1

BAZELE TEORETICE ALE CIRCUITELOR LOGICE

1.1 ALGEBRA LOGICĂ

Definirea riguroasă a problemelor tehnice privind circuitele logice se poate face folosind principiile logicii matematice, în particular principiile calculului propoziţiilor.

Spre mijlocul secolului al XIX-lea, matematicianul şi logicianul englez George Boole (1815–1864) a propus o interpretare a logicii propoziţiilor bivalente, fundamentând algebra propoziţiilor cu două valori care adesea este denumită *algebra logicii* sau *algebră booleană*. Apariţia elementelor, circuitelor şi sistemelor care în funcţionare pot avea doar două stări stabile distincte a condus la aplicarea în tehnică a perceptelor logicii bivalente.

Algebrele booleene şi în special algebra booleană cu două valori constituie fundamentul teoretic al circuitelor logice.

Algebra logică, numită, aşa cum s-a mai precizat şi calculul propoziţional, operează cu propoziţii, despre care are sens să afirmăm că sunt adevărate sau false. Din însăşi definirea propoziţiilor rezultă că o propoziţie poate fi adevărată sau falsă. Propoziţiile pot fi simple şi compuse. Cele compuse se obţin ca rezultat al legăturii propoziţiilor simple, prin intermediul unor conective logice. Adevărul sau falsitatea unei propoziţii compuse este funcţie de valoarea propoziţiilor simple din care se compune şi de tipul legăturii logice.

În logica simbolică se poate face abstracţie de sensul propoziţiilor, operând cu relaţiile de valoare. Convenim ca unei propoziţii adevărate să-i atribuim valoarea binară 1, iar falsitatea acesteia să o notăm cu valoarea binară zero (0).

Propoziţia compusă a cărei valoare depinde de valorile propoziţiilor simple, putând avea tot două valori, se numeşte *funcţie logică* sau *funcţie binară*.

Funcţia compusă este complet definită cu ajutorul unui tabel finit, în care se trec valorile funcţiei în corespondenţă cu valorile propoziţiilor simple considerate independente. O astfel de exprimare a funcţiei compuse este cunoscută sub numele de *tabel de adevăr*.

Calculul propoziţiilor poate fi extrapolat în tehnică la sistemele automate care utilizează elemente de comutaţie cu două stări. Acestora le putem atribui relaţii de valoare (1 sau 0) binară corespunzătoare adevărului (1) şi falsităţii (0) propoziţiilor.

LATICE

Conceptul de latice s-a format în scopul generalizării și unificării unor relații care există între submulțimile anumitor structuri ca, de exemplu: grupuri, corpuri, spații topologice, și altele. Teoria laticelor a apărut și s-a dezvoltat în jurul anului 1930 și a fost influențată de lucrările matematicianului american Garrett Birkhoff (1911 - 1996).

O mulțime $\mathcal{L}$ cu două operații numite *intersecție* (∩) și *reuniune* (∪) se numește *latice* dacă pentru elemente arbitrare $a, b, c, \cdots$ ale lui $\mathcal{L}$ au loc următoarele axiome:

(1) comutativitatea: $a \cap b = b \cap a, a \cup b = b \cup a$;
(2) asociativitatea: $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c), (a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$;
(3) proprietatea de absorbție: $a \cup (a \cap b) = a, a \cap (a \cup b) = a$.

1.1.1 Axiomele şi proprietăţile algebrei booleene

Considerând cunoscute noţiunile elementare de teoria mulţimilor, în continuare se vor defini axiomele şi proprietăţile algebrei booleene pornind de la structura algebrică, mai generală, de *lattice* .

Fie $\boldsymbol{A}$ o mulţime nevidă, împreună cu două operaţii binare pe $\boldsymbol{A}$, denumite *reuniune* şi *intersecţie* şi notate cu $\bigcup$ şi $\bigcap$.

Prin definiţie, tripletul:

$$\mathsf{L} = (\boldsymbol{A}, \cup, \cap), \tag{1.1}$$

este o *latice* şi se bucură de următoarele proprietăţi:

• *comutativitatea*:

$$a_1 \cup a_2 = a_2 \cup a_1,\ a_1 \cap a_2 = a_2 \cap a_1,\ \forall a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}, \tag{1.2}$$

• *asociativitatea*:

$$a_1 \cup (a_2 \cup a_3) = (a_1 \cup a_2) \cup a_3,\ a_1 \cap (a_2 \cap a_3) = (a_1 \cap a_2) \cap a_3,$$

$$\forall a_1, a_2, a_3 \in \boldsymbol{A}, \tag{1.3}$$

• *absorbţia*:

$$a_1 \cup (a_1 \cap a_2) = a_1,\ a_1 \cap (a_1 \cup a_2) = a_1,\ \forall a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}. \tag{1.4}$$

Proprietăţile (1.2) ÷ (1.4) constituie axiome pentru latici. Se poate observa că în acest sistem de axiome se pot schimba între ele simbolurile $\bigcup$ şi $\bigcap$. Evident, acest lucru se poate face în orice afirmaţie care decurge din sistemul de axiome, proprietate cunoscută sub denumirea de *principiul dualităţii pentru latici*.

Având în vedere proprietăţile (1.2) şi (1.3), operaţiile de reuniune şi de intersecţie se pot extinde la orice număr arbitrar, dar finit, de termeni, indiferent de ordinea termenilor sau factorilor:

$$\bigcup_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup a_n,\ \bigcap_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cap a_2 \cap \ldots \cap a_n. \tag{1.5}$$

Plecând de la axiomele definite mai sus se poate demonstra şi următoarea proprietate:

• *idempotenţa*:

$$a \cup a \cup \ldots \cup a = a,\ a \cap a \cap \ldots \cap a = a,\ \forall a \in \boldsymbol{A}. \tag{1.6}$$

O latice se poate defini şi ca o mulţime parţial ordonată $\mathsf{L} = (\boldsymbol{A}, \leq)$, care are o cea mai mică margine superioară (c.m.m.m.s.) – s şi o cea mai mare margine inferioară (c.m.m.m.i.) – p, pentru fiecare pereche de elemente. Legătura între cele două definiţii se poate face notând $s = a_1 \bigcup a_2$, $p = a_1 \bigcap a_2$.

Prin definiţie, *o latice finită* (*mărginită*) are un element care este c.m.m.m.i., numit *ultim element al laticei*, notat prin 0, astfel încât:

• *legile lui* 0:

$$a \bigcup 0 = a\,,\ a \bigcap 0 = 0\,,\ \forall a \in \boldsymbol{A} \tag{1.7}$$

şi un element care este c.m.m.m.s., numit *prim element al laticei*, notat prin 1, astfel încât:

• *legile lui* 1:

$$a \bigcup 1 = 1,\ a \bigcap 1 = a\,,\ \forall a \in \boldsymbol{A}. \tag{1.8}$$

Fie $\mathsf{L} = (\boldsymbol{A}, \cup, \cap, 0, 1)$ o latice finită şi $a \in \boldsymbol{A}$. Un *element complementar* sau, pe scurt, un *complement* al elementului *a*, este elementul $\bar{a}$ (non *a*), astfel încât:

• *principiul terţului exclus*:

$$a \bigcup \bar{a} = 1, \tag{1.9}$$

care atestă faptul că nu există o a treia posibilitate într-o reuniune cu variabile complementare şi:

• *principiul contradicţiei*:

$$a \bigcap \bar{a} = 0. \tag{1.10}$$

Trebuie menţionat că nu orice element dintr-o latice finită are un complement. Astfel, în laticea finită $\mathsf{L} = (\{0, a, 1\}, \cup, \cap, 0, 1)$, elementul *a* nu are complement. De asemenea, complementul unui element al unei latice, dacă acesta există, nu este în mod necesar unic. În schimb, elementele 0 şi 1 au fiecare un complement unic, respectiv 1 şi 0: $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.

Dacă într-o latice finită orice element *a* are un complement unic $\bar{a}$, această *latice* se numeşte *complementară*.

Prin definiţie o latice L este *distributivă* dacă şi numai dacă:

• *distributivitatea*:

$$(a_1 \cup a_2) \cap a_3 = (a_1 \cap a_3) \cup (a_2 \cap a_3),\ \forall a_1, a_2, a_3 \in \boldsymbol{A}, \tag{1.11}$$

$$(a_1 \cap a_2) \cup a_3 = (a_1 \cup a_3) \cap (a_2 \cup a_3),\ \forall a_1, a_2, a_3 \in \boldsymbol{A}. \tag{1.12}$$

Proprietatea (1.11) poartă denumirea de distributivitatea reuniunii în raport cu intersecţia iar (1.12) distributivitatea intersecţiei în raport cu reuniunea.

Definiţie. O *algebră booleană* este o latice distributivă şi complementară. Din definiţie rezultă că o algebră booleană este un 4-uplu:

$$\mathsf{B} = (\boldsymbol{A}, \cup, \cap, -), \tag{1.13}$$

în care „–“ este operaţia unară de complementare.

Într-o algebră Boole se mai pot demonstra şi următoarele proprietăţi care au o deosebită importanţă pentru studiul circuitelor de comutare:

• *principiul involuţiei* (*dublei negaţii*):

$$\overline{\overline{a}} = a,\ \forall a \in \boldsymbol{A}. \tag{1.14}$$

De asemenea, într-o algebră Boole sunt adevărate:

• *relaţiile lui De Morgan*:

$$\overline{a_1 \cup a_2} = \overline{a}_1 \cap \overline{a}_2,\ \forall a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}, \tag{1.15}$$

$$\overline{a_1 \cap a_2} = \overline{a}_1 \cup \overline{a}_2,\ \forall a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}. \tag{1.16}$$

Dacă într-o algebră Boole mulţimea ***A*** are numai elementele 0 şi 1, se obţine algebra Boole cu două elemente:

$$\mathsf{B}_2 = (\{0,1\}, \cup, \cap, -), \tag{1.17}$$

în care, operaţiile sunt date în următoarele tabele:

Tab.1.1 Tabelele operaţiilor de reuniune (a), intersecţie (b) şi complementare (c).

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

(a)

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

(b)

$-$	0	1
	1	0

(c)

Din cele prezentate mai sus rezultă că în algebra Boole calculul este definit prin relaţiile (1.2) ÷ (1.16). Pentru cele trei operaţii, în afara denumirilor menţionate se mai folosesc şi următoarele:

• operaţia SAU, numită şi disjuncţie ori sumă logică pentru reuniune, fiind notată şi cu simbolurile „$\vee$“ sau „+“. Astfel, următoarele notaţii sunt echivalente: $a_1 \cup a_2 = a_1 \vee a_2 = a_1 + a_2$. Din motive de simplitate a exprimării, în această lucrare se va folosi simbolul „+“;

• operaţia ŞI, numită şi conjuncţie ori produs logic pentru intersecţie, fiind notată şi cu simbolurile „&“ sau „·“. Ultimul simbol este cel mai folosit, în scriere, el putând fi omis. Astfel, următoarele notaţii sunt echivalente: $a_1 \cap a_2 = a_1 \,\&\, a_2 = a_1 \cdot a_2 = = a_1 a_2$;

• operaţia NU sau negaţia logică pentru complementare, notaţiile următoare fiind echivalente: $\overline{a} = a^c = a'$.

Algebra booleană cu două elemente are aplicaţie directă în teoria circuitelor logice. În acest caz, între valorile mulţimii {0,1} şi cele două stări ale elementelor funcţionând în regim de comutaţie se stabileşte o corespondenţă biunivocă. Astfel, o variabilă asociată unui element de comutare poate lua numai două valori, 0 sau 1, definind o variabilă bivalentă booleană sau, pe scurt, o *variabilă booleană*. Rezultă că pentru circuitele materializate cu elemente de comutaţie, modelul matematic constituie funcţiile de variabile binare. Deoarece circuitele realizate cu elemente binare nu pot avea decât două stări stabile distincte, funcţiile care descriu aceste circuite vor lua numai două valori. Aceste funcţii bivalente de variabile binare se numesc *funcţii booleene* sau *funcţii logice* şi au o deosebită importanţă pentru studiul circuitelor logice.