

# Studiul oscilațiilor forțate. Pendulul Pohl

## Rezonanță mecanică

**Cuvinte cheie:** oscilație, amplitudine ( $A$ ), frecvență ( $\nu$ ), viteza liniară ( $v$ ), viteza unghiulară ( $\omega$ ), pulsatie ( $\omega$ ), fază ( $\varphi$ ), fază initială ( $\varphi_0$ ), mișcare armonică, oscilator liniar armonic, oscilație amortizată, raport de amortizare ( $K$ ), decrement logaritmic ( $\Lambda$ ), coeficient de amortizare ( $\delta$ ), ecuație diferențială de ordinul II, regim amortizat, regim critic, regim aperiodic, regim critic, frecvență proprie ( $\nu_0$ ), perioadă proprie ( $T_0$ ), forță și momentul forței ( $F$  și  $M_F$ ), rezonanță, curbă de rezonanță, frecvență de rezonanță, bandă de trecere ( $B$ ), factor de calitate ( $Q$ ), fazor, diagramă fazorială.

## Principiu

Dacă unui sistem oscilant îi este permis să oscileze liber se observă descreșterea amplitudinilor maxime succesive, această descreștere fiind dependentă de frecări. Dacă sistemul oscilant în oscilația sa este excitat din exterior aplicându-i un *moment al forței* periodic  $M_F$ , observăm cu după stabilirea regimului staționar în timp amplitudinea nou stabilită este dependentă de *frecvență și amplitudinea acestui moment al forței extern aplicat*, și bineînțeles este dependentă și de *frecări*.  $A(\omega_{ext}, M_{F_{max}}, \delta)$ . Frecvențele proprii ale oscilațiilor libere, precum și *curbele de rezonanță* ale oscilațiilor forțate pentru diferite valori de frecări, urmăză să fie determinate.

## Echipament

Pendul Phol de torsiune	1
Sursă de tensiune variabilă, 25V CA/ 10V CC, 12A	1
Punte redresoare, 30V CA/ 1A CC	1
Cronometru digital, precizie: 1/100 sec	1
Multimetru digital	1
Cablu de conectare, l=250mm, galben	2
Cablu de conectare, l=750mm, roșu	2
Cablu de conectare, l=750mm, albastru	3

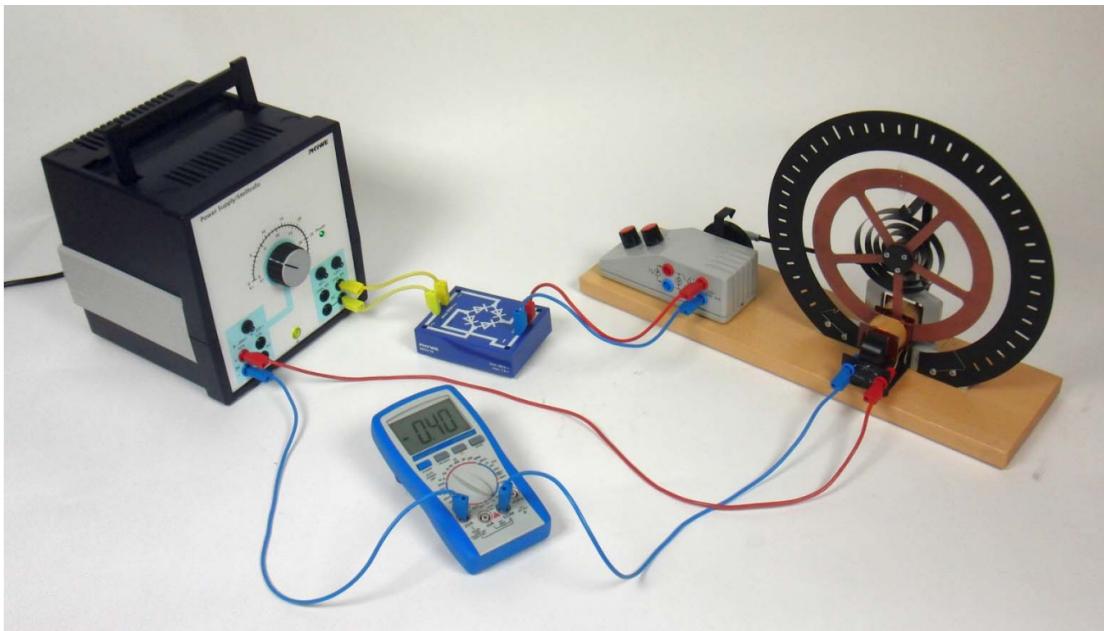


Figura 1: Montaj experimental - Pendul Phol

## Obiective

### A. Oscilații libere

1. Determinarea perioadei proprii de oscilație  $T_0$  și a frecvenței proprii  $\nu_0$ , în cazul fără frecări
2. Determinarea perioadei proprii de oscilație  $T_0$  și a frecvenței proprii  $\nu_0$  pentru diferite valori ale frecării. Calcularea rapoartelor de amortizare  $K = \frac{A_n}{A_{n+1}}$ , a coeficientilor de amortizare  $\delta$  și decrementilor logaritmici  $K$ .
3. Observarea regimului aperiodic și a regimului critic

### B. Oscilații forțate

1. Determinarea curbelor de rezonanță  $A(\omega_{ext})$  și reprezentarea lor grafică folosind coeficientii de amortizare calculați la punctul A. Determinarea frecvențelor de rezonanță corespunzătoare și compararea lor cu frecvențele proprii găsite anterior la punctul A.
2. Observarea atentă a schimbării fazelor între pendulul de torsiune și discul extern care îl excita, pentru cazul unor frecări mici și pentru diferite frecvențe de excitație din partea discului excitator.

# Montaj Experimental

Montajul experimental este prezentat în Figura (1) și Figura (2). Ieșirea de la sursa de alimentare de curent continuu este legată la elementele de frânare prin curenți eddy (vezi magnetii bobinați de sub discul pendulului Pohl). Discul rotitor motor care va excita pendulul Pohl de asemenea are nevoie de alimentare pentru a se roti cu diferite frecvențe  $\nu_{ext}$ . Pentru a obține curent continuu pentru discul rotitor, este introdusă o punte redresoare între ieșirea sursei de alimentare CA (curent alternativ) de 12V și cele două ieșiri ale discului rotitor motor(vezi Figura(3)). Curentul continuu furnizat magnetilor bobinați va transforma magnetii în electromagneți care frânează discul metalic Pohl. Cu cât curentul continuu furnizat  $I_{frânare}$  va fi mai mare cu atât mai puternice vor fi frecările.

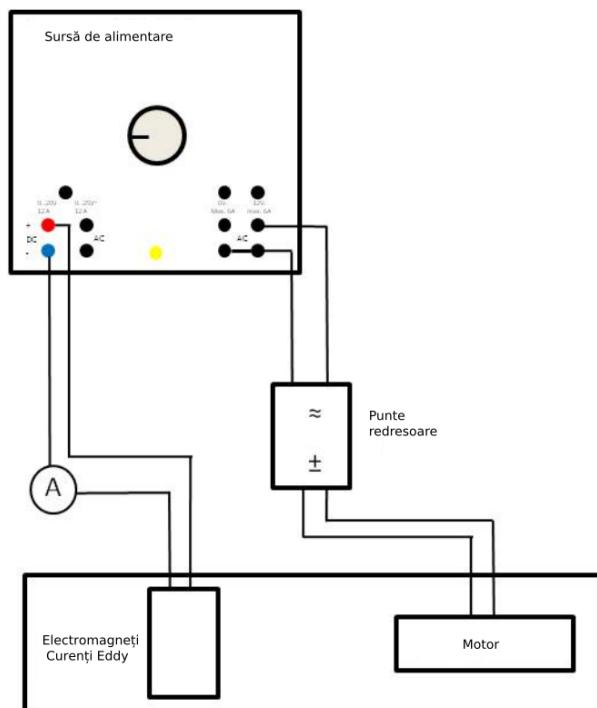


Figura 2: Schema cu legăturile electrice din montajul experimental

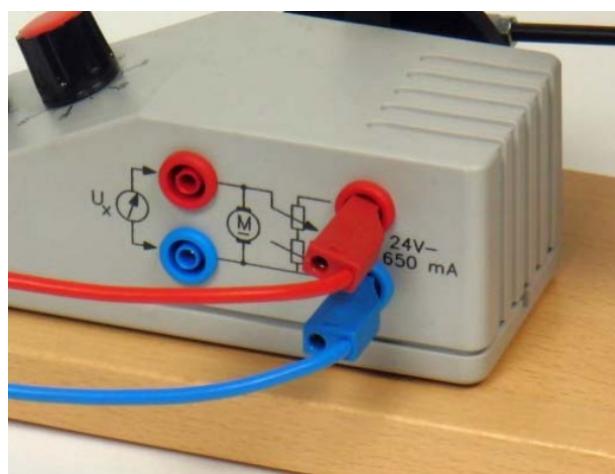


Figura 3: Alimentarea discului motor extern care va excita pendulul Phol

# Mod de lucru

## A. Oscilații libere

1. Determinarea perioadei proprii de oscilație  $T_0$  și a frecvenței proprii de oscilație  $\nu_0$ , în cazul fără frecări

Pentru a determina frecvența proprie  $\nu_0$ , pulsația proprie  $\omega_0$  a pendulului Pohl de torsiu, în cazul fără frecări ( $I_f = 0$ ) :

- deviați pendulul complet într-o parte
- măsurăți cu cronometrul timpul pentru mai multe oscilații

Măsurătorile trebuie repete pentru a calcula o perioadă proprie medie  $\bar{T}_0$ .

2. Determinarea perioadelor de oscilație și a frecvențelor corespunzătoare, în cazul cu diferite valori ale frecării

În același mod frecvențele caracteristice cazului de oscilații cu frecări (oscilații amortizate) vor fi măsurate pentru următoarele valori ale curentilor eddy de frânare:

$$I_f \sim 0,25A, (U_{\sim} = 4V)$$

$$I_f \sim 0,40A, (U_{\sim} = 6V)$$

$$I_f \sim 0,55A, (U_{\sim} = 8V)$$

$$I_f \sim 0,9A, (U_{\sim} = 12V)$$

Pentru a determina valorile care caracterizează frecările adică a rapoartelor de amortizare ( $K$ ), a decrementilor logaritmici ( $\Lambda$ ), a coeficienților de amortizare ( $\delta$ ), se măsoară și se notează valoările amplitudinilor succesive care sunt atinse într-o parte pe discul gradat al pendulului Pohl.

- deviați pendulul complet într-o parte
- observați mărimea amplitudinilor successive în oscilațiile amortizate

Inițial trebuie să asigurăm că poziția cursorului pendulului în repaus este exact la 0 grade pe scara circulară gradată a pendulului Phol gradată cu 20 de grade arbitrară într-o parte și în cealaltă. Această reglare se realizează din rotirea discului motor la care este legat discul pendulului Phol.

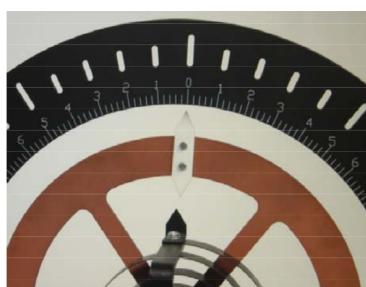


Figura 4: Poziția de zero a pendulului Phol

### 3. Observarea regimului aperiodic și a regimului critic

Pentru a obține cazul regimului aperiodic ( $I_f \sim 2,0A$ ) și cazul critic ( $I_f \sim 2,3A$ ) curenții eddy de frânare din sârmele bobinelor magneților trebuie să depășească valoare de  $2,0A$ . Pentru siguranță nu folosiți curenți de peste  $2,0A$  mai multe de câteva minute.

## B. Oscilații forțate

Pentru a stimula pendulul de torsiune Pohl, acesta este conectat la un disc motor rotitor printr-o tijă. Frecvența de excitare  $\omega_{ext}$  a motorului poate fi determinată folosind cronometrul și măsurând timpii necesari discului pentru a realiza rotații complete. (de exemplu 10 rotații)

1. Determinarea curbelor de rezonanță și reprezentarea grafică a acestora folosind frecările de la punctul A.

Măsurătoarea începe cu valori mici ale pulsării de excitație  $\omega_{ext}$ . Apoi  $\omega_{ext}$  este crescută cu ajutorul celor două butoane potențiometre (un buton de reglare brută și un al doilea de reglare fină, Fig.(5)). Se notează amplitudinile, care se stabilesc în regim staționar după un timp, pentru fiecare pulsare  $\omega_{ext}$ . În cazul frecărilor mici, trebuie aleasă o frecvență  $\omega_{ext}$  în astă fel încât pendulul Phol să nu iasă din scală în timpul oscilațiilor.



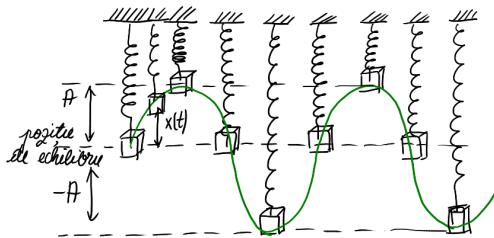
Figura 5: Reglarea pulsării  $\omega_{ext}$  a discului motor prin două potențiometre (reglare brută și reglare fină)

2. Observarea defazajului între pendulul Phol de torsiune și discul motor extern excitator, pentru valori mici ale frecării, pentru diferite pulsării  $\omega_{ext}$

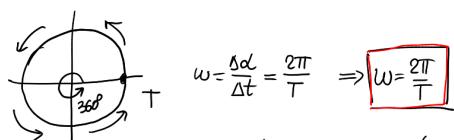
Alegem frecări mici și stimulăm pendulul într-un caz cu pulsare  $\omega_{ext}$  mult sub frecvența de rezonanță, iar în celălalt caz mult deasupra frecvenței de rezonanță. Observați transferul de fază, schimbarea de fază dintre pendulul de torsiune și momentul forței extern al motorului. În orice caz, notări ale mărimilor trebuie luate doar când sistemul a ajuns la un regim staționar.

În cele ce urmează este prezentată o schiță cu noțiuni de liceu despre oscilații.  
*Să ne reamintim!*

## OSCILATORUL LINIAR ARMONIC FĂRĂ FRECĂRI

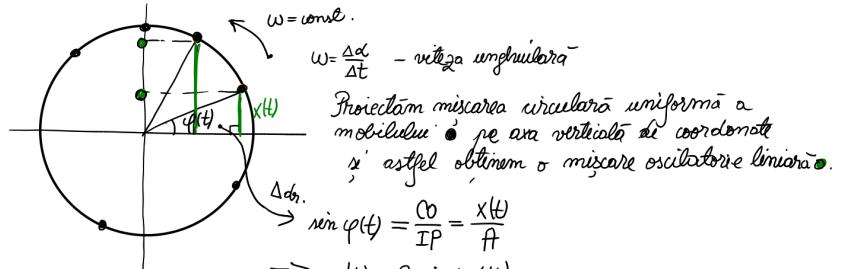


$x(t)$  - elongare  
 $A$  - amplitudine  
 $T$  - perioada  $[T]_{SI} = s$   
 $\nu$  - frecvență  $[\nu]_{SI} = Hz$



$$\text{d.p.} \Rightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{T}{1} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} \quad [\nu]_{SI} = s^{-1}$$

SAU:  $T = \frac{\Delta t}{N}$   $\Leftarrow \Delta t$  - intervalul de timp în care s-au efectuat  $N$  oscilații complete



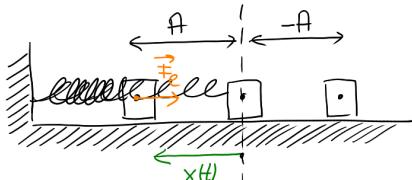
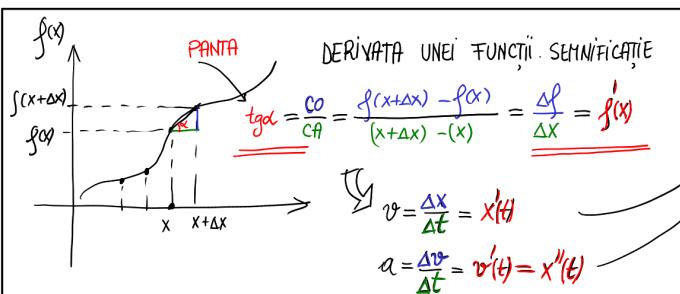
$$\begin{aligned} & \text{Obs: M.R.U. } x = x_0 + r \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi_0) \rightarrow \varphi(t) \\ & \text{M.C.U. } \varphi = \varphi_0 + \omega \cdot (t - t_0) \end{aligned} \Rightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

LEGEA MIȘCĂRII OSCILATORULUI LINIAR

$A \uparrow \Rightarrow$  mișcarea devine mai amplă  
 $\omega \uparrow \Rightarrow$  mișcarea devine mai agitată  
 $\varphi_0 \uparrow \Rightarrow$  mișcarea este translatată (defazată)

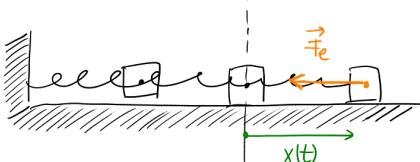
$\varphi_0$  - fază initială

APLICAȚIE: REPREZINTĂ GRAFIC ÎN DESMO'S O MIȘCARE SI VARIATĂ ÎN TIMP REAL PARA METRII EI



Obs: Rezultanta forțelor  $F(t)$  într-o mișcare oscilatoare merlu se opune existenței unei elongări  $x(t)$ , încercând să redeaște mobilul în poziția de echilibru.

$F(t)$  = forță de revenire



$$\text{pulsua proprie: } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{perioada proprie: } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\begin{aligned} & x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ & v(t) = \dot{x}(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ & a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ & \text{Pr. II: } F(t) = m \cdot a(t) = -m \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) \\ & F(t) = -K \cdot x(t) \end{aligned}$$

CINEMATICA  
OSCILATORULUI LINIAR  
ARMONIC

DINAMICA  
OSCILATORULUI LINIAR  
ARMONIC

$$\Rightarrow K = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow \text{Obs: } T \sim m \quad T \sim K$$

$T$  depinde de natura oscilatorului

CRITERIU DE CLASIFICARE A UNEI MIȘCĂRI DREPT MIȘCARE OSCILATORIE LINIARĂ DIN PUNCT DE VEDERE DINAMIC

### OSCILAȚII FĂRĂ FRECĂRI

Principiu II:  $\vec{F}_e + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$  (mișcare accelerată)

$$-K \cdot x = m \cdot a$$

$$K \cdot x + m \cdot a = 0$$

$$K \cdot x + m \cdot \ddot{x} = 0$$

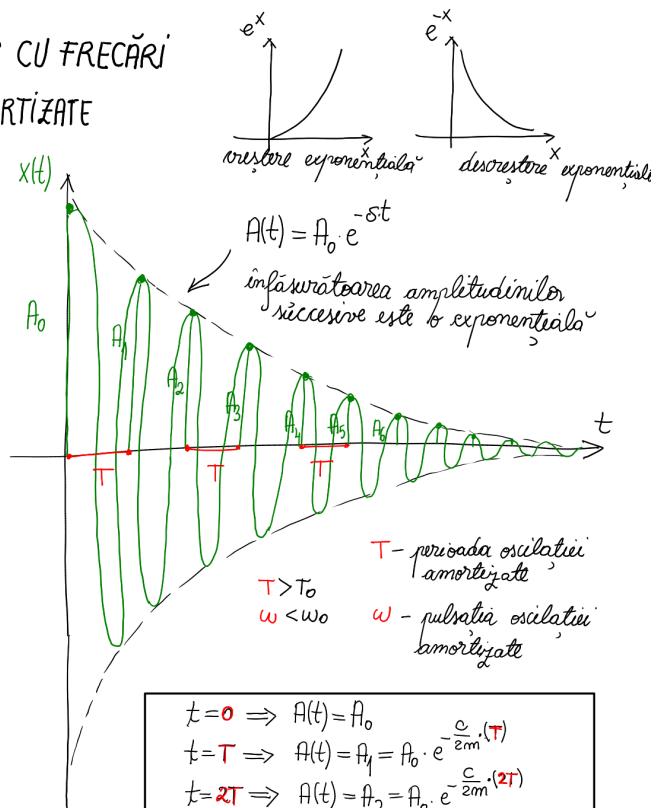
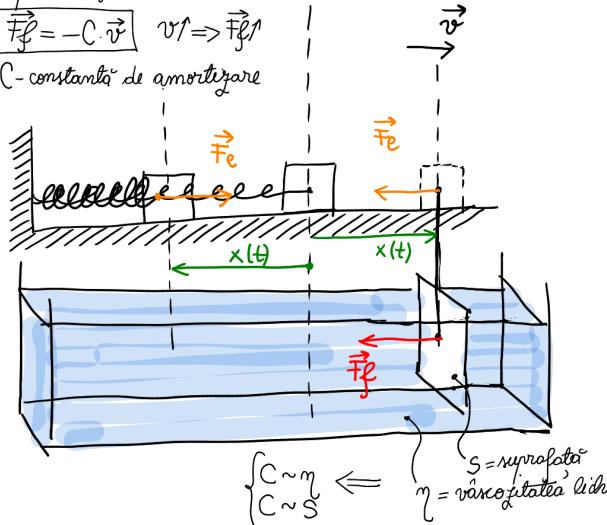
SOLUȚIE:  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDIN 2  
OHOGENĂ

## OSCILATORUL LINIAR ARMONIC CU FRECĂRI

### OSCILAȚII AMORTIZATE

Aproximare:  $\vec{F}_f = -C \cdot \vec{v}$   $v \rightarrow \vec{F}_f$   
 $C$  - constantă de amortizare



Principiul II:  $\vec{F}_e + \vec{F}_p = m \cdot \vec{a}$  (mișcare accelerată)  
 $-k \cdot x(t) - C \cdot v = m \cdot a$

$$\Rightarrow K \cdot x + C \cdot v + m \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow K \cdot x + C \cdot \dot{x} + m \cdot \ddot{x} = 0$$

ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDINUL II

Soluție

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$x(t)$  amplitudine variabilă în timp  
amplitudinea scade exponential

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\delta t}$$

$$\delta = \frac{C}{2m}$$

$\delta$  = COEFICIENT DE AMORTIZARE

= O MĂSURĂ CÂT DE MULT SCADE AMPITUDINEA ÎN TIIMP

$$\begin{aligned} t=0 &\Rightarrow A(t)=A_0 \\ t=T &\Rightarrow A(t)=A_1=A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (T)} \\ t=2T &\Rightarrow A(t)=A_2=A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (2T)} \\ t=3T &\Rightarrow A(t)=A_3=A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (3T)} \\ t=4T &\Rightarrow A(t)=A_4=A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (4T)} \\ &\dots \\ t=(m-1)T &\Rightarrow A(t)=A_{m-1}=A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot [(m-1)T]} \\ t=mT &\Rightarrow A(t)=A_m=A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (mT)} \\ t=(m+1)T &\Rightarrow A(t)=A_{m+1}=A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot [(m+1)T]} \end{aligned}$$

Obs:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$

$$T > T_0$$

$$K = \frac{A_{m+1}}{A_m}$$

$K$  = RAPORT DE AMORTIZARE

= O MĂSURĂ CÂT SCAD AMPITUDINILE SUCCESIV

! DOAR PENTRU FRECĂRILE DE TIPIUL  $\vec{F}_f = -C \vec{v}$   $\Rightarrow K = \frac{A_1}{A_0} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \dots = \frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot [(m+1)T]}}{A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (mT)}} = e^{-\frac{C}{2m} \cdot T} = e^{-\delta T}$

$$\Rightarrow K = \frac{A_{m+1}}{A_m} = e^{-\delta T}$$

$$K = \text{constant}$$

FIE  $m$  OSCILAȚII:

$\delta$  (DETERMINAT TEORETIC)

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_4}{A_3} \cdots \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}} \cdot \frac{A_m}{A_{m-1}}$$

$$\ln\left(\frac{A_m}{A_0}\right) = \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right) + \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right) + \ln\left(\frac{A_3}{A_2}\right) + \ln\left(\frac{A_4}{A_3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{A_m}{A_{m-1}}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{A_m}{A_0}\right) = (-\delta T) + (-\delta T) + (-\delta T) + \dots + (-\delta T) = -\delta \cdot (mT)$$

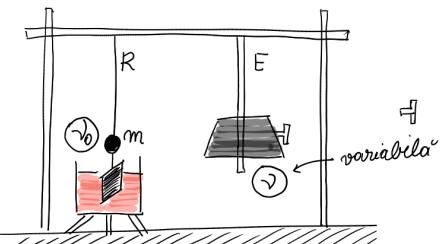
$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{A_m}{A_0}\right)}{mT}$$

FORMULĂ DE DETERMINARE  
A COEFICIENTULUI DE AMORTIZARE

# OSCILATORUL CUPLAT. OSCILAȚII ÎNTREȚINUTE. OSCILAȚII FORTATE

## REZONANȚA

### EXPERIMENT 1



R - rezonator  
E - excitator

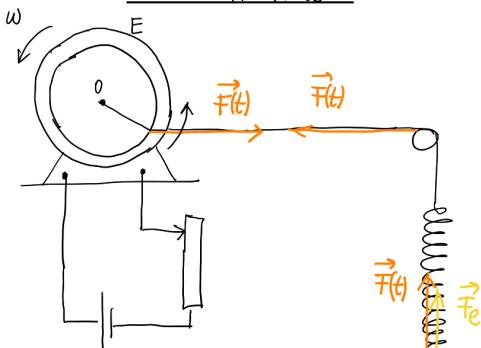
atunci când  $\omega \approx \omega_0 \Rightarrow A = A_{\max}(R)$

$\Rightarrow$  REZONANȚĂ = transfer maxim de energie de la excitatorul (E) la rezonatorul (R).

Obs. Excitatorul (E) își impune frecvența  $\rightarrow$  rezonatorului (R).

Obs. Singurul caz în care amplitudinea (R) este mai mare este în cazul în care frecvența excitatorului (E) este egală cu frecvența naturală proprie  $\omega_0$  a rezonatorului (R).

### EXPERIMENT 2



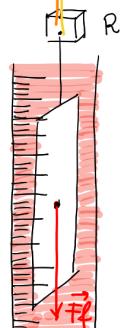
### CONDIȚIA REAȘĂRIRII STĂRII DE REZONANȚĂ

este ca perioada sistemului excitator să fie egală sau aproape de perioada naturală proprie de oscilație a sistemului rezonator.

$$\text{Excitator} \approx \text{Rezonator}$$

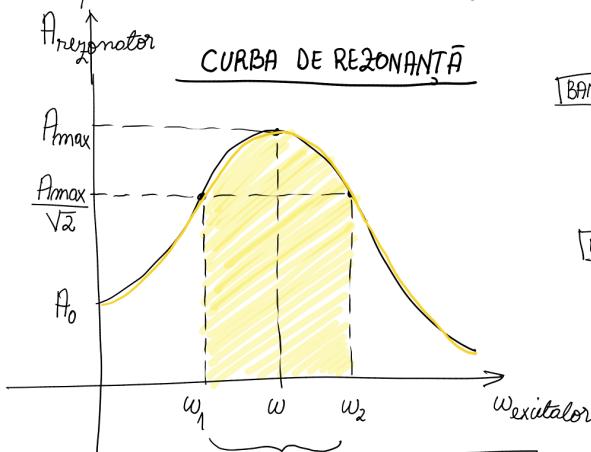
$$\text{Excitator} \approx \text{Rezonator}$$

(E) (R)



Obs. Forța  $F(t)$  are rolul de a întreține oscilațiile pendulului elastic.

Pentru a caracteriza numeric rezonanța se reprezintă curba de rezonanță, adică graficul amplitudinilor rezonatorului (R) în funcție de frecvența impusă de excitator  $\rightarrow$  A(Excitator) (R)



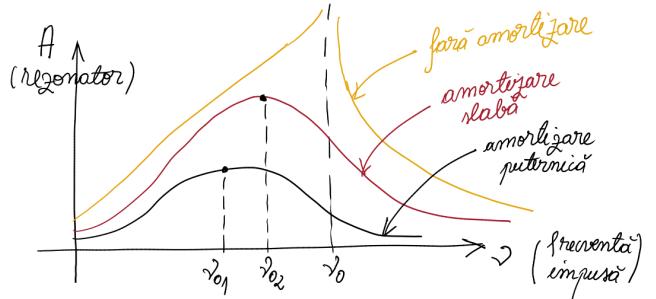
$\Rightarrow$  AMPLITUDINI SEMNIFICATIVE:  $A \in \left( \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}, A \right)$   
 $\Rightarrow$  REZONANȚĂ

BANDA DE TRECERE  $\stackrel{\text{def.}}{=}$  intervalul de pulsări ale excitatorului pentru care amplitudinea rezonatorului este semnificativă  $A > \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$ , unde  $A_{\max}$  = amplitudinea de rezonanță

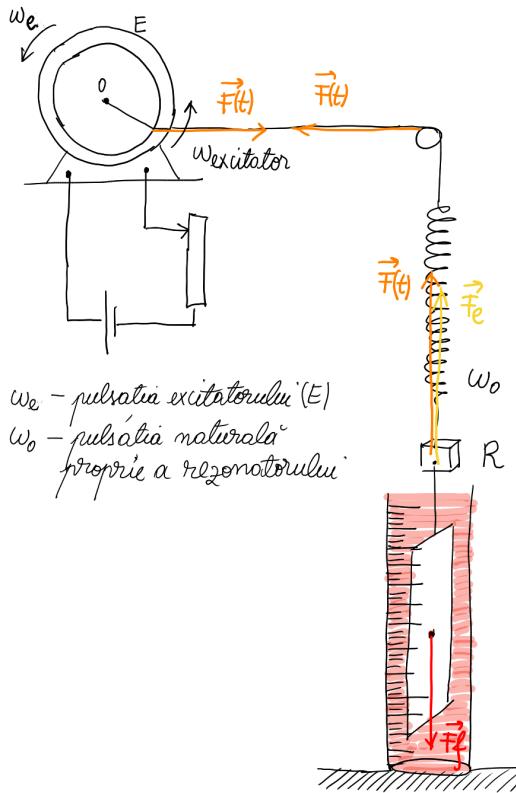
LÂRGIME DE BANDĂ  $\stackrel{\text{def.}}{=}$   $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

FACTOR DE CALITATE  $\stackrel{\text{def.}}{=}$   $Q = \frac{\omega_0}{|\omega_2 - \omega_1|}$

Obs.  $\Delta\omega \downarrow \Rightarrow Q \uparrow$



## REZONANȚĂ \* (ANALIZĂ CANTITATIVĂ)



$\omega_e$  - pulsăria excitatorului (E)

$\omega_0$  - pulsăria naturală proprie a rezonatorului

$$\begin{cases} \vec{F}_e = -k \cdot A \sin(\omega_e \cdot t) \\ \vec{F}_f = -C \cdot v = -CA\omega_e \cos(\omega_e \cdot t) \\ \vec{F} = F_{\max} \sin(\omega_e \cdot t) \end{cases}$$

$$\text{Principiul II : } \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_f = m\vec{a}$$

$$F - kx - C \cdot v = ma$$

$$\Rightarrow F = ma + Cv + kx$$

$$\Rightarrow F_{\max} \sin(\omega_e t + \varphi_0) = -m\omega_e^2 A \sin(\omega_e t) + C\omega_e A \cos(\omega_e t) + kA \sin(\omega_e t)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\Rightarrow F_{\max} \sin(\omega_e t) \cos \varphi_0 + F_{\max} \sin \varphi_0 \cos(\omega_e t) = C\omega_e A \cos(\omega_e t) + (kA - m\omega_e^2 A) \sin(\omega_e t)$$

dăm valori pentru:

$$t=0 : F_{\max} \sin \varphi_0 = C\omega_e A$$

$$t=\frac{\pi}{4} : F_{\max} \cos \varphi_0 = kA - m\omega_e^2 A$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \varphi_0 = \frac{C\omega_e}{k - m\omega_e^2}}$$

Din diagrama fazorială, folosind Teorema lui Pitagora:

$$F_{\max}^2 = (kA - m\omega_e^2 A)^2 + (C\omega_e A)^2 = A^2 [C^2 + (k - m\omega_e^2)^2]$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{C^2 + (k - m\omega_e^2)^2}} = \frac{F_{\max}}{\omega_e \sqrt{C^2 + \left(\frac{k}{\omega_e} - m\omega_e\right)^2}}}$$

$$A(F_{\max}, \omega_e, C)$$

$$\boxed{v_{\max} = A\omega_e = \frac{F_{\max}}{\sqrt{C^2 + \left(\frac{k}{\omega_e} - m\omega_e\right)^2}}}$$

$$v_{\max}(F_{\max}, \omega_e, C)$$

DIAGRAMA FAZORIALĂ A FORTELOR

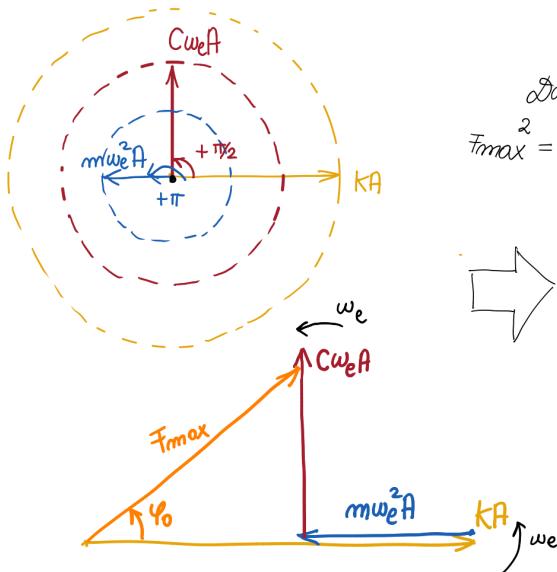


DIAGRAMA FAZORIALĂ A FORTELOR

viteză, forță rezistență, puterea transferată maximă:  $v = v_{\max}$   $\Leftrightarrow \frac{k}{\omega_e} - m\omega_e = 0 \Leftrightarrow \omega_e^2 = \frac{k}{m} = \omega_b^2 \Leftrightarrow \omega_e = \omega_b$

amplitudinea, forță elastică maximă:  $A = A_{\max}$   $\Leftrightarrow \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{C^2}{2m^2}} \Leftrightarrow \omega_e = \sqrt{\omega_b^2 - \frac{C^2}{2m^2}}$

**REZONANȚĂ** REPREZINTĂ FENOMENUL DE TRANSFER MAXIM DE ENERGIE DE LA UN SISTEM EXCITATOR (E) LA UN SISTEM REZONATOR (R).

# Teoria lucrării

## A. Oscilații libere. Oscilații cu frecare

### Oscilații unghiulare. Pendulul Pohl.

În cazul *oscilațiilor unghiulare* ale arcu-lui pendulului Pohl acționează  $M_{el}$  (*momen-tul forței elastice al arcului pendulului*) și  $M_{Ff}$  (*momentul forțelor de frânare contro-late electromagnetic prin curentii eddy*).

$$M_{el} = -D^0 \cdot \Phi \text{ și } M_{Ff} = -C \cdot \dot{\Phi}$$

$\Phi$ = unghiul de rotație, elongația unghiulară pe scara pendulului Pohl

$$\dot{\Phi}=\text{viteza unghiulară}$$

$D^0$ = constata elastică unghiulară a pen-dulului Pohl

$C$ = factor de proporționalitate între vi-teza unghiulară  $\dot{\Phi}$  și  $M_{Ff}$ .

Principiul II pentru momentele forțelor:

$$M = M_{el} + M_{Ff} = -D^0\Phi + -C\dot{\Phi}$$

care ne conduce la ecuația de mișcare:

$$I \cdot \ddot{\Phi} + C\dot{\Phi} + D^0\Phi = 0$$

$I$ = momentul de inerție

$$\ddot{\Phi}=\text{accelerația unghiulară}$$

Împărțind ecuația de mișcare la  $I$ , folo-sind notația  $\delta = \frac{C}{2I}$  pe care îl numim co-eeficient de amortizare, și  $\omega_0^2 = \frac{D^0}{I}$  frecvența naturală proprie a oscilației fără frecări  $\Rightarrow$

$$\ddot{\Phi} + 2\delta \cdot \dot{\Phi} + \omega_0^2 \Phi = 0$$

Soluția acestei ecuații diferențiale de or-dinul II este:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos \omega t \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} - \text{pulsăția oscilației cu frecări}\end{aligned}$$

### Oscilații liniare. Pendulul elastic

În cazul *oscilațiilor liniare* ale unui pen-dul elastic liniar acționează  $F_{el}$  (*forța elas-tică* a arcului deformat) și  $F_f$  (*forța de fre-care*).

$$F_{el} = -k \cdot x \text{ și } F_f = -C \cdot \dot{x}$$

$x$ = poziția, elongația liniară a pendulu-lui elastic

$$\dot{x}=\text{viteza liniară}$$

$k$ = constanta elastică liniară a pendulu-lui elastic

$C$ =factor de proporționalitate între vi-teza liniară  $\dot{x}$  și  $F_f$

Principiul II pentru forțe:

$$F = F_{el} + F_f = -k \cdot x + -C \cdot \dot{x}$$

care ne conduce la ecuația de mișcare:

$$m \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

$m$ =masa

$$\ddot{x}=\text{accelerația}$$

Împărțind ecuația de mișcare la  $m$ , fo-lo-sind notația  $\delta = \frac{C}{2m}$  pe care îl numim co-eeficient de amortizare, și  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  frecvența naturală proprie a oscilației fără frecări  $\Rightarrow$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Soluția acestei ecuații diferențiale de or-dinul II este:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos \omega t \\ \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} - \text{pulsăția oscilației cu frecări}\end{aligned}$$

## Obiectiv A1.

Determinarea perioadei proprii de oscilație ( $T_0$ ) și a pulsării proprii de oscilație ( $\omega_0$ ) a pendulului Pohl în cazul cu frecări neglijabile.

Pentru a determina pulsărea proprie a pendulului Pohl  $\omega_0$ , în cazul fără frecări ( $I_f = 0$ ):

- \* Deviați complet pendulul
- \* Măsurăți intervalul de timp necesar unui număr de oscilații (de exemplu  $N = 10$ )
- \* Pentru precizie luați mai multe măsurători și prezentați valoarea lor mediată

$\Delta t$	N	$T_0$ perioada propriu	$\bar{T}_0$ perioada propriu medie	$ \Delta T_0 $ abaterea de la medie	$ \bar{\Delta T}_0 $ abaterea medie

$$T_0 = \bar{T}_0 + |\bar{\Delta T}_0| \rightarrow \\ \omega_0 = \bar{\omega}_0 + |\bar{\Delta \omega}_0| \rightarrow$$

$$T_0 = ..... \pm ..... \\ \omega_0 = ..... \pm .....$$

## Obiectiv A2.

*Determinarea perioadei de oscilație ( $T$ ) și a pulsării de oscilație ( $\omega$ ) a pendulului Pohl în cazul cu diferite frecări. Determinarea raportului de amortizare  $K$ , a decrementului logaritmic  $\Lambda$ , a coeficientului de amortizare  $\delta$ .*

$$I_f \sim 0,25A, U_{\sim} = 4V$$

Oscilația #	$\Phi$ (grade pe scală)	$K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}$	$\Lambda = \ln K$	$\delta$ (1/s) $\delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$	$\omega$ (rad/s) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
1		-	-		
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Pentru a determina noua *pulsărie* ( $\omega$ ) a pendulului Pohl , *raportul de amortizare* ( $K$ ), *decrementul logaritmic* ( $\Lambda$ ), coeficientul de amortizare ( $\delta$ ), în cazul cu frecări ( $I_f \neq 0$ ):

- \* Deviați complet pendulul
- \* Măsurăți timpul necesar  $\Delta t$  până la amortizarea completă a oscilației
- \* Notați în tabel amplitudinile succesive  $\Phi$  de pe o parte a pendulului
- \* Pentru precizie repetați măsurătoarea, și comparați valorile obținute

Legea mișcării oscilatorului amortizat este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos \omega t, \quad \text{cu coeficientul de amortizare } \delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$$

Legea arată că amplitudinea unghiulară scade exponențial, și după fiecare interval de timp  $t = \frac{1}{\delta}$  amplitudinea unghiulară  $\Phi$  scade de  $e$  ori. Raportul de amortizare  $K$ , în acest model,  $K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = e^{\delta T}$ , rămâne constant. *Reprezentați grafic legea de mișcare.*

## Obiectiv A2.

*Determinarea perioadei de oscilație ( $T$ ) și a pulsătiei de oscilație ( $\omega$ ) a pendulului Pohl în cazul cu diferite frecări. Determinarea raportului de amortizare  $K$ , a decrementului logaritmic  $\Lambda$ , a coeficientului de amortizare  $\delta$ .*

$$I_f \sim 0,4A, U_{\sim} = 6V$$

Oscilația #	$\Phi$ (grade pe scală)	$K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}$	$\Lambda = \ln K$	$\delta$ (1/s) $\delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$	$\omega$ (rad/s) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
1		-	-		
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Pentru a determina noua *pulsătie* ( $\omega$ ) a pendulului Pohl , *raportul de amortizare* ( $K$ ), *decrementul logaritmic* ( $\Lambda$ ), coeficientul de amortizare ( $\delta$ ), în cazul cu frecări ( $I_f \neq 0$ ):

- \* Deviați complet pendulul
- \* Măsurăți timpul necesar  $\Delta t$  până la amortizarea completă a oscilației
- \* Notați în tabel amplitudinile succesive  $\Phi$  de pe o parte a pendulului
- \* Pentru precizie repetați măsurătoarea, și comparați valorile obținute

Legea mișcării oscilatorului amortizat este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos \omega t, \quad \text{cu coeficientul de amortizare } \delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$$

Legea arată că amplitudinea unghiulară scade exponențial, și după fiecare interval de timp  $t = \frac{1}{\delta}$  amplitudinea unghiulară  $\Phi$  scade de  $e$  ori. Raportul de amortizare  $K$ , în acest model,  $K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = e^{\delta T}$ , rămâne constant. *Reprezentați grafic legea de mișcare.*

## Obiectiv A2.

*Determinarea perioadei de oscilație ( $T$ ) și a pulsătiei de oscilație ( $\omega$ ) a pendulului Pohl în cazul cu diferite frecări. Determinarea raportului de amortizare  $K$ , a decrementului logaritmic  $\Lambda$ , a coeficientului de amortizare  $\delta$ .*

$$I_f \sim 0,55A, U_{\sim} = 8V$$

Oscilația #	$\Phi$ (grade pe scală)	$K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}$	$\Lambda = \ln K$	$\delta$ (1/s) $\delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$	$\omega$ (rad/s) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
1		-	-		
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Pentru a determina noua *pulsătie* ( $\omega$ ) a pendulului Pohl , *raportul de amortizare* ( $K$ ), *decrementul logaritmic* ( $\Lambda$ ), coeficientul de amortizare ( $\delta$ ), în cazul cu frecări ( $I_f \neq 0$ ):

- \* Deviați complet pendulul
- \* Măsurăți timpul necesar  $\Delta t$  până la amortizarea completă a oscilației
- \* Notați în tabel amplitudinile succesive  $\Phi$  de pe o parte a pendulului
- \* Pentru precizie repetați măsurătoarea, și comparați valorile obținute

Legea mișcării oscilatorului amortizat este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos \omega t, \quad \text{cu coeficientul de amortizare } \delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$$

Legea arată că amplitudinea unghiulară scade exponențial, și după fiecare interval de timp  $t = \frac{1}{\delta}$  amplitudinea unghiulară  $\Phi$  scade de  $e$  ori. Raportul de amortizare  $K$ , în acest model,  $K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = e^{\delta T}$ , rămâne constant. *Reprezentați grafic legea de mișcare.*

## Obiectiv A2.

*Determinarea perioadei de oscilație ( $T$ ) și a pulsătiei de oscilație ( $\omega$ ) a pendulului Pohl în cazul cu diferite frecări. Determinarea raportului de amortizare  $K$ , a decrementului logaritmic  $\Lambda$ , a coeficientului de amortizare  $\delta$ .*

$$I_f \sim 0,9A, U_{\sim} = 12V$$

Oscilația #	$\Phi$ (grade pe scală)	$K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}$	$\Lambda = \ln K$	$\delta$ (1/s) $\delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$	$\omega$ (rad/s) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
1		-	-		
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Pentru a determina noua *pulsătie* ( $\omega$ ) a pendulului Pohl , *raportul de amortizare* ( $K$ ), *decrementul logaritmic* ( $\Lambda$ ), coeficientul de amortizare ( $\delta$ ), în cazul cu frecări ( $I_f \neq 0$ ):

- \* Deviați complet pendulul
- \* Măsurăți timpul necesar  $\Delta t$  până la amortizarea completă a oscilației
- \* Notați în tabel amplitudinile succesive  $\Phi$  de pe o parte a pendulului
- \* Pentru precizie repetați măsurătoarea, și comparați valorile obținute

Legea mișcării oscilatorului amortizat este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos \omega t, \quad \text{cu coeficientul de amortizare } \delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$$

Legea arată că amplitudinea unghiulară scade exponențial, și după fiecare interval de timp  $t = \frac{1}{\delta}$  amplitudinea unghiulară  $\Phi$  scade de  $e$  ori. Raportul de amortizare  $K$ , în acest model,  $K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = e^{\delta T}$ , rămâne constant. *Reprezentați grafic legea de mișcare.*

# Teoria lucrării

## B. Oscilații forțate

Oscilații unghiulare forțate. Pendulul Pohl.

Dacă pendulul Pohl de torsiune este stimulat periodic din exterior de un moment al forței extern  $M_e$  dat de un disc motor rotitor:

$$M_e = M_0 \cdot \cos(\omega_e t)$$

Legea mișcării devine:

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + \omega_0^2\Phi = F_{max} \cos(\omega_e t)$$

$$\text{unde } F_{max} = \frac{M_{max}}{I}$$

În regim staționar, soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II neomogenă este:

$$\Phi(t) = \Phi_e \cos(\omega_e t - \alpha)$$

$$\Phi_e = \frac{\Phi_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega_e}{\omega_0})^2]^2 + (2\frac{\delta}{\omega_0}\frac{\omega_e}{\omega_0})^2}}, \quad \Phi_e = \frac{F_{max}}{\omega_0^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$

Oscilații liniare forțate. Pendulul elastic (cls a XI-a)

Dacă pendulul elastic liniar este stimulat periodic din exterior de o forță  $F_e$  dată de un motor liniar:

$$F_e = F_{max} \cdot \cos(\omega_e t)$$

Legea mișcării devine:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_{max} \cos(\omega_e t)$$

În regim staționar, soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II neomogenă este:

$$x(t) = A \cos(\omega_e t - \alpha)$$

$$A = \frac{F_{max}}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega_e}{\omega_0})^2]^2 + (2\frac{\delta}{\omega_0}\frac{\omega_e}{\omega_0})^2}}, \quad A = \frac{F_{max}}{\omega_0^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$

La o analiză a ecuației amplitudinii unghiulare  $\Phi_e$  a pendulului Pohl în regim forțat cu discul motor extern:

$$\Phi_e = \frac{\Phi_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega_e}{\omega_0})^2]^2 + (2\frac{\delta}{\omega_0}\frac{\omega_e}{\omega_0})^2}}$$

Se desprind următoarele observații:

- Cu cât  $F_{max}$  este mai mare, cu atât amplitudinea unghiulară  $\Phi_e$  este mai mare.
- Pentru o valoare fixă a  $F_{max}$ ,  $\Phi \rightarrow \Phi_{max}$  pentru  $\omega_e \rightarrow \omega_0$ . (**maximul curbei de rezonanță  $\Phi_e(\omega_e)$** )
- Cu cât este mai mare  $\delta$ , cu atât este mai mică  $\Phi_e$
- Pentru  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\Phi_e \rightarrow \Phi_{max}$ , dacă  $\omega_e = \omega_0$

## Obiectiv B1.

*Determinarea curbelor de rezonanță. Determinarea în regim staționar a amplitudinilor  $\Phi_e$  stabilite ale pendulului Pohl, la diferite pulsări exterioare impuse de discul rotitor  $\omega_e$ . Trasarea curbei de rezonanță:  $\Phi_e(\omega_e)$*

	$\omega_e$ - pulsărea discului motor extern	$\Phi_e$ - amplitudinea unghilară staționară a oscilației forțate a pendulului Pohl
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Pentru a determina curbele de rezonanță:

- \* Legați pendulul Pohl la discul motor rotitor.
- \* Folosind butoanele de reglare brută și reglare fină alegeti pe rând diferite pulsării  $\omega_e$  care vor stimula pendulul Pohl.
- \* Așteptați stabilirea unui regim staționar de oscilație
- \* Notați amplitudinile unghilare maxime  $\Phi_e$  stabilite corespunzătoare pulsării  $\omega_e$

*Trasați graficul curbei de rezonanță  $\Phi_e(\omega_e)$  și determinați pulsărea  $\omega_e$  pentru care curba de rezonanță atinge un maxim. Cu alte cuvinte *transferul de energie* de la discul motor rotitor este *maxim* către pendulul Pohl.*

## Obiectiv B2.

*Observarea defazajului între pendulul Pohl de torsiune și discul motor extern excitator, pentru valori mici ale frecării, pentru diferite pulsării  $\omega_{ext}$ .*

În figura de mai jos este reprezentată diferența de fază  $\alpha$  a oscilației forțate a pendulului Pohl în funcție de pulsăria  $\omega_e$  care stimulează din exterior pendulul.

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$

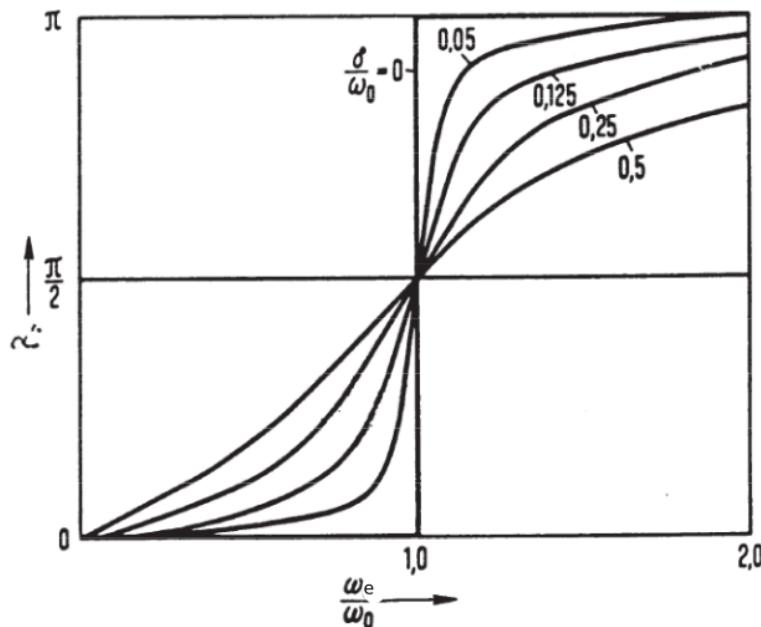


Figura 10: Defazajul oscilației forțate pentru diferite frecări  $\delta$

Dacă pulsăriile stimulante  $\omega_e$  sunt mici, diferența de fază disc motor -Pendul Pohl este aproape zero, adică discul motor și pendulul Pohl sunt *în fază*.

Dacă pulsăriile stimulante  $\omega_e$  sunt mult mai mari decât  $\omega_0$ , diferența de fază disc motor-Pendul Pohl este aproape  $180^\circ$ , adică discul motor și pendulul Pohl sunt *în opozitie de fază*.

Cu cât frecările sunt mai mici, cu atât tranziția de la regimul "în fază" la regimul "în opozitie de fază" este mai rapidă.