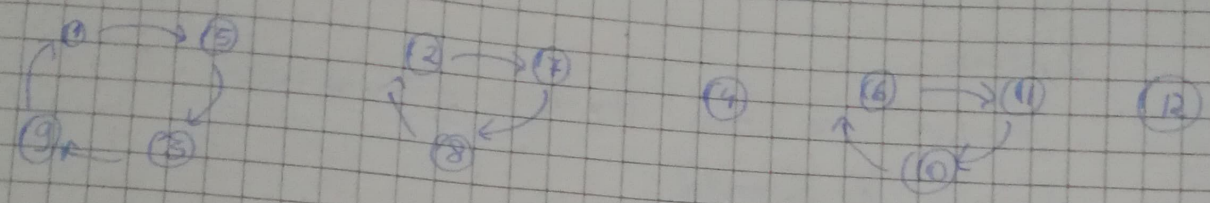
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 9 & 4 & 3 & 11 & 8 & 2 & 1 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$



$\sigma = (1\,5\,3\,9)(2\,7\,8)(6\,11\,10)$

$(4) = e$

Seminarul 6.

Exemple de grupuri și de morfisme de grupuri

1. Se consideră un plan π (văzut ca o mulțime de puncte).

O funcț. $f : \pi \to \pi$ se numește izometrie dacă ea păstrează $|f(A)f(B)| = |AB|$, $\forall A, B \in \pi$

Notăm cu $I(\pi) = \{ f : \pi \to \pi \mid f\text{-izometrie} \}$

Acceptăm fără dem că $\forall$ izometrie este o bijecție $\Rightarrow$

$I(\pi) \subseteq S(\pi) = \{ f : \pi \to \pi \mid f\text{-bij} \}$

Știm că $(S(\pi), \circ)$ este un grup (grup simetric al mult. π)

Fie $P = A_0 A_1 \ldots A_{2n-1} \subseteq \pi$ un poligon regulat de centru O.

Not $D_n = \{ f \in I(\pi) \mid f(P) = P \}$

Se arătă:

a) $I(\pi) \leq S(\pi)$

b) $D_n \leq I(\pi)$ $\quad |D_n| = 2n$

Temă

c) Să se scrie tabla operației pt D_3, D_4 ($D_5, D_6, \dots D_n$)

d) Să se listeze toate subgrupurile

Rezolvare:

izometriile se mai numesc și deplasări.

Izometrii fundamentale:

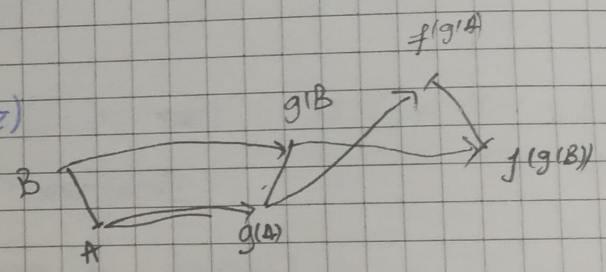
1. Translația

2. Rotația

3. Simetria axială

P. stabilă

a) $\forall f, g \in J(\pi) \overset{?}{\Rightarrow} f \circ g \in J(\pi)$



Fie $A, B \in \pi$

$f \circ g : \pi \to \pi$

$|f \circ g(A), f \circ g(B)| = |f(g(A)) f(g(B))| = |g(A) g(B)| = |AB| \Rightarrow f \circ g \in J(\pi)$

el. neutru

$e = 1_\pi : \pi \to \pi$

$|1_\pi(A) 1_\pi(B)| = |AB| \Rightarrow 1_\pi \in J(\pi)$

simetricul.

Fie $f \in J(\pi) \Rightarrow f^{-1} \in J(\pi)$

$|f^{-1}(A) f^{-1}(B)| \overset{\text{Aplic } f}{=} |f(f^{-1}(A)) f(f^{-1}(B))| = |AB| \Rightarrow f^{-1} \in J(\pi)$

$\Rightarrow J(\pi) \leq S(\pi)$

b) $D_n = \{ f \in I(\mathbb{R}) \mid f(P) = P \}$ → c.

parte stabilă

1 identica.

$\forall f, g \in D_n$

1

$f \circ g \in D_n$

A

$(f \circ g)(P) = f(g(P)) = f(P) = P \in D_n$

$\Rightarrow D_n$ - parte stab.

$1_{\mathbb{R}}(P) = P \Rightarrow 1_{\mathbb{R}}(P) \in D_n$

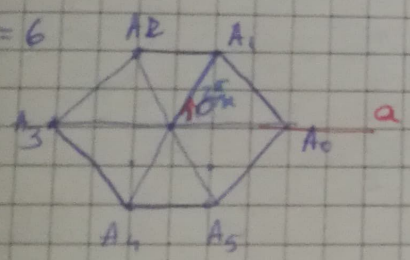
Simetricul

Fie $f \in D_n \overset{?}{\Rightarrow} f^{-1} \in D_n$

$f^{-1}(P) = f \circ (f^{-1}(P)) = 1_{(\mathbb{R})}(P) = P \Rightarrow f^{-1}(P) \in D_n.$

$|D_n| = 2n$

$n = 6$



Fie $f \in D_n \Rightarrow f(A_0) \in \{A_0, A_1, \dots A_{n-1}\}$

$A_k = f(A_0), \quad 0 \le k \le n-1.$

Atunci $f(A_1) \in \{A_{k+1}, A_{k-1}\}$

Caz I $f(A_1) = A_{k+1} \Rightarrow f(A_i) = A_{k+i}$

Toate sumele și dif sunt calculate modulo n

În acest caz $f = r^k$ unde

$r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este rotația de centru O cu $\frac{2\pi}{n}$

Obs. $r^n = 1_E$

Caz II $f(A_1) = A_{k-1} \to f(A_i) = A_{k-i}$, $0 \le i \le n-1$.

Not $s : \pi \to \pi$ simetria față de axa $a = OA_0$ (fixă)

În acest caz $f = r^k \circ s$

Obs $s^2 = 1_\pi$

Prin urmare D_n are urm. elemente

$D_n = \{1, r, r^2, \dots r^{n-1}, s, rs, r^2s, \dots r^{n-1}s\}$

are $2n$ elemente.

$D_n = \langle r, s \mid r^n = 1 = s^2,\ sr = r^{n-1}s \rangle$

Sa x

$r^3s \circ r = r^3s(r(x)) =$

$= sr \circ s = sr^2$

$D_4 = \{1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$

$= \langle r, s \mid r^4 = 1 = s^2,\ sr = r^3s \rangle$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	rs	r^2s	r^3s
1	1	r	r^2	r^3	s	rs	r^2s	r^3s
r	r	r^2	r^3	1	rs	r^2s	r^3s	s
r^2	r^2	r^3	1	r	r^2s	r^3s	s	rs
r^3	r^3	1	r	r^2	r^3s	s	rs	r^2s
s	s	r^3s	r^2s	rs	1	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^3s	r^2s	r	1	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^3s	r^2	r	1	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^3	r^2	r	1

Grupul Diedral de rang n ($n=4$) și ordin $2n$

$sr^2 = srr = r^3sr = r^3r^3s = e^2s$

$sr^3 = sr^2 \cdot r = r^2s \cdot r = r^2 \cdot r^3s = rs$

$srs = r^3s^2 =$

$rsrs = sr^3rs \quad sis = 1.$

$rsr^2s = sr^3 \cdot r^2s = s.$

Subgrupurile

$\langle 1 \rangle = \{1\}$

$\langle r \rangle = \{r, r^2, r^3, 1\} = \langle r^3 \rangle = \langle 1, r \rangle = \langle 1, r, r^2, r^3 \rangle$

$\langle r^2 \rangle = \{1, r^2\}$

$\langle s \rangle = \{1, s\}$

$\langle rs \rangle = \{1, rs\}$

$\langle r^2s \rangle = \{1, r^2s\}$

$\langle r^3s \rangle = \{1, r^3s\}$

$\langle s, r^2 \rangle = \{1, s, r^2, r^2s\}$ Grupul lui Klein

$\langle r, s \rangle \; D_4$

$D_4 = \langle r, rs \rangle - \langle s, rs \rangle = \langle r^2, rs \rangle$

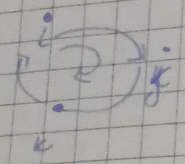
$\langle r^2, rs \rangle = \{1, r^2, rs, r^3s\} \rightarrow$ izomorf cu grupul lui Klein.

Să se completeze tabla op $\cdot : H \times H \rightarrow H$

unde $H = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$

respectând cele reguli:

- 1 - el neutru
- reg semnelor $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -xy$, $-(-x) = x$, $\forall x, y \in H$.
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$



$ij = k = -ji,$

$jk = i = -kj,$

$ki = j = -ik.$

Arătați că $(H, \cdot)$ este un grup numit grupul quaternionilor. (sau grupul lui Hamilton)

Listați toate subgrupurile.

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	$+1$	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

$\langle 1 \rangle = \{1\}.$

$\langle -1 \rangle = \{1, -1\}$

$\langle i \rangle = \{1, i, -i, -1\} = \langle -i \rangle$

$\langle j \rangle =$ —||—

$\langle k \rangle =$ —||—

$\langle i, j \rangle = \{-1, 1, i, j, \ldots\ldots\}$

ex morfism

Să se arate că $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$

$f(x) = \cos x + i \sin x$

este un morf de grupuri. Să se det Ker f și Im f.

$(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad f(a+b)$

$f(a+b) = \cos(a+b) + i\sin(a+b) =$

$= \cos a \cos b - \sin a \sin b + i \sin a \cos b + i \sin b \cos a) =$

$= \cos b (\cos a + i \sin a) + i \sin b (i \sin a + \cos a) =$

$= f(a) \cdot f(b)$

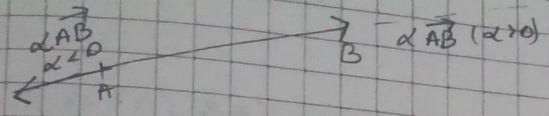
Formula lui DeMoivre.

$\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x + i \sin x = 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 1, \sin x = 0\}$

$= \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z} = \langle 2\pi \rangle$



$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

$0\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Grupuri cicliche

1. Să se determine toate subgrupurile grupului $(\mathbb{Z},+)$

Notăm $Sub(\mathbb{Z}) = \{ G \leq \mathbb{Z} \mid G \leq \mathbb{Z} \}$

Vom arăta că $Sub(\mathbb{Z}) = \{ n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \}$ (1)

$n\mathbb{Z} = \{ nk \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ \dots -3n, -2n, -n, 0, n, 2n \dots \} \leq \mathbb{Z}$

1. „$\supseteq$"

Fie $n \in \mathbb{N}$ De arătat că $n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ (2)

1. Parte stabilă

Fie $x, y \in n\mathbb{Z} \Rightarrow x+y \in \mathbb{Z}$.

$x+y = n(k+l) \in n\mathbb{Z}$

El. neutru

$0 = n\cdot 0 \in \mathbb{Z}$.

Simetricul

Fie $x \in n\mathbb{Z} \Rightarrow x = nk$

$-x \in n\mathbb{Z}$ deoarece $-x = n\cdot(-k) \in n\mathbb{Z}$

2. „$\subseteq$"

Fie $G \in Sub(\mathbb{Z})$ adică $G \leq \mathbb{Z}$

$G \leq \mathbb{Z}$

Dacă $G = \{0\}$ atunci $G = 0 \cdot \mathbb{Z} \in \{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Dacă $G \neq \{0\}$ atunci $\exists g \in G,\ g \neq 0 \Rightarrow -g \in G \Rightarrow$
$\Rightarrow G \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ n$ - cel mai mic din $G \cap \mathbb{N}^*$

De arătat că $n\mathbb{Z} = G$ (3)

(3) "$\subseteq$"

Fie $x \in n\mathbb{Z}$

$G \leq \mathbb{Z},\ n \in G$

Fie $x \in n\mathbb{Z} \Rightarrow x = n \cdot k$

Dacă $x = \underbrace{n + n + \dots + n}_{k \text{ ori}} \in G$ (pt că $n \in G$ și

Dacă $k = 0$ at. $x = 0 \in G$ (pt că elem neutru este G)

Dacă $k < 0$ atunci $x = \underbrace{(-n) + (-n) + \dots + (-n)}_{\text{de } |k| \text{ ori}}$ pt că $n \in G \Rightarrow -n \in G$ at.

Deci $x \in G \Rightarrow n\mathbb{Z} \subseteq G$.

Obs

$n\mathbb{Z} = \langle n \rangle = \langle -n \rangle = (-n)\mathbb{Z}$

"$\supseteq$"

Fie $x \in G$

$x = n \cdot k + r,\ k, r \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq r \leq n-1.$

$r = \underset{\substack{\uparrow \\ G}}{x} - \underset{\substack{\uparrow \\ n\mathbb{Z} \subseteq G}}{nk}$

$r = x - nk \in G$

$r < n$

$n =$ cel mai mic din $G \cap \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow r \notin \mathbb{N}^*$

$0 \leq r \leq n-1$

$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = n \cdot k \in n\mathbb{Z} \Rightarrow (3)$ și mai departe $\Rightarrow (1)$

Obs

Cu aceiași idee putem arăta că subgrupurile unui grup ciclic sunt ciclice.

Temă: Să se determine toți morfismele de grup

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

2) Să se dea exemplu de două subgrupuri a căror reuniune nu este subgrup.

Temă Dați un exemplu în D_3 sau D_4

$2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \nleq \mathbb{Z}$

$2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$

Obs

$2\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ - subgrup

$(4\mathbb{Z} \leq 2\mathbb{Z})$

5 Fie $(G,+)$ abelian și $H, K \leq G$

Not $H+K = \{ h+k \mid h \in H, k \in K \} \subseteq G$

Arătați $H+K = \langle H \cup K \rangle$

<u>Sol</u>

(1) $H+K \leq G$

(2) $H \cup K \subseteq H+K$

(3) $L \leq G$, $H \cup K \in L \Rightarrow H+K \subseteq L$

(1) Fie $\left.\begin{array}{l} h_1 + k_1 \in H+K \\ h_2 + k_2 \in H+K \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} h_1 + k_1 + h_2 + k_2 \in H+K \Rightarrow$ p stabil.

$= (h_1 + h_2) + (k_1 + k_2)$

$0 = 0 + 0 \in H+K$

$h + k \in H+K$

$-(h+k) = -h-k = -h + (-k) \in H+K \Rightarrow (1)$

<u>Obs.</u>

$\langle n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z} \rangle = n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{ nx + my \mid x, y \in \mathbb{Z} \}$

Fie $x \in H \cup K \Rightarrow x \in H$ sau $x \in K$

Dacă $x \in H \Rightarrow x = \underset{H}{x} + \underset{K}{0} \in H+K$

Dacă $x \in K \Rightarrow x = 0 + x \in H+K$

$\Rightarrow (2)$

(3) $L \leq K$ a.î. $H \cup K \subseteq L$

Fie $x \in H+K \rightarrow x = h+k$, $h \in H$, $k \in K$

$$\left.\begin{array}{l} h \in H \subseteq H \cup K \subseteq L \\ k \in K \subseteq H \cup K \subseteq L \\ L \text{ - parte stabilă} \end{array}\right\} \rightarrow h+k \in L$$

Deci $x \in L \Rightarrow (3)$

4. Fie $m, n \in \mathbb{N}$

(a) $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m/n$

(b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$, $k = \text{lcm}(n, m)$

(c) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, $d = \gcd(n, m)$

<u>Soluție</u>

„$\Rightarrow$"

$$\left.\begin{array}{l} n = m \cdot 1 \in n\mathbb{Z} \\ n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow n \in m\mathbb{Z} \Rightarrow n = m \cdot x \Rightarrow m/n$$

„$\Leftarrow$"

$m/n \Rightarrow n = m \cdot k \in \mathbb{Z}_n$, $k \in \mathbb{Z}$

Fie $x \in n\mathbb{Z} \Rightarrow x = n \cdot \ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$

$x = m \cdot k \cdot \ell \Rightarrow x \in m\mathbb{Z}$

(b) $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$, $k = \text{lcm}(n, m)$

$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ (vezi curs)

$n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$

$k\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \overset{(a)}{\Rightarrow} n/k$

$k\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \overset{(a)}{\Rightarrow} m/k$

Fie $k' \in \mathbb{N}$ a.î. n/k' și $m/k' \overset{(a)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} k'\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \\ \text{și } k'\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow k'\mathbb{Z} \subseteq k\mathbb{Z} \Rightarrow$

$\overset{(a)}{\Rightarrow} k/k'$

Deci $k = \text{lcm}(n, m)$

(c) $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \langle n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z} \rangle \leq \mathbb{Z} \Rightarrow$

$n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$

$n\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} \overset{(a)}{\Rightarrow} d/n$

-"- cu m $\Rightarrow d/m$

Fie d' a.î. d'/n și $d'/m \overset{(a)}{\Rightarrow}$

$n\mathbb{Z} \subseteq d'\mathbb{Z}$ și $m\mathbb{Z} \subseteq d'\mathbb{Z} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z} \subseteq d'\mathbb{Z} \\ d'\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow$

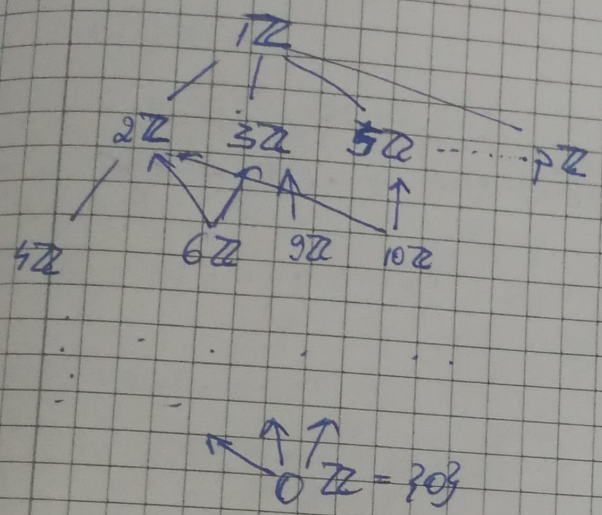
$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \langle n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z} \rangle = n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} \subseteq d'\mathbb{Z} \\ d\mathbb{Z} \subseteq d'\mathbb{Z} \end{array}\right\} \overset{(a)}{\Rightarrow} d'/d \Rightarrow$

$d = \gcd(n, m)$

Obs: $(\mathrm{Sub}\,\mathbb{Z}, \subseteq)$ form o latice completă

în care $\inf\{n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$

$\sup\{n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$



p - număr prim

$2\mathbb{Z} + 5\mathbb{Z} = \{2x + 5y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

$\overset{\shortparallel}{1 \cdot \mathbb{Z}}$

5) Dacă $f: G \to H$ este un morfism de grup și $x \in G$ este un element cu $\mathrm{ord}(x) = n \in \mathbb{N}^*$ atunci $\mathrm{ord}(f(x)) < \infty$ și $\mathrm{ord}(f(x)) \mid n$

$\mathrm{ord}(y) = k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \begin{cases} y^k = 1 \\ \forall m \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } y^m = 1 \Rightarrow k \mid m \end{cases}$

$f(x)$

Sol $\mathrm{ord}(x) = n \Rightarrow \begin{cases} x^n = 1 \\ + \end{cases}$

$f(x^n) = f(1) \overset{\text{morf}}{=} (f(x))^n = 1 \Rightarrow \mathrm{ord}\, f(x) =$ finit

$\mathrm{ord}\, f(x) \mid n$

$\Rightarrow x-y \in \ker f$

Dar $\ker f = \{0\}$ $\Big\} \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y \Rightarrow f$ - injectă

Seminarul 8

1 Se dă ~~mulțime~~ un inel $(R,+,\cdot)$ și o mulțime A

Pe mulțime $R^A = \{f: A \to R \mid f \text{ - funcție}\}$

se def operațiile

$+ : R^A \times R^A \to R^A \qquad (f+g)(x) = f(x)+g(x), \ \forall x \in A$

$\cdot : R^A \times R^A \to R^A \qquad (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x), \ \forall x \in A$

Să se arate $(R^A,+,\cdot)$ - este un inel. Mai mult

- dacă R este com atunci R^A - comut
- dacă $1 \in R$ atunci și R^A are unitate

Dacă R este domeniu de integritate / corp, rezultă că R^A are aceleași proprietate?

Sol

$(R^A,+)$ grup abelian

$f,g,h \in R^A$

$(f+g)+h = f+(g+h)$

$(f+g)+h : A \to R$

$f+(g+h) : A \to R$

Pt $x \in A$ arbitrar avem:

$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x)+g(x)+h(x)$

$(f+(g+h))(x) = f(x) + (g+h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$

Elem neutru pt $+$ este $0: A \to \mathbb{R}$, $0(x) = 0$

$1 \in \mathbb{R} \to$ elem pt $\cdot$ $1: A \to \mathbb{R}$, $1(x) = 1$

opusa funcției $f: A \to \mathbb{R}$ este $-f: A \to \mathbb{R}$

$(-f)(x) = -f(x)$

Temă: 1. $f+g = g+f$

0 - elem neutru în $(\mathbb{R}^A, +)$ $\Big| \Rightarrow$ gr abelian

$(-f)+f = 0$

2. „$\cdot$" - asociativă

(3) $1 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1: A \to \mathbb{R}$ elem neutru pt $\cdot$

(4) $(\mathbb{R}, \cdot)$ comut $\Rightarrow (\mathbb{R}^A, \cdot)$ comut

5 $f(g+h) = fg + fh$

$(g+h)f = gf + hf$

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ - corp

$(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ - inel comutativ

$f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f \cdot g = 0 \Rightarrow f = 0$ sau $g = 0$

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in [0, \infty) \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x \in [0, \infty) \end{cases}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$ dar $f \neq 0$ și $g \neq 0$

$(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$ - nu e domeniu de integritate

2) a) Să se arate că:

$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{C}$

~~Dar~~ este un subinel cu unitate în $\mathbb{C}$. Este $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ un d.i ?

Dar corp ?

(b) $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ Să se arate că R este un inel în rap cu adunarea și înmulțirea matricilor de tip 2×2

(c) $R \approx \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

(d) Este R un d. integritate ?

a) $e = 0 = 0 + i \cdot 0 \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$1 = 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

~~a+i~~ $x, y \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$x = a_1 + ib_1$

$y = a_2 + ib_2$

$x + y = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = \underbrace{a_1 + a_2}_{\in \mathbb{Z}} + i\underbrace{(b_1 + b_2)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

idem $x \cdot y$

$-x = -a - b \cdot i \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ subinel

$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ este inel comut cu unit

$x, y \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$ } Domeniu de integrit

$(x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in \mathbb{C} \quad x^{-1} \mid x \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0)$

$3 = 3 + i \cdot 0 \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$\exists\, 3^{-1} \in \mathbb{C}$ din $3^{-1} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} \Rightarrow$ nu e corp

b) $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ ✓

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ ✓

Fie stabile $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in R$

$X+Y = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in R$

$X \cdot Y = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} \in R$

$-X = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix} \in R$

$(R$ - subinel cu unitate în $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot) \Rightarrow$ inel

c) $f: R \to \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in R$

$f(X) = a + ib$

$f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ (?)

$f(X \cdot Y) = f(X) \cdot f(Y)$ (??)

Cu $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} f(X+Y) &= f\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} = a+c+i(b+d) \\ f(X)+f(Y) &= a+ib+c+id = a+c+i(b+d) \end{aligned}\right\} (A)$$

$f(X \cdot Y) = f\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} = ac-bd+i(ad+bc)$

$f(X) \cdot f(Y) = (a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc-bd =$

$= ac-bd+i(ad+bc)$

injectivitate

$f(x) = f(y)$

$a+ib = c+id \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \Rightarrow x=y$

surj $\Rightarrow z \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow z = a+ib$

$x = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ și $f(x) = z$

$R \cong \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ este domeniu de integritate dar nu este corp

Seminarul 9

1. Să se arate că $V=(0,\infty)$ este un $\mathbb{R}$-sp-vect în raport cu operațiile:

- adunarea vect $\boxplus : V\times V \to V$ $\quad x \boxplus y = xy, \forall x,y \in V$
- înmulțirea cu scala $\boxtimes : V\times V \to V$ $\quad \alpha \boxtimes x = x^{\alpha}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V$

Reamintim

Dacă $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ atunci K-sp vect este un grup abelian $(V,+)$ împreună cu op externă $K\times V \to V$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

SV(1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ $\qquad$ SV(3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

SV(2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ $\qquad$ SV(4) $1\cdot x = x$

Sol $(\mathbb{R},+,\cdot)$ - corp comutativ

$(V, \boxplus)$ - grup abelian

Temă: Arătați că $V(0,\infty)$ este un subgrup în $(\mathbb{R}^*,\cdot)$

Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$x, y \in V = (0, \infty)$

SV1 $\alpha \boxtimes (x \boxplus y) = \alpha \boxtimes (x \boxplus y) = (\alpha \boxtimes x) \boxplus (\alpha \boxtimes y) =$

SV2

$(\alpha + \beta) \boxtimes x = (\alpha \boxtimes x) \boxplus (\beta \boxtimes x)$

SV3:

$(\alpha \cdot \beta) \boxtimes x = \alpha \boxtimes (\beta \boxtimes x)$

SV4 $1 \boxtimes x = x$

SV(1) $(xy)^{\alpha} = (x^{\alpha}) \cdot (y)^{\alpha}$

SV(2) $x^{\alpha+\beta} = (x^{\alpha}) \cdot (x^{\beta})$

SV3 $x^{\alpha \cdot \beta} = (x^{\beta})^{\alpha}$

SV4 $x^{1} = x$

(2) În $\mathbb{R}^3$ se consideră submulțimile

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^3$

$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\} \not\leq \mathbb{R}^3 \quad (0 \notin B)$

Acasă $\Rightarrow$ $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\} \leq \mathbb{R}^3$ Temă

$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \mid x_1^2 - x_2 = 0\}$

$E = \mathbb{R}^3 \setminus A$

$\mathbb{R}^3 \setminus A \not\leq \mathbb{R}^3 \quad (0 \notin B)$

$F = E \cup \{0\}$

Care dintre aceste submulțimi sunt subspații în $\mathbb{R}^3$ pe

b) $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ ✓

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$ ✓

Fie stabile $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in R$

$X+Y = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in R$

$X \cdot Y = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} \in R$

$-X = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-b) & -a \end{pmatrix} \in R$

$(R$ - subinel cu unitate în $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot) \Rightarrow$ inel

c) $f: R \to \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in R$

$f(X) = a + ib$

$f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ (?)

$f(X \cdot Y) = f(X) \cdot f(Y)$ (??)

Cu $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} f(X+Y) &= f\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} = a+c+i(b+d) \\ f(X)+f(Y) &= a+ib+c+id = a+c+i(b+d) \end{aligned}\right\} (A)$$

$f(X \cdot Y) = f\begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} = ac-bd+i(ad+bc)$

$f(X) \cdot f(Y) = (a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc-bd =$

$= ac-bd+i(ad+bc)$

Reamintim

K^n este K - spatiu vectorial.

V este un K spatiu vect, $U \subseteq V$. Atunci

$$U \leq_K V \iff \begin{cases} 0 \in U \\ x, y \in U, \alpha, \beta \in K \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 0 \in U \\ x, y \in U \Rightarrow x + y \in U \\ x \in U, \alpha \in K \Rightarrow \alpha x \in U \end{cases}$$

$0 = (0,0,0) \in A$ pt că $2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$

Fie $x, y \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ cu $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$y = (y_1, y_2, y_3)$ cu $2y_1 + y_2 - y_3 = 0$

$$\alpha x + \beta y = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) =$$

$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3) =$$

$$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$

$$2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3) =$$

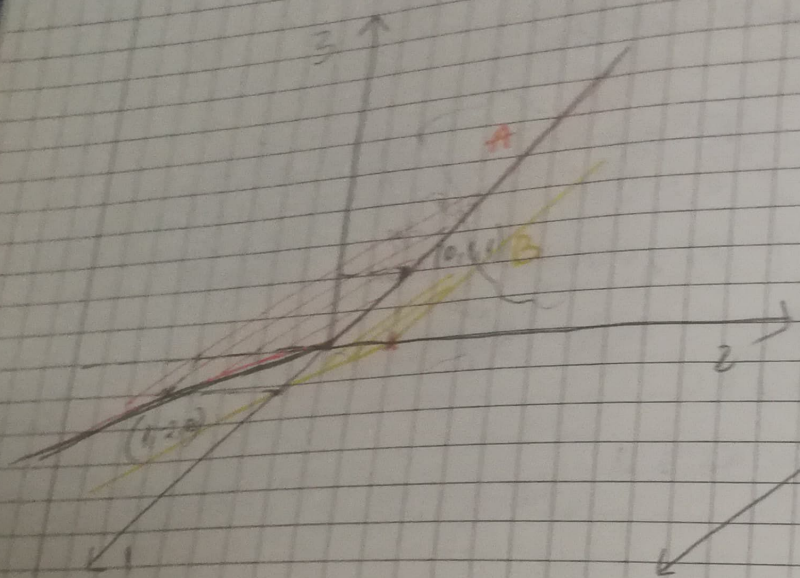
$$= \alpha \underbrace{(2x_1 + x_2 - x_3)}_{0} + \beta \underbrace{(2y_1 + y_2 - y_3)}_{0} = 0 + 0 = 0 \ (A)$$

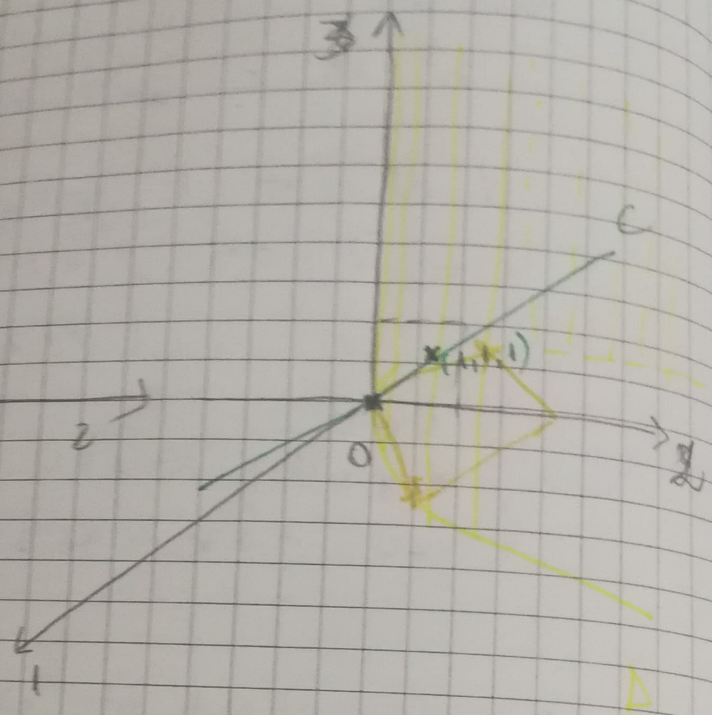
$\rightarrow$ A este un subspatiu.

B nu este un subspatiu pentru că $0 \notin B$ $0 = (0,0,0)$

$v = (0,0,-1)$

αX





D $x = (1,1,0) \in D$

$y = (-1,1,0) \in D$

$x+y = (0,2,0) \notin D \Rightarrow D \not\subset \mathbb{R}^3$

Obs $2x = (2,2,0) \in D$

$$\alpha(2x_1 + x_2 - x_3) + \beta(2y_1 + y_2 - y_3) \neq 0$$

$\nexists\, \beta \in \mathbb{R}$ o. i. $\beta = \dfrac{-\alpha \cdot (2x_1 + x_2 - x_3)}{2y_1 + y_2 - y_3} \in \mathbb{R}$

$\neq 0$

(3) În $\mathbb{R}^3$ se consideră:

$S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

$T = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3 \}$

Să se arate că $S \leq \mathbb{R}^3$, $T \leq \mathbb{R}^3$ (temă) și că

$S \oplus T = \mathbb{R}^3$

Reamintim

$$S + T = \mathbb{R}^3 \rightarrow \begin{cases} S \cap T = \{0\} \\ S + T = \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$S + T = \{ x + y \mid x \in S, y \in T \}$

$S \cap T = \{0\}$

$x = (x_1, x_2, x_3) \in S \cap T \Leftrightarrow x \in S \wedge x \in T$

$$\left.\begin{array}{l} x \in S \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \text{și} \\ x \in T \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x = (0, 0, 0)$$

$\Rightarrow S \cap T = \{0\}$

$S + T = \{ x + y \mid x \in S, y \in T \}$

$S + T \leq \mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \subseteq S + T$?

Fie $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ arbitrar dar fixat. și caut să văd

dacă $\exists$ $x \in S$, $y \in T$ a.î. $v = x + y$

Tic $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$

$y = (y_1, y_2, y_3) \in T$

$v = (a, b, c)$

$x + y = v$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = a \\ x_2 + y_2 = b \\ x_3 + y_3 = c \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 + y_1 - a = 0 \\ x_2 + y_2 - b = 0 \\ x_3 + y_3 - c = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0. \end{cases}$$

$x_1 + y_1 - a = 0$

$x_2 + y_1 - b = 0$

$x_3 + y_1 - c = 0$ (+)

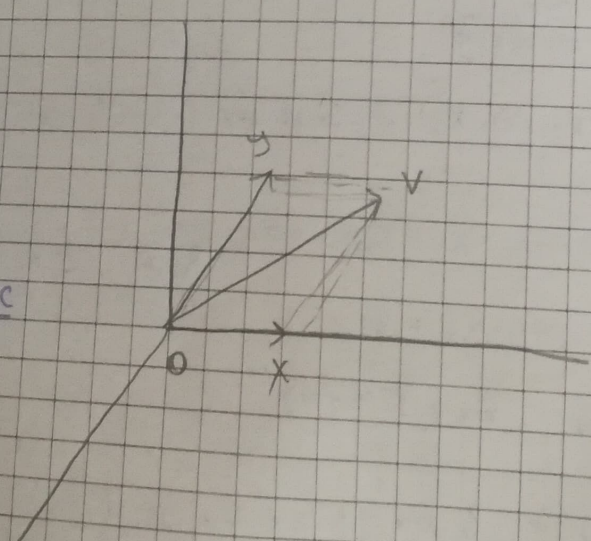
$3y_1 = a + b + c$

$y_1 = y_2 + y_3 = \frac{a+b+c}{3}$

$x_1 = \frac{2a - b - c}{3}$

$x_2 = \frac{2b - a - c}{3}$

$x_3 = \frac{2c - a - b}{3}$

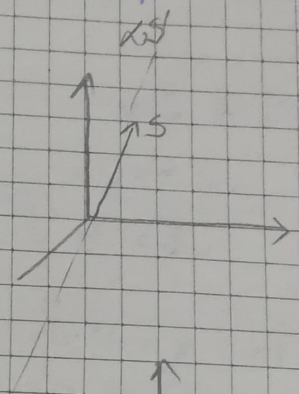


$v = (a, b, c) = \left(\frac{2a - b - c}{3}, \frac{-a + 2b - c}{3}, \frac{-a - b + 2c}{3}\right) + \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}\right)$

Să se determine ecuația generală (x_1, x_2, x_3) a subspațiilor lui $\mathbb{R}^3$

$S = \langle (1,2,-1) \rangle$

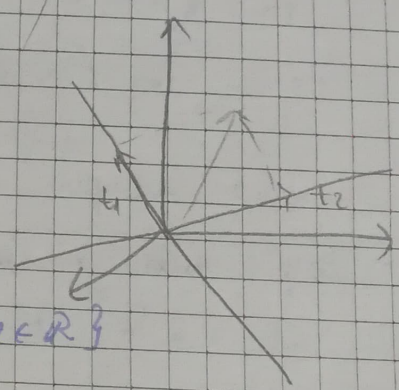
$T = \langle (1,2,1), (-2,1,-3) \rangle$



Sol

$S = \langle (1,2,-1) \rangle = \{ \alpha(1,2,-1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$

$T = \langle (1,2,1), (-2,1,-3) \rangle = \{ \alpha(1,2,1) + \beta(-2,1,-3) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$



$S = \{ (\alpha, 2\alpha, -\alpha), \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \alpha, x_2 = 2\alpha, x_3 = -\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \}$

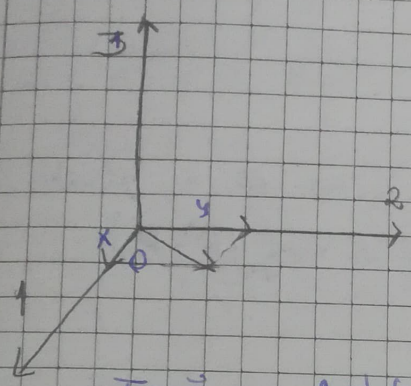
$= \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_2 = 2x_1, x_3 = -x_1 \}$

T

Seminarul 10

1. Să se dea exemple de două subspații a căror reuniune nu este subsp.

Sol $\mathbb{R}^3$:



$S: \overrightarrow{O1} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_2 = 0 = x_3\} \leq \mathbb{R}^3$ (temă)

$T: \overrightarrow{O2} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 = x_3 = 0\} \leq \mathbb{R}^3$ (temă)

$$\left.\begin{array}{l} x = (1,0,0) \in S \subseteq S \cup T \\ y = (0,1,0) \in T \subseteq S \cup T \end{array}\right\} \Rightarrow S \cup T \nleq \mathbb{R}^3$$

Temă: Arătați că:

$(0,1,2) \cup \overrightarrow{O3} \nleq \mathbb{R}^3$

$(0,1,2) \cup \overrightarrow{O2} = (0,1,2) \leq \mathbb{R}^3$

Temă de arătat că reuniunea 2 sub spații $\Leftrightarrow A \cup B = A$ sau $A \cup B = B$

Să se cerceteze care dintre următoarele aplicații este liniară. În caz afirmativ să se det nucleul și imag:

(1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$

(2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1, x_2 + 2, x_3 +$

3 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 3x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3)$

4. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$

5 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x_1, x_2) = (a_{11} x_1 + a_{21} x_2, a_{12} x_1 + a_{22} x_2)$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ fixați

$f \in Hom_k(V, W) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

$\alpha, \beta \in k$

$x, y \in V.$

$Ker(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$

$Im(f) = \{y \in W \mid \exists x \in V : f(x) = y\}$

Obs $f \in Hom_k(V, W) \Rightarrow f(0) = 0$

Sol (2) $f(0,0,0) = (-1, 2, 1) \neq (0,0,0) \Rightarrow f$ nu este o aplicatie liniara

$f \notin Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

(1) ~~$f(\alpha x + \beta y) =$~~

Fie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$y = (y_1, y_2, y$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$x \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

(Sol) ~~Ker~~ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_1 \end{cases} \Rightarrow Ker(f) = \{x \in V \mid x_1 = x_2 = x_3\}$

$= \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} =$

$= \langle (1,1,1) \rangle$

$y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$y \in Im f \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = y$

$$f(x)=y \iff \overset{S}{\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ x_3 - x_1 = y_3 \end{cases}}$$

$y \in \operatorname{Im} f \iff (S$ - este compatibil $\iff$ rang A = rang $\bar{A}$

Kronecker - Capelli

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & -1 & y_2 \\ -1 & 0 & 1 & y_3 \end{pmatrix} =$$

rang $\bar{A} \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 0 - 0 - 0 = 0$$

rang $A = 2$

$y \in \operatorname{Im} f \iff$ rang $\bar{A} = 2$

Teorema lui Rouché

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ -1 & 0 & y_3 \end{vmatrix} = y_3 + y_2 + y_1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & 0 \\ 0 & y_2 & -1 \\ -1 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Im} f = \{ (y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + y_2 + y_3 = 0 \}$$

(5) $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$

$f(x+y) = f(x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_1+y_1)^2 - (x_2+y_2)^2 =$

$= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 - x_2^2 - 2x_2y_2 - y_2^2 =$

$x = (1,0)$ $y = (1,0)$

$\left.\begin{array}{l} f((1,0)+(1,0)) = f((2,0)) = 4 \\ f(1,0) + f(1,0) = 1+1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \notin Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

6) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$

$X \cdot A = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2, \; a_{12}x_1 + a_{22}x_2)$

$1\times 2 \quad 2\times 2 \qquad 1\times 2$

Generalizare

Dacă $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este dat de

$f(X) = X \cdot A$

$X = (x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n = M_{1\times n}(\mathbb{R})$

$X \cdot A = f(X) \in \mathbb{R}^m$

$A \in (n \times m)$

Dacă $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ atunci $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Trăsă-adevăr $f(\alpha X + \beta Y) = (\alpha X + \beta Y)A = (\alpha X)A + (\beta Y)A =$

$= \alpha \cdot (XA) + \beta(YA) = \alpha f(X) + \beta f(Y)$

Revenim $n = m = 2$

$x = (x_1, x_2) \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{cu}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$y \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists\, x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = y \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = y_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases} \quad \text{este compatibil}$$

aici matricea extinsă $\left(A^t \,\vdots\, \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right)$

Obs

Explicația transpusei este urm:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot A = 0 \Leftrightarrow$

$(x_1; x_2) \cdot A = (0, 0) \Leftrightarrow$

$((x_1, x_2) \cdot A)^t = (0, 0)^t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ forma matriciala a sistemului

3. $f(x_1, x_2, x_3)$

$$\underset{(1,3)}{(x_1, x_2, x_3)} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3,\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + x_3 a_{32})$$

$$= (2x_1 - 3x_2 + x_3,\ -x_1 + x_2 + 3x_3)$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow f \text{ liniara}$$

$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0$

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$ $\quad x_1, x_2$ – nec principale

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -x_3 \\ -x_1 + x_2 = -3x_3 \quad / \cdot 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -\alpha \\ -2x_1 + 2x_2 = -6\alpha \end{cases} \quad (+)$$

$-x_2 = -7\alpha \Rightarrow x_2 = 7\alpha$

$2x_1 = 3x_2 - \alpha \Rightarrow x_1 = \frac{3 \cdot 7\alpha - \alpha}{2} \Rightarrow x_1 = 10\alpha$

$x = (10\alpha, 7\alpha, \alpha), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$x = \alpha(10, 7, 1)$

$\operatorname{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \exists x \in \mathbb{R}^2, f(x) = y \}$

$y = (y_1, y_2), \ f(x) = y$

$f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = y_2 \end{cases}$

S-compatibil $\Leftrightarrow$ rang A = rang $\bar{A}$

rang A = 2

rang A = 2 ⇒ sistemul este compatibil indiferent de y_{mag}

$Im(f) = \mathbb{R}^2 \rightarrow f$ - surjectivă

(4) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ - liniară

$Ker(f) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0 \}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2(x_1) + x_2 = 0 \end{cases}$

$S = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ (sol banală)

$Ker(f) = \{(0,0)\} \Rightarrow f$ injectivă

$Im f$: Avem $x \cdot A = y$

(5) $\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 - x_2 = y_2 \\ 2x_1 + x_2 = y_3 \end{cases}$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & y_2 \\ 2 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$

rang A = 2.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & y_2 \\ 2 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = -y_3 + y_1 + 2y_2 + 2y_1 - y_2 - y_3 = 3y_1 + y_2 - 2y_3 = 0$

$Im f = \{ (y_1, y_2, y_3) \mid 3y_1 + y_2 - 2y_3 = 0 \}$

Seminarul 11

(2) Se consideră vectorii în $\mathbb{R}^3$:

(1) $v_1 = (-1, -2, 0)$, $v_2 (2, 1, 1)$, $v_3 (0, 0, 1)$ - temă

Sist liniar dependentă

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x_1(2,1,1) + x_2(0,3,-1) + x_3(1,a,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x_1, x_1, -x_1) + (0, 3x_2, -x_2) + (x_3, ax_3, x_3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x_1 + x_3,\ x_1 + 3x_2 + ax_3,\ -x_1 - x_2 + x_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 6 - 1 + 3 + 2a \neq 0 \Leftrightarrow 8 + 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -4.$$

$\langle V \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$\langle V \rangle \overset{?}{=} \mathbb{R}^3$

$\langle V \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ (chiar mai mult $\langle V \rangle \leq \mathbb{R}^3$)

$\mathbb{R}^3 \overset{?}{\subseteq} \langle V \rangle$

Fie $y \in \mathbb{R}^3$ arbitrar. Căutăm să arătăm că $\exists\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$y = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_3 = y_1 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = y_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} = \begin{cases} 2x_1 + x_3 - y_1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 - y_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & 3 & a & y_2 \\ -1 & 1 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$$

Fie $a = -4 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & y_1 \\ 1 & 3 & y_2 \\ -1 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Nu generează $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

Sol Liniar dependentă

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ a.i. $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x_1(2,1,1) + x_2(0,3,-1) + x_3(1,a,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x_1, x_1, -x_1) + (0, 3x_2, -x_2) + (x_3, ax_3, x_3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x_1 + x_3,\ x_1 + 3x_2 + ax_3,\ -x_1 - x_2 + x_3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 6 - 1 + 3 + 2a \neq 0 \Leftrightarrow 8 + 2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -4.$$

$\langle V \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$\langle V \rangle \overset{?}{=} \mathbb{R}^3$

$\langle V \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ (chiar mai mult $\langle V \rangle \leq \mathbb{R}^3$)

$\mathbb{R}^3 \overset{?}{\subseteq} \langle V \rangle$

Fie $y \in \mathbb{R}^3$ arbitrar. Căutăm să arătăm că $\exists\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

$y = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$$S = \begin{cases} 2x_1 + x_3 = y_1 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = y_2 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} = \begin{cases} 2x_1 + x_3 - y_1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 - y_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & y_1 \\ 1 & 3 & a & y_2 \\ -1 & 1 & 1 & y_3 \end{pmatrix}$$

Fie $a = -4 \Rightarrow \operatorname{rang} A = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & y_1 \\ 1 & 3 & y_2 \\ -1 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ Nu generează $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

b) $a \neq -4$

rang $A = 3 \Rightarrow$ rang $\bar{A} = 3 \Rightarrow$ v generează $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

Pt $a \neq -4$ să se determine coord vect $x = (3a, a+4, 1)$

în rap cu baza V

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + a x_3 = a+4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \quad / \cdot 3 \end{cases} +$$

$$-2x_1 + (a+3)x_3 = a+7$$

$$2x_1 + x_3 = 3$$

$$-2x_1 + (a+3)x_3 = a+7 \quad (+)$$

$$(a+4)x_3 = a+10 \qquad x_3 = \frac{a+10}{a+4} = 1 + \frac{6}{a+4}$$

$$\cancel{x_3 = 3 - 2x_1 =}$$

$$2 \cdot x_1 + \frac{a+10}{a+4} = 3 \Rightarrow 2x_1 = \frac{3(a+4) - (a+10)}{a+4} \Rightarrow x_1 = \frac{2a+2}{2(a+4)}$$

$$x_1 = \frac{a+1}{a+4}$$

$$x_2 = -x_1 + x_3 - 1$$

$$x_2 = \frac{-a-1}{a+4} + \frac{a+10}{a+4} - 1 \Rightarrow x_2 = \frac{-a+5}{a+4}$$

3. Să se determine rangul listei de vectori compusă din $\mathbb{R}^4$ compusă din:

(1) $b_1 = (0,1,3,2)$ $b_2 = (1,0,5,1)$ $b_3 = (-1,0,1,1)$ $b_4 = (3,-1,-3,-4)$

$b_5 = (2,0,1,-1)$

(2), (3) temă - ex 3.2.43

Dacă $\exists$ să se determine o relație de dependență liniară între acest vectori

sol $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$

rang (b) = dim $\langle b \rangle$ = # nr maxim de vectori liniari ind din b

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + x_4 b_4 + x_5 b_5 = 0 \iff$

$\iff (0, x_1, 3x_1, 2x_1) + (x_2, 0, 5x_2, x_2) + (-x_3, 0, x_3, x_3) + (3x_4, -x_4, -3x_4, -4x_4) +$

$+ (2x_5, 0, x_5, -x_5) = (0,0,0,0) \Rightarrow$

$$S = \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Metoda lui Gauss

$$\underset{L_4-2L_2}{\overset{L_3-3L_1}{=}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_4-L_2}{\overset{L_5-5L_2}{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -15 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_4-2L_3}{\overset{L_3+L_2}{=}}$$

$$= \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{L_4=\frac{1}{3}L_3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang $A = 3$

$x_4 = \alpha$, $x_5 = \beta$

$x_1 = \alpha$

$x_2 - x_3 = -3\alpha - 2\beta \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$

$2x_3 = 5\alpha + 3\beta \Rightarrow x_3 = \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta$

$\cancel{x = (\alpha, 12\alpha + 7\beta,}$

$x = \left(\alpha, -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \frac{5\alpha}{2} + \frac{3}{2}\beta, \alpha, \beta\right)$

baza $\mathbb{R}^3$

Rel de dependență liniară.

$\alpha = 1$, $\beta = 1$

$x = (1, -1, 4, 1, 1)$

$1b_1 - 1 \cdot b_2 + 4 \cdot b_3 + b_4 + b_5 = 0$

$(0,1,3,2) - (1,0,5,1) + (-4,0,4,4) + (3,-1,-3,-4) + (2,0,1,-1) =$

$= (0,0,0,0)$

Seminarul nr 2

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ a.î. $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^3$ unde $v_1 = (1,-2,0)$, $v_2 = (2,1,1)$, $v_3 = (0,a,1)$

Sol: Considerăm baza canonică $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ din $\mathbb{R}^3$

$v_1 = 1 \cdot e_1 + (-2) \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$

$v = 1(1,0,0) + (-2) \cdot (0,1,0) + 0 \cdot (0,0,1)$

	v_1	v_2	v_3	X
baza în $\mathbb{R}^3$ e_1	1	2	0	0
e_2	-2	1	a	a-5
e_3	0	1	1	0

(dreptunghiuri imp la pivot

$1 \cdot a - 0 \cdot (-2) = a$

v_1	1	-2	0	imp la 1
e_2	0	5	a	det
e_3	0	1	1	

$(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) / 1 = 1$

$(1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2) = 5$

! (*) $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ bază $\rightsquigarrow$ $b' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ← poz i

$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_i b_i + \dots + \alpha_n b_n$

(a) b' este bază $\Leftrightarrow \alpha_i \neq 0$

Obs $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ nu e bază $\begin{pmatrix} v_3 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ nu e bază

$X = x_1 b_1 + \dots + x_i b_i + \dots + x_n b_n =$

$= x_1' b_1 + \dots + x_i' v + \dots x_n' b_n$, $\alpha_i \neq 0$

$\Rightarrow$ în bază b'

$x_i' = \alpha_i^{-1} x_i$

$j \neq i : x_j' = \alpha_i^{-1} (\alpha_i x_j - \alpha_j x_i)$

pivot

- diag principală se ia cu + iar cea xc se ia cu -
- pe linia pivotului se împarte la pivot.

se ia diag I

V (*)

$5 : \frac{0-2a}{5}$

v_1	1	0	$-2a/5$
v_2	0	1	$a/5$
e_3	0	0	$(5-a)/5$

sau $1 - \frac{a}{5}$

$a \neq 5$

baza	v_1	1	0	0	2
	v_2	0	1	0	-1
	v_3	0	0	1	1

ea se pot înlocui pe v_3 cu e_3

V bază $\Leftrightarrow a \neq 5$

Temă: Să se det coordonatele vectorului

$x = (0, a, -5, 0)$ în rap cu baza V $(a \neq 5)$

$2v_1 - v_2 + v_3 = (2, -4, 0) + (-2, -1, -1) + (0, a, 1) =$

$= (0, -5+a, 0)$

2) Să se determine câte o bază și dim. următoarelor subspații a lui $\mathbb{R}^4$

$S = (S_1, S_2, S_3, S_4)$

$S_1 = (2, 0, 1, -1)$

$S_2 = (-1, 0, 1, 1)$

$S_3 = (0, 1, 3, 2)$

$S_4 = (1, 1, 5, 2)$

$T = \langle t_1, t_2, t_3, \cancel{t_4} \rangle$

$t_1 = (1, 0, 2, 0)$ $\quad t_2 = (2, 1, -1, 2)$, $t_3 = (-1, -1, 3, -2)$

Aceeași problemă pt $S+T$ și $S \cap T$

Sol: Considerăm baza canonică:

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \text{ în } \mathbb{R}^4$$

generatorii bazei

	s_1	s_2	s_3	s_4	
e_1	$\cancel{2}$	-1	0	1	$(L_1 - 2L_3)$
e_2	0	0	1	1	
e_3	$+1$	1	3	5	$L_3 + L_4$
e_4	-1	1	2	2	
e_1	0	-3	-6	-9	$(L_1 + 6L_2)$
e_2	0	0	1	1	
s_2	1	1	3	5	$(L_3 - 3L_2)$
e_4	0	2	5	7	$(L_4 - 5L_2)$
e_1	0	-3	0	-3	
s_3	0	0	1	1	
s_1	1	1	0	2	
e_4	0	2	0	2	
e_1	0	0	0	0	$L_1 + \frac{3}{2} L_4$
s_3	0	-1	1	0	
s_1	1	-1	0	0	
s_4	0	1	0	1	

baza în $\mathbb{R}^3$

0 pe linie e1 deci nu putem alege pivot

NE OPRIM

(s_2 nu e deci nu depinde de s_2)

s_3, s_1, s_4 - lin independent

$s_2 = -s_3 - s_1 + s_4$

Obs.

	s_1	s_2	s_3	s_4
e_1	0	0	0	0
s_3	0	0	1	1
s_1	1	0	0	1
s_2	0	1	0	1

$s_4 = s_3 + s_1 + s_2$

$S = \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \rangle$

$\{ s_1, s_2, s_3 \}$

	t_1	t_2	t_3	s_1	s_3	s_4
e_1	1	2	-1	2	0	1
e_2	0	1	-1	0	1	1
e_3	2	-1	3	1	3	5
e_4	0	2	-2	-1	2	2
t_1	1	2	-1	2	0	1
e_2	0	1	-1	0	1	1
e_3	0	-5	5	-3	3	3
e_4	0	2	-2	-1	2	2
t_1	1	0	1	2	-2	-1
t_2	0	1	-1	0	1	1
e_3	0	0	0	-3	8	8
e_4	0	0	0	-1	0	0

$\dim T = 2$, $\{ t_1, t_2 \}$ baza

$t_3 = t_1 - t_2$

$S+T = \langle S \cup T \rangle = \langle s_1, \cancel{s_2}, s_3, s_4, t_1, t_2, \cancel{t_3} \rangle$

	t_1	t_2	s_1	s_3	s_4
t_1	1	0	2	-2	-1
t_2	0	1	0	1	1
t_3	0	0	0	8	8
s_1	0	0	1	0	0

t_1	1	0	0	0	1
t_2	0	1	0	0	0
s_3	0	0	0	1	1
s_1	0	0	1	0	0

$\dim(S+T) = 4$

Baza în $S+T$: $\langle t_1, t_2, s_3, s_1 \rangle$

$\dim(S+T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$

$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S+T) =$

$= 3 + 2 - 4 = 1$

$s_4 = t_1 + s_2$

$s_4 - s_3 = t_1 \in T$

Baza în $S \cap T$ este

$\{s_4 - s_3\} = \{t_1\} = \{(1,0,2,0)\}$

$S+T = \langle S \cup T \rangle = \langle s_1, \cancel{s_2}, s_3, s_4, t_1, t_2, \cancel{t_3} \rangle$

	t_1	t_2	s_1	s_3	s_4
t_1	1	0	2	-2	-1
t_2	0	1	0	1	1
t_3	0	0	0	8	8
s_1	0	0	1	0	0

t_1	1	0	0	0	1
t_2	0	1	0	0	0
s_3	0	0	0	1	1
s_1	0	0	1	0	0

$\dim(S+T) = 4$

Baza în $S+T$: $\langle t_1, t_2, s_3, s_1 \rangle$

$\dim(S+T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$

$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S+T) =$

$= 3 + 2 - 4 = 1$

$s_4 = t_1 + s_2$

$s_4 - s_3 = t_1 \in T$

Baza în $S \cap T$ este

$\{s_4 - s_3\} = \{t_1\} = \{(1,0,2,0)\}$

(3) Să se determine o bază și dim pt $\ker(f)$ și $\operatorname{im}(f)$ unde $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 - x_3,\ 3x_2 + x_4,\ 3x_1 - 3x_3 + x_4)$$

Sol Verif dacă f este liniară (Joma)

Se consideră baza canonică

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \text{ a lui } \mathbb{R}^4$$

$$\operatorname{Im}(f) = f(\mathbb{R}^4) = f(\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle) \overset{f \text{ lin}}{=} \langle \underset{S_1}{f(e_1)}, \underset{S_2}{f(e_2)}, \underset{S_3}{f(e_3)}, \underset{S_4}{f(e_4)} \rangle$$

$$f(e_1) = f(1,0,0,0) = (1,0,3)$$

Considerăm baza cu $\bar{e} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$e_1 = (1,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$, $\bar{e}_1 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$

	$f(e_1)$	$f(e_2)$	$f(e_3)$	$f(e_4)$
$\bar{e}_1$	1	-1	-1	0
$\bar{e}_2$	0	3	0	1
$\bar{e}_3$	3	0	-3	1

$f(e_1)$	1	-1	-1	0
$\bar{e}_2$	0	3	0	1
$\bar{e}_3$	0	+3	0	1

$f(e_1)$	1	-1	-1	0
$f(e_4)$	0	3	0	1
$\bar{e}_3$	0	0	0	0

Dim $Im(f) = 2$

Base $\langle f(e_1), f(e_4) \rangle$

$\dim \mathbb{R}^4 = \dim(\ker f) + \dim Im(f) = 4 - 2 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(e_2) = -f(1) + 3f(e_4) \\ f(e_3) = -f(e_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(+)$

Seminar 13

1. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ unde $b_1 = (1,1,0)$, $b_2 = (0,1,1)$, $b_3 = (1,0,1)$.

$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ unde $c_1 = (1,1)$, $c_2 = (1,-2)$.

a) Să se arate că $f \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

b) Să se arate că b și c sunt baze în $\mathbb{R}^3$, resp $\mathbb{R}^2$

(c) Să se det $[f]_{b,c}$, resp $[f]_{b,c}$ unde c este baza can din $\mathbb{R}^2$

a) Fie $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$

$$\begin{cases} f(x) + f(y) = f(x+y) \\ f(\alpha x) = \alpha f(x), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$f(x+y) = (x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) + 2x_3 + 2y_3, -(x_1 + y_1) + x_2 + y_2 + x_3 + y_3) =$

$= (x_1 - x_2 + 2x_3 + y_1 - y_2 + 2y_3, -x_1 + x_2 + x_3 - y_1 + y_2 + y_3) =$

$= (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + 2y_3, -y_1 + y_2 + y_3) =$

$= f(x) + f(y)$

$f(\alpha x) = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3, -\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3) =$

$= \alpha(x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3) = \alpha f(x)$, $\forall$

Altă metodă pt (A2)

$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ pt $\mathbb{R}^3$ și $\bar{e}$ baza canonică pt $\mathbb{R}^2$

$$[f]_{e\bar{e}} = \begin{pmatrix} [f(e_1)]_{\bar{e}} \\ [f(e_2)]_{\bar{e}} \\ [f(e_3)]_{\bar{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1,0,0) \\ f(0,1,0) \\ f(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

3×2

$f(x) = x \cdot A$ (curs și se poate verifica $(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$

Din prop op. cu matrici $f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x + \beta y) \cdot A =$

$= \alpha(x \cdot A) + \beta(y \cdot A) = \alpha f(x) + \beta f(y) \Rightarrow f$ - liniară

c) $$[f]_{b\bar{e}} = \begin{pmatrix} [f(b_1)]_{\bar{e}} \\ [f(b_2)]_{\bar{e}} \\ [f(b_3)]_{\bar{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1,1,0) \\ f(0,1,1) \\ f(1,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(1,1,0) =$

b) b - bază

b_1, b_2, b_3 liniar independentă $\Leftrightarrow \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 = 0$ numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_1, 0) + (0, \alpha_2, \alpha_2) + (\alpha_3, 0, \alpha_3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \alpha_3 = -\alpha_3 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3$

$\alpha_2 = -\alpha_3$

$\overset{(+)}{\overline{\alpha_2 = 0 - \alpha_1 = \alpha_2}} \Rightarrow (b_1, b_2, b_3)$ - liniar independentă $\Rightarrow$

b - bază $\Leftrightarrow$ b - lin ind $\Leftrightarrow$ sist (S0) are soluția banală $\Leftrightarrow$

b conține 3 din $\mathbb{R}^3$ vectori

$\Leftrightarrow \det A = 2 \neq 0 \Rightarrow$ b - bază

curs:

b - bază $\Leftrightarrow$ b - lin ind. $\Leftrightarrow$ sist (S0) are numai sol banală $\Leftrightarrow$

$\uparrow$

b conține $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vect.

$$\Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2 \neq 0 \quad \text{„A)}$$

Variantă

$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ baza can în $\mathbb{R}^3$ atunci

b - bază $\Leftrightarrow [b]_e$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

dar $[b]_e = \begin{pmatrix} [b_1]_e \\ [b_2]_e \\ [b_3]_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Temă Arătați folosind lema subst că b este o bază

e - bază în $\mathbb{R}^2$

c) $[f]_{v',w'} = [v']_v \cdot [f]_{v,w} [w']_w^{-1}$

$$[f]_{b,c} = [b]_e \cdot [f]_{e,e} [c]_e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$[c]_e = \begin{pmatrix} [c_1]_e \\ [c_2]_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

calcul temă

obs $[f]_{b,e} = [b] \cdot \cancel{[f]_{e,e}}\ [f]_{e,e} \cdot \underbrace{[e]_e^{-1}}_{I_2}$

$[e]_e = \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Obs $f(x) = x\,[f]_{e,E}$

~~x = b~~

Varianta I

$$[f]_{b,e} = \begin{pmatrix} [f(b_1)]_e \\ [f(b_2)]_e \\ [f(b_3)]_e \end{pmatrix} \overset{not}{=} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f(b_1) = x_{11} e_1 + x_{12} e_2 \\ f(b_2) = x_{21} e_1 + x_{22} e_2 \\ f(b_3) = x_{31} e_1 + x_{32} e_2 \end{array}$$

3×2

$$(0,0) = x_{11}(1,1) + x_{12}(1,-2) \Rightarrow \begin{cases} x_{11} + x_{12} = 0 \\ x_{11} - 2x_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{11} = 0 \\ x_{12} = 0 \end{array}$$

$$f(b_2) = (1,2) = x_{21}(1,1) + x_{22}(1,-2) \Rightarrow \begin{cases} x_{21} + x_{22} = 1 \quad / 2 \\ x_{21} - 2x_{22} = 2 \end{cases}$$

$$(+) \quad 3x_{21} = 4 \Rightarrow x_{21} = \frac{4}{3}$$

$$x_{22} = -\frac{1}{3}$$

$$(0,0) = (x_{11}, x_{12}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (x_{11}, x_{12}) = (0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$(1,2) = (x_{21}, x_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(x_{21}, x_{22}) = (1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$(3,0) = -\|-$

Alta metodă pt $[f]_{b,c}$ mateinfo 2020

	e_1	e_2	$f(b_1)$	$f(b_2)$	$f(b_3)$
$\bar{e}_1$	1	1	0	1	3
$\bar{e}_2$	1	-2	0	2	0
e_1	1	1	0	1	3
e_2	0	-3	0	1	-6
e_1	1	0	0	$\frac{4}{3}$	2
e_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1

$$[f]_{be} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Fie $f \in End(\mathbb{R}^4)$ cu matricea în baza cm

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Să se det $f(x)$ pt un $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ arbitrar.
($f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lin)

b) Să se arate că $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ dată de $b_1 = e_1$,

$b_2 = e_1 + e_4$, $b_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $b_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ este o bază

$f(e_1) = (1, 3, 1, 4)$

$f(e_2) = (2, 7, 3, 4)$.

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 =$$

$$= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) + x_4 f(e_4) =$$

$f(x) =$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ f(e_3) \\ f(e_4) \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4,\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 2x_4,\ x_1 + 3x_3 + 3x_4,\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 9$$