MULȚIMI FINITE ORDONATE

EXERSARE

E1 Să se scrie mulțimile ordonate care se pot forma cu mulțimea:

ⓐ $\{1,3,5\}$ $(1,3,5), (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3), (5,3,1)$

ⓑ $\{-1,0,2\}$ $(-1,0,2), (-1,2,0), (0,-1,2), (0,2,-1), (2,-1,0), (2,0,-1)$

ⓒ $\{a,c,n\}$ $(a,c,n), (a,n,c), (c,a,n), (c,n,a), (n,a,c), (n,c,a)$

E2 Să se scrie mulțimile ordonate formate cu mulțimea A, în cazurile:

ⓐ $A=\{x\in\mathbb{Z} \,/\, x^2\le 2\} \Rightarrow A=\{-1,0,1\}$ $(-1,0,1), (-1,1,0), (0,-1,1), (0,1,-1), (1,0,-1), (1,-1,0)$

ⓑ $A=\{x\in\mathbb{N} \,/\, x+1/8\} \Rightarrow A=\{0,1,3\}$ $(0,1,3), (0,3,1), (1,0,3), (1,3,0), (3,0,1), (3,1,0)$

ⓒ $A=\{x\in\mathbb{R} \,/\, |x^2-1|=3\} \Rightarrow A=\{2,-2\}$ $(2,-2), (-2,2)$

ⓓ $A=\{x\in\mathbb{R} \,/\, 4^x-7\cdot 2^x+12=0\} \Rightarrow (2^x)^2-7\cdot 2^x+12=0$

$$2^x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 12\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm 1}{2}=\begin{cases}4\\3\end{cases}$$

$2^x=4 \Rightarrow x=2$

$2^x=3 \Rightarrow x=\log_2 3\cong 1{,}584$

$(2, \log_2 3), (\log_2 3, 2)$

E3 Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Să se scrie mulțimile ordonate rezultate din A, astfel încât:

ⓐ elementul 2 să aibă rangul 3, iar elementul 3 să aibă rangul 4)

$(1,4,2,3,5), (1,5,2,3,4), (4,1,2,3,5), (4,5,2,3,1), (5,1,2,3,4), (5,4,2,3,1)$

ⓑ elementele 3,4,5 să aibă rangurile 2, 1, respectiv 5

$(4,3,1,2,5), (4,3,2,1,5)$

E4 Fie $A=\{1,2,3,5\}$. Să se scrie mulțimile ordonate rezultate din submulțimile lui A care au suma elementelor 8.

$(3,5), (5,3), (1,2,5), (1,5,2), (2,1,5), (2,5,1), (5,1,2), (5,2,1)$

E5 Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4\}$ și $B\subset A$. Să se determine câte elemente are B, dacă există:

ⓐ 16 funcții $f:A\to B$

$n=card(A)$

$m=card(B)$

$16=m^n \Rightarrow 16=4^m \Rightarrow m=2$

ⓑ același număr de funcții de la A la B cât și de la B la A

$m^n=m^n$

$4^2=2^4 \Rightarrow n=\{4,2\}$, $m=\{2,4\}$

E5 Un copil vrea să coloreze rețeaua de pătrate din desen cu culorile roșu și galben. Câte configurații poate obține?

roșu

galben

$card(A)=2$

1	2	3
4	5	6

$card(B)=6$ $\Rightarrow 2^6$ moduri

APROFUNDARE

A1 Pentru formarea unui cifru la un seif se folosesc elementele mulțimii $A=\{0,1,2,3\}$. Care sunt aceste cifruri știind că ele au patru cifre distincte?

$(0,1,2,3), (0,1,3,2), (0,2,1,3), (0,2,3,1), (0,3,1,2), (0,3,2,1)$

$(1,0,2,3), (1,0,3,2), (1,2,0,3), (1,2,3,0), (1,3,0,2), (1,3,2,0)$

$(2,0,1,3), (2,0,3,1), (2,1,0,3), (2,1,3,0), (2,3,0,1), (2,3,1,0)$

$(3,0,1,2), (3,0,2,1), (3,1,0,2), (3,1,2,0), (3,2,1,0), (3,2,0,1)$

A2 Să se scrie mulțimile ordonate ale mulțimii A, în cazurile:

a) $A=\{n\in\mathbb{N} / n^2\le 10\}$, iar 2 are rangul 3 $\quad A=\{0,1,2,3\}$

$(0,1,2,3), (0,3,2,1), (1,0,2,3), (1,3,2,0), (3,0,2,1), (3,1,2,0)$

b) $A=\left\{n\in\mathbb{N} / \frac{2n+3}{n}\in\mathbb{N}\right\}$ $\quad A=\{1,3\}$ $\quad (1,3), (3,1)$

c) $A=\{x\in\mathbb{R} / \log_2(x^2-1)=3\}$ $\quad (x^2-1)=2^3 \Rightarrow x=\{3;-3\} \Rightarrow (3,-3);(-3,3)$

d) $A=\{x\in\mathbb{R} / 2\log_4(x^2+1)+3\log_2(x^2+1)=8\}$ $\quad \log_{2^2}(x^2+1)^2+\log_{2^1}(x^2+1)^3=8$ $\quad \log_{a^n}x=\frac{1}{n}\log_a x=\log_a x^{1/n}$

$\log_2(x^2+1)^4=\log_2 2^8 \Rightarrow (x^2+1)^4=2^8 \Rightarrow x^2+1=2^2 \Rightarrow x=\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$ $\quad (\sqrt{3},-\sqrt{3}), (-\sqrt{3},\sqrt{3})$

A3 Să se scrie mulțimile ordonate formate cu mulțimea: $A=\{x\in\mathbb{Z} / |x-\sqrt{5}|\le\sqrt{2}\}$ și funcțiile bijective care dau ordinea respectivă.

$\sqrt{5}\approx 2{,}236$

$\sqrt{2}\approx 1{,}414$

$x=+1 \Rightarrow |1-\sqrt{5}|=1{,}236<1{,}41$

$x=+2 \Rightarrow |2-\sqrt{5}|=0{,}23<1{,}41$

$x=+3 \Rightarrow |3-\sqrt{5}|=0{,}76<1{,}41$

$x=+4 \Rightarrow |4-\sqrt{5}|=1{,}76\not<1{,}41$

$x=-1 \Rightarrow |-1-\sqrt{5}|=3{,}23\not<1{,}41$

$\Rightarrow A=\{1,2,3,4\}$

idem A1

A4 Se consideră mulțimile A și B cu cel puțin două elemente. Să se determine card(A) și card(B) știind că există cel mult 63 de funcții de la A la B.

$n\ge 2$

$m\ge 2$

card(A) $=n$

card(B) $=m$

$n^m\le 63$

$\Rightarrow (n,m)\in\{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,2),(3,3),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2)\}$

$n=2 \quad m=5$

$n=3 \quad m=3$

$n=4 \quad m=2$

$n=5 \quad m=2$

$n=6 \quad m=2$

$n=7 \quad m=2$

A5 Un copil colorează cu un număr de culori o rețea de pătrate ca în figură. Să se determine câte culori a folosit copilul știind că el a obținut cel puțin 64 de modele, dar nu mai mult de 10000.

$$64 \leq n^{12} \leq 10000$$

$$8^2 \leq n^{12} \leq 100^2$$

$$8 \leq n^6 \leq 100$$

$$n = \{2\}$$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

A6 Fie A o mulțime nevidă. Să se arate că mulțimea A este finită dacă și numai dacă are loc una din proprietățile:

a) orice funcție injectivă $f: A \to A$ este și funcție surjectivă

Fie A mulțime finită și $f: A \to A$ injectivă $\Rightarrow \operatorname{card}(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{card}(A) \Rightarrow$ funcția este surjectivă.

Metoda reducerii la absurd: Presupunem că A este infinită și fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ cu $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ Definim $f: A \to A$ $f(a_i) = a_{i+1}$, $i = 1, 2 \dots$
Evident f este injectivă și cum $a_1 \notin \operatorname{Im} f = \{a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ rezultă că f nu este surjectivă, în contradicție cu ipoteza. $\Rightarrow$ A este finită

b) orice funcție surjectivă $f: A \to A$ este și funcție injectivă

Prima implicație este evidentă. Reciproc, dacă A este infinită construim funcția $f(a_i) = \begin{cases} a_i, & i = 1 \\ a_{i-1}, & i > 1 \end{cases}$ care este surjectivă dar neinjectivă. Așadar A nu poate fi infinită.

A7 Un lanț ADN este alcătuit din patru tipuri de molecule organice. Să se determine în câte moduri se poate constitui un astfel de lanț care conține n molecule.

Răspuns: 4^n

A8 Un test grilă constă din 10 itemi, care au fiecare câte 4 variante de răspunsuri posibile. În câte moduri poate fi alcătuită grila de corectare

Răspuns: 4^{10}