m\cdot v^2}{2}$$

apoi $\xrightarrow{2\to3:}$ $\frac{m\cdot v^2}{2}+\cancel{L_F}^{0}-f_1 mgD-f_2 mgD=0$

$$\frac{mv^2}{2}=(f_1+f_2)mgD$$

egalând

$$\Rightarrow \frac{m\cdot v_0^2}{2}-f_1 mg(d-D)=(f_1+f_2)mgD$$

$$\frac{v_0^2}{2}-f_1 gd+\cancel{f_1 gD}=\cancel{f_1 gD}+f_2 gD$$

$$D=\frac{\frac{v_0^2}{2}-f_1 gd}{f_2 g}=\frac{\frac{30^2}{2}-\frac{1}{100}\cdot10\cdot900}{\frac{1}{8}\cdot10}=288m$$

b) $|L_{F_f}|=F_f\cdot D=\frac{1}{8}GD=\frac{1}{8}\cdot100000\cdot10\cdot288=36MJ$

c) $\frac{mv^2}{2}+\cancel{L_F}^{0}-f_1 mg[D-(d-d_1)]-f_2 mg[D-(d-d_1)]=\frac{m\cdot v'^2}{2}$

$$\cancel{f_1 mgD}+\cancel{f_2 mgD}-\cancel{f_1 mgD}+f_1 mg(d-d_1)-\cancel{f_2 mgD}+f_2 mg(d-d_1)=\frac{m v'^2}{2}$$

$$\Rightarrow v'=\sqrt{2g(d-d_1)(f_1+f_2)}=\sqrt{2\cdot10\cdot(100)\cdot\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{8}\right)}=16{,}43\frac{m}{s}$$

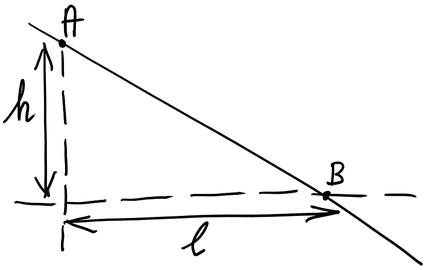
(14) Porțiunea superioară a unei trambuline pentru sărituri cu schiurile poate fi considerată un plan înclinat cu înălțimea $h=47m$, a cărui proiecție în plan orizontal are lungimea $l=50m$, ca în figura alăturată. Un schior cu masa $m=80kg$ pornește din repaus din vârful A al trambulinei și trece prin punctul B aflat la baza porțiunii de trambulină considerate cu viteza $v=108\frac{km}{h}$. Energia potențială gravitațională este considerată nulă în punctul B. Să se afle:

a) energia mecanică a schiorului aflat în vârful A al trambulinei

b) energia cinetică a schiorului în momentul trecerii prin punctul B

c) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în timpul coborârii porțiunii de trambulină considerate

d) coeficientul de frecare la alunecare între schiuri și zăpadă



$h=47m$

$l=50m$

$m=80kg$

$v_B=108\frac{km}{h}=108\cdot\frac{1000m}{3600s}=30\frac{m}{s}$

a) $E_A=?$

b) $E_{c_B}=?$

c) $L_{Ff}=?$, $A\to B$

c) $\mu=?$

$A\to B$: $E_A+\cancel{L_F}^{0}-|L_{Ff}|=E_B$

$$mgh-\mu mg\cos\alpha\cdot\sqrt{h^2+l^2}=\frac{mv_B^2}{2}$$

a) $E_A=mgh=80\cdot10\cdot47=37600J$

b) $E_{c_B}=\frac{m\cdot v_B^2}{2}=\frac{80\cdot30^2}{2}=36000J$

c) $|L_{Ff}|=E_A-E_B=37600-36000=1600J$

d) $\mu=\frac{|L_{Ff}|}{mg\cos\alpha\cdot\sqrt{h^2+l^2}}=\frac{1600}{80\cdot10\cdot50}=0{,}04$

$$\cos\alpha=\frac{CA}{IP}=\frac{l}{\sqrt{h^2+l^2}}$$

(15) Un avion cu masa $m=2,5t$, cu motorul oprit, planează cu viteză constantă $v=144\frac{km}{h}$ într-o atmosferă liniștită și coboară de la înălțimea $h_1=2km$ până la înălțimea $h_2=1km$, între două puncte A și B aflate la distanța $d=AB=10km$ unul de altul. Să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență în timpul planării

b) lucrul mecanic dezvoltat de motor la întoarcerea avionului pe același drum cu aceeași viteză dacă lucrul mecanic efectuat de forțele de rezistență are valoarea de la punctul a)

c) puterea dezvoltată de motor în situația descrisă la punctul b)

$m=2,5t$

$v=144\frac{km}{h}=144\cdot\frac{1000m}{3600s}=40\frac{m}{s}=const.$

$h_1=2km$

$h_2=1km$

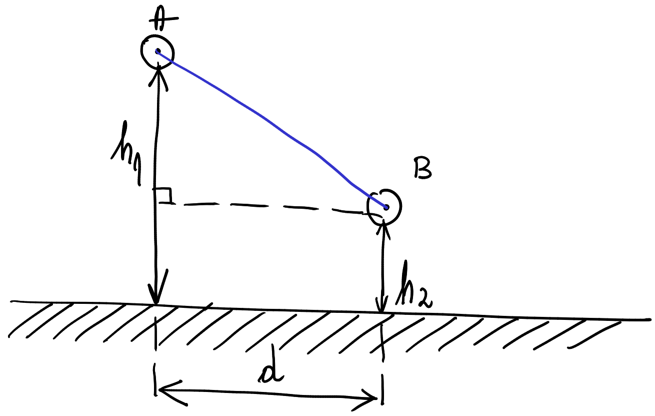
$AB=10km$

---

a) $|L_{F_f}|=?$

b) $L_F=?$, $B\to A$

c) $P_{BA}=?$



$A\to B$ $$\left(mgh_1+\cancel{\frac{mv^2}{2}}\right)+\cancel{L_F}^{\,0}-|L_{F_f}|=\left(mgh_2+\cancel{\frac{mv^2}{2}}\right)$$

Pitagora: $AB^2=(h_1-h_2)^2+d^2$

a) $$|L_{F_f}|=mgh_1-mgh_2=2500\cdot10\cdot(2000-1000)=2,5MJ$$

b) $B\to A$ $$\left(mgh_2+\cancel{\frac{mv^2}{2}}\right)+L_F-|L_{F_f}|=\left(mgh_1+\cancel{\frac{mv^2}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow L_F=mgh_1-mgh_2+|L_{F_f}|=2,5MJ+2,5MJ=5MJ$$

c) $$P_{BA}=\frac{L_F}{\Delta t}$$

$$v=\frac{AB}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=\frac{AB}{v}=\frac{\sqrt{(h_1-h_2)^2+d^2}}{v}$$

$$\Rightarrow P_{BA}=\frac{L_F\cdot v}{\sqrt{(h_1-h_2)^2+d^2}}=\frac{5\cdot10^6\cdot40}{\sqrt{1000^2+10000^2}}=1,99\cdot10^5W$$

(16) Un glonț cu masa $m=50g$ se trage dintr-o armă cu viteza inițială $v_0=500\frac{m}{s}$. Glonțul străbate un bloc cubic de lemn cu lungimea $l=2m$ și întâmpină o forță de frecare $F_f=1124,5N$. Să se afle viteza cu care iese glonțul:

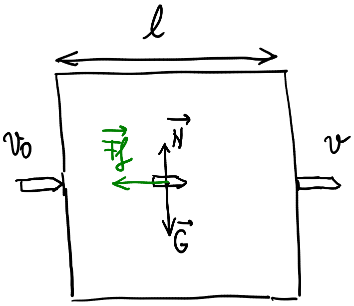
a) dacă glonțul este tras pe verticală de jos în sus
b) dacă glonțul este tras pe verticală de sus în jos
c) dacă glonțul este tras pe orizontală

$m=50g=0,05\,kg$
$v_0=500\frac{m}{s}$
$l=2m$
$F_f=1124,5N$

---

a) $v=?\ \uparrow$
b) $v=?\ \downarrow$
c) $v=?\ \rightarrow$

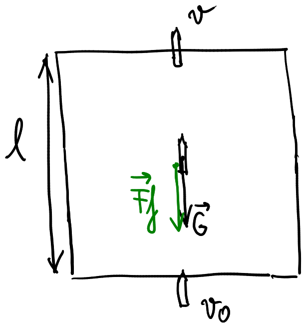
c)



$$\frac{mv_0^2}{2}+\cancel{L_F}^{0}-|L_{F_f}|=\frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{mv_0^2}{2}-F_f\cdot l=\frac{mv^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{v_0^2-\frac{F_f\cdot 2l}{m}}$$
$$=\sqrt{500^2-\frac{1124,5\cdot 2\cdot 2}{0,05}}=400,04\frac{m}{s^2}$$

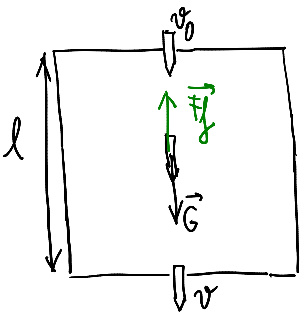
a)



$$\frac{mv_0^2}{2}+\cancel{L_F}^{0}-\cancel{|L_{F_f}|}^{F_f\cdot l}=\frac{mv^2}{2}+mgl$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{v_0^2-\frac{F_f\cdot 2l}{m}-2gl}=\sqrt{500^2-\frac{1124,5\cdot 2\cdot 2}{0,05}-2\cdot 10\cdot 2}$$
$$=400\frac{m}{s}$$

b)



$$\frac{mv_0^2}{2}+mgl+\cancel{L_F}^{0}-\cancel{|L_{F_f}|}^{F_f\cdot l}=\frac{m\cdot v^2}{2}$$

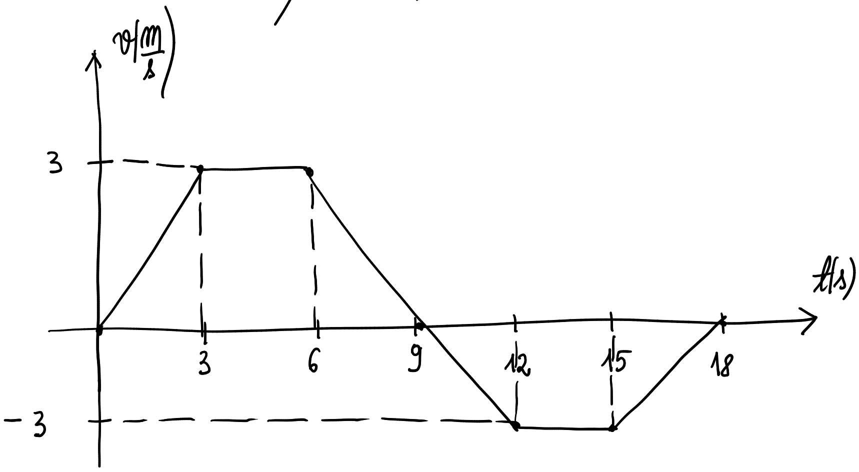
$$\Rightarrow v=\sqrt{v_0^2-\frac{F_f\cdot 2l}{m}+2gl}=\sqrt{500^2-\frac{1124,5\cdot 2\cdot 2}{0,05}+2\cdot 10\cdot 2}$$
$$=400\frac{m}{s}=400,099\frac{m}{s}$$

(17) Un corp cu masa $m=100\,g$ pornește din originea axei Ox și descrie o mișcare rectilinie, astfel că viteza acestuia depinde de timp ca în figură. Să se afle:

a) reprezentarea grafică a accelerației corpului pe durata întregii mișcări

b) distanța parcursă de corp pe durata întregii mișcări

c) lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă ce acționează asupra corpului pe direcția axei Ox în intervalul de timp $t \in (3,9)\,s$



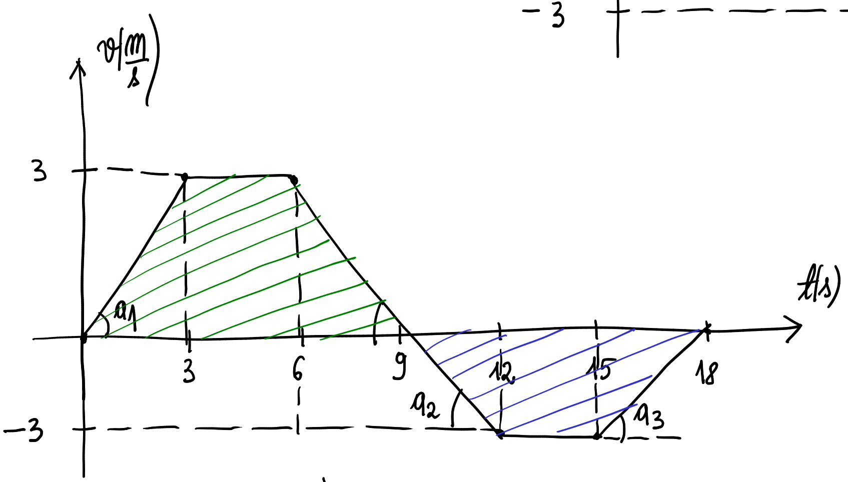
$m = 100\,g = 0{,}1\,kg$

a) $a(t) = ?$, grafic

b) $d = ?$

c) $L_R = ?$, $t \in (3,9)\,s$

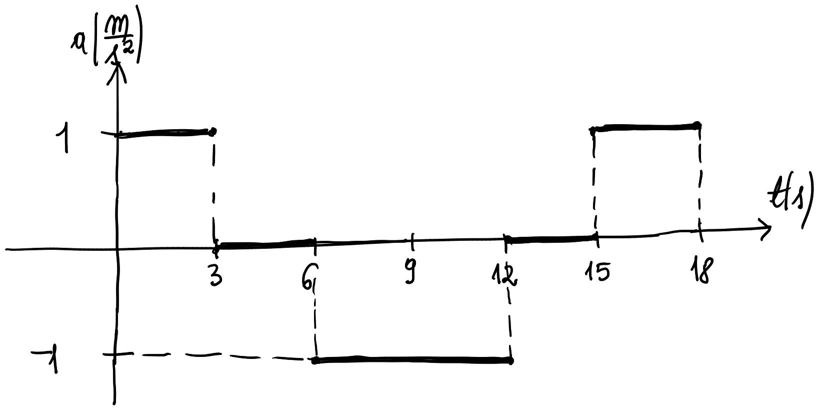
a)



$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3\frac{m}{s}}{3s} = 1\,m/s^2$$

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-6\,\frac{m}{s}}{6\,s} = -1\,m/s^2$$

$$a_3 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3\,\frac{m}{s}}{3s} = 1\,m/s^2$$



b) d_{tot} = aria de sub grafic în $v(t)$ $= A + A = \left(\frac{3+9}{2}\right)\cdot 3 + \left(\frac{3+9}{2}\right)\cdot 1{,}5 = 18 + 18 = 36\,m$

dus întors

c) $E_c(3s) + L_R = E_c(9s)$

$$\frac{m\cdot v^2(3s)}{2} + L_R = \frac{m\cdot v^2(9s)}{2} \Rightarrow L_R = \frac{0{,}1}{2}\cdot\left(0^2 - 3^2\right) = -0{,}45\,J$$

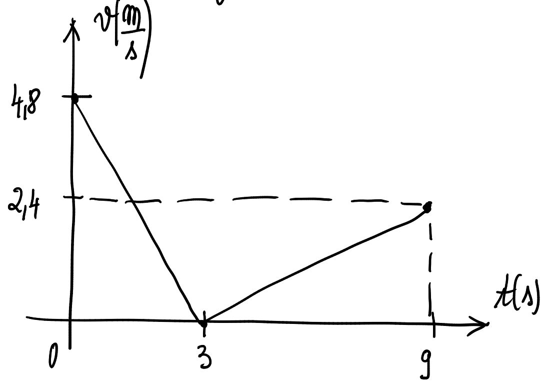
(18) De la baza unui plan înclinat suficient de lung, se lansează în lungul planului un corp cu masa $m = 1kg$. Mișcarea corpului pe planul înclinat se face cu frecare, astfel încât la un moment dat corpul se oprește, după care revine în punctul de lansare. Energia potențială gravitațională se consideră nulă la baza planului înclinat. În figura alăturată, este reprezentată grafic dependența de timp a modulului vitezei corpului de la începutul mișcării sale și până în momentul în care corpul revine în punctul de lansare. Să se afle:

a) energia cinetică inițială a corpului

b) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare în intervalul de timp dintre momentele $t_0 = 0s$ și $t_1 = 9s$

c) modulul forței de frecare la alunecare pe planul înclinat

d) energia mecanică la momentul $t = 3s$



$m = 1kg$

a) $E_c = ?$, $t = 0s$

b) $|L_{Ff}| = ?$, $t \in (0,9)s$

c) $|F_f| = ?$

d) $E(t=3s) = ?$

a) $$E_c = \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{1 \cdot 4{,}8^2}{2} = 11{,}52J$$

b)
$$E_{c_0} + \cancel{L_F}^{0} - |L_{Ff}| = E_c(t = 9s)$$

$$\frac{m v_0^2}{2} - |L_{Ff}| = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$\Rightarrow |L_{Ff}| = \frac{m}{2} \cdot (v_0^2 - v^2)$$

$$|L_{Ff}| = \frac{1}{2} \cdot (4{,}8^2 - 2{,}4^2) = 8{,}64J$$

c) $$|L_{Ff}| = |F_f| \cdot 2d \Rightarrow |F_f| = \frac{|L_{Ff}|}{2d}$$

unde $d = A_{\triangle} = \frac{4{,}8 \cdot 3}{2} = A_{\triangle} = \frac{2{,}4 \cdot 6}{2} = 7{,}2m$

$$|F_f| = \frac{8{,}64J}{2 \cdot 7{,}2m} = 0{,}6N$$

d) $$E(t=3s) = mgh$$

$$E_{c_0} + \cancel{L_F}^{0} - \frac{|L_{Ff}|}{2} = E$$

$$\Rightarrow E = 11{,}52J - \frac{8{,}64}{2} = 7{,}2J$$

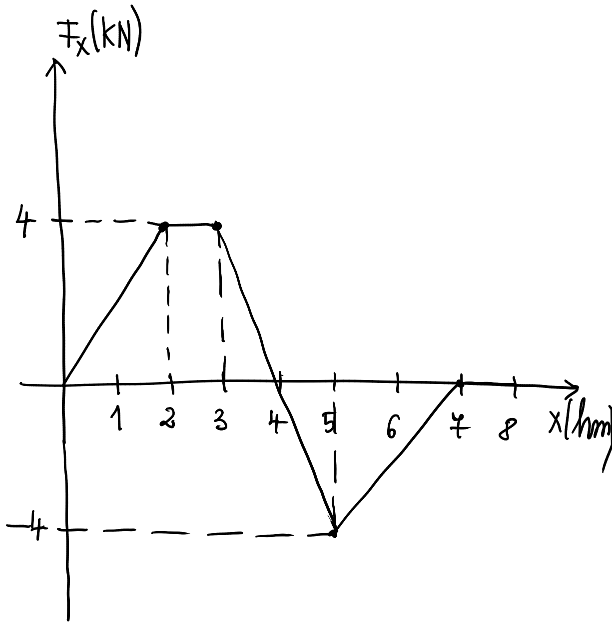
(19) Un automobil cu masa $m=1000\,kg$ pornește din repaus și se deplasează rectiliniu pe o autostradă orizontală. În graficul alăturat este reprezentată proiecția forței rezultante care se exercită asupra automobilului pe direcția mișcării, F_x, în funcție de coordonata x. Să se afle:

a) reprezentarea grafică a proiecției accelerației a_x pe direcția mișcării automobilului în funcție de coordonata x pentru primii 200 de metri

b) coordonata x_m a automobilului în momentul în care viteza sa a atins valoarea maximă și justificați răspunsul.

c) lucru mecanic efectuat de forța rezultantă în timpul în care automobilul parcurge primii 300 m

d) valoarea v_1 a vitezei automobilului în momentul în care acesta se află în punctul de coordonată $x_1=300\,m$



$m=1000\,kg$

$v_0 = 0\,\frac{m}{s}$

a) $a_x(x)=?$, $x\in[0,200]m$, grafic

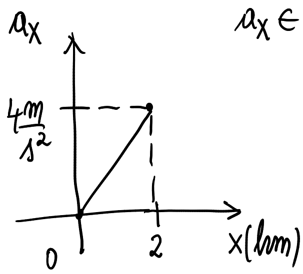
b) $x_m=?$, $v=v_{max}$

c) $L_R=?$, $x\in[0,300]m$

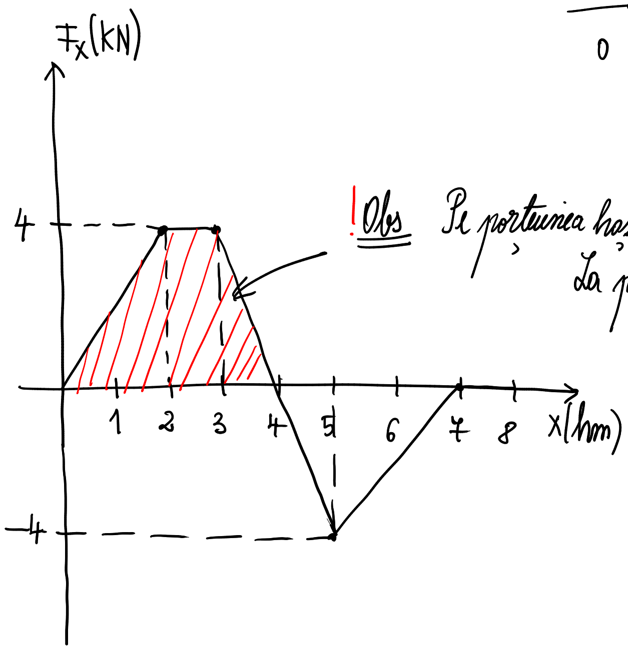
d) $v_1=?$, $x_1=300m$

a) $a_x = \frac{F_x}{m}$ $\quad a_x \in \left(\frac{0}{1000kg}, \frac{4000N}{1000kg}\right)$

$a_x \in [0, 4)\, m/s^2$, crește liniar



b)



! Obs Pe porțiunea hașurată $F_x>0 \Rightarrow a_x>0 \Rightarrow$ viteza crește
La poziția $x=400m$ viteza atinge un maxim.

$$\cancel{E_{c_0}}^{0} + L_{F_x} = E_c(t=4s)$$

$$L_{F_x} = A = \frac{200\cdot 4000}{2} + 4000\cdot 100 + \frac{4000\cdot 100}{2} = 10^6\,J$$

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = L_{F_x}$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2L_{F_x}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^6}{1000}} = 44{,}72\,\frac{m}{s}$$

c) $L_R = \frac{200\cdot 4000}{2} + 4000\cdot 100 = 8\cdot 10^5\,J$, $x\in[0,300]m$

d) $\cancel{E_{c_0}}^{0} + L_R = E_c(t=3s)$

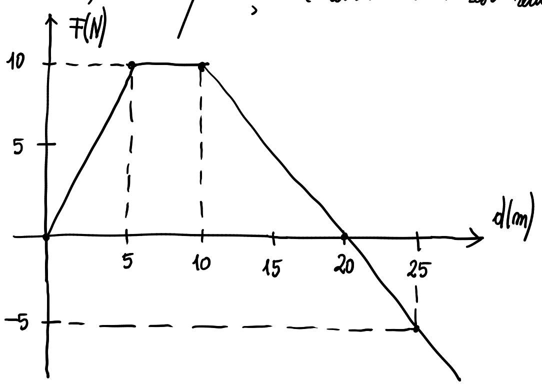
$$L_R = \frac{m\cdot v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2L_R}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 8\cdot 10^5}{10^3}} = 40\,m/s$$

20) Asupra unui corp cu masa $m = 2\,kg$ acționează o forță rezultantă pe direcția axei Ox, a cărei dependență de coordonata x este redată în graficul alăturat. Să se afle:

a) lucrul mecanic total efectuat de forță când $x \in [0,25]\,m$

b) forța când coordonata este $x_1 = 12\,m$

c) puterea instantanee când coordonata este $x_1 = 12\,m$, dacă în punctul de coordonată $x_0 = 0$, corpul are viteza $v_0 = 2{,}645\,\frac{m}{s}$



$m = 2\,kg$

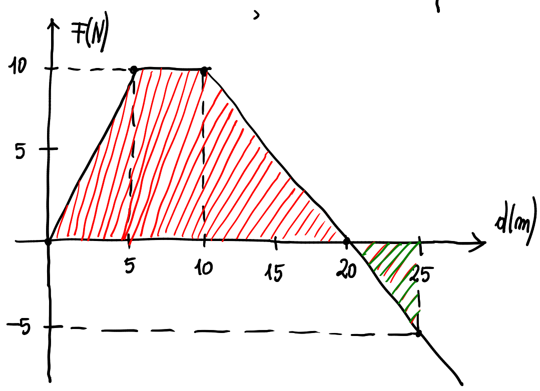
a) $L_F = ?$, $x \in [0,25]\,m$

b) $F_1 = ?$, $x_1 = 12\,m$

c) $P_1 = ?$, $x_1 = 12\,m$

$x_0 = 0\,m$, $v_0 = 2{,}645\,\frac{m}{s}$

a)



$$L_F = A = \frac{5\cdot 10}{2} + 10\cdot 5 + \frac{10\cdot 10}{2} - \frac{5\cdot 5}{2} = 125\,J - 12{,}5\,J = 112{,}5\,J$$

b) $x \in [10,25]\,m$

$\Rightarrow$ pe această porțiune forța scade liniar

$F(x) = ax + b$, unde $a < 0$

Să aflăm ecuația dreptei $F(x)$

$F(10) = a\cdot 10 + b = 10$

$F(20) = a\cdot 20 + b = 0$

$\Rightarrow (-)\quad 10a = -10 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$a\cdot 10 + b = 10$

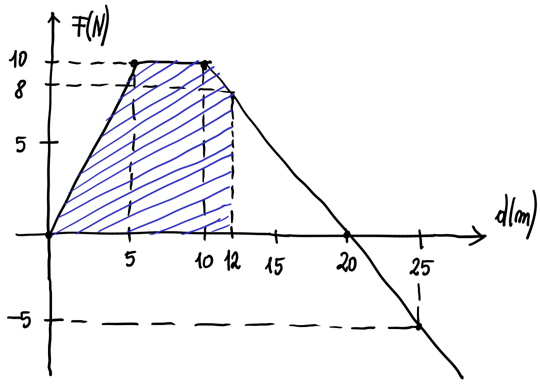
$-1\cdot 10 + b = 10$

$\boxed{b = 20}$

$\Rightarrow F(x) = -x + 20$, $x \in [10,25]$

$F(12) = -12 + 20 = 8\,N$

c) $P_{m_1} = \frac{L_1}{\Delta t}$ (puterea medie)



$$L_1 = \frac{5\cdot 10}{2} + 10\cdot 5 + \left(\frac{10+8}{2}\right)\cdot 2 = 95\,J$$

$x = 0 \rightarrow x_1 = 12$: $E_{c_0} + L_1 = E_{c_1}$

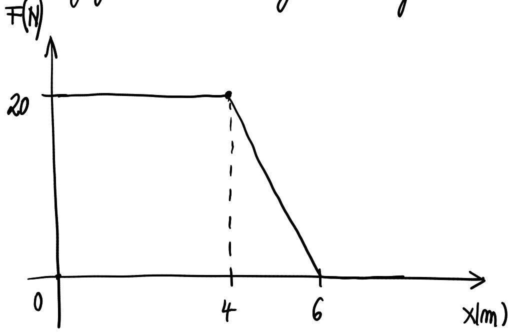
$$\frac{m v_0^2}{2} + L_1 = \frac{m\cdot v_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2L_1}{m}} = \sqrt{2{,}645^2 + \frac{2\cdot 95}{2}} = 10{,}09\,\frac{m}{s}$$

$P_1 = F(x_1)\cdot v_1 = 8N\cdot 10{,}09\,\frac{m}{s} = 80{,}72\,W$ (puterea instantanee)

(21) Un corp de masă $m=5kg$ pornește din repaus și se deplasează cu frecare, pe o suprafață orizontală, sub acțiunea unei forțe de tracțiune orizontale F. Dependența valorii forței F de coordonata corpului este reprezentată în graficul alăturat. Coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu=0{,}2$, să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de forța F pe distanța de 6m
b) viteza corpului în punctul de coordonată $x=6m$
c) distanța parcursă de corp din momentul încetării acțiunii forței F până la oprire



$m=5kg$
$v_0=0\,m/s$
$\mu=0{,}2$

a) $L_F=?$, $d=6m$
b) $v(x=6m)=?$
c) $d_{op}=?$

a) $L_F=A_{\square}=\left(\frac{4+6}{2}\right)\cdot 20=100J$

b) $x=0 \to x=6m$:

$$\cancel{E_{c_0}}^{0}+L_F-|L_{Ff}|=E_c(x=6m)$$

$$L_F-\mu mg\cdot d=\frac{mv^2}{2}$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2L_F}{m}-2\mu g d}=\sqrt{\frac{2\cdot 100}{5}-2\cdot 0{,}2\cdot 10\cdot 6}=4\frac{m}{s}$$

c) $x=6m \to x=x_{oprire}$:

$$E_c(x=6m)+\cancel{L_F}^{0}-|L_{Ff}|=\cancel{E_c(x=x_{oprire})}^{0}$$

$$\frac{m\cdot v^2}{2}-\mu mg\cdot d_{op}=0$$

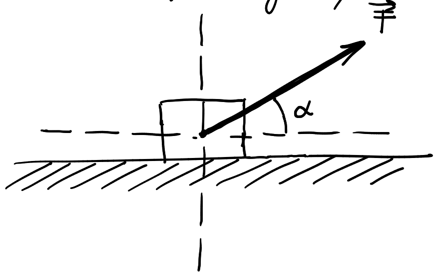
$$\Rightarrow d_{op}=\frac{v^2}{2\mu g}=\frac{4^2}{2\cdot 0{,}2\cdot 10}=4m$$

(22) Pe un plan orizontal se află inițial în repaus un corp cu masa $m=2kg$ supus acțiunii unei forțe $F=15N$, care acționează ca în figură sub un unghi $\alpha=30°$. Mișcarea se face cu frecare coeficientul de frecare fiind $\mu=0,2$. Să se afle, după parcurgerea distanței $d=2m$:

a) viteza corpului

b) energia cinetică a corpului în condițiile a)

c) puterea medie dezvoltată de forța în timpul mișcării



$m=2kg$

$v_0=0\ m/s$

$F=15N$

$\alpha=30°$

$\mu=0,2$

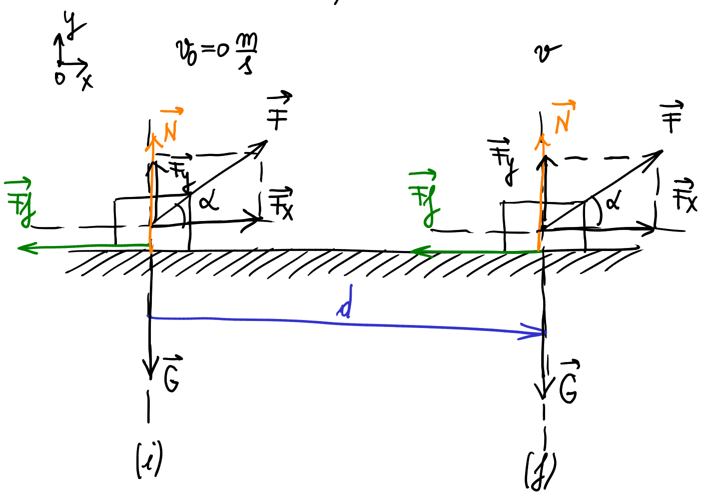
$d=2m$

---

a) $v=?$

b) $E_c=?$

c) $P_m=?$



$$\begin{cases} F_x = F\cos\alpha \\ F_y = F\sin\alpha \end{cases}$$

a) $i \to f$ $\quad \cancel{E_{c_i}}^{0} + L_{F_x} - |L_{F_f}| = \frac{mv^2}{2}$

Principiul II: $\begin{cases} ox: F_x - F_f = ma \\ oy: N + F_y = G \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ox: F\cos\alpha - \mu N = ma \\ oy: N = mg - F\sin\alpha \end{cases}$$

$$(F\cos\alpha)\cdot d - \mu\cdot(mg - F\sin\alpha)\cdot d = \frac{m\cdot v^2}{2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2d}{m}\cdot\left[F\cos\alpha - \mu mg + \mu F\sin\alpha\right]}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\cdot 2}{2}\cdot\left[15\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 0,2\cdot\frac{1}{2}\right) - 0,2\cdot 2\cdot 10\right]} = 3,23\ \frac{m}{s}$$

b) $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{2\cdot(3,23)^2}{2} = 10,43J$

c) $P_m = \frac{L_{F_x}}{\Delta t} = F_m\cdot v_m = F_x\cdot\left(\frac{v_0+v}{2}\right) = F\cos\alpha\cdot\left(\frac{v_0+v}{2}\right)$

$$= 15\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{0+3,23}{2}\right)$$

$$= 21,03\ W$$

(23) Un corp de masă $m = 5 Kg$ este lansat cu viteza inițială $v_0 = 10\frac{m}{s}$ din punctul A, pe o suprafață orizontală, ca în figura alăturată. După ce parcurge distanța $AB = d = 5m$ pe planul orizontal, corpul intră pe un plan înclinat care face unghiul $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala și urcă pe acesta până în punctul C, unde se oprește. Atât pe planul orizontal cât și pe cel înclinat mișcarea are loc cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu_1 = 0{,}5$ pe planul orizontal și $\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pe planul înclinat.

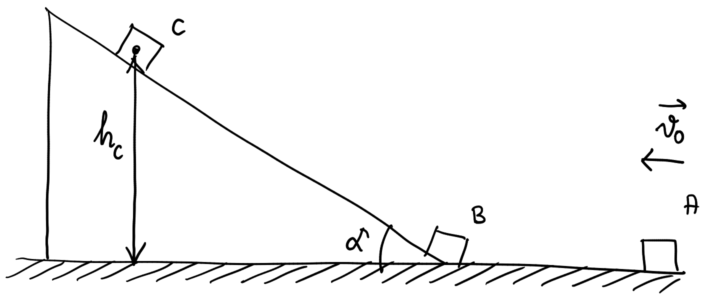
Să se afle:

a) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare pe distanța AB

b) energia cinetică în punctul B

c) înălțimea maximă la care ajunge corpul pe planul înclinat

d) randamentul planului înclinat



$m = 5Kg$

$v_A = 10\frac{m}{s}$

$AB = 5m$

$\alpha = 30^\circ$

$v_C = 0\frac{m}{s}$

$\mu_1 = 0{,}5$

$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

---

a) $L_{Ff} = ?$, AB

b) $E_{cB} = ?$

c) $h_C = ?$

d) $\eta = ?$

a) $|L_{Ff}| = \mu_1 mg \cdot AB = 0{,}5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 5 = 125 J$

b) $A \to B: \quad E_{cA} + \cancel{L_F}^{0} - |L_{Ff}| = E_{cB}$

$$\Rightarrow E_{cB} = \frac{m \cdot v_A^2}{2} - |L_{Ff}| = \frac{5 \cdot 10^2}{2} - 125 = 125 J$$

c) $B \to C: \quad E_{cB} + \cancel{L_F}^{0} - |L_{Ff}| = E_{pgC}$

$$E_{cB} - \mu_2 mg\cos\alpha \cdot BC = mg \cdot h_C$$

dar $\sin\alpha = \frac{CO}{IP} = \frac{h_C}{BC} \Rightarrow BC = \frac{h_C}{\sin\alpha}$

înlocuind $\Rightarrow E_{cB} - \mu_2 mg\cos\alpha \cdot \frac{h_C}{\sin\alpha} = mg h_C$

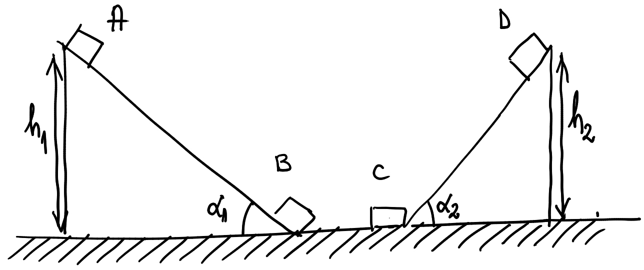
$$h_C \cdot \left(mg + \mu_2 mg \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \right) = E_{cB}$$

$$h_C = \frac{E_{cB}}{mg(1 + \mu_2 \mathrm{ctg}\alpha)} = \frac{125}{5 \cdot 10 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}\right)} = 1{,}25 m$$

d) $\eta = \frac{1}{1 + \mu_2 \mathrm{ctg}\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot \cancel{\sqrt{3}}} = 50\%$

24) O sanie alunecă liber din vârful unui derdeluș de înălțime $h_1=7{,}2m$. Mișcarea pe primul derdeluș se face fără frecare. Sania parcurge apoi o suprafață orizontală cu lungimea $l=23m$ pe care se deplasează cu frecare, $\mu=0{,}05$, după care sania urcă până la înălțimea $h_2=5m$ pe un alt derdeluș cu unghiul $\alpha_2=45°$. Să se afle:

a) viteza saniei la baza primului derdeluș
b) viteza saniei la baza celui de-al doilea derdeluș
c) coeficientul de frecare pe al doilea derdeluș
d) viteza cu care revine la baza primului derdeluș



$h_1=7{,}2m$
$l=BC=23m$, $\mu=0{,}05$
$h_2=5m$, μ_2
$\alpha_2=45°$

---

a) $v_B=?$
b) $v_C=?$
c) $\mu_2=?$
d) $v_B'=?$

a) $A\to B$:
$$E_A+\cancel{L_F}^0-\cancel{|L_{Ff}|}^0=E_B$$
$$mgh_1=\frac{m\cdot v_B^2}{2}$$
$$\Rightarrow v_B=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{2\cdot10\cdot7{,}2}=12\,\frac{m}{s}$$

b) $B\to C$:
$$E_B+\cancel{L_F}^0-|L_{Ff}|=E_C$$
$$\frac{m v_B^2}{2}-\mu mgl=\frac{m v_C^2}{2}$$
$$\Rightarrow v_C=\sqrt{v_B^2-2\mu gl}=\sqrt{12^2-2\cdot0{,}05\cdot10\cdot23}=11\,\frac{m}{s}$$

c) $C\to D$:
$$E_C+\cancel{L_F}^0-|L_{Ff}|=E_D$$
$$\frac{m\cdot v_C^2}{2}-\mu_2 mg\cos\alpha_2\cdot CD=mgh_2$$
dar $\sin\alpha_2=\frac{CO}{CA}=\frac{h_2}{CD}\Rightarrow CD=\frac{h_2}{\sin\alpha_2}$
$$\Rightarrow \mu_2=\frac{\frac{m\cdot v_C^2}{2}-mgh_2}{mg\cos\alpha_2\cdot\frac{h_2}{\sin\alpha_2}}=\frac{v_C^2-2gh_2}{2gh_2\,ctg\alpha_2}=\frac{11^2-2\cdot10\cdot5}{2\cdot10\cdot5\cdot1}=0{,}21$$

d) $D\to B'$:
$$E_D+\cancel{L_F}^0-|L_{Ff}|=E_B'$$
$$mgh_2-\mu_2 mg\cos\alpha_2\cdot\frac{h_2}{\sin\alpha_2}-\mu mgl=\frac{m\cdot v_B'^2}{2}$$
$$\Rightarrow v_B'=\sqrt{2gh_2-2gh_2\mu_2\,ctg\alpha_2-2\mu gl}$$
$$=\sqrt{2\cdot10\cdot5-2\cdot10\cdot5\cdot0{,}21\cdot1-2\cdot0{,}05\cdot10\cdot23}$$
$$=7{,}48\,\frac{m}{s}$$

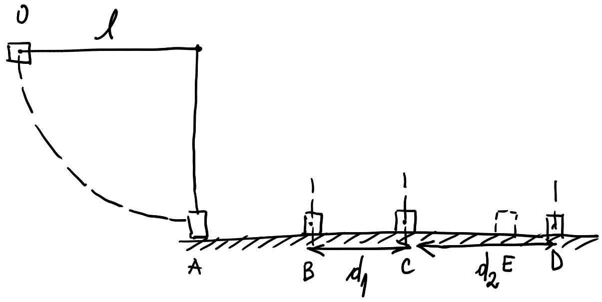
(25) Un corp cu masa $m=80g$ este legat de un fir cu lungimea $l=0{,}8m$. În poziția inițială firul este întins și orizontal, ca în figura alăturată. Corpul este lăsat liber. Când ajunge în poziție verticală, firul se rupe și corpul își continuă mișcarea pe suprafața orizontală. Pe porțiunea AB mișcarea are loc fără frecare, pe porțiunea $BC=d_1=1m$ coeficientul de frecare la alunecare este constant și are valoarea $\mu_1=0{,}3$, iar pe porțiunea $CD=d_2=0{,}5m$ coeficientul de frecare crește liniar de la valoarea $\mu=0$ în C la $\mu_2=0{,}8$ în D. Corpul se oprește în punctul E. Să se afle:

a) energia mecanică a corpului în momentul în care este lăsat liber dacă se consideră energia potențială gravitațională nulă la nivelul suprafeței orizontale

b) viteza corpului când firul ajunge în poziție verticală

c) viteza corpului în punctul C

d) distanța CE parcursă de corp până la oprire



$m=80g=0{,}08\,Kg$
$l=0{,}8m$
$AB,\ \mu=0$
$BC=d_1=1m,\ \mu_1=0{,}3$
$CD=d_2=5\,m,\ \mu\to[0;0{,}8]$

a) $E_0=?,\ v_0=0\frac{m}{s}$
b) $v_A=?$
c) $v_C=?$
d) $CE=?$

a) $E_0=mgl=0{,}08\cdot10\cdot0{,}8=0{,}64J$

b) $E_0+\cancel{L_F}^{0}-\cancel{|L_{Ff}|}^{0}=E_A$

$$\Rightarrow \frac{m\cdot v_A^2}{2}=E_0 \Rightarrow v_A=\sqrt{\frac{2E_0}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot0{,}64}{0{,}08}}=4\frac{m}{s}$$

c) $A\to B:\quad E_A=E_B$ (conservarea energiei)

$B\to C:\quad E_B+\cancel{L_F}^{0}-|L_{Ff_1}|=E_C$

$$E_0-\mu_1 mg\cdot BC=\frac{m\cdot v_C^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_C=\sqrt{\frac{2E_0}{m}-2\mu_1 g BC}$$

$$=\sqrt{\frac{2\cdot0{,}64}{0{,}08}-2\cdot0{,}3\cdot10\cdot1}=3{,}16\frac{m}{s}$$

d) $C\to E:\quad E_C+\cancel{L_F}^{0}-|L_{Ff}|=\cancel{E_E}^{0}$

$$E_C=|L_{Ff}|$$

$$\frac{m\cdot v_C^2}{2}=\overline{F_f}\cdot CE$$

pe porțiunea CD: $\quad F_f(x)=\mu_x mg$

$\mu(x)=ax+b$
$\mu(0)=0$
$\mu(5)=0{,}8$

$\Rightarrow \mu(0)=b=0\Rightarrow \boxed{b=0}$
$\mu(5)=a\cdot5=0{,}8\Rightarrow a=\frac{0{,}8}{5}=0{,}16\Rightarrow\boxed{a=0{,}16}$
$\Rightarrow\boxed{\mu(x)=0{,}16\cdot x}$
$\Rightarrow F_f(x)=0{,}16\cdot x\cdot mg$

$$\frac{m v_C^2}{2}=\overline{F_f(x)}\cdot x$$

$$\frac{m\cdot v_C^2}{2}=\frac{F_f(0)+F_f(x)}{2}\cdot x$$

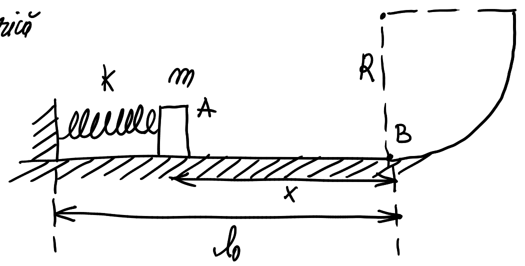
$$\frac{m\cdot v_C^2}{2}=\frac{0{,}16\cdot x\cdot mg}{2}\cdot x\Rightarrow x=CE=\sqrt{\frac{v_C^2}{0{,}16\cdot g}}=\sqrt{\frac{3{,}16^2}{1{,}6}}=2{,}5\,m$$

(26) Un resort elastic orizontal cu constanta elastică $k=100N/m$ este comprimat cu $x=20cm$ de corpul cu masa $m=2kg$ ca în figura alăturată. Se lasă liber sistemul și se neglijează toate frecările. Suprafața sferică are raza $R=20cm$. Să se afle:

a) viteza imprimată corpului când resortul se destinde complet

b) unghiul format cu verticala de raza construită în punctul până la care urcă corpul pe suprafața sferică

c) valoarea coeficientului de frecare cu suprafața orizontală dacă corpul urcă fără frecare numai pe suprafața sferică pe înălțimea $h=5cm$



$k=100N/m$

$x=20\,cm=0{,}2m$

$m=2kg$

$v_A=0\,m/s$

$F_f=0$

$R=20cm=0{,}2m$

---

a) $v_B=?$

b) $\alpha=?$

c) $\mu=?$, $h=5cm=0{,}05m$

a) $$E_A+\cancel{L_F}^{0}-\cancel{|L_{F_f}|}^{0}=E_B$$

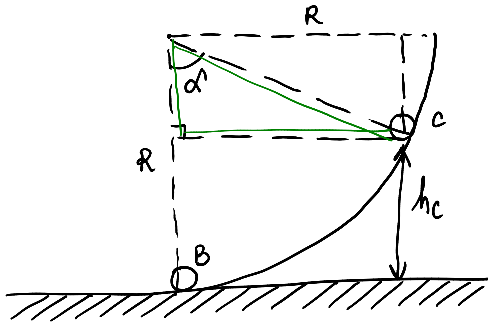
$$\frac{k\cdot x^2}{2}=\frac{m\cdot v_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_B=\sqrt{\frac{kx^2}{m}}=\sqrt{\frac{100\cdot 0{,}2^2}{2}}=1{,}41\,\frac{m}{s}$$

b) $$E_B+\cancel{L_F}^{0}-\cancel{|L_{F_f}|}^{0}=E_C$$

$$\frac{m\cdot v_B^2}{2}=mgh_C$$

$$\Rightarrow h_C=\frac{v_B^2}{2g}=\frac{2}{2\cdot 10}=0{,}1\,m$$



$$\cos\alpha=\frac{0{,}2-0{,}1}{0{,}2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha=60°$$

$\triangle$ $$\cos\alpha=\frac{CA}{IP}=\frac{R-h_C}{R}$$

c) $A\to C'$: $$\frac{kx^2}{2}+\cancel{L_F}^{0}-|L_{F_f}|=mgh_C'$$

$$\frac{kx^2}{2}-\mu mgx=mgh_C'$$

$$\Rightarrow \mu=\frac{\frac{kx^2}{2}-mgh_C'}{mgx}=\frac{kx}{2mg}-\frac{h_C'}{x}$$

$$=\frac{100\cdot 0{,}2}{2\cdot 2\cdot 10}-\frac{0{,}05}{0{,}2}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=0{,}25$$

(27) O bilă cu masa $m=400g$ este lăsată să cadă fără viteză inițială de la o înălțime $h_0=1m$. Neglijăm frecările cu aerul. La ciocnirea cu o suprafață plană de oțel bila pierde $f=10\%$ din energia sa mecanică. Să se afle:

a) înălțimea h_1 la care se ridică bila după prima ciocnire

b) viteza v_2 a bilei imediat după cea de-a doua ciocnire

c) energia mecanică după cea de-a treia ciocnire

$m=400g=0,4kg$

$v_0=0m/s$

$h_0=1m$

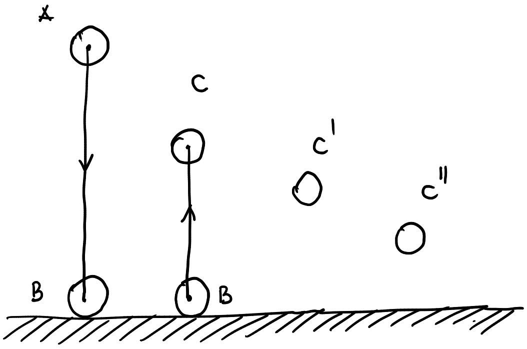
$f=10\%$

---

a) $h_1=?$

b) $v_2=?$

c) $E_3=?$



a) $A\to C$: $E_A + \cancel{L_F}^{0} - f\cdot E_A = E_C$

$$mgh_0(1-f)=mgh_1$$

$$\Rightarrow h_1=h_0(1-f)$$

$$=1\cdot(1-0,1)=0,9m$$

b) $C\to C'$: $E_C - f\cdot E_C = E_B' = E_C'$

$$mgh_0(1-f)(1-f) = \frac{mv_B'^2}{2} = mgh_2$$

$$\Rightarrow v_B'=\sqrt{2gh_0(1-f)^2}$$

$$=\sqrt{2\cdot 10\cdot 1\cdot(1-0,1)^2}$$

$$=4,024\ \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow h_2=h_0(1-f)^2$$

$$=1\cdot(1-0,1)^2=0,81m$$

c) $C'\to C''$: $E_C' - fE_C' = E_B'' = E_C''$

$$mgh_0(1-f)^2\cdot(1-f) = \frac{mv_B''^2}{2} = mgh_3$$

$$\Rightarrow E_3 = mgh_0(1-f)^3$$

$$=0,4\cdot 10\cdot 1\cdot(1-0,1)^3 = 2,916J$$

$$\Rightarrow v_B''=\sqrt{2gh_0(1-f)^3}$$

$$=\sqrt{2\cdot 10\cdot 1\cdot(1-0,1)^3}$$

$$=3,818\ \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow h_3=h_0(1-f)^3$$

$$=1\cdot(1-0,1)^3$$

$$=0,729m$$

După a "n"-a ciocnire:

$$h_n=h_0(1-f)^n$$

$$v_n=\sqrt{2gh_0(1-f)^n}$$

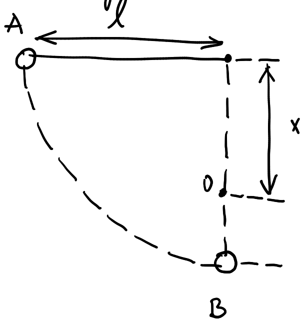
$$E_n=mgh_0\cdot(1-f)^n$$

(28) Un corp de masă $m=1kg$ este suspendat de un fir inextensibil de lungime $l=45cm$. Se scoate corpul din poziția de echilibru și se aduce firul orizontal ca în figura alăturată. Apoi se lasă liber corpul. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle:

a) viteza cu care corpul trece prin poziția de echilibru

b) la ce distanță x, măsurată pe verticală față de punctul de suspensie, trebuie imobilizat firul, astfel încât corpul să fie capabil să descrie un arc cu raza $l-x$ în plan vertical

c) lucrul mecanic efectuat de forța de greutate din punctul de plecare până când corpul ajunge în punctul superior al traiectoriei circulare



$m=1kg$

$l=45cm=0{,}45m$

$v_A=0\,m/s$

---

a) $v_B=?$

b) $x=?$, arc cu raza $l-x$

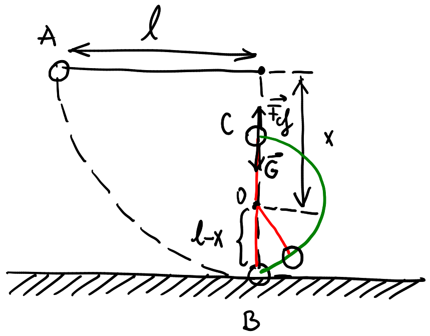
c) $L_G=?$

a) $A\to B:$ $E_A+\cancel{L_F}^{0}-|\cancel{L_{Ff}}^{0}|=E_B$

$$mgl=\frac{mv_B^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_B=\sqrt{2gl}=\sqrt{2\cdot10\cdot0{,}45}=3\frac{m}{s}$$

b)



$B\to C:$ $E_B+\cancel{L_F}^{0}-|\cancel{L_{Ff}}^{0}|=E_C$

$$\frac{m\cdot v_B^2}{2}=mg\cdot2(l-x)+\frac{m\cdot v_C^2}{2}$$

Principiul II $\quad G+\cancel{T}^{0}-F_{cp}=0$

$$mg=\frac{m\cdot v_C^2}{l-x}$$

$$\Rightarrow v_C^2=g(l-x)$$

Înlocuind $\Rightarrow$ $\frac{m\cdot v_B^2}{2}=mg\cdot2(l-x)+\frac{mg(l-x)}{2}\quad\Big|\cdot2$

$$m\cdot v_B^2=4mg(l-x)+mg(l-x)$$

$$l-x=\frac{v_B^2}{5g}$$

$$x=l-\frac{v_B^2}{5g}$$

$$x=0{,}45-\frac{3^2}{5\cdot10}$$

$$x=0{,}45-0{,}18$$

$$x=0{,}27\,m=27\,cm$$

c) $L_{G_{B\to C}}=mg\cdot2(l-x)$

$=1\cdot10\cdot2\cdot(0{,}45-0{,}27)$

$=36\,J$

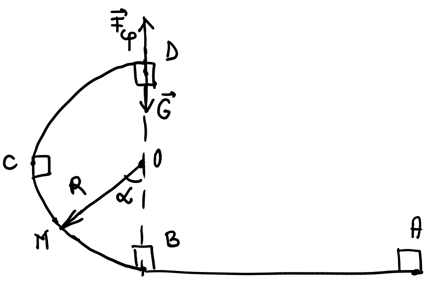
29) Un jgheab orizontal se continuă cu un alt jgheab semicircular vertical BCD de rază R=50cm. Se trimite din punctul A, ca în figura alăturată, în direcție orizontală un corp de masă m=200g. Mișcarea se face fără frecare. Să se afle:

a) viteza pe care trebuie să o aibă corpul în A pentru a fi capabil să descrie semicercul BCD

b) forța de apăsare exercitată de corp asupra jgheabului într-un punct în care poziția corpului formează unghiul $\alpha=60^\circ$ cu verticala

c) viteza cu care lovește corpul jgheabul orizontal după desprinderea de jgheabul semicircular

d) cosinusul unghiului pe care vectorul viteză îl formează cu orizontala când corpul lovește jgheabul orizontal



$m = 200g = 0{,}2kg$
$R = 50cm = 0{,}5m$
$F_f = 0$

a) $v_{A_{min}} = ?$, $v_D = 0\ \frac{m}{s}$

b) $N = ?$, $\alpha = 60^\circ$

c) $v_E = ?$

d) $\cos\alpha = ?$, $\vec{v}_E$

a)

$A \to B$: $E_A + \cancel{L_F}^{0} - \cancel{|L_{F_f}|}^{0} = E_D$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = mg \cdot (2R) + \frac{m \cdot v_D^2}{2}$$

Principiul II în D : $G + \cancel{N}^{0} - F_{cp} = 0$

$$mg - \frac{m \cdot v_D^2}{R} = 0$$

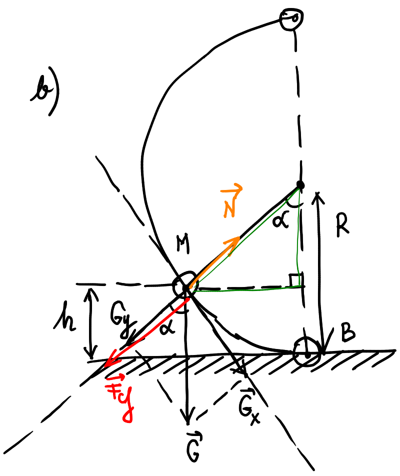
$$\Rightarrow v_D^2 = gR$$

Înlocuind $\Rightarrow$ $\frac{m \cdot v_A^2}{2} = mg(2R) + mg\frac{R}{2}$ $\Big| \cdot 2$

$$v_A^2 = 4gR + R$$

$$v_A = \sqrt{5gR} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 0{,}5} = 5\ m/s$$

b)



$$\begin{cases} G_y = G\cos\alpha \\ G_x = G\sin\alpha \end{cases}$$

Principiul II $N - G_y - F_f = 0$

$$N = G_y + F_f$$

$$N = mg\cos\alpha + m\frac{v_M^2}{R}$$

$\Rightarrow N = mg\cos\alpha + \frac{m}{R} \cdot \left[v_B^2 - 2gR(1-\cos\alpha)\right]$, $v_B = v_A$

$$= 0{,}2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} + \frac{0{,}2}{0{,}5}\left[5^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0{,}5\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{\cancel{20}^{4} \cdot 2}{\cancel{5}} = 9N$$

$B \to M$: $E_B + \cancel{L_F}^{0} - \cancel{|L_{F_f}|}^{0} = E_M$

$$\frac{m \cdot v_B^2}{2} = mgh + \frac{m v_M^2}{2} \quad \Big| \cdot 2$$

$$v_B^2 = 2gh + v_M^2$$

$$\Rightarrow v_M^2 = v_B^2 - 2gh$$

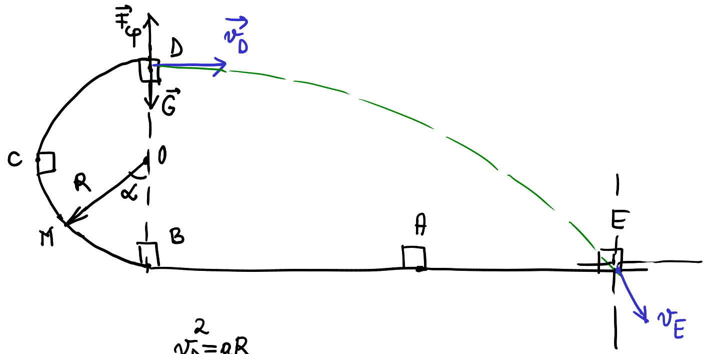
$\Rightarrow v_M^2 = v_B^2 - 2gR(1-\cos\alpha)$

Pitagora : $\cos\alpha = \frac{CA}{IP} = \frac{R-h}{R}$

$$R\cos\alpha = R - h$$

$$\Rightarrow h = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha)$$

c)



$v_D^2 = gR$

$v_D = \sqrt{gR}$

D→E: $E_D + \cancel{L_{\vec F}}^{0} - |\cancel{L_{\vec F_f}}|^{0} = E_E$

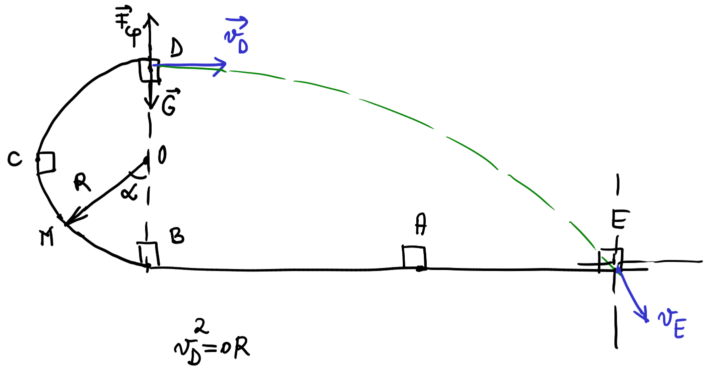
$$mg\cdot(2R) + \frac{m\cdot v_D^2}{2} = \frac{m\cdot v_E^2}{2} \Big| \cdot 2$$

$$(4R)g + gR = v_E^2$$

$$\Rightarrow v_E = \sqrt{5gR} = \sqrt{5\cdot 10\cdot 0{,}5} = 5\ m/s$$

!Obs Corpul lovește solul cu aceeași viteză cu care a plecat, dar direcția vectorului viteză este diferită.
$|\vec v_D| = |\vec v_E|$

d)



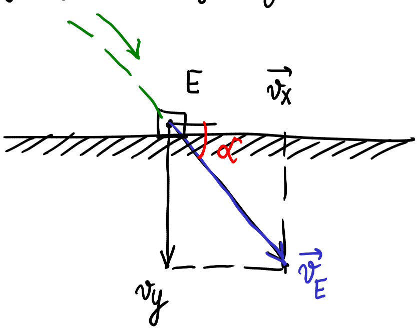
$v_D^2 = gR$

Corpul se comportă ca într-o aruncare pe orizontală în câmp gravitațional.

$\begin{cases} Ox: & MRU \quad v_x = v_D = const. = \sqrt{gR} = 2{,}23\ \frac{m}{s} \\ Oy: & MRUV \quad v_y = v_{0y} + a\cdot t \end{cases}$

$v_y = 0 - g\cdot t_c$

Galilei: $v_y^2 = \cancel{v_{0y}^2}^{0} + 2g(2R) \Rightarrow v_y = \sqrt{4gR} = 2\sqrt{10\cdot 0{,}5} = 4{,}47\ m/s$



$$tg\,\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{4gR}}{\sqrt{gR}} = 2$$

$$\alpha = arctg\,2 = 63{,}43^\circ$$

$$\cos\alpha = \frac{CA}{IP} = \frac{v_x}{v_E} = \frac{\sqrt5}{5}$$

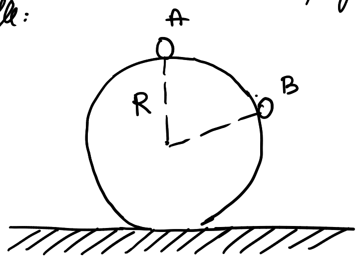
$$\cos\alpha = \frac{\sqrt5}{5} \approx 0{,}447$$

30. Din vârful unei sfere care se sprijină pe sol, cu raza R=1,2 m, se lasă liber un corp de mici dimensiuni care alunecă pe sferă fără frecare ca în figura alăturată. La un moment dat corpul se desprinde de pe sferă. Să se afle:

a) viteza corpului în momentul desprinderii de pe sferă

b) înălțimea față de suprafața de sprijin la care se desprinde corpul

c) viteza corpului în momentul în care acesta atinge solul



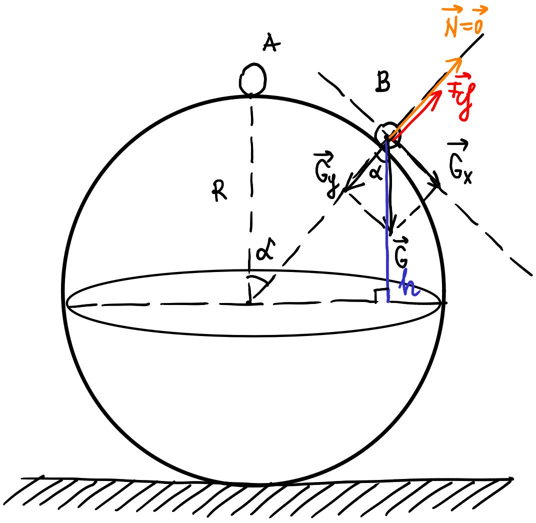
$R = 1{,}2\,m$

a) $v_B = ?$

b) $h = ?$

c) $v_C = ?$

a)



$$\begin{cases} G_x = G\sin\alpha \\ G_y = G\cos\alpha \end{cases}$$

$A \to B:\quad E_A + \cancel{L_F}^{0} - |\cancel{L_{F_f}}|^{0} = E_B$

$$mg\cdot(2R) = \frac{m\cdot v_B^2}{2} + mg(R+h)$$

dar $\cos\alpha = \frac{CA}{IP} = \frac{h}{R}$

$\Rightarrow h = R\cos\alpha$

Principiul II în B: $\quad G_y - \cancel{N}^{0} - F_{cf} = 0$

$$mg\cos\alpha = \frac{m\cdot v_B^2}{R}$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{gR\cos\alpha}$$

Înlocuind $\Rightarrow mg(2R) = \frac{m v_B^2}{2} + mgR(1+\cos\alpha)$

$$mg(2R) = \frac{mgR\cos\alpha}{2} + mgR(1+\cos\alpha)$$

$$mg2R = \frac{mgR\cos\alpha}{2} + mgR + mgR\cos\alpha$$

$$mgR = mgR\cos\alpha\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$1 = \cos\alpha\cdot\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3}$$

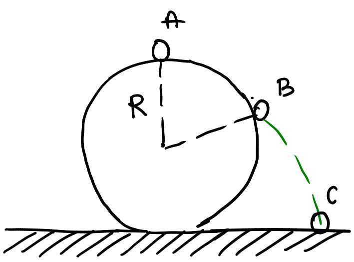
$$v_B = \sqrt{gR\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2gR}{3}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10\cdot 1{,}2}{3}} = 2{,}82\,\frac{m}{s}$$

b) $h = R\cos\alpha = \frac{2}{3}R$

$h = \frac{2}{3}\cdot 1{,}2 = 0{,}8\,m$

$h_B = h + R = 0{,}8\,m + 1{,}2\,m = 2\,m$

c)



$A \to C:\quad E_A + \cancel{L_F}^{0} - |\cancel{L_{F_f}}|^{0} = E_C$

$$mg(2R) = \frac{m\cdot v_C^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_C = \sqrt{4gR} = \sqrt{4\cdot 10\cdot 1{,}2} = 6{,}92\,\frac{m}{s}$$