2.3 SINTEZA CIRCUITELOR LOGICE COMBINAŢIONALE

Problemele de sinteză ale CLC-urilor se definesc în modul următor: cunoscând semnalele de ieşire corespunzătoare diferitelor combinaţii ale semnalelor de intrare se cere să se stabilească structura circuitului sau, cu alte cuvinte, problema sintezei unui CLC constă în găsirea acelei reţele de comutare care să realizeze funcţia (funcţiile) de comutare dată (date). Deci, sinteza CLC-urilor are ca finalitate obţinerea efectivă a CLC-urilor cu elemente logice care satisfac condiţiile unui sistem funcţional complet de bază (v.§1.2.4).

În general, există mai multe reţele de comutare care să realizeze aceeaşi funcţie şi anume toate reţelele ale căror expresii asociate sunt echivalente. Prin urmare, problema sintezei are mai multe soluţii. Pentru practică interesează acea relaţie care corespunde circuitului realizabil cu cost cât mai mic, pentru tipul de elemente logice dat.

Din cele precizate mai sus se poate defini algoritmul sintezei CLC-ului şi care presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Enunţul problemei care constă în descrierea foarte precisă a funcţionării „instalaţiei“ ce urmează a fi proiectată şi care trebuie să reflecte, în mod complet, corespondenţa „intrare-ieşire“ (text, desene, diagrame de timp).
2. Reprezentarea formală a acestei descrieri, de obicei, prin tabel de adevăr sau diagrame Karnaugh.
3. Reprezentarea printr-o funcţie sau un sistem de funcţii a tuturor condiţiilor de comandă pentru toate elementele de execuţie utilizate. Minimizarea, dacă este necesar, a acestor funcţii.
4. Realizarea efectivă a schemei logice cu elemente logice ale unui sistem funcţional complet de bază.
5. Analiza schemei logice obţinute, pentru a se vedea dacă corespunde condiţiilor impuse iniţial.
6. Completarea schemei logice cu elemente auxiliare de tipul: de amplificare, de formare a impulsurilor, de eliminare a hazardului.

2.3.1 Minimizarea funcţiilor booleene

În acest paragraf se vor prezenta principalele metode de obţinere a celei mai simple forme (expresii booleene) de exprimare a funcţiilor booleene, denumită *formă minimă*.

Scopul miminizării, în practica proiectării circuitelor logice, constă în obţinerea unei expresii care va costa mai puţin şi/sau va opera mai rapid decât prin implementarea expresiei originale. Minimizarea constă, în principal, în transformarea formelor canonice şi a formelor normale (parţial simplificate) ale funcţiilor booleene în forme minime ale acestora. Procesul de minimizare poate fi extrapolat de la simplificarea fiecărei funcţii booleene, la minimizarea corelată a unui ansamblu de funcţii booleene.

În capitolul precedent s-a considerat problema reprezentării funcţiilor booleene prin sisteme complete având un număr minim de funcţii elementare. Acest lucru vizează posibilitatea folosirii unui număr cât mai redus de tipuri de circuite logice pentru materializarea oricărei funcţii booleene. În continuare se va prezenta şi un alt aspect al problemei şi anume cel care priveşte utilizarea unui număr cât mai redus de circuite standard. Din punct de vedere teoretic această problemă se reflectă în simplitatea funcţiilor booleene. În acest sens, trebuie menţionat că formele canonice ale funcţiilor booleene sunt în general neeconomice.

Exemplu. Se dă următoarea funcţie sub FCD:

$$f^{\mathrm{FCD}}(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3 .$$

Asociind convenabil termenii şi aplicând apoi proprietatea de distributivitate, se obţine:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1\bar{x}_2(\bar{x}_3+x_3)+x_1x_2(\bar{x}_3+x_3)= \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1(\bar{x}_2+x_2)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Aplicând din nou proprietatea de distributivitate, rezultă:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\bar{x}_1+x_1)(x_1+\bar{x}_2x_3)=x_1+\bar{x}_2x_3 . \tag{2.17}$$

Cele două forme mai simple obţinute din forma canonică sunt evident mai economice. Dintre ultimele două forme, evident ultima este cea mai simplă, având numărul minim de argumente (variabile). Din cele prezentate mai sus rezultă faptul că obţinerea celei mai simple forme a unei funcţii booleene prin aplicarea proprietăţilor algebrei Boole depinde de experienţa operatorului. Acest fapt a condus la căutarea unor metode sistematice pentru obţinerea expresiilor minimale pentru reprezentarea funcţiilor booleene.

Problema simplificării funcţiilor booleene conduce la problema alegerii sistemului complet şi la problema reprezentării cât mai economice în acest sistem. Pentru precizarea problemei minimizării funcţiilor booleene se consideră FCD şi se definesc o serie de noţiuni [10,20,23].

Definiţie. Conjuncţia $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_k^{a_k}$ $(k<n)$, în care fiecare variabilă se întâlneşte numai o singură dată, se numeşte *termen normal conjunctiv*.

Definiţie. Numărul literelor (variabilelor) distincte (negate sau nenegate) ale unui termen normal conjunctiv se numeşte *rangul* termenului normal.

Definiţie. Disjuncţia termenilor normal conjunctivi se numeşte *formă normal disjunctivă* (FND).

Din definiţiile date rezultă că FCD a unei funcţii de *n* argumente este forma la care toţi termenii sunt de rang *n*. Deci, FCD a unei funcţii booleene este forma normală cea mai complexă.

Definiţie. Forma normal disjunctivă care conţine cel mai mic număr de litere $x_i^{a_i}$ în comparaţie cu toate celelalte FND ale unei funcţii date se numeşte *formă minimă disjunctivă* (FMD).

În mod analog se pot face definiri similare dacă se pleacă de la FCC a unei funcţii booleene. În continuare se va trata problema minimizării funcţiilor booleene plecând de la FCD, rezultatele putându-se extinde şi pentru FCC.

Se va prezenta în continuare principiul unor metode sistematice de obţinere a expresiilor minime pentru funcţiile booleene şi care utilizează noţiunea de *implicant prim*. Se vor defini, mai întâi, noţiunile de *implicaţie* şi *implicant*.

Definiţie. Se spune că o funcţie f_1 *implică* o altă funcţie f_2 dacă pentru orice combinaţie de valori ale variabilelor pentru care funcţia f_1 ia valoarea 1, funcţia f_2 ia de asemenea valoarea 1, sau cu alte cuvinte, dacă nu există nici o combinaţie de valori ale variabilelor care generează cele două funcţii pentru care, în urma evaluării, f_1 să primească valoarea logică 1 iar f_2 valoarea logică 0. De exemplu, funcţia $f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ implică funcţia $f_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$.

Definiţie. Se numesc *implicanţi* ai unei funcţii booleene de *n* argumente, termenii conjunctivi de forma $\varphi_k = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$ $(k \le n)$ care implică funcţia respectivă.

Definiţie. Se numesc *implicanţi primi* (IP) ai unei funcţii booleene de *n* argumente, termenii conjunctivi de forma $\varphi_k = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$ $(k \le n)$ care implică funcţia respectivă, fără a se mai putea elimina vreo variabilă. Din definiţie rezultă că implicanţii primi sunt termeni de rang minim. De exemplu, dacă pentru o funcţie booleană de patru argumente $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ au loc relaţiile de implicaţie:

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \to f(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{2.18}$$

$$x_2 \bar{x}_3 x_4 \to f(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{2.19}$$

$$x_2 \bar{x}_3 \to f(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{2.20}$$

atunci $x_2\bar{x}_3$ este un implicant prim al funcţiei.

Implicanţii primi ai unei funcţii booleene se obţin plecând de la FCD şi aplicând sistematic la câte doi termeni adiacenţi identitatea evidentă:

$$ab + a\bar{b} = a. \tag{2.21}$$

Aplicarea identităţii (2.21) necesită combinarea a câte doi termeni canonici adiacenţi, operaţie denumită *alipirea parţială* sau *compunere a vecinilor*.

Exemplu. Să se stabilească implicanţii primi pentru funcţia:

$$f^{\text{FCD}}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3.$$

Folosind procedeul mai sus menţionat şi aplicând (2.21), rezultă:

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 = x_2 \bar{x}_3,\ x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2.$$

Termenul $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$ nu se poate alipi. Astfel, implicanţii primi ai funcţiei considerate sunt: $x_2\bar{x}_3$, $x_1 x_2$, $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$.

Implicanţii primi ai unei funcţii booleene se bucură de următoarele proprietăţi:

- când funcţia ia valoarea 0 toţi implicanţii primi au valoarea 0;
- când funcţia ia valoarea 1 cel puţin unul dintre implicanţii primi are valoarea 1; a-ceastă proprietate poate fi enunţată şi în felul următor: dacă unul dintre implicanţii primi ia valoarea 1 şi funcţia ia valoarea 1.

Folosind funcţia din exemplul precedent se vor verifica proprietăţile enumerate. În tabelul 2.1 sunt trecute valorile funcţiei şi ale implicanţilor săi primi pentru toate combinaţiile posibile ale valorilor argumentelor. Se observă că atunci când $f = 0$ toţi implicanţii primi sunt 0 iar când $f = 1$ cel puţin unul dintre implicanţii primi are valoarea 1. De asemenea, când implicanţii primi sunt 1 şi funcţia are valoarea 1.

Este posibil ca în urma alipirilor parţiale şi aplicării relaţiei (2.21) să se mai poată aplica implicanţilor rezultaţi şi proprietatea de absorbţie:

$$a + ab = a, \text{ respectiv duala sa } a(a+b) = a. \tag{2.22}$$

Tab.2.1 Verificarea proprietăţilor implicanţilor primi.

x_1	x_2	x_3	$x_2\bar{x}_3$	x_1x_2	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1

În literatura de specialitate sunt prezentate mai multe metode de minimizare a funcţiilor booleene, fiecare dintre acestea prezentând anumite avantaje. Metodele de minimizare pot fi grupate în:

- metode grafice de minimizare prin matrice de combinaţii sau diagrame;
- metode algebrice de minimizare.

În cele ce urmează sunt alese şi prezentate numai câteva dintre acestea, cele mai reprezentative.

2.3.1.1 Minimizarea funcţiilor booleene pe baza axiomelor şi teoremelor algebrei booleene

Folosind axiomele şi teoremele algebrei booleene, o funcţie booleană dată sub FCD sau sub FCC poate fi scrisă, în cazul general, sub o altă formă cu un număr mai mic de termeni, respectiv factori elementari căreia îi corespunde o reţea cu cost mai redus. Această metodă de minimizare a funcţiei booleene necesită, din partea proiectantului, multă îndemânare, ingeniozitate şi experienţă, motiv pentru care nu poate fi aplicată cu succes decât după o practică îndelungată în proiectarea circuitelor de comutare. Unul dintre principalele dezavantaje ale metodei îl constituie faptul că obţinându-se prin calcule o anumită formă a funcţiei nu se poate stabili cu uşurinţă dacă aceasta este forma minimă sau se mai poate simplifica.

2.3.1.2 Minimizarea funcţiilor booleene prin metoda Quine-McCluskey

Metoda Quine-McCluskey este o metodă algebrică de minimizare a funcţiilor booleene folosită în cazul funcţiilor cu număr mare de variabile, pentru care metodele grafice de minimizare (de exemplu, metoda diagramelor Karnaugh) devin greu de utilizat. Metoda se bazează pe o teoremă datorată lui W. V. Quine, care are o mare importanţă pentru abordarea sistematică a minimizării funcţiilor booleene şi care se enunţă în felul următor:

Teorema lui Quine. Dacă în forma canonică disjunctivă a unei funcţii booleene se fac toate operaţiile de alipire parţială şi apoi toate operaţiile de absorţie, se obţine disjuncţia implicanţilor primi.

Fie un sistem de implicanţi primi φ_k ai unei funcţii de *n* argumente. Conform teoremei are loc relaţia:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_k \varphi_k \, . \tag{2.23}$$

Relaţia (2.23) trebuie să fie adevărată atât pentru $f = 0$ cât şi pentru $f = 1$. Atunci când $f = 0$, aşa cum s-a arătat mai sus, toţi implicanţii primi ai funcţiei sunt 0, deci şi $\sum \varphi_k = 0$. Când $f = 1$, va exista cel puţin un implicant prim $\varphi_j = 1$, astfel că întreaga disjuncţie din partea dreaptă a relaţiei (2.23) va avea valoarea 1.

Relaţia (2.23) este o formă normal disjunctivă a funcţiei şi se numeşte *formă disjunctivă prescurtată* (FDP). Această formă nu este minimă deoarece, în general, există implicanţi primi care implică suplimentar funcţia. După eliminarea implicanţilor primi redundanţi, rămân numai implicanţii primi strict necesari care sunt numiţi *implicanţii primi esenţiali* (IPE) ai funcţiei. Disjuncţia implicanţilor primi esenţiali conduce la forma minimă disjunctivă. Din cele prezentate rezultă că minimizarea unei funcţii booleene date sub FCD comportă două etape:

1. determinarea FDP prin căutarea implicanţilor primi;
2. căutarea reuniunii minimale care conţine cel mai mic număr de implicanţi primi.

Pentru stabilirea reuniunii minimale se construieşte *tabelul implicanţilor primi,* în care fiecare linie corespunde unui implicant prim, iar fiecare coloană unui termen canonic conjunctiv. Corespondenţele între termenii canonici şi implicanţii primi se marchează la intersecţia liniilor cu coloanele respective. Se reţin numai acei implicanţi primi necesari să acopere toate coloanele; aceştia sunt implicanţii primi esenţiali.

În metoda concepută de Quine există un neajuns determinat de necesitatea comparării (alipirii) complete a perechilor de termeni în prima etapă. Cu creşterea numărului termenilor canonici care definesc FCD a funcţiei considerate creşte numărul acestor comparări. Această creştere este caracterizată de o funcţie factorială. Din acest motiv, la un număr suficient de mare de mintermi folosirea metodei Quine devine greoaie. McCluskey a îmbunătăţit prima etapă a metodei lui Quine prin transcrierea binară a termenilor canonici. În acest mod se poate face o sistematizare a comparării mintermilor, grupându-i după numărul de biţi 1. Astfel, în grupa *i* intră toate numerele corespunzătoare mintermilor care au în transcriere binară *i* biţi 1. Compararea perechilor se poate face numai între grupe vecine, deoarece numai aceste grupe diferă între ele cu un singur bit 1. La reprezentarea termenilor normali rezultaţi prin eliminarea variabilelor, în locul acestor variabile se trece o linie orizontală.

Completată în modul menţionat de către McCluskey, metoda de minimizare descrisă este cunoscută ca *metoda Quine-McCluskey*.

Revenind la prima etapă, pentru determinarea implicanţilor primi ai funcţiei se aplică următoarea procedură:

Algoritmul 2.2.

1. Se porneşte de la FCD a funcţiei în care termenii canonici sunt daţi sub forma

unui produs de variabile fie prin notaţia simbolică. Fiecare termen canonic este reprezentat apoi sub formă de număr binar, prin n-uplul de zerouri şi unităţi corespondente termenului respectiv.

2. Termenii canonici astfel scrişi se împart în grupe, în funcţie de ponderea acestora, adică de numărul unităţilor cuprinse în n-uplul respectiv.

3. Grupele de termeni canonici sunt aranjate pe o coloană, în ordinea crescătoare a ponderilor. (Acest lucru este util deoarece doi termeni canonici se pot asocia formând un subcub 1–dimensional[2] numai dacă fac parte din grupe ale căror ponderi diferă cu o unitate).

4. Se compară fiecare termen canonic al unei grupe cu toţi termenii canonici ai grupei de pondere mai mare cu o unitate. Dacă numerele binare respective sunt adiacente, cei doi termeni canonici se pot asocia formând un subcub 1–dimensional, notat printr-un număr binar care are pe poziţia prin care cei doi termeni componenţi diferă, o linie orizontală, ceea ce semnifică faptul că variabila corespondentă acelei poziţii lipseşte (este o variabilă redundantă); cei doi termeni canonici care au format subcubul 1–dimensional se bifează, iar termenul normal care reprezintă subcubul rezultat se înscrie pe o nouă coloană. Toţi termenii normali (subcuburile 1–dimensionale) rezultaţi în urma comparării a două grupe din coloana termenilor canonici formează o grupă în coloana subcuburilor 1–dimensionale. Prin urmare, coloana subcuburilor 1–dimensionale va conţine, în cazul general, cu o grupă mai puţin decât coloana termenilor canonici (a subcuburilor 0–dimensionale).

5. Se compară, în continuare, fiecare termen al unei grupe din coloana subcuburilor r–dimensionale (se consideră, pentru început, $r = 1$) cu toţi termenii grupei cu pondere mai mare cu o unitate. Pentru ca doi asemenea termeni să se poată asocia formând un subcub $(r+1)$–dimensional trebuie ca în ambii termeni simbolurile „–“ să fie pe aceleaşi poziţii. Doi termeni care îndeplinesc această condiţie şi sunt adiacenţi se asociază formând un subcub $(r+1)$–dimensional care se notează cu un număr binar în care apare încă o linie orizontală pe poziţia prin care cei doi termeni diferă. Termenii care participă la formarea acestui subcub se bifează, iar subcubul $(r+1)$–dimensional se înscrie pe o nouă coloană, coloana subcuburilor $(r+1)$–dimensionale, care, în cazul general, are cu o grupă mai puţin decât coloana subcuburilor r–dimensionale. Dacă se obţine de mai multe ori un anumit termen, acesta se consideră doar o singură dată.

6. Se măreşte r cu o unitate şi se repetă punctul 5, până când subcuburile ultimei coloane nu se mai pot asocia în scopul formării unui subcub de dimensiune superioară. În acest moment prima etapă a algoritmului Quine-McCluskey este încheiată. Termenii rămaşi nebifaţi în coloanele rezultate formează grupul implicanţilor primi ai funcţiei considerate.

Exemplu. În tabelul 2.2 se dă un exemplu de aplicare a algoritmului prezentat mai sus pentru minimizarea funcţiei de cinci variabile dată sub FCD:

$$f^{\mathrm{FCD}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i \in k} P_i \,, \tag{2.24}$$

unde, $k = \{0,3,4,7,8,10,11,12,14,15,18,19,23,26,28,29,30\}$.

În tabelul 2.2 s-au scris alături de fiecare subcub şi indicii termenilor canonici sau ai

[2] Pentru definirea noţiunii de *subcub* vezi metoda diagramelor Karnaugh.

Tab.2.2 Determinarea implicanţilor primi pentru funcţia *f* din exemplu.

Subcuburi 0–dimensionale								Subcuburi 1–dimensionale								Subcuburi 2–dimensionale						
Grupa	Indici	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Grupa	Indici	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		Grupa	Indici	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	0	0	0	0	✓	0	0,4	0	0	–	0	0	✓	0	0,4,8,12	0	–	–	0	0
1	4	0	0	1	0	0	✓		0,8	0	–	0	0	0	✓		0,8,4,12	0	–	–	0	0
	8	0	1	0	0	0	✓	1	4,12	0	–	1	0	0	✓	1	8,10,12,14	0	1	–	–	0
2	3	0	0	0	1	1	✓		8,10	0	1	0	–	0	✓		8,12,10,14	0	1	–	–	0
	10	0	1	0	1	0	✓		8,12	0	1	–	0	0	✓	2	3,7,11,15	0	–	–	1	1
	12	0	1	1	0	0	✓	2	3,7	0	0	–	1	1	✓		3,7,19,23	–	0	–	1	1
	18	1	0	0	1	0	✓		3,11	0	–	0	1	1	✓		3,11,7,15	0	–	–	1	1
3	7	0	0	1	1	1	✓		3,19	–	0	0	1	1	✓		3,19,7,23	–	0	–	1	1
	11	0	1	0	1	1	✓		10,11	0	1	0	1	–	✓		10,11,14,15	0	1	–	1	–
	14	0	1	1	1	0	✓		10,14	0	1	–	1	0	✓		10,14,26,30	–	1	–	1	0
	19	1	0	0	1	1	✓		10,26	–	1	0	1	0	✓		10,26,14,30	–	1	–	1	0
	26	1	1	0	1	0	✓		12,14	0	1	1	–	0	✓		12,14,28,30	–	1	1	–	0
	28	1	1	1	0	0	✓		12,28	–	1	1	0	0	✓		12,28,14,30	–	1	1	–	0
4	15	0	1	1	1	1	✓		18,19	1	0	0	1	–								
	23	1	0	1	1	1	✓		18,26	1	–	0	1	0								
	29	1	1	1	0	1	✓	3	7,15	0	–	1	1	1	✓							
	30	1	1	1	1	0	✓		7,23	–	0	1	1	1	✓							
									11,15	0	1	–	1	1	✓							
									14,15	0	1	1	1	–	✓							
									14,30	–	1	1	1	0	✓							
									19,23	1	0	–	1	1	✓							
									26,30	1	1	–	1	0	✓							
									28,29	1	1	1	0	–								
									28,30	1	1	1	–	0	✓							

subcuburilor 0–dimensionale care sunt incluse în subcubul respectiv. Urmărind aceşti indici se observă că în coloana subcuburilor 0–dimensionale doi termeni canonici se pot asocia dacă diferenţa între indicele termenului din grupa cu ponderea i şi indicele termenului din grupa cu ponderea $i-1$ este un număr întreg, pozitiv şi egal cu o putere a lui 2. Puterea lui 2 indică poziţia din numărul binar pe care apare simbolul „–“. De

exemplu, termenul cu indicele 4 din grupa 1 şi termenul cu indicele 12 din grupa 2 respectă această condiţie şi anume $12-4=8$. Subcubul 1–dimensional rezultat prin asocierea acestor termeni conţine partea comună a termenilor incluşi, iar pe poziţia de rang $2^3=8$ apare simbolul „–“. În cazul coloanelor subcuburilor de dimensiune mai mare decât zero, pentru ca două subcuburi făcând parte din grupe a căror pondere diferă cu o unitate să se poată asocia, trebuie ca diferenţa între indicii termenilor canonici incluşi în subcubul din grupa superioară şi indicii termenilor canonici corespondenţi ai subcubului din grupa inferioară să fie o aceeaşi putere a lui 2. De exemplu, al treilea subcub 1–dimensional din grupa a 3-a şi primul din grupa a 2-a respectă această condiţie $(11-3=8$ şi $15-7=8)$. Ţinând cont de aceaste observaţii se poate uşura munca depusă pentru găsirea implicanţilor primi.

Ca rezultat al aplicării regulilor de găsire a implicanţilor primi ai funcţiei (2.24), din tabelul 2.2 rezultă următoarea expresie:

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_5) &= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_3x_4\bar{x}_5 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_4\bar{x}_5 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_5 \\ &+ \bar{x}_1x_4x_5 + \bar{x}_2x_4x_5 + \bar{x}_1x_2x_4 + x_2x_4\bar{x}_5 + x_2x_3\bar{x}_5. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Această expresie se obţine înlocuind în termenii rămaşi nebifaţi în tabel zerourile cu variabila corespunzătoare poziţiei respective negată, unităţile cu variabila corespunzătoare poziţiei respective nenegată şi omiţând variabilele corespunzătoare poziţiilor pe care apare simbolul „–“.

Pentru a găsi forma minimă disjunctivă a unei funcţii trebuie aleşi numai acei implicanţi primi care includ toţi termenii canonici ai funcţiei şi conduc la o formă a funcţiei realizată cu cost minim. Pentru găsirea acoperirii cu cost minim trebuie căutate toate acoperirile posibile pentru funcţia dată din care se alege acoperirea care îndeplineşte condiţia de cost minim faţă de un anumit criteriu de cost. Costul C_R se defineşte ca fiind suma costurilor implicanţilor primi din acoperirea considerată. Costul unui implicant prim al unei funcţii de *n* variabile, din care lipsesc *r* variabile, adică a unui subcub *r*—dimensional este $n-r$, deoarece fiecare variabilă prezentă necesită un contact. Atunci costul C_R al unei acoperiri este dat de relaţia:

$$C_R = \sum_{r=0}^{n-1} g_r(n-r), \tag{2.26}$$

unde, g_r este numărul subcuburilor *r*–dimensionale din acoperirea considerată, iar însumarea se face pentru toate subcuburile de dimensiune $0 \le r \le n$. Costul C_R al unei acoperiri este minim când suma costurilor implicanţilor primi este minimă.

În cazul circuitelor de comutare cu porţi, costul circuitelor este în general cu atât mai mic cu cât numărul de porţi este mai mic, iar porţile respective au număr cât mai mic de intrări, ceea ce înseamnă costul C_R minim. Din acest motiv, atunci când funcţia se realizează cu porţi, se alege acoperirea a cărei cost C_P, definit de relaţia:

$$C_P = C_R + p = \sum_{r=0}^{n-1} g_r(n-r) + \sum_{r=0}^{n-1} g_r = \sum_{r=0}^{n-1} g_r(n-r+1), \tag{2.27}$$

este minimă. În relaţia (2.27), p este numărul implicanţilor primi ai acoperirii, iar restul notaţiilor au aceeaşi semnificaţie ca în relaţia (2.26).

De obicei, acoperirea minimală, adică acoperirea cu număr minim de elemente, satisface atât condiţia de C_R minim cât şi condiţia de C_P minim. Algoritmul de obţinere a acoperirii cu cost minim, plecând de la mulţimea implicanţilor primi, obţinuţi în etapa anterioară, este următorul:

Algoritmul 2.3.

1. Se construieşte un tabel al implicanţilor primi, având drept cap de linie implicanţii primi ai funcţiei şi cap de coloană termenii canonici ai funcţiei. La intersecţia unei linii cu o coloană se plasează un semn, de exemplu un asterisc, dacă implicantul prim de pe linia respectivă include termenul canonic de pe coloana respectivă (v. tab. 2.3).

Tab.2.3 Tabelul implicanţilor primi pentru funcţia *f* din exemplu.

Implicanţi primi					Indici	Termeni canonici																	Obs
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		0	4	8	3	10	12	18	7	11	14	19	26	28	15	23	29	30	
1	0	0	1	–	(18,19)							*				*							
1	–	0	1	0	(18,26)							*					*						
1	1	1	0	–	(28,29)													*			*		IPE
0	–	–	0	0	(0,4,8,12)	*	*	*			*												IPE
0	1	–	–	0	(8,10,12,14)			*		*	*				*								
0	–	–	1	1	(3,7,11,15)				*				*	*					*				
–	0	–	1	1	(3,7,19,23)				*				*			*				*			IPE
0	1	–	1	–	(10,11,14,15)					*				*	*				*				
–	1	–	1	0	(10,14,26,30)					*					*		*					*	
–	1	1	–	0	(12,14,28,30)						*				*			*				*	

2. Se inspectează tabelul construit la punctul 1. Dacă pe o anumită coloană există un singur semn, ceea ce înseamnă că termenul canonic de pe acea coloană este inclus într-un singur implicant prim, atunci implicantul prim de pe linia însemnată devine implicant prim esenţial şi intră obligatoriu în forma minimă a funcţiei. Se construieşte un nou tabel, al implicanţilor primi neesenţiali, care rezultă eliminând din tabelul implicanţilor primi liniile cu implicanţii primi esenţiali şi coloanele cu termenii canonici incluşi în aceştia. Pentru a găsi mai uşor aceste coloane se încercuiesc toate semnele de pe linia unui implicant prim esenţial şi se elimină apoi toate coloanele care au semne încercuite. De asemenea, se elimină liniile pe care nu au mai rămas semne şi coloanele care au semne pe aceleaşi rânduri ca şi o altă coloană din tabelul implicanţilor primi neesenţiali, adică dacă mai mulţi termeni canonici sunt incluşi în exact aceiaşi implicanţi primi neesenţiali se reţine un singur reprezentat al acestora (de exemplu termenii canonici 11 şi 15), deoarece orice implicant care îl include pe acesta va include automat şi pe cei omişi (v. tab. 2.4).

3. Se inspectează tabelul implicanţilor primi neesenţiali în scopul găsirii unei acoperiri cu cost C_P minim, pentru toţi termenii canonici rămaşi în acest tabel. În unele cazuri se pot găsi mai multe acoperiri care satisfac această condiţie, fiecare având acelaşi cost. În astfel de situaţii funcţia are mai multe forme minime disjunctive.

4. Făcând suma booleană a implicanţilor primi esenţiali găsiţi la punctul 2 şi a celor

neesenţiali făcând parte din acoperirea obţinută la punctul 3, se obţine FMD a funcţiei date.

Tab.2.4 Tabelul implicanţilor primi neesenţiali pentru funcţia *f* din exemplu.

Nr.	Implicanţi primi					Indici	Termeni canonici						Obs.
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		10	18	11	14	26	30	
1	1	0	0	1	–	(18,19)		*					
2	1	–	0	1	0	(18,26)		*			*		*A*
3	0	1	–	–	0	(8,10,12,14)	*			*			
4	0	–	–	1	1	(3,7,11,15)			*				
5	0	1	–	1	–	(10,11,14,15)	*		*	*			*A*
6	–	1	–	1	0	(10,14,26,30)	*			*	*	*	*A*
7	–	1	1	–	0	(12,14,28,30)				*		*	

Pentru exemplul considerat anterior, funcţia dată prin expresia (2.24), se obţine tabelul implicanţilor primi prezentat în tabelul 2.3.

Inspectând acest tabel se obţin implicanţii primi esenţiali $x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$, $\bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5$ şi $\bar{x}_2 x_4 x_5$ (de pe rândurile marcate cu IPE). După eliminarea termenilor canonici acoperiţi de aceşti implicanţi primi se obţine tabelul implicanţilor neesenţiali (v. tab. 2.4).

Din tabelul 2.4 rezultă că, luând implicanţii $x_1 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5$, $\bar{x}_1 x_2 x_4$, şi $x_2 x_4 \bar{x}_5$, de pe rândurile marcate cu *A*, se obţine acoperirea minimală căreia îi corespunde FMD a funcţiei, dată de relaţia:

$$f^{\text{FMD}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_2 x_4 x_5 + x_1 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 x_2 x_4 + + x_2 x_4 \bar{x}_5. \tag{2.28}$$

Analizând tabelul 2.4 rezultă că mai există şi alte acoperiri minimale pentru această funcţie. Pentru găsirea acestora se procedează în felul următor:

Algoritmul 2.4.

1. Se împarte mulţimea implicanţilor primi neesenţiali în submulţimi M_i, astfel încât elementele unei submulţimi să conţină toţi implicanţii primi neesenţiali care includ termenul canonic cu indicele *i*. Notând implicanţii primi neesenţiali din tabelul 2.4 cu numărul lor de ordine, rezultă submulţimile:

$$M_{10} = \{3,5,6\};\ M_{18} = \{1,2\};\ M_{11} = \{4,5\};\ M_{14} = \{3,5,6,7\};$$

$$M_{26} = \{2,6\};\ M_{30} = \{6,7\}. \tag{2.29}$$

2. Se alcătuieşte, cu elementele submulţimii M_i, expresia formală (2.30), în care suma se interpretează ca operaţia logică SAU iar produsul ca operaţia logică ŞI:

$$E = (3+5+6)(1+2)(4+5)(3+5+6+7)(2+6)(6+7). \tag{2.30}$$

3. Efectuând calculele în expresia (2.30), ţinând cont de faptul că $i + i = i$ şi

$i(i+j)=i$, unde i şi j sunt elemente ale submulţimilor M_i, se obţine o nouă formă a expresiei E, o sumă de produse. Fiecare dintre aceste produse de implicanţi primi reprezintă una dintre acoperirile mulţimii termenilor canonici din tabelul implicanţilor primi neesenţiali.

Ţinând cont de cele de mai sus, expresia (2.30) devine:

$$\begin{aligned}E &= (3+5+6)(1+2)(4+5)(2+6)(6+7) = (6+7)(3+5)(2+1\cdot 6)(4+5) = \\ &= (6+7\cdot 3+7\cdot 5)(2\cdot 4+2\cdot 5+1\cdot 6\cdot 4+1\cdot 6\cdot 5) = 6\cdot 2\cdot 4+6\cdot 2\cdot 5+1\cdot 6\cdot 4+ \\ &+1\cdot 6\cdot 5+7\cdot 3\cdot 2\cdot 4+7\cdot 3\cdot 2\cdot 5+7\cdot 3\cdot 1\cdot 6\cdot 4+7\cdot 3\cdot 1\cdot 6\cdot 5+7\cdot 5\cdot 2\cdot 4+ \\ &+7\cdot 5\cdot 2+7\cdot 5\cdot 1\cdot 6\cdot 4+7\cdot 5\cdot 1\cdot 6.\end{aligned} \tag{2.31}$$

4. Se ia forma minimală a expresiei (2.31) în care intră numai produsele cu cost minim. Termenii acestei expresii reprezintă acoperirile cu cost minim. Pentru expresia (2.30) forma minimală, considerând costul C_R, este:

$$E_{min} = 6\cdot 2\cdot 4+6\cdot 2\cdot 5+1\cdot 6\cdot 4+1\cdot 6\cdot 5+7\cdot 5\cdot 2\,. \tag{2.32}$$

Expresia (2.32) conţine cele cinci acoperiri cu cost C_R minim ale tabelului 2.4. Costul fiecărei acoperiri este 10. Deoarece fiecare dintre cele cinci acoperiri are acelaşi număr de elemente, ele au şi acelaşi cost C_P.

Aşa cum s-a precizat mai sus minimizarea funcţiilor booleene prin metoda Quine-McCluskey necesită considerarea funcţiilor sub FCD. Problema poate fi tratată şi pentru funcţiile booleene date sub FCC, în care caz operaţiile de alipire parţială a termenilor disjunctivi sunt urmate de aplicarea sistematică a formelor duale pentru relaţiile (2.21) şi (2.22):

$$(a+b)(a+\bar{b}) = a \text{ şi respectiv } a(a+b) = a\,. \tag{2.33}$$

Etapa a doua, de căutare a intersecţiei minimale, se realizează similar ca şi pentru FCD, obţinându-se în final *forma minimă conjunctivă* (FMC).

O altă modalitate de obţinere a FMC pentru o funcţie booleană dată prin FCC constă în considerarea funcţiei negate:

$$\bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\prod_0 (x_1^{\bar{a}_1} + x_2^{\bar{a}_2} + \ldots + x_n^{\bar{a}_n})} = \prod_0 (\overline{x_1^{\bar{a}_1}}\ \overline{x_2^{\bar{a}_2}} \ldots \overline{x_n^{\bar{a}_n}})\,, \tag{2.34}$$

care se poate trata ca şi FCD. Se obţine astfel forma minimă disjunctivă a funcţiei negate. Negând expresia obţinută se revine la forma conjunctivă, corespunzând formei minime conjunctive.

Metoda Quine-McCluskey începe să devină greu de manipulat pentru un număr mare de variabile $(n \ge 6)$ însă prezintă avantajul realizării unor algoritmi pentru calcul numeric. De asemenea, principiul metodei expuse poate fi transpus pe diagrame numite Karnaugh, căpătând un caracter intuitiv şi uşurinţă în aplicarea pentru funcţii având 6÷7 variabile.