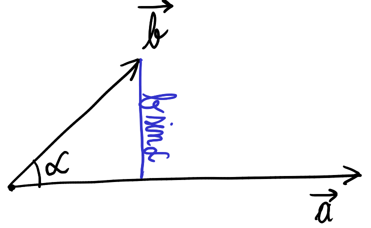
TRANSLAȚIE. ECHILIBRUL DE TRANSLAȚIE
ROTAȚIE. ECHILIBRUL DE ROTAȚIE

! Obs Regula produsului vectorial

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{w}}$$

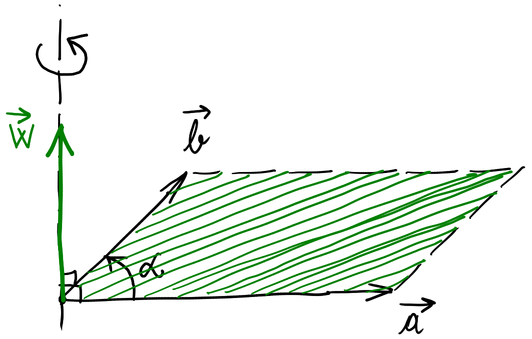


$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{w}$

→ modulul lui $\vec{w}$: $w = a(b \cdot \sin\alpha) = A_{\square}$

→ direcția lui $\vec{w}$: $\vec{w} \perp \vec{a}$, $\vec{w} \perp \vec{b}$, $\vec{w} \perp A_{\square}$

→ sensul lui $\vec{w}$: sens dat de regula burghiului



$|\vec{w}| = A_{\square}$

Obs $\alpha = 0^\circ \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ produs vectorial nul

$\alpha = 90^\circ \Rightarrow |\vec{w}| = a \cdot b \cdot \sin 90$ (with $\sin 90 = 1$)

$|\vec{w}| = a \cdot b$ produs vectorial maxim

Produsul vectorial este o măsură a cât de mult un vector participă la $\boxed{\text{rotația}}$ celuilalt vector.

1. MOMENTUL FORȚEI $(\vec{M}_F)$

$$\boxed{\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}}$$

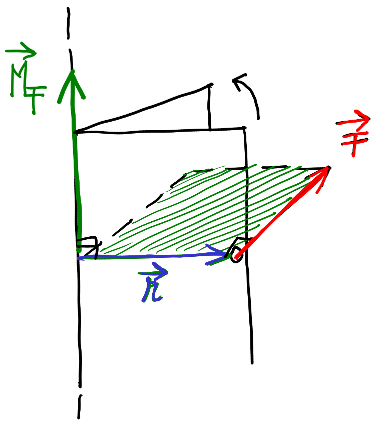
$$\boxed{|\vec{M}_F| = r \cdot F \cdot \sin\alpha}$$

M_F = momentul forței
= măsură a efectului de rotație produs de forța F asupra corpului

$\vec{r}$ = vectorul de poziție

$\vec{F}$ = forța

$\boxed{\text{EXEMPLU}}$: ROTAȚIA UNEI UȘI



$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}$

→ modulul lui $|\vec{M}_F|$: $|\vec{M}_F| = r \cdot F \cdot \sin 90 = r \cdot F$

→ direcția lui $\vec{M}_F$: $\vec{M}_F \perp \vec{F}$, $\vec{M}_F \perp \vec{r}$, $\vec{M}_F \perp A_{\square}$

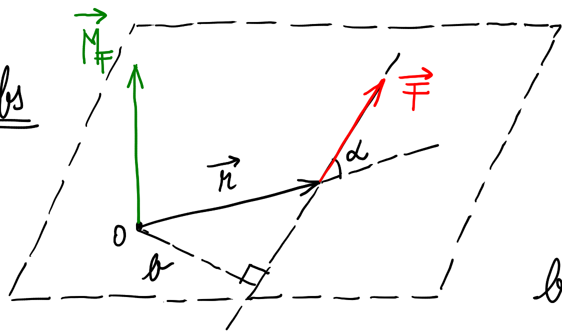
→ sensul lui $\vec{M}_F$: sensul dat de regula burghiului

! Obs $F \uparrow \Rightarrow A_{\square} \uparrow \Rightarrow M_F \uparrow$

$r \uparrow \Rightarrow A_{\square} \uparrow \Rightarrow M_F \uparrow$

M_F = măsură a rotației mai intense sau mai puțin intense a ușii

! Obs



$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}$

$M_F = F \cdot (r \sin\alpha)$

$$\boxed{M_F = F \cdot b}$$

$b = r \sin\alpha$ = brațul forței

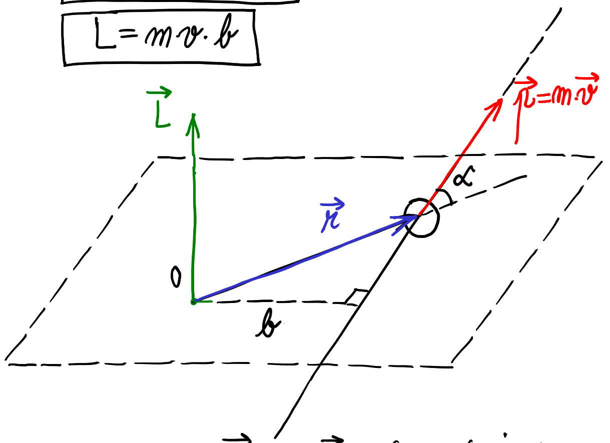
2. MOMENTUL CINETIC $(\vec{L})$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})}$$

$$\boxed{L = m v \cdot r \sin\alpha}$$

$$\boxed{L = m v \cdot b}$$

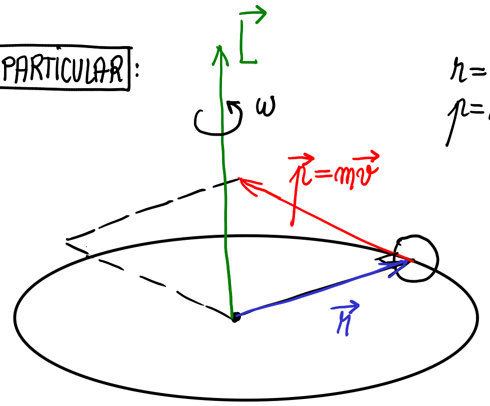


→ modulul lui $\vec{L}$: $|\vec{L}| = (mv) \cdot (r \sin\alpha)$

→ direcția lui $\vec{L}$: $\vec{L} \perp \vec{r}$, $\vec{L} \perp \vec{p}$, $\vec{L} \perp A_{\square}$

→ sensul lui $\vec{L}$: sensul dat de regula burghiului

CAZ PARTICULAR:



$r =$ constant

$p =$ constant

În mișcarea circulară uniformă (MCU) $\vec{r} \perp \vec{p}$

$$\Rightarrow L = m v \cdot r \cdot \cancel{\sin 90}^{1}$$

$$\boxed{L = m v r} = \text{const.}$$

în MCU, $v = \omega r \Rightarrow \boxed{L = m \omega^2 r} = \text{const.}$

3. VARIAȚIA MOMENTULUI CINETIC $(\Delta\vec{L})$

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = (\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta\vec{p}) - \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \left(\cancel{\vec{r} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \Delta\vec{p} + \Delta\vec{r} \times \vec{p} + \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{p}\right) - \cancel{\vec{r} \times \vec{p}} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times \vec{p} + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times \Delta\vec{p}$$

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v} \times \vec{p} + \vec{v} \times \Delta\vec{p}$$

<u>Obs</u> $\vec{v} \times (m\vec{v}) = m \cdot \vec{v} \times \vec{v} = m \cdot v \cdot v \cancel{\sin 0}^{0} = 0$

<u>Obs</u> $\vec{v} \times (m \Delta\vec{v}) = m \cdot \vec{v} \times \cancel{\Delta\vec{v}}^{0} = 0$

$\Delta t \to 0$

$$\boxed{\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \vec{F}} \qquad \boxed{\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}_F}$$

! <u>Obs</u>

$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ →	$\vec{M}_F = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$
$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$ →	$\vec{M}_F \cdot \Delta t = \Delta\vec{L}$

! <u>Obs</u> O forță de translație $\vec{F}$ produce variație de impuls $\Delta\vec{p}$

Un moment de forță $\vec{M}_F$ produce variație de moment cinetic $\Delta\vec{L}$

CAZURI PARTICULARE:

1. Punct material izolat

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_F = \vec{0} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_f = \vec{L}_i = \text{constant}$$

2. Legea conservării momentului cinetic

$$\vec{M}_F = \vec{0} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_f = \vec{L}_i = \text{constant}$$

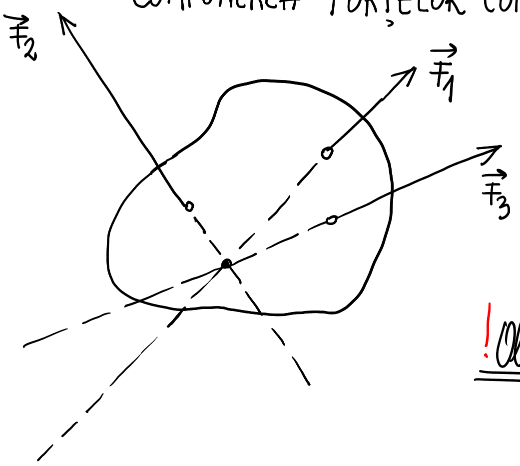
3. Punct în mișcare circulară uniformă (MCU)

$$\vec{M}_{F_{cp}} = \vec{r} \times \vec{F}_{cp}, \quad M_{F_{cp}} = r \cdot F_{cp} \cancel{\sin 180}^{0} = 0 \Rightarrow \vec{M}_{F_{cp}} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{F_{cp}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = 0 \Rightarrow |\vec{L}_f| = |\vec{L}_i| = m \cdot v r = \text{const.}$$

STATICA SOLIDULUI RIGID

COMPUNEREA FORȚELOR CONCURENTE



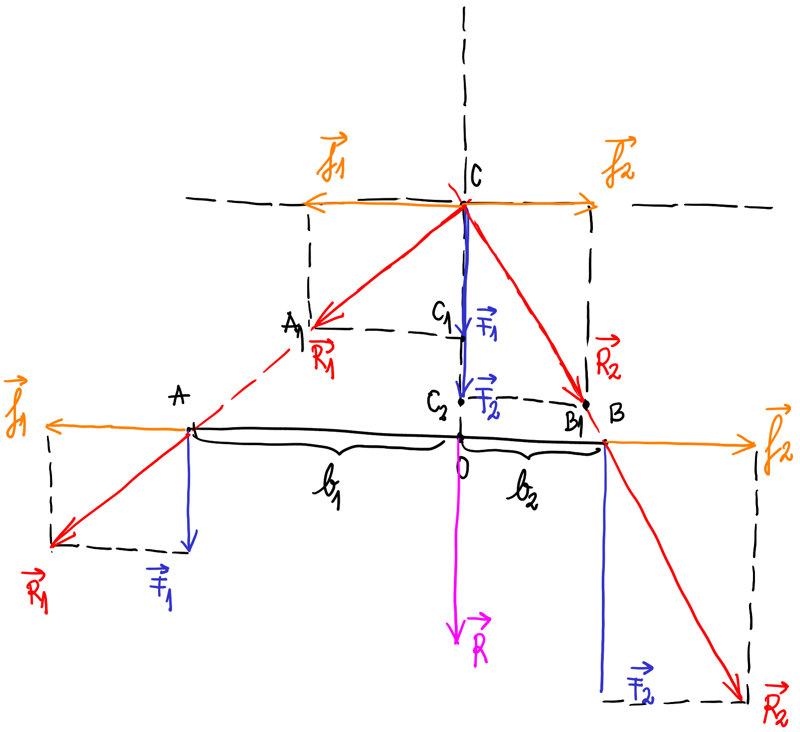
$$\vec R = \vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3$$

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \end{cases}$$

! Obs Când dreptele suport ale forțelor se întâlnesc toate într-un singur punct se poate spune că forțele sînt concurente.

Rezultanta unui sistem de forțe concurente se obține prin operația de adunare a vectorilor conform:
- regulii paralelogramului
- regulii triunghiului
- regulii poligonului

COMPUNEREA FORȚELOR PARALELE DE ACELAȘI SENS $(\vec F_1, \vec F_2)$



$$\boxed{\vec R = \vec F_1 + \vec F_2}$$

$$\boxed{F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2}$$

DEMONSTRAȚIE:

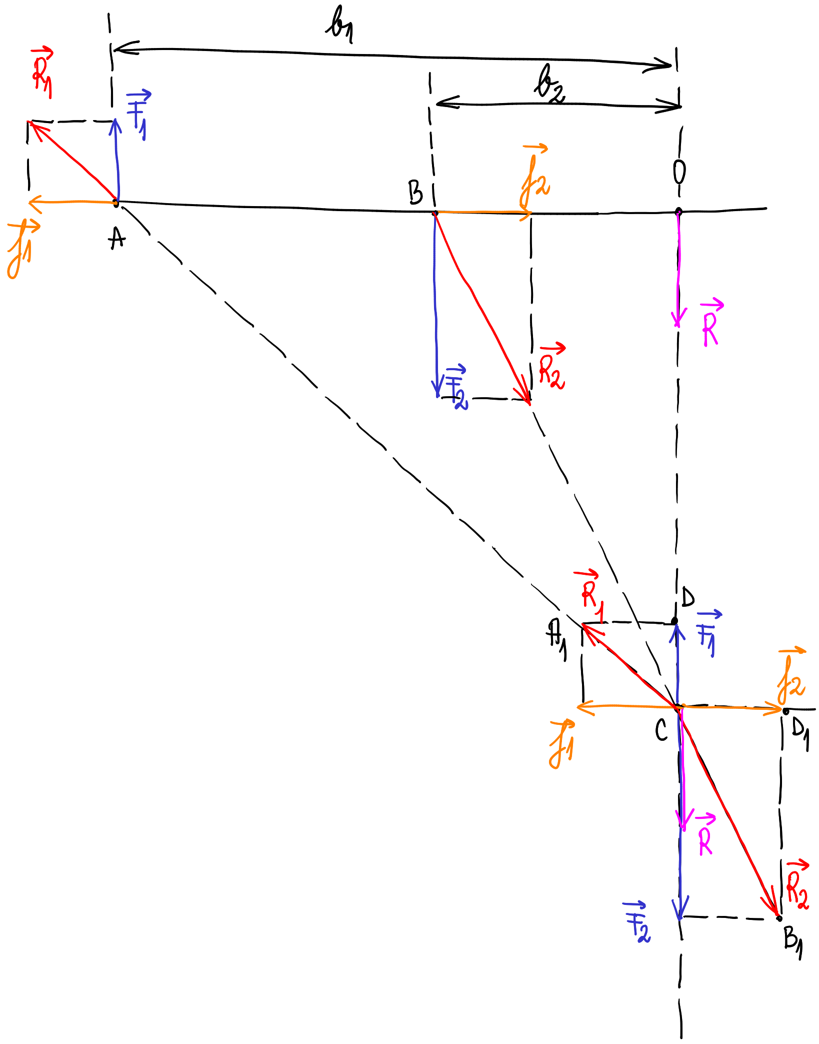
$\vec f_1, \vec f_2$ – forțe suplimentare egale și de sens contrar, nu au nicio influență

$\Delta AOC \sim \Delta A_1C_1C \Rightarrow \frac{AO}{f_1} = \frac{OC}{F_1}$, $b_1 = AO$

$\Delta BOC \sim \Delta B_1C_2C \Rightarrow \frac{OB}{f_2} = \frac{OC}{F_2}$, $b_2 = OB$

$$OC = \frac{b_1 F_1}{\cancel{f_1}} = \frac{b_2 F_2}{\cancel{f_2}} \Rightarrow \boxed{b_1 F_1 = b_2 F_2} \text{ (Q.E.D)}$$

COMPUNEREA FORȚELOR PARALELE DE SENS OPUS ($\vec{F_1}, \vec{F_2}$)



$$\boxed{R = F_2 - F_1}$$

$$\boxed{F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2}$$

DEMONSTRAȚIE:

$\vec{f_1}, \vec{f_2}$ – forțe suplimentare egale și de sens contrar, nu au nicio influență

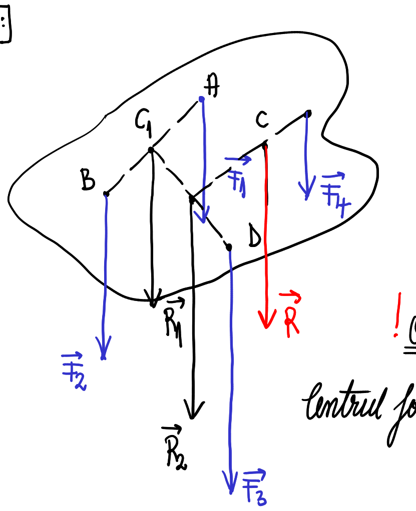
$\Delta OAC \sim \Delta CA_1D \Rightarrow \dfrac{OA}{f_1} = \dfrac{OC}{F_1}$, $b_1 = OA$

$\Delta OBC \sim \Delta CA_1B \Rightarrow \dfrac{OB}{f_2} = \dfrac{OC}{F_2}$, $b_2 = OB$

$OC = \dfrac{b_1 \cdot F_1}{\cancel{f_1}} = \dfrac{b_2 F_2}{\cancel{f_2}} \Rightarrow \boxed{b_1 F_1 = b_2 F_2}$ (Q.E.D.)

COMPUNEREA UNUI NUMĂR OARECARE DE FORȚE PARALELE ($\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \dots$)

EXEMPLU:



$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

Se compun mai întâi $\vec{F_1}$ cu $\vec{F_2} \Rightarrow \vec{R_1}$

Se compune $\vec{R_1}$ cu $\vec{F_3} \Rightarrow \vec{R_2}$

Se compune $\vec{R_2}$ cu $\vec{F_4} \Rightarrow \vec{R}$

! Obs Punctul de aplicație C al rezultantei generale se numește centrul forțelor paralele.

Centrul forțelor paralele C este un punct fix al solidului a cărui poziție este independentă de:

→ sistemul de referință

→ ordinea în care se compun forțele paralele, două câte două

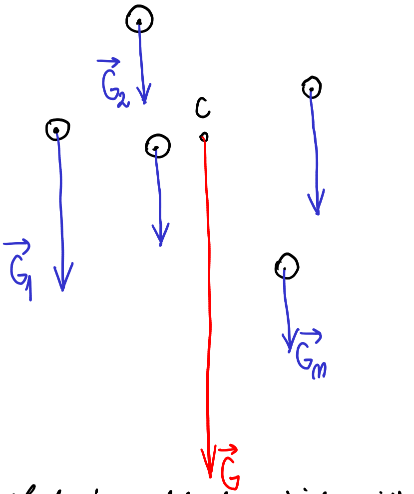
→ schimbarea direcției forțelor paralele în raport cu solidul (dacă toate forțele paralele se rotesc cu același unghi în raport cu solidul)

→ modificarea modulelor forțelor paralele în același raport (spre exemplu dacă toate modulele se micșorează sau se măresc de n ori în raport cu valoarea inițială)

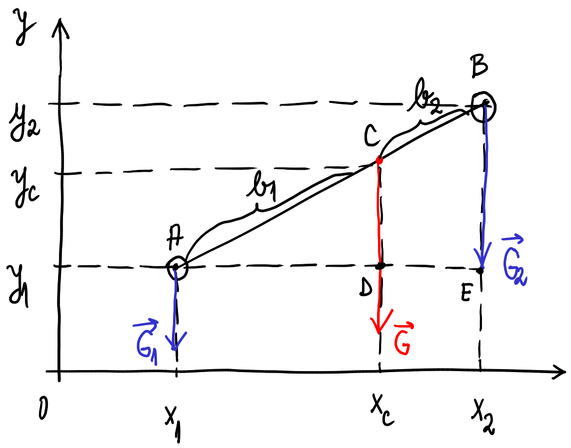
Obs Dacă forțele paralele nu au toate același sens se compun mai întâi forțele de un anumit sens și apoi forțele de sens contrar. ⇒ Se obțin două rezultante parțiale, paralele și de sens opus.

COMPUNEREA UNUI NUMĂR OARECARE DE FORȚE PARALELE $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots)$

$\boxed{\text{APLICAȚIE:}}$ CENTRU DE GREUTATE



Centru de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale.



$$\boxed{G = G_1 + G_2}$$

$$\boxed{G_1 b_1 = G_2 b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{G_2}{G_1}$$

$$\Delta ADC \sim \Delta AEB \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{AD}{DE} = \dfrac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} \Rightarrow \dfrac{G_2}{G_1} = \dfrac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} \Rightarrow \boxed{x_c = \dfrac{x_1 G_1 + x_2 G_2}{G_1 + G_2}} \\ \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{CD}{BE} = \dfrac{y_c - y_1}{y_2 - y_c} \Rightarrow \dfrac{G_2}{G_1} = \dfrac{y_c - y_1}{y_2 - y_c} \Rightarrow \boxed{y_c = \dfrac{y_1 G_1 + y_2 G_2}{G_1 + G_2}} \end{cases}$$

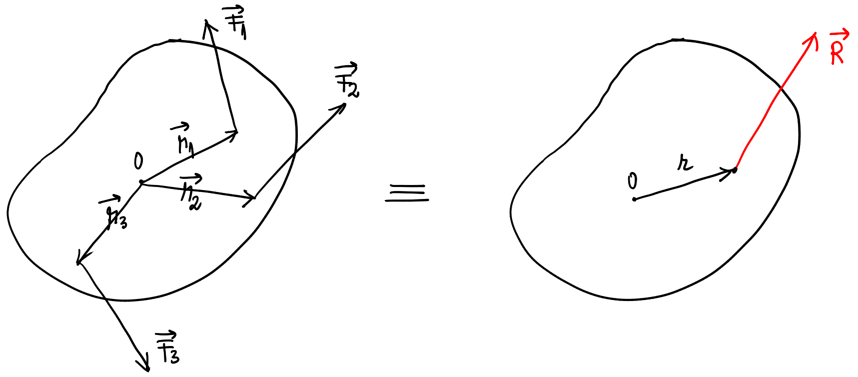
(coordonatele centrului de greutate)

TEOREMA LUI VARIGNON

$$\boxed{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n\right)}$$

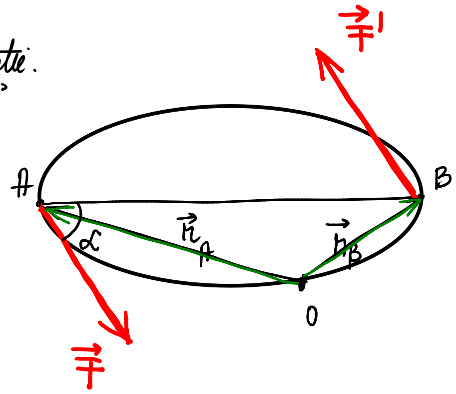
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = r \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}$$

Enunț: Suma vectorială a momentelor forțelor care acționează asupra unui corp, calculate față de un punct, este egală cu momentul rezultantei sumei vectoriale a sistemului de forțe, față de același punct.



MOMENTUL UNUI CUPLU DE FORȚE

Sub efectul acțiunii unui cuplu de forțe se petrece o mișcare de rotație.



EXEMPLU:

$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

$$\vec{M}_F = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_{F'} = \vec{r}_B \times \vec{F}'$$

$$\vec{M}_C = \vec{M}_F + \vec{M}_{F'} = (\vec{r}_A \times \vec{F}) + (\vec{r}_B \times \vec{F}')$$

$$= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$= \vec{BA} \times \vec{F}$$

$\Rightarrow$ Momentul cuplului este $\boxed{\vec{M}_C = \vec{BA} \times \vec{F}}$

→ modulul lui $\vec{M}_C$, $|\vec{M}_C| = BA \cdot F \sin\alpha \Rightarrow \boxed{M_C = F \cdot BA \sin\alpha = F \cdot b}$, $b = BA \sin\alpha$ = brațul forței

→ direcția lui $\vec{M}_C$, $\vec{M}_C \perp \vec{F}$, $\vec{M}_C \perp \vec{F}'$, $\vec{M}_C \perp \vec{BA}$

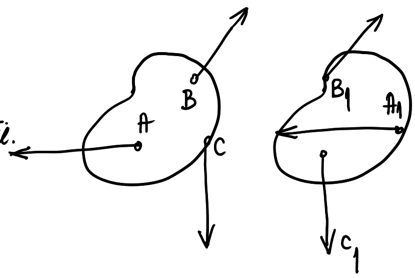
→ sensul lui $\vec{M}_C$, sensul este dat de regula burghiului

ECHILIBRUL DE TRANSLAȚIE

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \vec{0} \\ &R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \\ &R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0 \end{aligned}}$$

Un solid rigid se află în echilibru de translație sub acțiunea unui sistem de forțe dacă suma vectorială a acestora este nulă și ele sunt concurente.

!Obs Echilibrul de translație este independent de poziția punctelor de aplicație ale forțelor. Poziția punctelor de aplicație A,B,C sau A_1, B_1, C_1 influențează numai echilibrul de rotație.

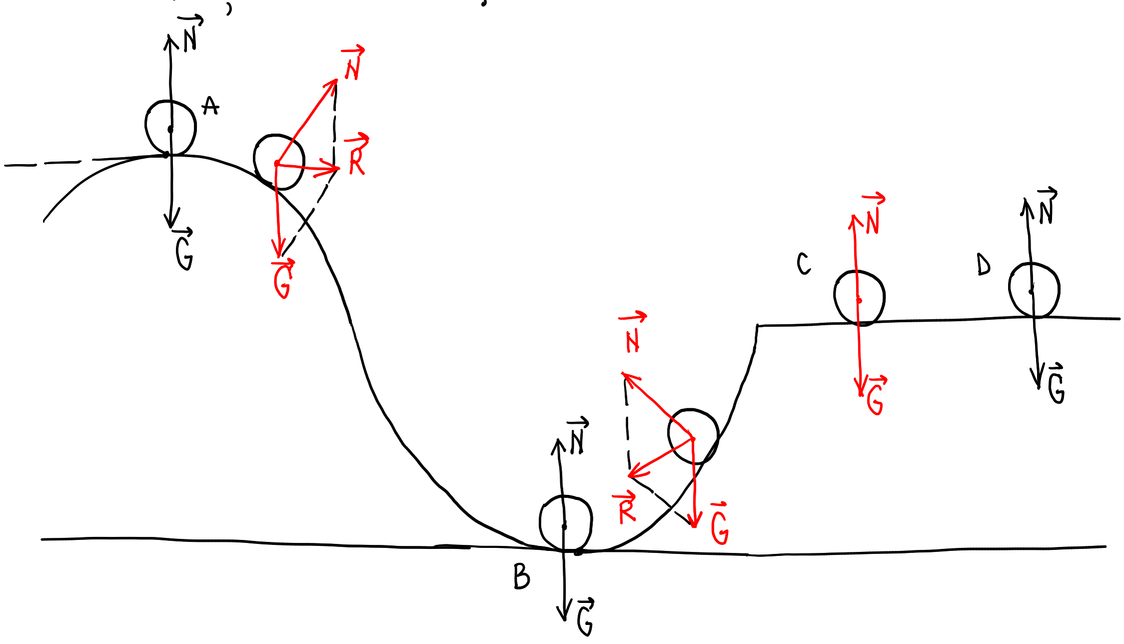


ECHILIBRUL DE ROTAȚIE

$$\boxed{\vec{M}_R = \vec{M}_{F_1} + \vec{M}_{F_2} + \dots + \vec{M}_{F_n} = \vec{0}}$$

Un solid rigid care se poate roti în jurul unui ax (d) este în echilibru de rotație dacă suma vectorială a momentelor tuturor forțelor care acționează asupra sa, în raport cu axul (d) este nulă.

ECHILIBRUL ȘI ENERGIA POTENȚIALĂ

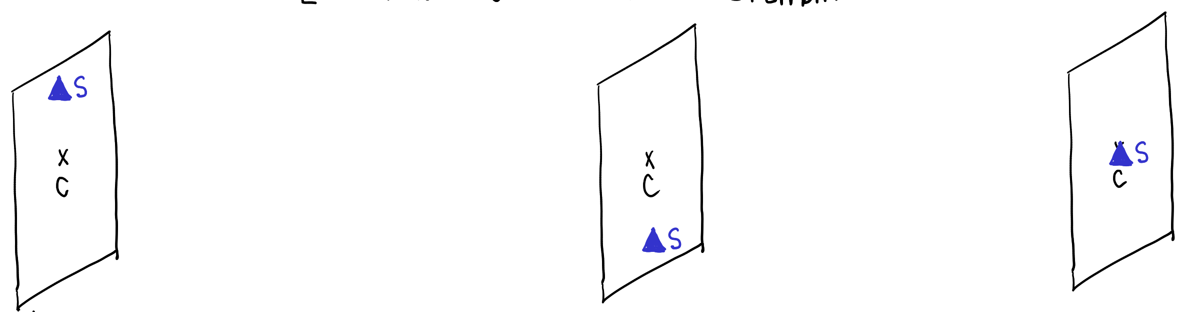


A: ECHILIBRU INSTABIL → energia potențială are o valoare maximă în comparație cu valorile din punctele vecine

B: ECHILIBRU STABIL → energia potențială are o valoare minimă în comparație cu valorile din punctele vecine

C: ECHILIBRU INDIFERENT → energia potențială are o valoare constantă în comparație cu valorile din punctele vecine

ECHILIBRUL SOLIDULUI RIGID SUSPENDAT



ECHILIBRU STABIL

⇒ îndepărtând puțin un solid suspendat de poziția sa de echilibru (xC) solidul <u>revine</u> la poziția inițială.

Această situație apare când centrul de greutate (C) al solidului este situat <u>sub</u> nivelul punctului de suspensie (S)

ECHILIBRU INSTABIL

⇒ îndepărtând puțin un solid suspendat de poziția sa de echilibru (xC) solidul <u>nu revine</u> la poziția inițială.

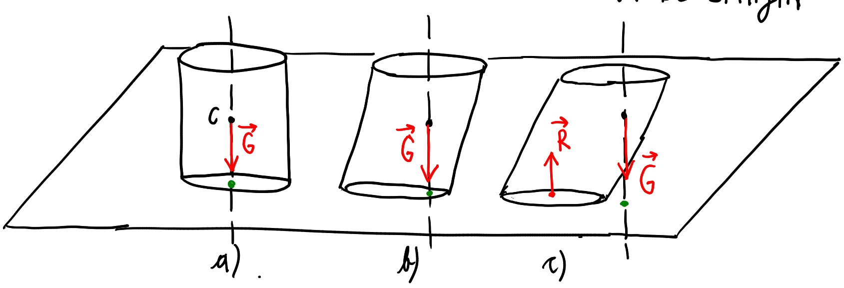
Această situație apare când centrul de greutate (C) al solidului este situat <u>deasupra</u> punctului de suspensie (S)

ECHILIBRU INDIFERENT

⇒ îndepărtând puțin un solid suspendat de poziția sa de echilibru (xC) solidul rămâne în repaus în orice poziție

Solidul este suspendat (S) chiar în centrul său de greutate (C)

ECHILIBRUL SOLIDULUI CARE ARE O BAZĂ DE SPRIJIN



Cilindrul c) nu este în echilibru deoarece verticala coborâtă din centrul de greutate <u>nu</u> cade în interiorul bazei de sprijin. Greutatea și reacțiunea $\vec{G}$, $\vec{R}$ formează un cuplu care tind să răstoarne cilindrul.