TRANSLAȚIE. ECHILIBRUL DE TRANSLAȚIE (EXERCIȚII)
ROTAȚIE. ECHILIBRUL DE ROTAȚIE.

$$\boxed{\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$$\vec{M}_F \perp \vec{F},\ \vec{M}_F \perp \vec{r},\ \vec{M}_F \perp A_{\square}(\vec{r},\vec{F})$$

$$\boxed{M_F = F(r\sin\alpha)}$$

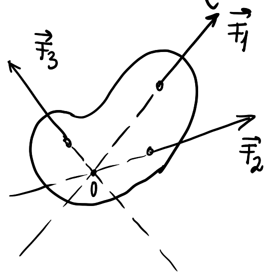
$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$$\boxed{L = (mv)\cdot r\sin\alpha}$$

MCU: $\boxed{L = mvr = m\omega r^2} = constant$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}} \qquad \boxed{\vec{M}_F = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{p}} \qquad \boxed{\vec{M}_F\cdot\Delta t = \Delta\vec{L}}$$

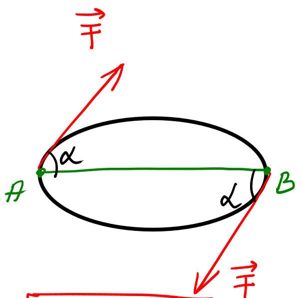


FORȚE CONCURENTE

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

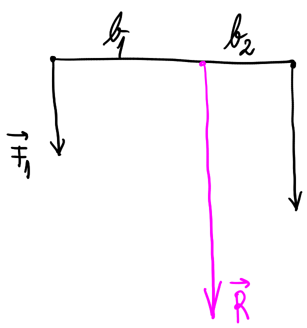
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$



$$\boxed{\vec{M}_C = \vec{BA} \times \vec{F}}$$

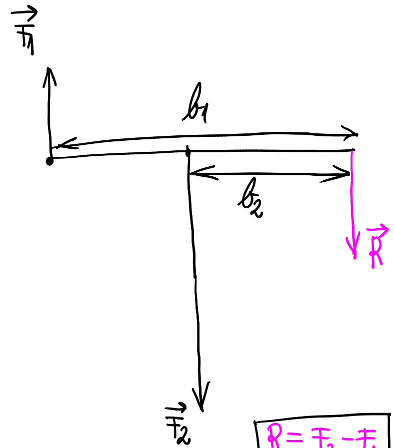
$$\boxed{M_C = (BA\sin\alpha)\,F}$$

FORȚE PARALELE



$$\boxed{R = F_1 + F_2}$$

$$\boxed{F_1 b_1 = F_2 b_2}$$



$$\boxed{R = F_2 - F_1}$$

$$\boxed{F_1 b_1 = F_2 b_2}$$

ECHILIBRUL DE TRANSLAȚIE

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n \\ &R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots + F_{nx} = 0 \\ &R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots + F_{ny} = 0 \end{aligned}}$$

ECHILIBRUL DE ROTAȚIE

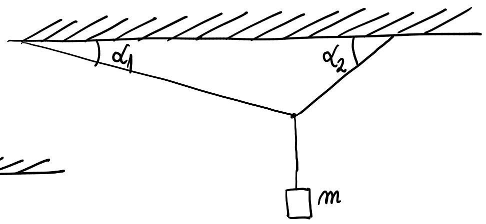
O: (pol) $\boxed{\vec{M}_R = \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} + \vec{M}_{F_3} + \ldots + \vec{M}_{F_n} = \vec{0}}$

ECHILIBRU INSTABIL $\rightarrow$ $E_p = E_{p\,max}$ (local)

ECHILIBRU STABIL $\rightarrow$ $E_p = E_{p\,min}$ (local)

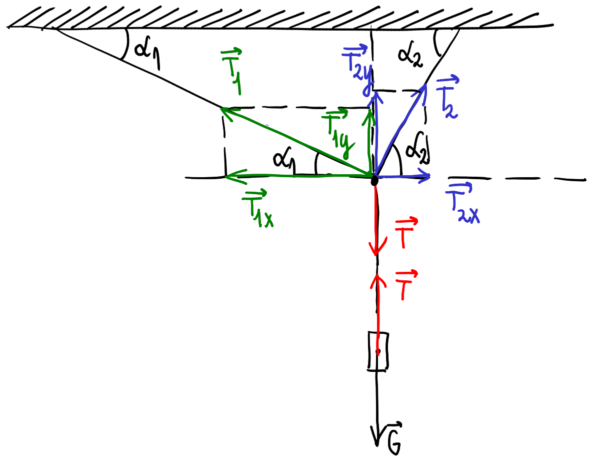
ECHILIBRU INDIFERENT $\rightarrow$ $E_p = constant$ (local)

1) Un corp cu masa $m = 4\,kg$ este suspendat prin intermediul a trei fire ca în figura 2. Se cunosc valorile unghiurilor $\alpha_1 = 30^0$ și $\alpha_2 = 60^0$. Să se afle tensiunile din cele trei fire



$m = 4\,kg$
$\alpha_1 = 30^0$
$\alpha_2 = 60^0$

$T_1, T_2, T = ?$



$T_{1x} = T_1 \cos\alpha_1$
$T_{1y} = T_1 \sin\alpha_1$
$T_{2x} = T_2 \cos\alpha_2$
$T_{2y} = T_2 \sin\alpha_2$

ECHILIBRU $\Rightarrow \begin{cases} T_{1y} + T_{2y} = T = G \\ T_{1x} = T_{2x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 \sin\alpha_1 + T_2 \sin\alpha_2 = mg \\ T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2 \Rightarrow T_2 = \dfrac{T_1 \cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_1 \sin\alpha_1 + T_1 \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \cdot \sin\alpha_2 = mg$$

$$T_1 = \frac{mg}{\dfrac{\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2}{\cos\alpha_2}} = \frac{4 \cdot 10}{\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}} = \frac{40}{2} = 20N$$

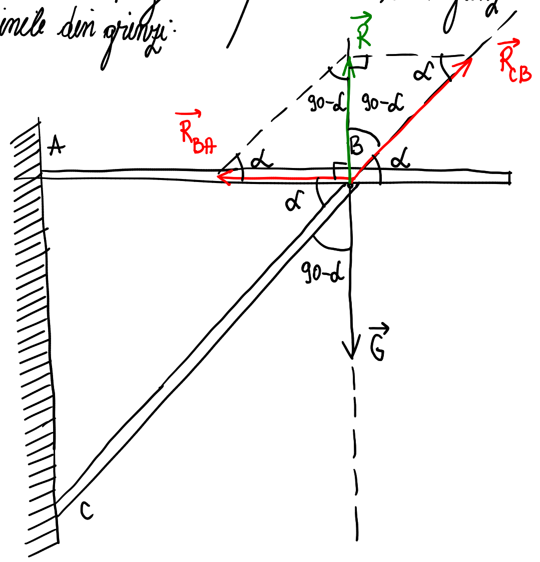
$$T_2 = T_1 \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} = 20 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = 20\sqrt{3} = 34{,}64N$$

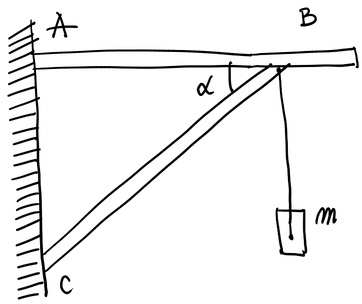
② Un corp cu masa $m = 12\,kg$ este suspendat de două grinzi ca în figura alăturată. Dacă se cunoaște unghiul $\alpha = 30°$, să se afle tensiunile din grinzi.

$m = 12\,kg$

$\alpha = 30°$

$T_1, T_2 = ?$





Grinda CB este apăsată de $\vec{G}$ ⇒ reacționează cu $\vec{R}_{CB}$

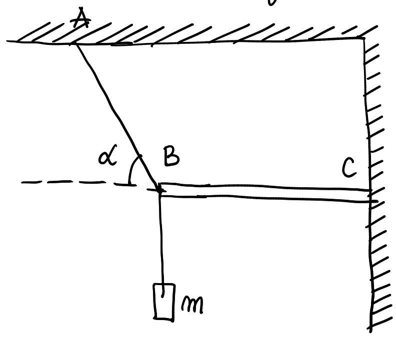
Grinda AB este întinsă de $\vec{G}$ ⇒ reacționează cu $\vec{R}_{BA}$

ECHILIBRU STATIC : $\begin{cases} R_{CB}\cos\alpha = R_{AB} \\ R_{CB}\sin\alpha = G \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_{CB} = \dfrac{mg}{\sin\alpha} \\ R_{AB} = \left(\dfrac{mg}{\sin\alpha}\right)\cdot\cos\alpha = mg\,ctg\,\alpha \end{cases}$$

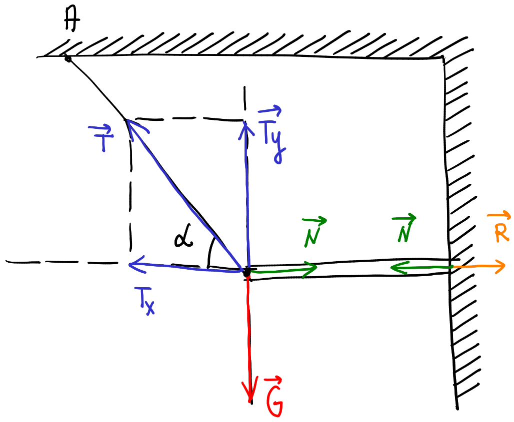
$$\Rightarrow \begin{cases} R_{CB} = \dfrac{12\cdot 10}{\frac{1}{2}} = 240N \\ R_{AB} = 12\cdot 10\cdot \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = 207{,}84N \end{cases}$$

(3) Un corp cu masa $m=2kg$ este suspendat de tavan ca în figura alăturată printr-un cablu oblic care formează cu orizontala un unghi $\alpha=30^\circ$. Corpul este prins și de o grindă orizontală. Să se afle tensiunea din cablu și forța de reacțiunea din grindă



$m=2kg$
$\alpha=30^\circ$

$T=?$
$N=?$



$T_x = T\cos\alpha$
$T_y = T\sin\alpha$

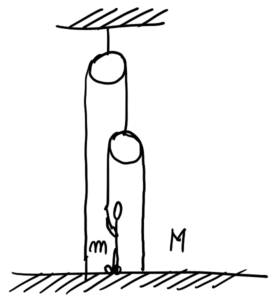
ECHILIBRU STATIC: $\begin{cases} T_x = N \\ T_y = G \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} T\cos\alpha = N \\ T\sin\alpha = mg \end{cases}$

$\Rightarrow N = \frac{mg}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha$

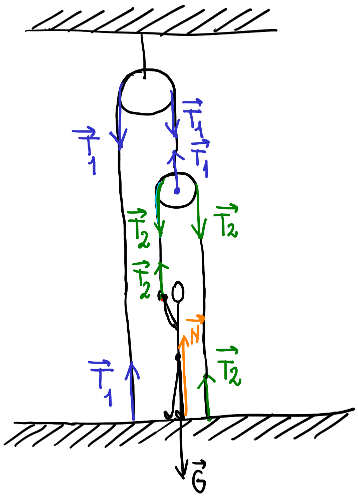
$N = mg\,ctg\alpha = 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{3} = 34{,}64N$

4. Un om cu masa $m=80kg$ se află pe o platformă cu masa $M=40kg$ ca în figura alăturată.
Să se afle: a) forța cu care trage omul sfoara pentru a se menține în echilibru
b) forța de apăsare exercitată de om asupra platformei pe care se află



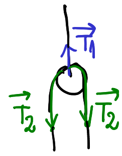
$m = 80kg$
$M = 40kg$

a) $F = ?$
b) $N = ?$



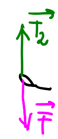
Scripetele este în echilibru static:

$\Rightarrow T_1 = 2T_2 \quad (1)$



Mâna omului este în echilibru static:

$\Rightarrow T_2 = F \quad (2)$

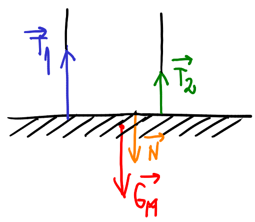


Omul este în echilibru static:

$\Rightarrow T_2 + N - G_m = 0 \quad (3)$

Platforma este în echilibru static:

$\Rightarrow T_1 + T_2 = N + G_M \quad (4)$



$\overset{(1)}{\Rightarrow} T_2 = \frac{T_1}{2}$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} N = G_m - T_2 = G_m - \frac{T_1}{2}$

$\overset{(4)}{\Rightarrow} T_1 + \frac{T_1}{2} = G_m - \frac{T_1}{2} + G_M$

$2T_1 = G_M - G_m$

$\Rightarrow T_1 = \frac{G_M + G_m}{2} = \frac{40 \cdot 10 + 80 \cdot 10}{2} = 600N$

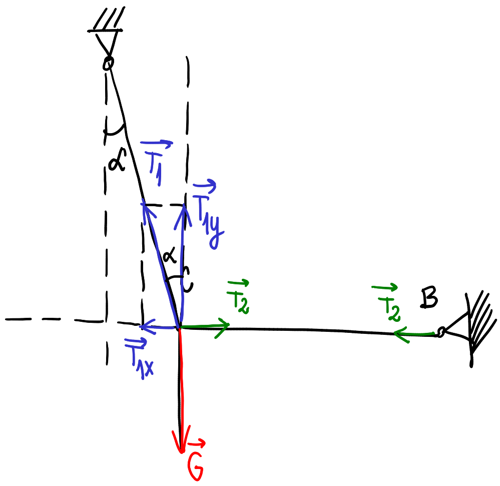
a) $\Rightarrow T_2 = F = 300N$

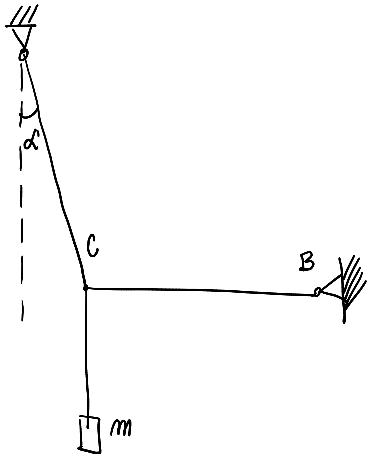
b) $\Rightarrow N = 800 - \frac{600}{2} = 500N$

⑤ De firul ACB este prinsă o masă $m=16\,kg$ ca în figura alăturată. În poziția de echilibru cablul CB este orizontal, iar cablul AC formează cu verticala un unghi $\alpha=30^\circ$. Să se afle valorile celor două tensiuni din cele două cabluri:

$m=16\,kg$
$\alpha=30^\circ$

$T_1=?$
$T_2=?$





ECHILIBRU STATIC: $\begin{cases} G=T_{1y} \\ T_{1x}=T_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} T_1\cos\alpha=mg \\ T_1\sin\alpha=T_2 \end{cases}$

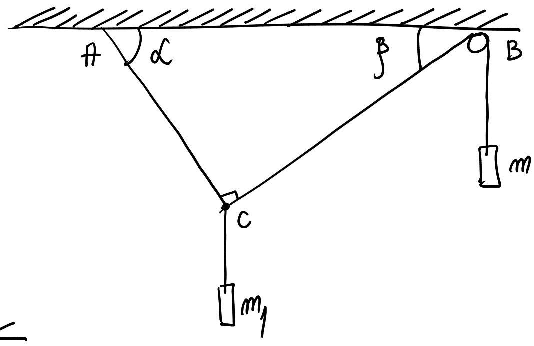
$\Rightarrow \begin{cases} T_1=\dfrac{mg}{\cos\alpha} = \dfrac{16\cdot 10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 184{,}75\,N \\ T_2=\dfrac{mg}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = \dfrac{16\cdot 10}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}} = 92{,}37\,N \end{cases}$

(6) Un cablu este prins de cârligul A și este trecut peste un scripete fix B. La capătul liber al firului se suspendă un corp cu masa $m=2kg$, iar în punctul C un alt corp cu masa m_1 ca în figura alăturată. Sistemul se află în echilibru. Să se afle:

a) valoarea masei m_1, astfel încât tensiunea din firul AC este de două ori mai mare decât tensiunea din firul BC

b) valoarea tensiunii din firul AC

c) forța care acționează asupra scripetelui B

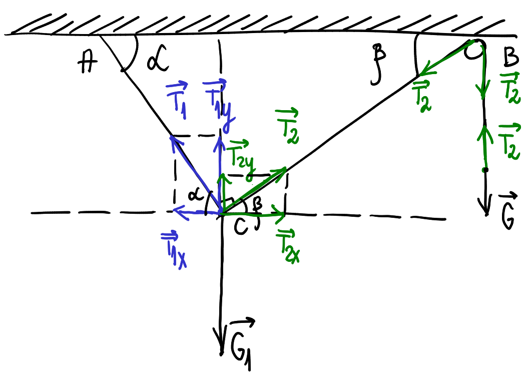


$m=2kg$

a) $m_1=?$ $\quad T_1=2\cdot T_2$

b) $T_1=?$

c) $N_B=?$



ECHILIBRU STATIC : $\begin{cases} T_{1x}=T_{2x} \\ T_{1y}+T_{2y}=G_1 \end{cases}$

ECHILIBRU STATIC: $T_2=G$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1\cos\alpha = T_2\cos\beta \\ T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta = m_1 g \\ T_2 = mg \end{cases}$$

$\Rightarrow T_2 = 20N$

a) $T_1 = 2T_2 = 40N$

$\Rightarrow 2\cancel{T_2}\cos\alpha = \cancel{T_2}\cdot\cos(90-\alpha)$

$2\cos\alpha = \cos(90-\alpha)$

$2\cos\alpha = \sin\alpha$, $4\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

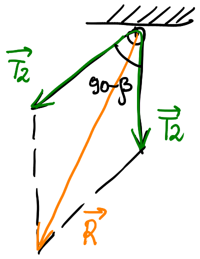
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow 4\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$$m_1=\frac{T_1\sin\alpha+T_2\sin\beta}{g}=\frac{40\cdot\frac{2}{\sqrt5}+20\frac{1}{\sqrt5}}{10}=\frac{10}{\sqrt5}=4{,}47kg$$

b) $T_1=2T_2=40N$

c)



$$R=\sqrt{T_2^2+T_2^2+2T_2T_2\cos(90-\beta)}$$

$$=T_2\sqrt{1+1+2\sin\beta}$$

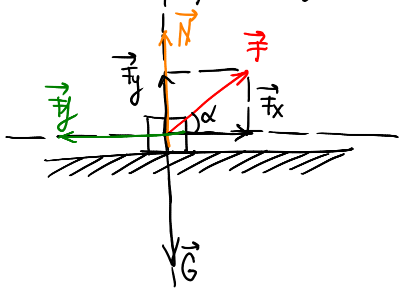
$$=20\sqrt{2(1+\sin\beta)}\ \frac{1}{\sqrt5}$$

$$=34{,}02\ N$$

(7) Un corp cu masa $m=1kg$ se află pe un plan orizontal, unde se poate mișca cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu=0,3$. Să se afle cu ce forță trebuie să se tragă de corp sub unghiul $\alpha=45^\circ$ față de orizontală, astfel încât corpul să se miște uniform.

$m=1kg$
$\mu=0,3$
$\alpha=45^\circ$

$F=?$ (MRU)



ECHILIBRU DINAMIC DE TRANSLAȚIE:

$$\begin{cases} \vec{G}+\vec{F}+\vec{N}+\vec{F_f}=\vec{0} \\ F_x-F_f=0 \\ N+F_y-G=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\cos\alpha-\mu N=0 \\ N=mg-F\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)=0$$

$$F\cos\alpha-\mu mg+\mu F\sin\alpha=0$$

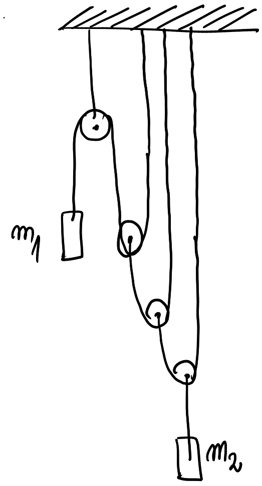
$$F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=\mu mg$$

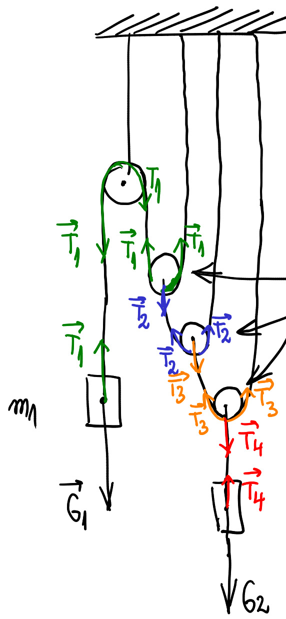
$$F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$$

$$=\frac{0,3\cdot 1\cdot 10}{\frac{\sqrt{2}}{2}+0,3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 1,3}=3,26\,N$$

(8) Fie sistemul din figură. Se cunoaște $m_1 = 8kg$. Să se afle valoarea masei m_2 care este menținută în repaus.

$$\frac{m_1 = 8kg}{m_2 = ?}$$





Scripeții sunt în echilibru static:

$T_4 = 2T_3$

$T_3 = 2T_2$

$T_2 = 2T_1$

$$G_2 = T_4 = 2T_3 = 2 \cdot (2 \cdot T_2) = 2 \cdot (2 \cdot (2T_1)) = 2^3 \cdot G_1$$

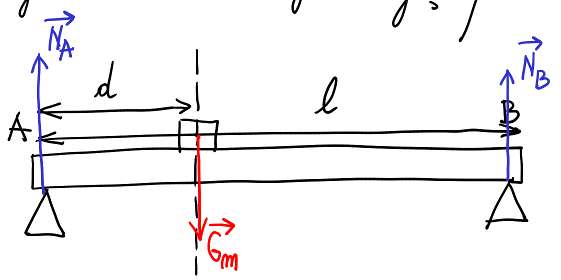
$m_2 = 8 m_1$

$= 64 kg$

9) O bară cu lungimea $l=1m$ se sprijină în două puncte A și B. La distanța $d=20cm$ de capătul A se așează un corp cu masa $m=1kg$. Se neglijează greutatea barei. Să se afle cu ce forțe apasă bara asupra punctelor de sprijin.

$AB=l=1m$
$d=20cm=0{,}2m$
$m=1kg$, $M\approx 0kg$

$N_A, N_B=?$



față de polul (A) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE : $\vec{M}_{G_m}+\vec{M}_{N_B}=\vec{0} \Rightarrow M_{G_m}-M_{N_B}=0$

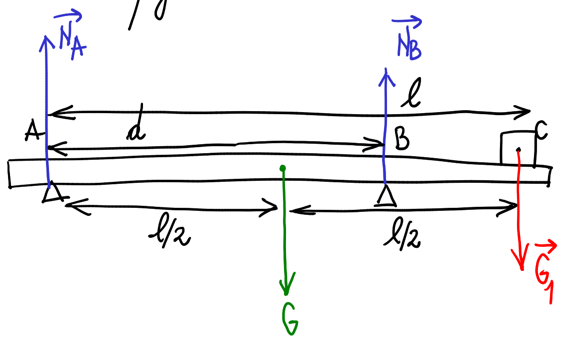
față de polul (B) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE : $\vec{M}'_{G_m}+\vec{M}_{N_A}=0 \Rightarrow M_{N_A}-M'_{G_m}=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A: & G_m\cdot d=N_B\cdot l \Rightarrow N_B=\dfrac{mgd}{l}=\dfrac{1\cdot 10\cdot 0{,}2}{1}=2N \\ B: & G_m\cdot(l-d)=N_A\cdot l \Rightarrow N_A=\dfrac{mg(l-d)}{l}=\dfrac{1\cdot 10(1-0{,}2)}{1}=8N \end{cases}$$

(10) O grindă omogenă AC orizontală cu masa $m=10\,kg$ se sprijină în două puncte A și B aflate la distanța $d=0{,}8\,m$ unul de celălalt. La capătul C al grinzii, aflat la distanța $l=1\,m$ de punctul A se atârnă o greutate cu masa $m_1=4\,kg$. Să se afle forțele cu care grinda acționează asupra punctelor de sprijin.

AC, $l=1\,m$
AB, $d=0{,}8\,m$
$m=10\,kg$
$m_1=4\,kg$

$N_A=?$
$N_B=?$



față de polul (A) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE :

$$G\cdot\frac{l}{2}+G_1\cdot l-N_B\cdot d=0$$

$$\Rightarrow N_B=\frac{\frac{mgl}{2}+m_1 g l}{d}=\frac{\frac{10\cdot10\cdot1}{2}+4\cdot10\cdot1}{0{,}8}=112{,}5\,N$$

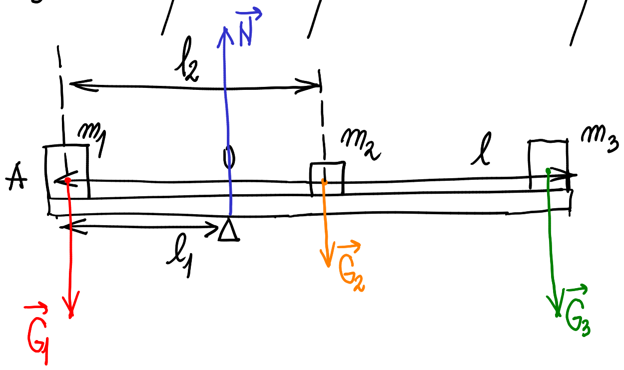
față de polul (B) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE :

$$N_A\cdot d+G_1\cdot(l-d)-G\cdot\left(d-l/2\right)=0$$

$$\Rightarrow N_A=\frac{mg\left(d-\frac{l}{2}\right)-m_1 g(l-d)}{d}=\frac{10\cdot10\cdot(0{,}8-0{,}5)-4\cdot10\cdot(1-0{,}8)}{0{,}8}$$

$$=27{,}5\,N$$

11) O scândură subțire și fără masă AC cu lungimea $l = 1{,}6\,m$ se sprijină pe un suport O aflat la distanța $l_1 = 0{,}6\,m$ de capătul A. De capătul A al scândurii se prinde o masă $m_1 = 800g$, iar la distanța $l_2 = 1m$ de capătul A se prinde o masă $m_2 = 400g$. Să se afle valoarea masei m_3 ce trebuie prinsă de capătul C al scândurii pentru ca aceasta să fie orizontală.



$AC = l = 1{,}6\,m$

$OA = l_1 = 0{,}6\,m$

$m_1 = 800\,g = 0{,}8\,kg$

$AB = l_2 = 1\,m$

$m_2 = 400g = 0{,}4\,kg$

$m_3 = ?$ (C) ECHILIBRU

față de polul (O) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: $G_1 l_1 - G_2 \cdot (l_2 - l_1) - G_3 \cdot (l - l_1) = 0$

$$m_1 g l_1 - m_2 g (l_2 - l_1) - m_3 g \cdot (l - l_1) = 0$$

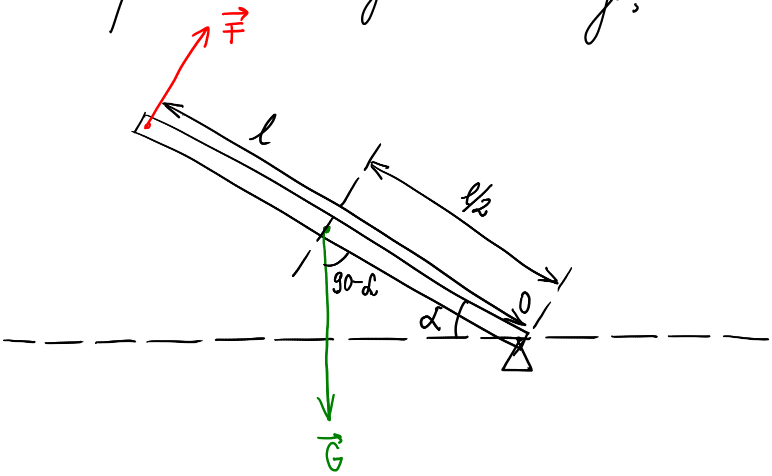
$$m_3 = \frac{m_1 l_1 - m_2 (l_2 - l_1)}{(l - l_1)}$$

$$m_3 = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}6)}{1{,}6 - 0{,}6} = 0{,}320\,kg = 320\,g$$

(12) Un muncitor ridică o scândură cu masa $m = 5\,kg$ până când scândura formează cu orizontala unghiul $\alpha = 30^\circ$ acționând cu o forță perpendiculară pe scândură. Să se afle valoarea acestei forțe.

$m = 5\,kg$
$\alpha = 30^\circ$

$F = ?$



$$\vec{M}_G = \vec{\frac{l}{2}} \times \vec{G}$$

$$M_G = \frac{l}{2} \cdot G \cdot \sin(90 - \alpha)$$

față de polul (O) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE:

$$F \cdot l - G \cdot \frac{l}{2} \sin(90 - \alpha) = 0$$

$$F \cdot l = G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos\alpha$$

$$F = \frac{mg \cos\alpha}{2}$$

$$F = \frac{5 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 21{,}65\,N$$

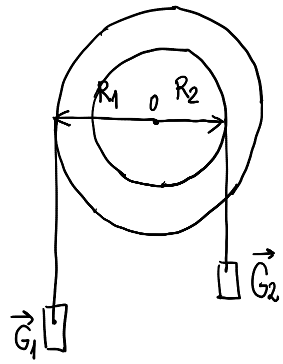
(13) Un scripete dublu are razele $R_1 = 15\text{ cm}$ și $R_2 = 3\text{ cm}$. Se prinde de scripetele cu raza R_2 un corp cu masa $m_1 = 2\text{kg}$ ca în figura alăturată. Inițial scripetele este blocat. Să se afle valoarea masei corpului m_2, astfel încât scripetele să nu se rotească după prinderea acestui corp și deblocarea scripetelui.

$R_1 = 15\text{cm}$

$R_2 = 3\text{cm}$

$m_1 = 2\text{kg}$

$m_2 = ?$ ECHILIBRU



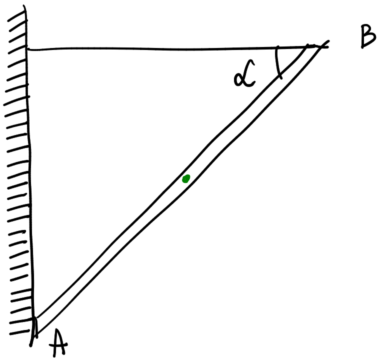
față de polul (O) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: $G_1 \cdot R_1 = G_2 \cdot R_2$

$$m_1 g R_1 = m_2 g R_2$$

$$m_2 = \frac{m_1 R_1}{R_2} = \frac{2 \cdot 0{,}15}{0{,}03} = 10\text{kg}$$

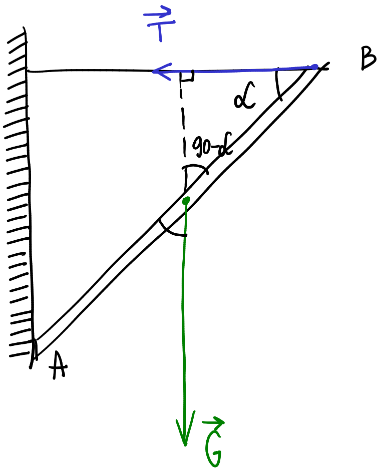
(14) O bară omogenă AB, cu masa $m=200kg$ se poate roti în jurul unui punct de sprijin A aflat pe sol. Bara este susținută sub un unghi cu orizontala $\alpha=30^\circ$ în repaus cu ajutorul unui cablu orizontal care este prins de capătul B al barei ca în figură. Să se afle:

a) tensiunea în cablu
b) reacțiunea în articulație
c) tangenta unghiului format de reacțiunea din punctul A cu orizontala



$m=200kg$
$\alpha=30^\circ$

a) $T=?$
b) $N_A=?$
c) $\beta(N_A,Ox)=?$

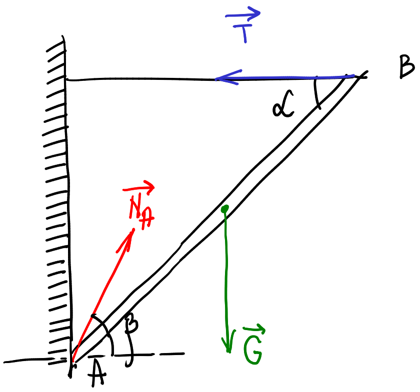


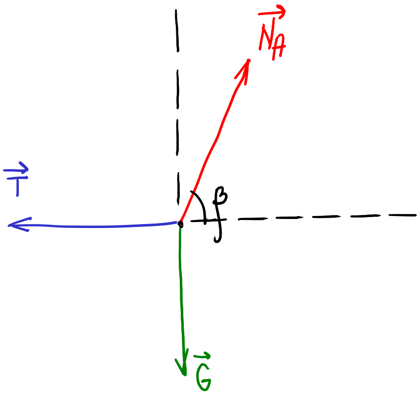
a) față de polul (A) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: $T\cdot(l\sin\alpha)-G\cdot\left[\frac{l}{2}\cdot\sin(90-\alpha)\right]=0$

$$T\cdot\cancel{l}\cdot\sin\alpha = mg\cdot\frac{\cancel{l}}{2}\cdot\cos\alpha$$

$$T=\frac{mg}{2}\cdot ctg\alpha=\frac{200\cdot10}{2}\cdot\sqrt{3}=1732{,}05\,N$$

b)





ECHILIBRU STATIC DE TRANSLAȚIE: $\vec{N_A}+\vec{T}+\vec{G}=0$

$$N_A\cos\beta=T$$
$$N_A\sin\beta=mg$$

$$(\div)\Rightarrow tg\beta=\frac{mg}{T}\Rightarrow\beta=arctg\frac{mg}{T}=arctg\frac{2000}{1000\sqrt{3}}$$

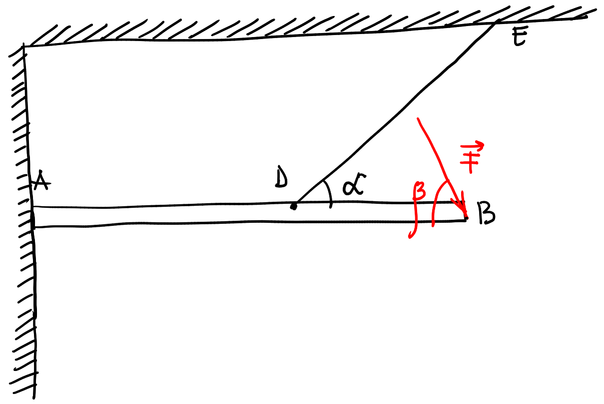
$$\beta=49{,}10^\circ$$

$$N_A=\frac{T}{\cos\beta}=\frac{1000\sqrt{3}}{\cos(49{,}10^\circ)}=2645{,}75N$$

(15) O scândură orizontală AB cu lungimea $l=4m$ și masa $m=20kg$ este articulată în A și legată cu ajutorul cablului DE care face un unghi $\alpha=30^\circ$ cu orizontala. Punctul D se află la distanța $d=1{,}5m$ de capătul B. Pentru a menține scândura în poziție orizontală în punctul B acționează o forță $F=300N$, a cărei direcție formează cu orizontala un unghi $\beta=45^\circ$ ca în figură. Să se afle:

a) tensiunea din cablul DE

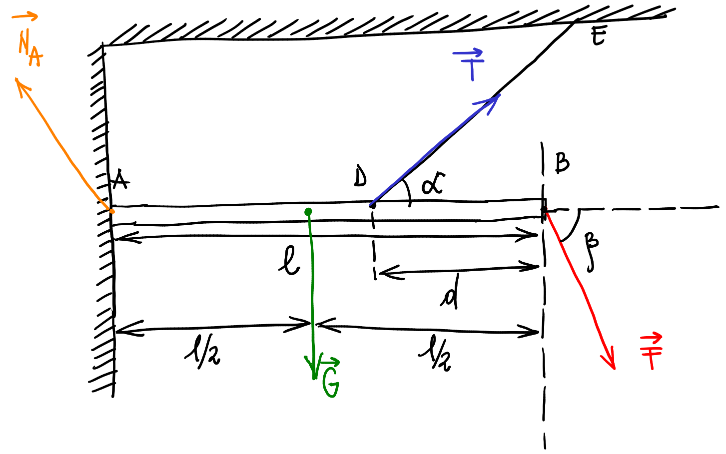
b) forța de reacțiune în articulația A



$AB = l = 4m$
$m = 20kg$
$\alpha = 30^\circ$
$DB = d = 1{,}5m$
$F = 300N$
$\beta = 45^\circ$

---

a) $T = ?$
b) $N_A = ?$



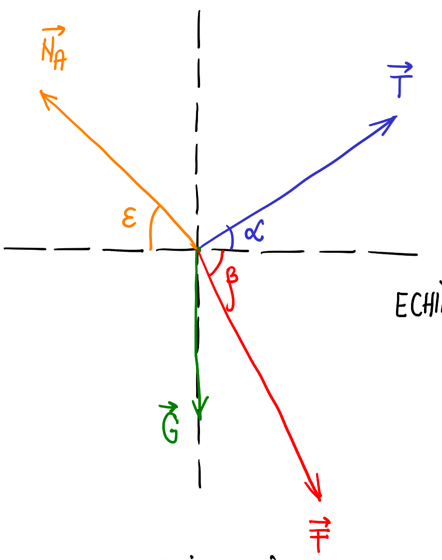
a) față de polul (A) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: $G\cdot\frac{l}{2} + F\cdot\left[l\cdot\sin(180-\beta)\right] - T\cdot\left[(l-d)\sin(180-\alpha)\right] = 0$

$$\Rightarrow T = \frac{mg\frac{l}{2} + Fl\sin(180-\beta)}{(l-d)\sin(180-\alpha)}$$

$$T = \frac{20\cdot10\cdot\frac{4}{2} + 300\cdot4\cdot\sin(180^\circ-45^\circ)}{(4-1{,}5)\sin(180^\circ-30^\circ)}$$

$$T = \frac{400 + 1200\cdot0{,}7071}{2{,}5\cdot0{,}5} = 998{,}82\,N$$

b)



ECHILIBRU STATIC DE TRANSLAȚIE:
$$\begin{cases} \vec{N_A} + \vec{T} + \vec{G} + \vec{F} = \vec{0} \\ N_A\cos\varepsilon = T\cos\alpha + F\cos\beta \\ N_A\sin\varepsilon + T\sin\alpha = G + F\sin\beta \end{cases}$$

$$N_A\sin\varepsilon = mg + F\sin\beta - T\sin\alpha$$
$$N_A\cos\varepsilon = T\cos\alpha + F\cos\beta$$

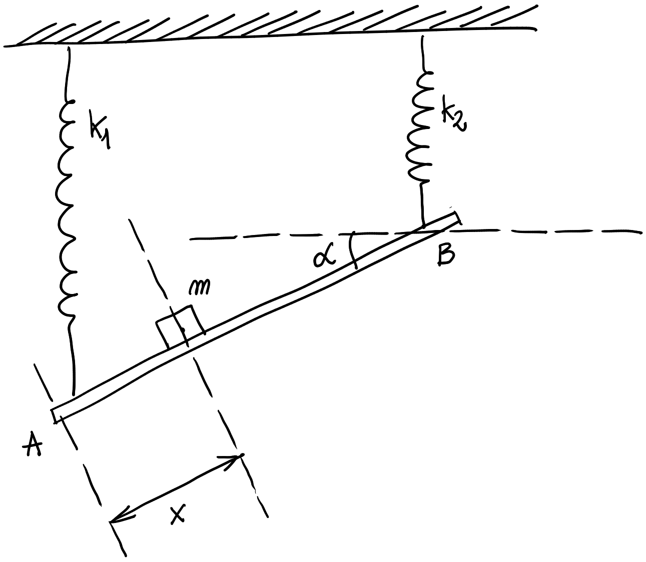
$$\div \quad tg\,\varepsilon = \frac{mg + F\sin\beta - T\sin\alpha}{T\cos\alpha + F\cos\beta} = \frac{20\cdot10 + 300\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 998{,}82\cdot\frac{1}{2}}{998{,}82\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 300\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = -0{,}08078 \quad \varepsilon = -4{,}61^\circ$$

$$N_A = \frac{mg + F\sin\beta - T\sin\alpha}{\sin\varepsilon}$$

$$N_A = \frac{20\cdot10 + 300\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 998{,}82\cdot\frac{1}{2}}{\sin(-4{,}61^\circ)} = 1080{,}10N$$

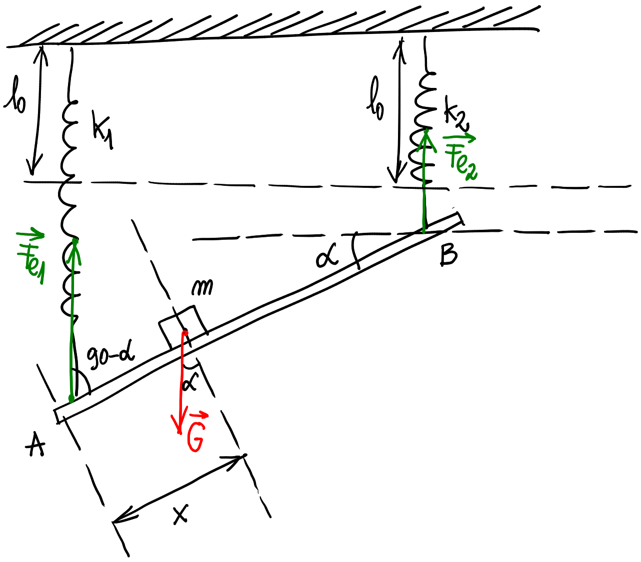
16) O scândură AB cu lungimea $l=20cm$ și cu greutatea neglijabilă este prinsă la capete cu ajutorul a două resorturi cu constantele elastice $K_1=50N/m$ și $K_2=150N/m$ de tavan ca în figură. Inițial resorturile au lungimi egale. Pe scândură se așază un corp cu masa $m=1kg$, astfel încât scândura se înclină cu unghiul $\alpha=30°$. Să se afle:

a) deformațiile resorturilor
b) forțele elastice în cele două resorturi
c) distanța măsurată față de capătul A la care se așază corpul
d) distanța măsurată față de capătul A la care se așază corpul astfel încât scândura să rămână orizontală



$AB=l=0{,}2\,m$
$K_1=50\,\frac{N}{m}$
$K_2=150\,\frac{N}{m}$
$l_{0_1}=l_{0_2}=l_0$
$m=1kg$
$\alpha=30°$

a) $\Delta l_1, \Delta l_2=?$
b) $F_{e_1}, F_{e_2}=?$
c) $x=?$
d) $d=?$, scândura $\rightarrow$ orizontală



$$\sin\alpha=\frac{CO}{IP}=\frac{\Delta l_1-\Delta l_2}{l}$$

față de polul (A) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: $G\cdot\left[x\cdot\sin(90-\alpha)\right]-F_{e_2}\cdot\left[l\cdot\sin(90+\alpha)\right]=0$

față de polul (B) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: $F_{e_1}\cdot\left[l\cdot\sin(90-\alpha)\right]-G\cdot\left[(l-x)\cdot\sin(90+\alpha)\right]=0$

ECHILIBRU STATIC DE TRANSLAȚIE: $F_{e_1}+F_{e_2}=G$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Delta l_1-\Delta l_2=l\sin\alpha\\ K_1\Delta l_1+K_2\Delta l_2=mg\end{cases}\Rightarrow K_1\cdot(l\sin\alpha+\Delta l_2)+K_2\Delta l_2=mg\Rightarrow\Delta l_2=\frac{mg-K_1 l\sin\alpha}{K_1+K_2}=\frac{1\cdot10-50\cdot0{,}2\cdot\frac{1}{2}}{200}=0{,}025\,m$$

$$\Delta l_1=l\sin\alpha+\Delta l_2=0{,}2\cdot\frac{1}{2}+0{,}025=0{,}125\,m$$

b) $F_{e_1}=K_1\cdot\Delta l_1=50\cdot0{,}125=6{,}25N$
$F_{e_2}=K_2\,\Delta l_2=150\cdot0{,}025=3{,}75N$

c) $mg\cdot x\,\cancel{\cos\alpha}=K_2\Delta l_2\cdot l\cdot\cancel{\cos\alpha}$
$$x=\frac{K_2\Delta l_2\, l}{mg}=\frac{150\cdot0{,}025\cdot0{,}2}{1\cdot10}=0{,}075\,m=7{,}5\,cm$$

d) $F_{e_1}'+F_{e_2}'=G$ $\quad K_1\Delta l+K_2\Delta l=mg$ $\longrightarrow$ (A): $G\cdot x'=F_{e_2}'\cdot l\Rightarrow x'=\frac{K_2\,\Delta l\,l}{mg}=\frac{150\cdot0{,}05\cdot0{,}2}{1\cdot10}=0{,}15\,m=15\,cm$

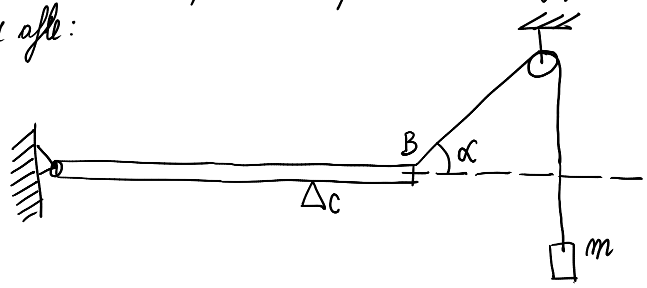
$\Rightarrow\Delta l=\frac{mg}{K_1+K_2}=\frac{1\cdot10}{200}=0{,}05\,m=5\,cm$

ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE

17) O bară cu lungimea $l=2m$ și masa $m_b=32\,kg$ este articulată în punctul A și sprijinită în punctul C aflat față de capătul A la 3/4 din lungimea barei. Bara se află în poziție orizontală prin prinderea capătului B al barei cu un corp cu masa $m=2kg$ cu ajutorul unui fir inextensibil care trece peste un scripete ideal ca în figura alăturată. Firul formează cu orizontala un unghi $\alpha=30°$. Să se afle:

a) reacțiunea în reazemul C

b) forța dezvoltată în articulație



$l=2m$

$m_b=32kg$

$AC=3/4\,l$

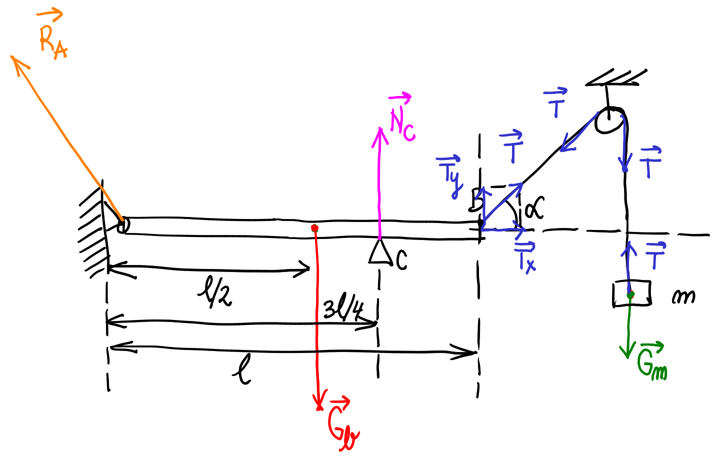
$m=2kg$

$\alpha=30°$

---

a) $N_C=?$

b) $R_A=?$

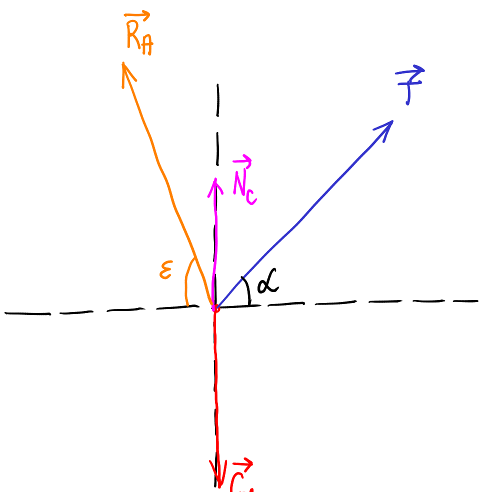


m în echilibru $\Rightarrow T=G_m$

a) față de polul (A) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: $G_b\left(\frac{l}{2}\right)-N_C\left(\frac{3l}{4}\right)-T\left[l\cdot\sin(180°-\alpha)\right]=0$

$$\Rightarrow N_C=\frac{m_b g\cdot\frac{l}{2}-mg\,l\sin\alpha}{\frac{3l}{4}}=\frac{32\cdot10\cdot\frac{1}{2}-2\cdot10\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=200N$$

b)



ECHILIBRU STATIC DE TRANSLAȚIE:
$$\begin{cases}\vec{T}+\vec{G_b}+\vec{N_C}+\vec{R_A}=\vec{0}\\ T\cos\alpha=R_A\cos\varepsilon\\ N_C+R_A\sin\varepsilon+T\sin\alpha=G_b\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} R_A\cos\varepsilon=T\cos\alpha\\ R_A\sin\varepsilon=m_b g-T\sin\alpha-N_C\end{array}$$

$$(\div)\quad tg\,\varepsilon=\frac{m_b g-T\sin\alpha-N_C}{T\cdot\cos\alpha}=\frac{32\cdot10-2\cdot10\cdot\frac{1}{2}-200}{2\cdot10\cdot\frac{\sqrt3}{2}}=\frac{110}{17{,}32}$$

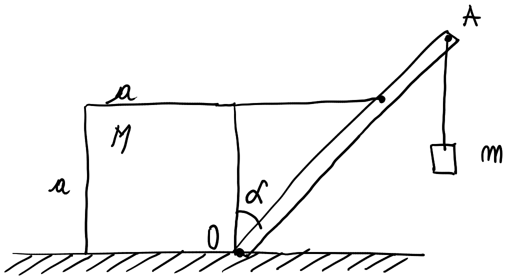
$$tg\,\varepsilon=6{,}350\Rightarrow\varepsilon=81{,}05°$$

$$R_A=\frac{T\cos\alpha}{\cos\varepsilon}=\frac{20\cdot\frac{\sqrt3}{2}}{\cos(81{,}05°)}=111{,}35N$$

(18) O bară omogenă cu masa $m=0{,}2kg$ și lungimea $OA=l=2m$ este articulată de muchia unui bloc de forma unui cub cu latura $a=10cm$ și cu masa $M=5kg$. În punctul A este fixată greutatea $G=4N$. Sistemul este ținut în echilibru sub un unghi α cu ajutorul unui fir prins în punctul B care are direcție orizontală în figura alăturată. Să se afle:

a) tensiunea din firul de legătură

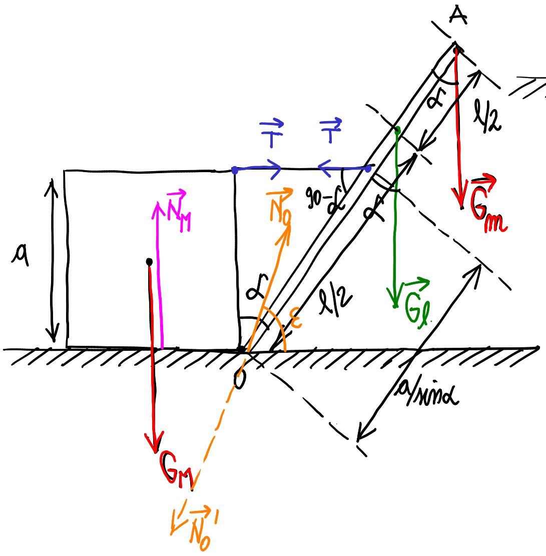
b) sinusul unghiului α pentru care cubul nu se răstoarnă în jurul muchiei care trece prin punctul O



$m_l=0{,}2kg$
$OA=l=2m$
$a=10cm=0{,}1m$
$M=5kg$
$G_m=4N$
α

---

a) $T=?$
b) $\sin\alpha=?$, echilibru de rotație



față de polul (O) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: (pentru bară)

$$T\cdot\left[\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin(90-\alpha)\right]-G_l\cdot\left[\frac{l}{2}\cdot\sin\alpha\right]-G_m\cdot\left[l\cdot\sin\alpha\right]=0$$

ECHILIBRU STATIC DE TRANSLAȚIE: (pentru bară)

$$\begin{cases}\vec{T}+\vec{G}_l+\vec{G}_m+\vec{N}_0=0\\ N_0\cos\varepsilon=T\\ N_0\sin\varepsilon=G_l+G_m\end{cases}\Rightarrow N_0=\sqrt{T^2+(G_l+G_m)^2}$$

față de polul (O) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: (pentru cub)

$$G_M\cdot\left(\frac{a}{2}\right)-T\cdot(a)-N_M\cdot\left(\frac{a}{2}\right)=0$$

ECHILIBRU STATIC DE TRANSLAȚIE: (pentru cub)

$$\begin{cases}\vec{T}+\vec{G}_M+\vec{N}_0'+\vec{N}_M=\vec{0}, \quad |\vec{N}_0'|=|N_0|\\ N_0\sin\varepsilon+N_M=G_M\Rightarrow(G_l+G_m)+N_M=G_M\\ N_0\cos\varepsilon=T\end{cases}$$

$$\Rightarrow N_M=G_M-G_l-G_m=50-2-4=44N$$

a)

$$Mg\cdot\left(\frac{a}{2}\right)-Ta-N_M\frac{a}{2}=0$$

$$\frac{Mg}{2}-T-\frac{N_M}{2}=0\Rightarrow T=\frac{Mg}{2}-\frac{N_M}{2}=\frac{Mg-(Mg-m_lg-mg)}{2}=\frac{(m_l+m)g}{2}=3N$$

b)

$$T\cdot a\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-m_lg\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha-mgl\sin\alpha=0$$

$$T\cdot a\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-m_lg\cdot\frac{l}{2}x-mglx=0\Rightarrow T\cdot a\sqrt{1-x^2}=x^2\cdot\left(m_lg\cdot\frac{l}{2}+mgl\right)$$

notație: $t=x^2$

$$44\cdot0{,}1\cdot\sqrt{1-t}=t\cdot\left(\frac{2\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}+4\cdot2\right)$$

$$4{,}4\sqrt{1-t}=t\cdot10$$

$$0{,}44\cdot\sqrt{1-t}=t\ |(\ )^2$$

$$0{,}44(1-t)=t^2$$

$$0{,}44-0{,}44t-t^2=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2}=\frac{0{,}44\pm\sqrt{0{,}44^2-4\cdot(-1)\cdot(0{,}44)}}{2\cdot(-1)}$$

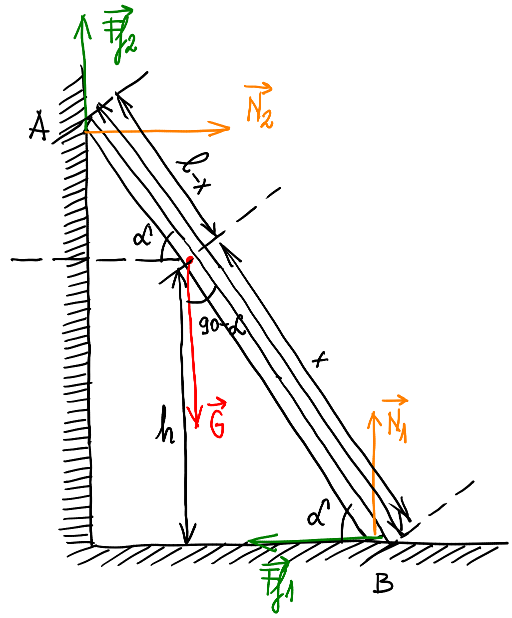
$$t_1=0{,}4788\Rightarrow x=0{,}691$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin\alpha=0{,}69199\\ \alpha=43{,}78^0\end{array}}$$

19. O scară neuniformă cu lungimea $l=1m$ poate sta în echilibru sprijinită de un perete vertical până la un unghi maxim $\alpha=30^\circ$, format cu podeaua. Cunoscând coeficientul de frecare la alunecare cu peretele și podeaua $\mu=0,4$, să se afle înălțimea la care se află centrul de masă al scării.

$l=1m$
$\alpha=30^\circ$
$\mu=0,4$

$h=?$



$$\sin\alpha = \frac{CO}{IP} = \frac{h}{x}$$
$$h = x\cdot\sin\alpha$$

$$\begin{cases} F_{f1} = \mu N_1 \\ F_{f2} = \mu N_2 \end{cases}$$

față de polul (A) ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE: $G\cdot\left[(l-x)\cdot\sin(90+\alpha)\right] + F_{f1}\cdot\left[l\sin\alpha\right] - N_1\cdot\left[l\cdot\sin(90-\alpha)\right] = 0$

ECHILIBRU STATIC DE TRANSLAȚIE: $\begin{cases} \vec{F_{f2}}+\vec{N_2}+\vec{G}+\vec{F_{f1}}+\vec{N_1}=\vec{0} \\ N_1+F_{f2}=G \\ N_2=F_{f1} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} mg(l-x)\cos\alpha + \mu N_1 l\sin\alpha - N_1 l\cos\alpha = 0 \\ \left.\begin{matrix} N_1+\mu N_2 = mg \\ N_2=\mu N_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow N_1+\mu^2 N_1 = mg \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \dfrac{mg}{1+\mu^2} \\ N_2 = \dfrac{\mu mg}{1+\mu^2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{mg}(l-x)\cos\alpha + \frac{\mu \cancel{mg}}{1+\mu^2} l\sin\alpha - \frac{\cancel{mg} l}{1+\mu^2}\cos\alpha = 0$$

$$(l-x)\cos\alpha + \frac{\mu l}{1+\mu^2}\cdot\sin\alpha - \frac{l\cos\alpha}{1+\mu^2} = 0$$

$$(1+\mu^2)(l-x)\cos\alpha + \mu l\sin\alpha - l\cos\alpha = 0$$

$$l-x = \frac{l\cos\alpha - \mu l\sin\alpha}{(1+\mu^2)\cos\alpha}$$

$$x = l\left(1-\frac{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}{(1+\mu^2)\cos\alpha}\right) = l\left(1-\frac{1-\mu\,tg\alpha}{1+\mu^2}\right)$$

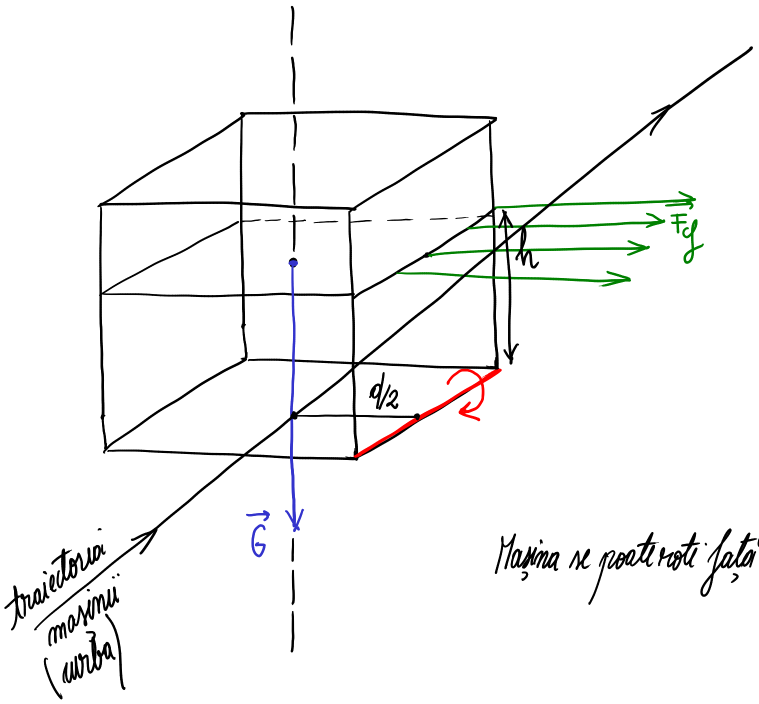
$$h = x\cdot\sin\alpha = l\sin\alpha\left(1-\frac{1-\mu\,tg\alpha}{1+\mu^2}\right)$$

$$h = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1-0,4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+(0,4)^2}\right] = 0,1685\,m$$

$$h = 16,85\,cm$$

(20) Să se afle viteza minimă pe care trebuie să o aibă un autoturism care intră într-o curbă cu raza $R=50m$ pentru ca acesta să nu se răstoarne. Cunoaștem distanța dintre roțile autoturismului $d=1,2m$ și înălțimea la care se află centrul de greutate al autoturismului față de sol $h=0,3m$.

$R=50m$
$d=1,2m$
$h=0,3m$



Mașina se poate roti față de latura desenată cu roșu.

$$\Rightarrow \text{ECHILIBRU STATIC DE ROTAȚIE} \Leftrightarrow G\cdot\frac{d}{2} \geq F_{cf}\cdot h$$

$$\Leftrightarrow mg\frac{d}{2} \geq \frac{mv^2}{R}h$$

$$\Leftrightarrow v \leq \sqrt{\frac{gRd}{2h}}$$

$$\Leftrightarrow v \leq \sqrt{\frac{10\cdot 50\cdot 1,2}{2\cdot 0,3}}$$

$$\Leftrightarrow v \leq 31,62\frac{m}{s} = 113,84\frac{km}{h}$$