1.2.3 Reprezentări ale funcţiilor booleene

Studiul funcţiilor booleene se face în multe cazuri pe reprezentările acestora. Există o mare diversitate de reprezentări ale funcţiilor booleene care pot fi grupate în reprezentări grafice (geometrice) şi analitice. Reprezentările din prima categorie sunt intuitive şi se folosesc pentru studiul funcţiilor booleene cu un număr redus de argu-mente. Din această categorie fac parte reprezentările prin tabel de adevăr, diagrame Euler, Venn, Veitch sau Karnaugh, prin grafuri sau pe hipercub. A doua categorie asigură o reprezentare prin expresii algebrice sau sub formă de coduri. Reprezentările din această categorie permit studiul funcţiilor booleene cu un număr arbitrar de argumente, cu posibilitatea utilizării mijloacelor numerice de calcul. În continuare se va insista asupra celor mai folosite reprezentări ale funcţiilor booleene în scopuri tehnice.

1.2.3.1 Reprezentarea funcţiilor booleene prin tabel de adevăr

Acest mod de reprezentare corespunde reprezentării tabelare a funcţiilor booleene şi de care s-a uzitat până aici. Tabelele denumite *de adevăr* sau *combinaţionale* conţin în partea stângă un număr de linii egal cu numărul combinaţiilor posibile ale valorilor argumentelor, iar în partea dreaptă valorile funcţiei pentru fiecare combinaţie de valori ale argumentelor. Tabelul de adevăr este cea mai completă reprezentare a unei funcţii booleene deoarece pentru fiecare combinaţie posibilă a valorilor argumentelor se indică valoarea funcţiei.

1.2.3.2 Reprezentarea funcţiilor booleene prin diagrame Karnaugh

Diagrama Karnaugh este tot o reprezentare tabelară dar, în raport cu tabelul de adevăr, este mai compactă datorită dispunerii bidirecţionale a valorilor argumentelor.

În cazul general al unei funcţii booleene de *n* argumente, diagrama Karnaugh conţine 2^p linii şi 2^q coloane, astfel ca $p+q=n$. Dacă *n* este par, în mod obişnuit $p=q$, iar dacă *n* este impar, $q=p+1$ (sau $p=q+1$). Rezultă o diagramă cu $2^p \cdot 2^q = 2^n$ cămpuri (compartimente sau locaţii) în care se trec valorile funcţiei pentru combinaţiile corespunzătoare ale valorilor argumentelor. Valorile argumentelor se indică la capetele liniilor şi coloanelor diagramei.

Veitch a fost acela care a introdus acest mod de reprezentare a funcţiilor booleene. În reprezentarea propusă de acesta combinaţiile valorilor argumentelor pe linii şi coloane se dispun conform codului binar natural. Această dispunere conduce la dificultăţi în folosirea diagramei pentru simplificarea funcţiilor booleene (pentru care a şi fost concepută). Ceva mai târziu Karnaugh propune construirea acestor diagrame folosind codul Gray (binar reflectat) care fiind un cod continuu şi ciclic asigură *adiacenţa* între câmpurile diagramei. Din motivele arătate, această reprezentare mai este cunoscută şi ca *diagrama Veitch-Karnaugh*.

Notă. Într-un sistem de numeraţie în baza *B*, două cifre sunt adiacente dacă diferă cu o unitate *modulo B*. În sistemul de numeraţie binar două cifre vor fi adiacente dacă diferă cu cifra 1.

Mai multe amănunte despre modul concret de construcţie şi de utilizare al diagramei Karnaugh se vor prezenta la paragraful dedicat minimizării funcţiilor booleene prin metoda diagramelor Karnaugh (v. §2.3.1).

1.2.3.3 Reprezentarea analitică a funcţiilor booleene

Se consideră combinaţia valorilor argumentelor unei funcţii booleene de *n* argumente $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$. Numărul „*i*“ ataşat *n*-uplului şi definit prin relaţia:

$$i = \tilde{x}_1 2^{n-1} + \tilde{x}_2 2^{n-2} + \ldots + \tilde{x}_n 2^0, \tag{1.44}$$

se numeşte *numărul combinaţiei*.

De asemenea, se consideră funcţia $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care se defineşte în modul următor:

$$P_i = \begin{cases} 1, & \text{dacă numărulcombinaţiei este „}i\text{“}, \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases} \tag{1.45}$$

Această funcţie se numeşte *constituent al unităţii* sau *funcţia caracteristică a unităţii*. Presupunând că se cunoaşte expresia analitică a funcţiei P_i, a cărei determinare explicită se va face mai târziu, atunci se poate enunţa următoarea teoremă:

Teoremă. Orice funcţie booleană dată prin tabel de adevăr poate fi scrisă sub următoarea formă analitică:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_{i_1} + P_{i_2} + \ldots + P_{i_k} = \sum_{i_j \in M_1} P_{i_j}, \tag{1.46}$$

unde M_1 este mulţimea numerelor combinaţiilor valorilor argumentelor pentru care funcţia ia valoarea 1.

Reprezentarea unei funcţii booleene se poate face şi sub altă formă analitică dacă se consideră funcţia $S_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită în modul următor:

$$S_i = \begin{cases} 0, & \text{dacă numărul combinaţiei este „}i\text{“}, \\ 1, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases} \tag{1.47}$$

Funcţia S_i va fi denumită *funcţia caracteristică a lui zero* sau *constituentul lui zero*. Din relaţiile de definiţie (1.45) şi (1.47) rezultă că $P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{S}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Într-un mod similar se poate arăta că orice funcţie booleană de *n* argumente poate fi reprezentată analitic şi sub forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = S_{i_1} \cdot S_{i_2} \cdot \ldots \cdot S_{i_k} = \prod_{i_j \in M_0} S_{i_j}, \tag{1.48}$$

unde M_0 este mulţimea numerelor combinaţiilor valorilor argumentelor pentru care funcţia ia valoarea 0.

Tab.1.6 Valorile variabilei booleene x^a pentru toate combinaţiile posibile ale lui x_i şi a_i.

x_i	a_i	$x_i^{a_i}$
0	0	$x_i^0 = \overline{x}_i = \overline{0} = 1$
0	1	$x_i^1 = x_i = 0$
1	0	$x_i^0 = \overline{x}_i = \overline{1} = 0$
1	1	$x_i^1 = x_i = 1$

Reprezentarea funcţiei booleene sub forma (1.46) se numeşte *reprezentare disjunctivă* iar sub forma (1.48), *reprezentare conjunctivă*.

Pentru a se stabili expresiile funcţiilor P_i şi S_i se introduce următoarea notaţie pentru o variabilă booleană:

$$x^a = \begin{cases} x, & \text{dacă } a = 1, \\ \overline{x}, & \text{dacă } a = 0. \end{cases} \tag{1.49}$$

Se consideră expresia booleană:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}. \tag{1.50}$$

În această conjuncţie de *n* argumente orice termen $x_i^{a_i}$ este 1 dacă şi numai dacă $x_i = a_i$. Într-adevăr, considerând toate combinaţiile posibile pentru x_i şi a_i şi ţinând cont de (1.49) se obţin rezultatele concentrate din tabelul 1.6. Conform celor arătate rezultă că expresia (1.50) este 1 dacă şi numai dacă $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots,$ $x_n = a_n$, fiind 0 pentru toate celelalte cazuri. Având în vedere definiţia (1.45) a funcţiei P_i, rezultă:

$$P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}, \tag{1.51}$$

cu condiţia ca $i = a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \ldots + a_n 2^0$. În aceste condiţii, orice funcţie booleană poate fi descrisă printr-o expresie analitică de forma:

$$f^{\text{FCD}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_1 (x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}), \tag{1.52}$$

unde, prin $\sum\limits_1$ s-a notat faptul că se consideră disjuncţia termenilor conjunctivi (1.50) pentru care funcţia *f* ia valoarea 1.

Reprezentarea funcţiei booleene sub forma (1.52) se numeşte *forma canonică disjunctivă* (FCD) a funcţiei, iar termenii (1.50), *termeni canonici conjunctivi* (TCC) sau *termeni minimali* (*mintermi*).

Teorema prezentată anterior şi formula (1.52) permit stabilirea algoritmului trecerii de la tabelul de adevăr al unei funcţii booleene la FCD.

Algoritmul 1.1. Forma canonică disjunctivă a unei funcţii booleene dată prin tabel de adevăr (sau diagramă Karanugh) se obţine astfel:

1. Din tabelul de adevăr (diagrama Karnaugh) se consideră toate *n*-uplele pe care funcţia le aplică în 1.

2. Se scriu termenii canonici conjunctivi care corespund acestor *n*-uple. În aceşti termeni argumentul x_i intră ca atare sau negat după cum în *n*-uplul considerat are valoarea 1 sau respectiv 0.

3. Termenii canonici conjunctivi obţinuţi se reunesc cu operaţia de disjuncţie.

Exemplu. Se consideră funcţia $f(x_1, x_2, x_3)$ dată prin tabelul de adevăr reprezentat în tabelul 1.7. Se consideră combinaţiile valorilor argumentelor pentru care funcţia are valoarea 1. Se scriu TCC corespunzători:

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3,\ \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\ x_1\bar{x}_2 x_3,\ x_1 x_2 x_3.$$

Tab.1.7 Tabelul de adevăr al funcţiei booleene *f*, din exemplu.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Reunind TCC prin operaţia de disjuncţie se obţine FCD:

$$f^{\mathrm{FCD}}(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 x_3. \tag{1.53}$$

Corespunzător relaţiei (1.48) şi definiţiei funcţiilor caracteristice, se poate scrie:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_0 S_{i_j} = \prod_0 \overline{P}_{i_j} = \prod_0 \overline{x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}}\,. \tag{1.54}$$

Aplicând relaţiile De Morgan, rezultă:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_0 (\overline{x_1^{a_1}} + \overline{x_2^{a_2}} + \ldots + \overline{x_n^{a_n}}), \tag{1.55}$$

unde, prin $\prod\limits_0$ s-a notat faptul că se consideră numai *n*-uplele pentru care funcţia ia valoarea 0.

Din relaţia (1.55) rezultă:

$$S_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{x_1^{a_1}} + \overline{x_2^{a_2}} + \ldots + \overline{x_n^{a_n}}\ , \tag{1.56}$$

cu condiţia ca $i = a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \ldots + a_n 2^0$.

Rezultatele obţinute în tabelul 1.6 confirmă condiţia impusă şi totodată permit verificarea identităţii $\overline{x_i^{a_i}} = x_i^{\overline{a_i}}$. În acest caz relaţia (1.55) se mai poate scrie:

$$f^{\text{FCC}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_0 (x_1^{\overline{a_1}} + x_2^{\overline{a_2}} + \ldots + x_n^{\overline{a_n}}). \tag{1.57}$$

Relaţiile (1.55) şi (1.57) sunt cunoscute sub denumirea de *formă canonică conjunctivă* (FCC), fiind *duala* formei canonice disjunctive. Termenii disjunctivi $(x_1^{\overline{a_1}} + x_2^{\overline{a_2}} + \ldots + x_n^{\overline{a_n}})$ sunt numiţi *termeni canonici disjunctivi* (TCD) sau *termeni maximali* (*maxtermi*). Şi în acest caz relaţiile (1.55) şi (1.57) permit stabilirea algoritmului realizării FCC dacă se cunoaşte tabelul funcţiei.

Algoritmul 1.2. Forma canonică conjunctivă a unei funcţii booleene dată prin tabel de adevăr se obţine în modul următor:

1.Din tabelul de adevăr al funcţiei se consideră toate *n*-uplele pe care funcţia le aplică în 0.

2.Se scriu termenii canonici disjunctivi care corespund acestor *n*-uple. În expresia TCD argumentul x_i intră ca atare sau negat după cum în combinaţia considerată are valoarea 0 sau 1.

3.Termenii canonici disjunctivi obţinuţi la pasul 2 se reunesc prin semnul conjuncţiei.

Exemplu. Să se stabilească FCC pentru funcţia dată prin tabelul din exemplul precedent. Conform algoritmului prezentat mai sus rezultă următorii TCD: $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$, $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$. Forma canonică conjunctivă rezultă imediat:

$$f^{\text{FCC}}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\,(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)\,(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3). \tag{1.58}$$

Cele două forme canonice, disjunctivă şi conjunctivă, sunt unice pentru o funcţie booleană complet definită. Alegerea unei forme sau a celeilalte depinde de criteriul care stă la baza dezvoltării funcţiei în formă analitică. Dacă acest criteriu este cel al economicităţii atunci alegerea FCD sau FCC depinde de forma tabelului funcţiei respective. Astfel, dacă majoritatea valorilor funcţiei sunt zero este de preferat FCD; în caz contrar o economie mai mare o asigură FCC.