Proiect la tema "Metode de rezolvare a ecuaţiilor neliniare"

Lucrare Nr. 3 "Precizarea rădăcinii. Metoda încercărilor. Metoda înjumătăţirii (bisecţiei)"

Elaborat: elevul clasei a XII-a "A", Munteanu Alexandru

Varianta 22

Ecuația I: $\operatorname{arcctg} x + 2x - 1 = 0$
Ecuația II: $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$
Ecuația III: $(x+2) \cdot log_2 x = 1$
Ecuația IV: $sin(x+1) = 0{,}5 \cdot x$

Scop lucrare:
- Verificare a posibilităţii aplicării metodelor în studiu pentru ecuaţiile propuse;
- Analiza ecuaţiilor propuse, rezolvarea analitică, grafică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;
- Estimarea erorilor metodelor în studiu (opţional).

Sarcini de realizat:
1) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic;*
2) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic şi de precizat una din ele prin metoda încercărilor sau metoda înjumătățirii cu precizia ε=0.01, utilizând programul corespunzător;*
3) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic;*
4) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic şi de precizat una din ele prin metoda încercărilor sau metoda înjumătățirii cu precizia ε=0.01, utilizând programul corespunzător.*

Exemplu de realizare a sarcinii:
Sunt date ecuaţiile:
a) $\operatorname{arcctg} x + 2x - 1 = 0;$
b) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0;$
c) $(x+2) \cdot log_2 x = 1;$
d) $sin(x+1) = 0{,}5 \cdot x.$

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor.***

Este dată ecuația: $\operatorname{arcctg} x + 2x - 1 = 0;$
1. Notăm funcţia f(x)= $\operatorname{arcctg} x + 2x - 1.$
2. Determinăm derivata de ordinul întâi f'(x)=$-\frac{1}{1+x^2} + 2.$
3. Calculăm rădăcinile derivatei:
$$-\frac{1}{1+x^2} + 2=0; \frac{1}{1+x^2} = 2; x^2 = -0{,}5;$$
4. Alcătuim tabelul semnelor funcţiei f(x), stabilind valorile lui x egale cu:

a) cu punctele critice a valorilor funcţiei (rădăcinile ecuaţiei) sau cu valori apropiate de ele;
b) cu valorile de graniță (reieşind din domeniul de valori admisibile ale lui x)

x	–∞	0	+∞
Semnul f(x)	+	+	+

Deoarece nu se observă nici o schimbare de semn, rezultă că ecuaţia nu are nici o rădăcină reală.

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor cu precizarea ei prin metoda înjumătățirii.***

Este dată ecuația: $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0;$
1. Notăm funcţia f(x)= $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0;$
2. Determinăm derivata de ordinul întâi f'(x)=$12x^3+12x^2-24x$;

3. Calculăm rădăcinile derivatei:

$$12x^3+12x^2-24x=0;\ x^3+x^2-2x=0;\ x(x-1)(x+2)=0;\ x_1=0;\ x_2=-2;\ x_3=1;$$

4. Alcătuim tabelul semnelor funcţiei f(x):

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
Semnul f(x)	+	–	+	–	+

Din tabel se vede că avem trei schimbări de semn, deci ecuaţia are trei rădăcini reale:

$$x_1\in(-\infty,-2],\ x_2\in[-1,1] \text{ şi } x_3\in[1,+\infty)$$

Îngustăm intervalele care conţin rădăcinile. Atunci vom căpăta:

x	–3	–2	-1	0	1	2
Semnul f(x)	+	–	–	+	–	+

Rezultă deci, că $x_1\in(-3,-2]$, $x_2\in[-1,0]$ şi $x_3\in[1,2)$

Precizăm una din rădăcini, de exemplu cea care se găseşte pe intervalul $x_1\in[-3,-2]$, utilizând metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01.

Datele calculate le vom introduce pentru comoditate în tabel (semnele "–" şi "+" semnifică faptul că $f(a_i)<0$ şi $f(b_i)>0$.

Pas *i*	a_i^+	b_i^-	$x_i=(a_i+b_i)/2$	$3x_i^4$	$4x_i^3$	$12x_i^2$	$f(x_i)$
0	-3	-2	-2,5	117,188	-62,5	-75	-19,312
1	-3	-2,5	-2,75	171,574	-83,188	-90,75	-1,364
2	-3	-2,75	-2,875	204,962	-95,055	-99,188	11,719
3	-2,875	-2,75	-2,813	187,845	-89,037	-94,956	4,852
4	-2,813	-2,75	-2,782	179,701	-86,125	-92,874	1,702
5	-2,782	-2,75	-2,766	175,602	-84,648	-91,809	0,145
6	-2,766	-2,75	-2,758	173,579	-83,916	-91,279	-0,616
7	-2,766	-2,758	-2,762	174,589	-84,281	-91,544	-0,236
8	-2,766	-2,762	-2,764	175,095	-84,464	-91,676	-0,045

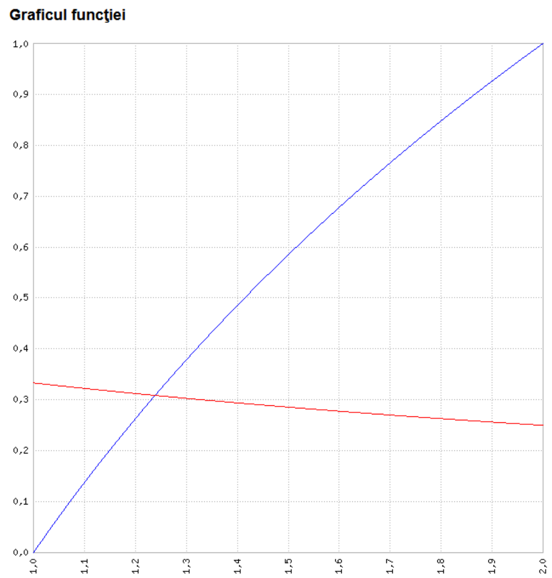
Răspuns: Rădăcina cea mai mică ecuaţiei este: $\mathbf{x_1\approx-2{,}76}$

❑ ***Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuaţiei***

Este dată ecuaţia: $(x+2)\cdot log_2 x = 1$. O aducem la forma $y_1=f_1(x)$ şi $y_2=f_2(x)$, adică:

$$log_2 x = \frac{1}{(x+2)}.$$

Notând prin $y_1=log_2 x$ şi prin $y_2=\frac{1}{(x+2)}$ construim graficele acestor funcţii (figura 1.). Din grafic se observă că ecuaţia $log_2 x = \frac{1}{(x+2)}$ are o rădăcină: $\mathbf{x_1\approx1{,}23}$.

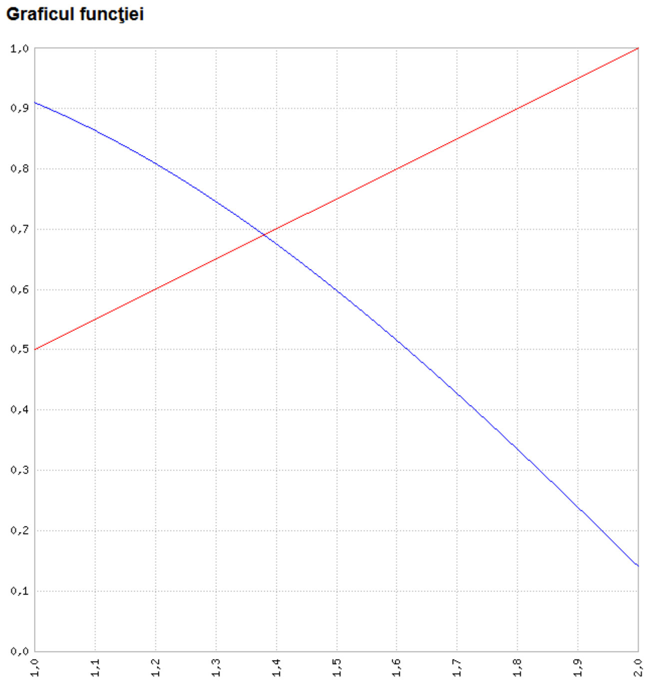


Figură 1 Graficul funcţiilor

$\mathbf{y_{1(albastru)}}= log_2 x$ **şi** $\mathbf{y_{2(roşu)}} = \frac{1}{(x+2)}$

❑ ***Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuaţiei cu precizarea ei prin metoda înjumătăţirii.***

Este dată ecuaţia: $sin(x+1) = 0{,}5\cdot x$. O rescriem într-o formă mai comodă: $sin(x+1)=0{,}5\cdot x$. Notăm prin $y_1= sin(x+1)$ şi $y_2=0{,}5\cdot x$, apoi construim graficele acestor funcţii (figura 2.).



Figură 2 Graficul funcţiilor $y_{1(albastru)}$ $=sin(x+1)$ **şi $y_{2(roşu)}$** $=0,5 \cdot x$

Din grafic se observă că ecuaţia are o singură rădăcină **$x_1 \approx$1.4**. Pentru precizarea rădăcinii prin metoda înjumătăţirii alegem intervalele la capetele cărora funcţia f(x)= $sin(x+1) - 0,5 \cdot x$ are semne diferite. Alcătuim tabelul variaţiilor de semn.

x	1	1.4
Semnul f(x)	+	–

Rezultatele calculelor le includem pentru comoditate în tabel:

Pas i	a_i^+	b_i^-	$x_i=(a_i+b_i)/2$	x_i^2	$lg(x_i+1)$	$f(x_i)$
0	1	1,4	1,2	0,808	-0,6	0,208
1	1,2	1,4	1,3	0,746	-0,65	0,096
2	1,3	1,4	1,35	0,711	-0,675	0,036
3	1,35	1,4	1,375	0,694	-0,6875	0,006
4	1,375	1,4	1,388	0,684	-0,694	-0,01
5	1,375	1,388	1,382	0,689	-0,691	-0,002
6	1,375	1,382	1,379	0,691	-0,6895	0,001
7	1,379					

Răspuns: Soluţia ecuaţiei cu precizia $\varepsilon=10^{-2}$ este **$x_1 \approx$ 1,38**