# Logică computațională
# Curs 2

Lector dr. Mihiș Andreea-Diana

## …

…010101000011010101000111001001001001000101001110000101010100010001001001 0

0010010100010001001001000100000011100010100102010101000111001001110100101 00

1000100100101001010001100011010101010001…

# Reprezentarea binară a nr.

- într-o locație de memorie – k octeți = n biți (8, 16, 32, 64)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| n-1 | n-2 | … | 2 | 1 | 0 |

cel mai semnificativ

cel mai puțin semnificativ

# Reprezentarea nr. întregi fără semn

$x_{(10)} \rightarrow y_{(2)}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| n-1 | n-2 | … | 2 | 1 | 0 |

# Intervale de reprezentare

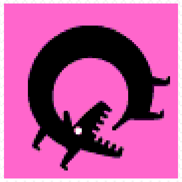
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **0** | **…** | **0** | **0** | **0** |
| n-1 | n-2 | … | 2 | 1 | 0 |

$= 0$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **…** | **1** | **1** | **1** |
| n-1 | n-2 | … | 2 | 1 | 0 |

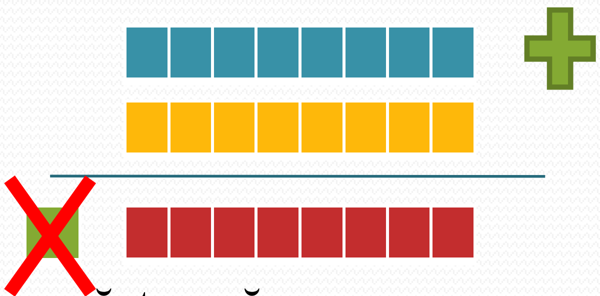
$= 2^n-1$

| | |
|---|---|
| n = 8 | [ 0 , 255 ] |
| n = 16 | [ 0 , 65535 ] |
| n = 32 | [ 0 , 4 294 967 295 ] |
| n = 64 | [ 0 , 18 446 824 753 389 551 615 ] |



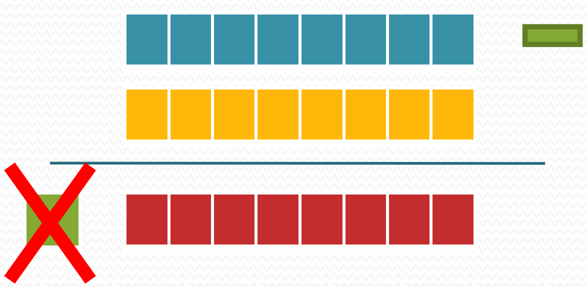
# Aritmetica nr. întregi fără semn

- adunarea



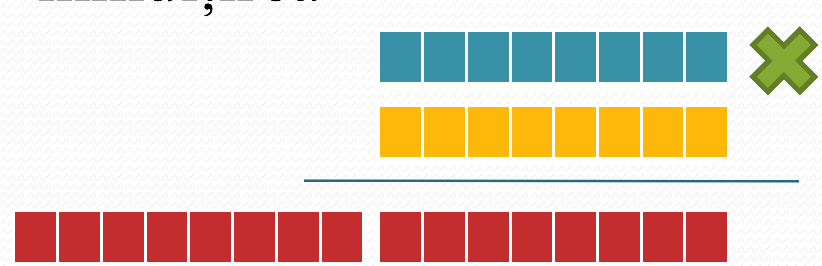
nu se păstrează
în rezultat

- scăderea

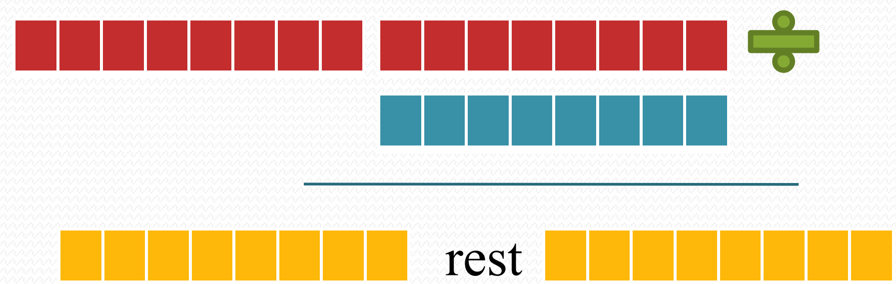


nu se păstrează
în rezultat

- înmulțirea



- împărțirea



# Algoritmul de înmulțire a întregilor fără semn

DATE deînmulțitul **M** și înmulțitorul **Q**

**CA**←0

PENTRU i ← 1,n EXECUTĂ

  DACĂ $\mathbf{Q_0}$=1 ATUNCI

    **CA** ←**A**+**M**

  SF. DACĂ

  **CAQ** se deplasează spre dreapta cu 1 poziție

SF. PENTRU

REZULTATE **AQ**

| **M** | **C** | **A** | **Q** |
|---|---|---|---|

# Algoritmul de împărțire a întregilor fără semn

DATE deîmpărțitul **AQ** și împărțitorul **M**

PENTRU i ← 1,n EXECUTĂ

   **CAQ** se deplasează spre stânga cu 1 poziție

   DACĂ **CA** ≥ **M** ATUNCI

       $\mathbf{Q_0} \leftarrow 1$

       **CA ←CA-M**

   ALTFEL

       $\mathbf{Q_0} \leftarrow 0$

   SF. DACĂ

SF. PENTRU

REZULTATE câtul **Q** și restul **A**

| M | C | A | Q |
|---|---|---|---|
| | | | |

# Coduri de reprezentare a întregilor cu semn

- scopul: - simplificarea operațiilor (-)
- convenție întreagă (supraunitară)

$n \in \{8,16,32,64\}$


bitul de semn

0 + 1 −

# Codul direct

$x \in \mathbb{Z}, |x| < 2^{n-1}$

$$[x]_{dir} = \begin{cases} x & , \text{dacă } x \geq 0 \\ 2^{n-1} + |x|, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

dezavantaj: $[+0]_{dir}$: $|0|0...0|$ şi $[-0]_{dir}$: $|1|0...0|$

# Codul invers

$x \in \mathbb{Z}, |x| < 2^{n-1}$

$$[x]_{inv} = \begin{cases} x & , \text{dacă } x \geq 0 \\ 2^n - 1 - |x|, & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

dezavantaj: $[+0]_{inv}$: $|0|0...0|$ şi $[-0]_{inv}$: $|1|1...1|$

# Codul complementar

$x \in \mathbb{Z}$, $|x| < 2^{n-1}$

$$[x]_{compl} = \begin{cases} x\text{ , dacă } x \geq 0 \\ 2^n - |x|\text{, dacă } x < 0 \end{cases}$$

Obs.: dacă $x \leq 0$, $[x]_{compl} = [x]_{inv} + 1$

dacă $x \geq 0$, $[x]_{compl} = [x]_{inv} = [x]_{dir}$

avantaj: $[+0]_{compl}$: $|0|0\ldots0|$

nu e nr.: $|1|0\ldots0|$

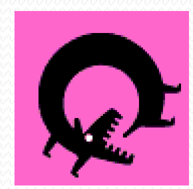
# Intervale de reprezentare

n= 8 [-127 , 127]

n=16 [-32767 , 32767]

n=32 [-2 147 483 647 , 2 147 483 647]

n=64 [-9 223 412 376 694 775 807, +9 223 412 376 694 775 807]



# Operații în cod complementar: ⊕

$$\forall a,b \in [0,2^n),\ a \oplus b = \begin{cases} a + b & \text{, dacă } a+b < 2^n \\ a + b - 2^n & \text{, dacă } a+b \geq 2^n \end{cases}$$

Reguli: dacă a și b au același semn ≠ semnul a ⊕ b – **depășire**

$t_{n-1}$ se pierde (nu se păstrează în rezultat)

$[x+y]_{compl} = [x]_{compl} \oplus [y]_{compl}\ \forall x,y \in \mathbb{Z}$, a. î. $|x|, |y|, |x+y| < 2^{n-1}$

$[x-y]_{compl} = [x]_{compl} \oplus [-y]_{compl}$

# Convenția subunitară

$n \in \{8,16,32,64\}$


bitul de semn

0 + 1 −

# Coduri

$x \in |R$ ,$|x| < 1$ cu max. n-1 cifre după ”,”

$$[x]_{dir} = \begin{cases} x \ , \text{dacă } x \geq 0 \\ 1 + |x|, \text{dacă } x \leq 0 \end{cases} \qquad [x]_{inv} = \begin{cases} x \ , \text{dacă } x \geq 0 \\ 2-2^{-n+1} - |x|, \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

$$[x]_{compl} = \begin{cases} x \ , \text{dacă } x \geq 0 \\ 2-|x|, \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

Obs.: dacă $x \leq 0$, $[x]_{compl} = [x]_{inv} + 2^{-n+1}$

dacă $x \geq 0$, $[x]_{compl} = [x]_{inv} = [x]_{dir}$

# Operații

$$\forall a,b \in [0,1),\ a \oplus b = \begin{cases} a + b & \text{, dacă } a+b < 2 \\ a + b - 2 & \text{, dacă } a+b \geq 2 \end{cases}$$

Reguli: dacă a și b au același semn ≠ semnul $a \oplus b$ – **depășire**

$t_{n-1}$ se pierde (nu se păstrează în rezultat)

$$[x+y]_{compl} = [x]_{compl} \oplus [y]_{compl}$$

$\forall x,y \in |R$ , a. î. $|x|, |y|, |x+y| < 1$ cu max. n-1 cifre după ”,”

$$[x-y]_{compl} = [x]_{compl} \oplus [-y]_{compl}$$

# Reprezentări ale nr. reale

- se aproximează la nr. raționale
- pe k octeți (biți: 8, 16, 32 – cuvânt, 64 – dublu cuvânt)

# Reprezentarea în virgulă fixă

- n biți
- $-2^{I} + 2^{-F} \leq |x| \leq 2^{I} - 2^{-F}$
- Dezavantaj: pierderea cifrelor cele mai semnificative

partea întreagă: I

partea fracționară F

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | | | , | | | | 0 |
| n-1 | I-1 | … | 0 | -1 | … | 2-F | 1-F | - |
| n-1 | n-2 | … | F+1 | F | … | 2 | 1 | 0 |

bitul de semn

0 +    1 −

# Reprezentarea în virgulă mobilă (flotantă)

- precizie mai mare (pt. nr. f. mari / f. mici)
- la depășire se pierd cifrele cel mai puțin semnificative
- $\forall x \in \mathbb{R}$ , $x = \pm 0{,}m * b^e$
  - m - mantisa numărului
  - b - bază de numeraţie
  - e - exponent
- ! $b=2$

# Mantisă subunitară

- <u>Def 1</u>: Un număr real x se scrie cu ***mantisă subunitară*** şi exponent al unei baze b, dacă x = $\pm 0,m * b^{e}$
- <u>Def 2</u>: Un număr real x, x $\neq 0$, se scrie cu ***mantisa subunitară normalizată***, dacă x este scris cu mantisă subunitară şi exponent al bazei b şi dacă are loc: $\frac{1}{b} \leq m < 1$.

Ex : $0,12345678 * 10^{4}$ - este scris normalizat

$0,004371 * 10^{-4}$ - nu este scris normalizat

# Mantisa ”supraunitară”

- Def 3: Un număr real x, x $\neq$ 0, este scris cu ***mantisa între 1 şi 2***, dacă x se scrie în baza 2 sub forma : $x = \pm 1{,}m * 2^e$

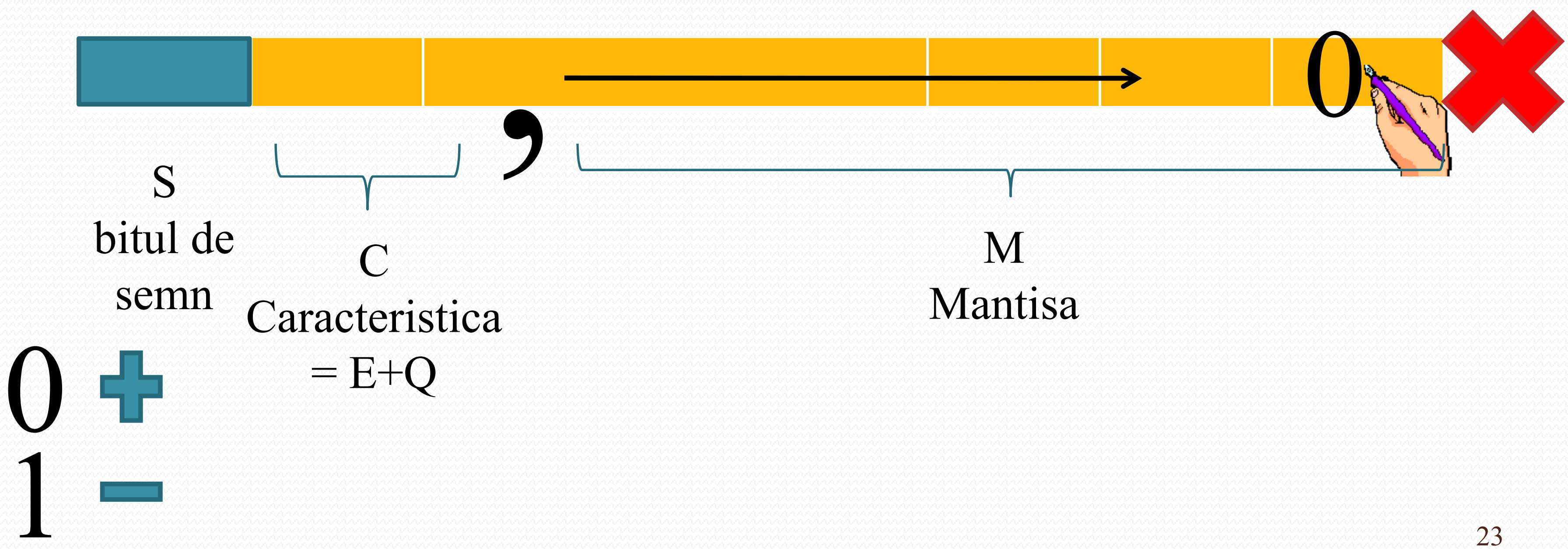
- Def 4: Un număr real x este reprezentat în calculator în ***virgulă mobilă*** dacă pentru reprezentarea internă se utilizează scrierea lui x în baza 2 cu exponent şi cu ***mantisă subunitară*** sau cu ***mantisă între 1 şi 2***.

# Reprezentarea în virgulă mobilă

$n \in \{32,64\}$ <u>IEEE P754 Simplă precizie</u> / <u>Dublă precizie</u>

C pe 8/11 biți; M pe 23/52

Q – deplasament $\in \{127,1023\}$



# Valori speciale

| Valoare | S (semn) | C (caracteristica) | M (mantisa) |
|---|---|---|---|
| $0_+$ | 0 | 0...0 | 0...0 |
| 0- | 1 | 0...0 | 0...0 |
| -inf | 1 | 1...1 | 0...0 |
| +inf | 0 | 1...1 | 0...0 |
| NaN (not a number) | 1 sau 0 | 1...1 | valoare nenulă |

# Intervale de reprezentare

| Precizie | Binar<br>Valoare absolută | Zecimal<br>Valoare absolută |
|---|---|---|
| **Simplă** | minim = $2^{-126}$<br>maxim = $(2-2^{-23})*2^{127}$ | minim ≈ $10^{-38}$<br>maxim ≈ $10^{38}$ |
| **Dublă** | minim = $2^{-1022}$<br>maxim = $(2-2^{-52})*2^{1023}$ | minim ≈ $10^{-308}$<br>maxim ≈ $10^{308}$ |