Proiect la tema "Integrarea numerică. Metode aproximative de evaluare a ariilor trapezelor curbilinii "

Lucrare Nr. 4 "Calculul numeric al integralelor "

Elaborat: elevul clasei a XII-a ”A”, Munteanu Alexandru

Varianta 22

Obiective:

- Verificarea posibilității aplicării metodei în studiu pentru integralele propuse;
- Analiza integralelor propuse, rezolvarea lor analitică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;

Sarcini de realizat:

1) Calculaţi integrala după ***metoda dreptunghiurilor de dreapta*** şi ***de stânga*** pentru n=10, evaluând precizia prin *compararea rezultatelor obţinute*.
2) Calculaţi integrala după ***metoda dreptunghiurilor medii***, folosind pentru evaluarea preciziei calculul dublu pentru n_1=8 şi n_2=10.
3) Calculaţi integrala cu precizia 10^{-3}, utilizând ***metoda trapezelor***.

<u>Rezolvarea sarcinii 1</u>

1.Calculaţi integrala $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2+0,5}dx}{2x+\sqrt{x^2+2,5}}$, utilizând *metoda dreptunghiurilor de stânga* şi *de dreapta*.

***Soluţie*:**

Pentru a calcula valoarea integralei după formulele dreptunghiurilor de stânga sau de dreapta pentru n=10, divizăm intervalul de integrare în 10 părţi cu pasul:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1,4-0,6}{10} = 0,08.$$

Alcătuim tabelul de valori al funcţiei de sub integrală în punctele de divizare a intervalului:

i	x_i	$x_i^2+0.5$	$\sqrt{x_i^2+0,5}$	$\sqrt{x_i^2+2,5}$	$2x_i+\sqrt{x_i^2+2,5}$	y_i
0	0,8	1,14	1,06770	1,77200	3,37200	0,31664
1	0,88	1,2744	1,12889	1,80953	3,56953	0,31626
2	0,96	1,42160	1,19231	1,84976	3,76976	0,31628
3	1,04	1,58160	1,25762	1,89251	3,97251	0,31658
4	1,12	1,75440	1,32454	1,93763	4,17763	0,31705
5	1,2	1,94000	1,39284	1,98494	4,38494	0,31764
6	1,28	2,13840	1,46233	2,03431	4,59431	0,31829
7	1,36	2,34960	1,53284	2,08557	4,80557	0,31897
8	1,44	2,57360	1,60424	2,13860	5,01860	0,31966
9	1,52	2,81040	1,67642	2,19326	5,23326	0,32034
10	1,6	3,06000	1,74929	2,24944	5,44944	0,32100
						S1=3,17772
						S2=3,18208

În tabel s-au determinat valorile sumelor:$S_1 = \sum_{i=0}^{9} y_i = 3,17772$ şi $S_2 = \sum_{i=1}^{10} y_i = 3,18208$.

Aflăm valorile aproximative ale integralei. Dacă aplicăm ***formula dreptunghiurilor de stânga***, atunci vom avea:

$$I_{st} = h \cdot \sum_0^9 y_i = 0,08 \cdot 3,17772 = 0,25422.$$

Aflăm acum valoarea integralei, utilizând ***formula dreptunghiurilor de dreapta***:

$$I_{dr} = h \cdot \sum_1^{10} y_i = 0,08 \cdot 3,18208 = 0,25457.$$

Rezultatele obţinute după o formulă sau alta se deosebesc, de aceea în calitate de valoare finală vom lua *semisuma* valorilor determinate, rotunjind rezultatul până la zecimi de mimi:

$$I = \frac{I_{st}+I_{dr}}{2} = 0,254.$$

Răspuns: $I \approx 0{,}254$

Rezolvarea sarcinii 2

1. Calculaţi integrala $I = \int_{0,2}^{0,8} \frac{cos(x^2+1)dx}{2+sin(2x+0,5)}$, aplicând *metoda dreptunghiurilor medii*.

Soluţie:

Pentru rezolvare vom folosi ***formula dreptunghiurilor medii* (*de mijloc*)**:

$$I_{med} = \int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

Calculele le vom efectua de două ori, pentru n_1=8 şi n_2=10 şi respectiv pentru pasul:

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1} = \frac{0{,}8-0{,}2}{8} = 0{,}075 \text{ şi } h_2 = \frac{b-a}{n_2} = \frac{0{,}8-0{,}2}{10} = 0{,}06.$$

Rezultatele le introducem pentru comoditate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

i	x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$\cos(x^2+1)$	$2+\sin(2x+0{,}5)$	$y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	0,2	0,2375	0,492	2,8277	0,17399
1	0,275	0,3125	0,45568	2,90227	0,15701
2	0,35	0,3875	0,40834	2,95657	0,13811
3	0,425	0,4625	0,34936	2,98939	0,11687
4	0,5	0,5375	0,27817	2,99999	0,09272
5	0,575	0,6125	0,19439	2,98813	0,06505
6	0,65	0,6875	0,09798	2,95409	0,03317
7	0,725	0,7625	-0,01061	2,89861	-0,00366
					S_1=0,77326

Tabelul 2

i	x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$\cos(x^2+1)$	$2+\sin(2x+0.5)$	$y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	0,2	0,23	0,49505	2,81919	0,1756
1	0,26	0,29	0,46771	2,88196	0,16229
2	0,32	0,35	0,43343	2,93204	0,14783
3	0,38	0,41	0,3919	2,96872	0,13201
4	0,44	0,47	0,3428	2,99146	0,11459
5	0,5	0,53	0,28585	2,99994	0,09529
6	0,56	0,59	0,22086	2,99404	0,07377
7	0,62	0,65	0,14775	2,97385	0,04968
8	0,68	0,71	0,06665	2,93965	0,02267
9	0,74	0,77	-0,0221	2,89193	-0,00764
					S_2=0,96609

Determinăm acum valorile aproximative ale integralei:

$$I_1 = h_1 \cdot S_1 = 0{,}075 \cdot 0{,}77326 = 0{,}05799;$$

$$I_2 = h_2 \cdot S_2 = 0{,}06 \cdot 0{,}96609 = 0{,}05797.$$

Observăm că valorile calculate diferă puţin una de alta (ordinul zecimilor de miimi), însă valoarea a doua este mai exactă decât prima, de aceea în calitate de valoare finală a integralei vom lua $I \approx 0{,}05797$.

Răspuns: $I \approx 0{,}05797$.

Rezolvarea sarcinii 3

2. Calculaţi integrala $I = \int_{1,2}^{2,0} \frac{dx}{\sqrt{0{,}5x^2+1{,}5}}$, cu precizia 10^{-3}.

Soluţie:

Pentru atingerea preciziei date (10^{-3}), vom determina valoarea lui n, astfel încât

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 < 0{,}0005. \qquad (*)$$

În formula de mai sus, $a = 1{,}2;\ b = 2;\ M_2 \geq \max_{[1,2;2]}|f''(x)|$, unde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{0{,}5x^2+1{,}5}}$ este funcţia de sub integrală.

Determinăm în continuare derivatele de ordinul unu şi doi:

$$f'(x) = \frac{-x}{2\sqrt{(0{,}5x^2+1{,}5)^3}} \text{ şi } f''(x) = \frac{x^2-3}{4\sqrt{(0.5x^2+1{,}5)^5}}.$$

$$\text{Atunci, } \max_{[1,2;2]}|f''(x)| < \frac{2^2-3}{4\sqrt{(0{,}5\cdot 1{,}2^2+1{,}5)^5}} \approx 0{,}034.$$

Dacă vom lua valoarea lui $M_2 = 0{,}04$, atunci inegalitatea (*) va avea forma $\frac{0{,}8^3\cdot 0{,}04}{12n^2} < 0{,}0005$, de unde $n^2 > 3{,}413$, adică $n>1{,}872$. Pentru o precizie mai bună, vom stabili valoarea finală a lui n=2.

Calcularea integralei se realizează după formula:

$$I \approx h \cdot \left(\frac{y_0+y_{20}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{19}\right),$$

unde $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1{,}2}{2} = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4;\ y_i = y(x_i) = \frac{1}{\sqrt{0{,}5x_i^2+1{,}5}};\ x_i = 1{,}2 + i \cdot h$, pentru $i = 1{,}2$.

Pentru comoditate, toate calculele sunt introduse în tabelul ce urmează:

i	x_i	x_i^2	$0{,}5x_i^2 + 1{,}5$	$\sqrt{0{,}5x_i^2 + 1{,}5}$	y_0, y_2	y_1
0	1,2	1,44	2,22	1,48997	0,67115	
1	1,6	2,56	2,78	1,66733		0,59976
2	2	4	3,5	1,87083	0,53452	
					S=1,20517	S=0,59976

Astfel, valoarea integralei este $I = 0{,}4 \cdot \left(\frac{1{,}20517}{2} + 0{,}59976\right) = 0{,}48093 \approx 0{,}481$.

Răspuns: $I \approx 0{,}481$