2.3.1.3 Minimizarea funcţiilor booleene prin metoda diagramelor Karnaugh

Folosirea unei forme speciale a diagramelor Venn, în scopul simplificării cu ajutorul acestora a funcţiilor booleene a fost sugerată pentru prima dată de către E.W. Veitch. La scurt timp M. Karnaugh propune, de asemenea, o formă modificată a diagramelor Venn, în acelaşi scop. Astfel, au rezultat diagramele denumite *diagrame Karnaugh*.

Spre deosebire de metoda Quine-McCluskey, metoda diagramelor Karnaugh este o *metodă globală*, în sensul că ambele etape din metoda Quine-McCluskey se efectuează simultan. Ca şi în cazul metodei Quine-McCluskey, metoda diagramelor Karnaugh porneşte de la una dintre formele canonice (FCD sau FCC) ale funcţiei booleene. Pentru început, în prezentarea metodei, se va folosi FCD. Diagramele Karnaugh sunt folosite în mod curent pentru reprezentarea funcţiilor booleene cu un număr relativ mic de variabile [10,22,...]. Aceste diagrame sunt utile pentru minimizarea funcţiilor booleene deoarece permit evidenţierea, cu uşurinţă, a unor identităţi de forma (legile absorbţiei):

$$a + ab = a\,,\; ab + a\overline{b} = a\,,\; a + \overline{a}b = a + b\,. \tag{2.35}$$

În general, o diagramă Karnaugh pentru o funcţie booleană de n variabile se reprezintă sub forma unui pătrat sau dreptunghi, împărţit în 2^n compartimente (câmpuri sau locaţii), fiecare compartiment fiind rezervat unui termen canonic al funcţiei, respectiv unuia dintre cele 2^n n-uple ale funcţiei sau vârfuri ale hipercubului n–dimensional din reprezentarea pe hipercub a funcţiei (v. Anexa A). În figura 2.7 sunt reprezentate diagramele Karnaugh pentru funcţii de două variabile (v. fig. 2.7,a), trei variabile (v. fig. 2.7,b) şi patru variabile (v. fig. 2.7,c). O diagramă Karnaugh este astfel organizată încât două compartimente vecine, pe o linie sau pe o coloană, corespund la doi termeni canonici care diferă numai printr-o singură variabilă, care apare într-unul dintre ei negată,

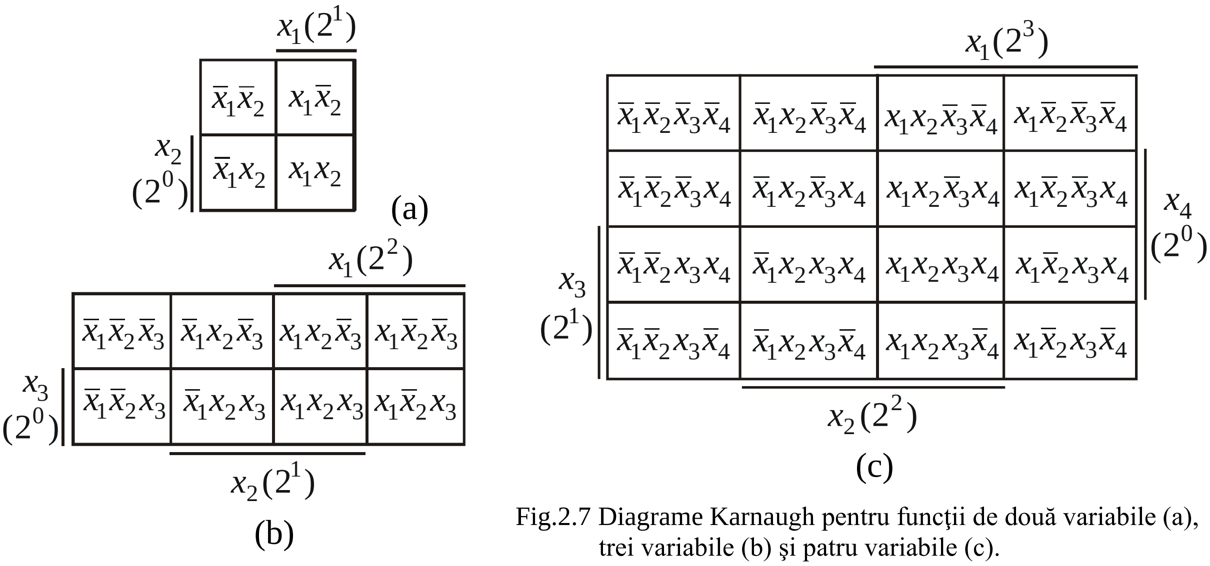


Fig.2.7 Diagrame Karnaugh pentru funcţii de două variabile (a), trei variabile (b) şi patru variabile (c).

iar în celălalt adevărată (deci au proprietatea de adiacenţă), respectiv la două n-uple adiacente. Se consideră vecine şi deci au aceeaşi proprietate şi compartimentele aflate la capetele opuse ale unei linii, respectiv coloane. Diagrama se notează (codifică) fie indicând domeniul fiecărei variabile (v. fig. 2.8,a), fie indicând pe linie şi coloană n-uple de zerouri şi unităţi corespondente unui compartiment din diagramă şi ordinea variabilelor (v. fig. 2.8,b). De fapt, în acest ultim caz se foloseşte pentru codificarea diagramei, aşa cum s-a mai precizat (v. §1.2.3), codul Gray (binar reflectat) care are proprietatea de adiacenţă. Pentru a se putea reprezenta uşor funcţiile booleene date în mod convenţional (simbolic) prin indicii zecimali ai termenilor canonici, se poate nota fiecare compartiment prin indicele termenului canonic corespunzător, ţinând cont de o anumită ordine a variabilelor (v. fig. 2.8,a,b).

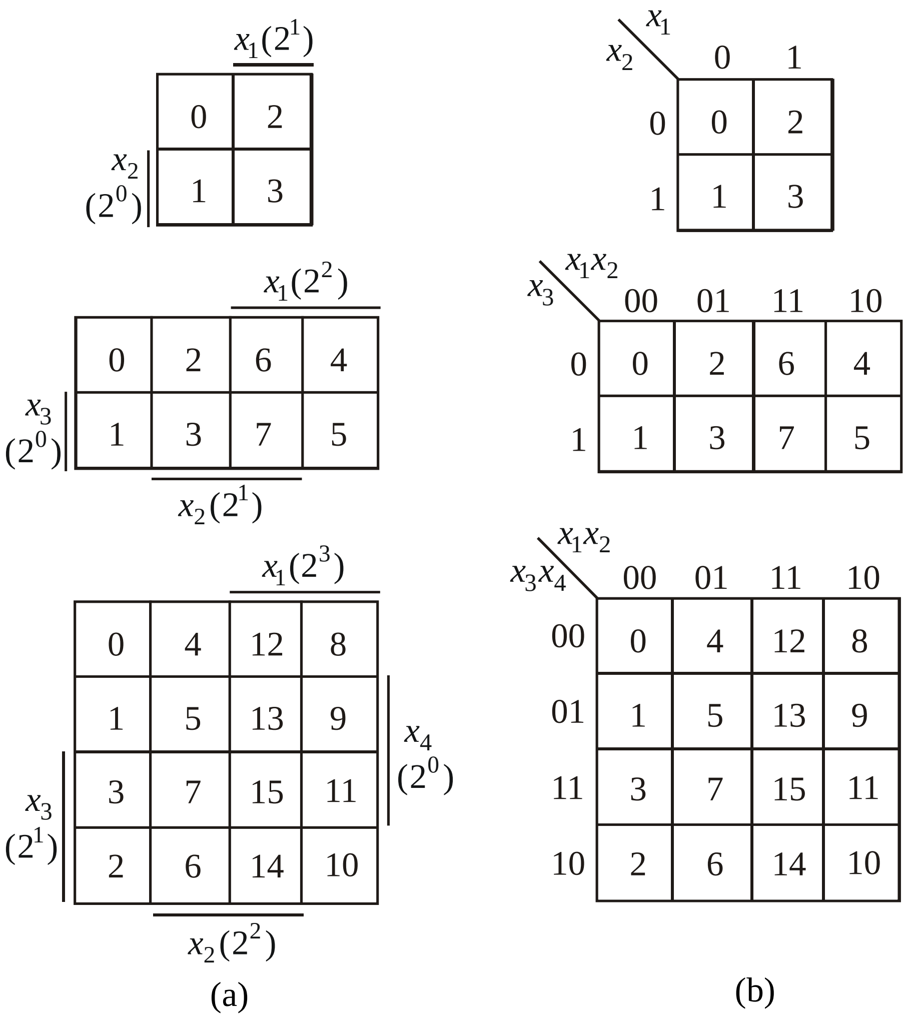


Fig.2.8 Modalităţi de codificare a diagramelor Karnaugh.

O funcţie booleană, dată sub FCD, poate fi reprezentată pe o diagramă Karnaugh marcând, de exemplu cu 1, compartimentele corespunzătoare termenilor canonici ai funcţiei şi cu 0 celelalte compartimente. Acest mod de reprezentare a funcţiilor booleene este avantajos pentru minimizare deoarece doi termeni canonici care diferă numai prin aceea că într-unul dintre aceştia una dintre variabile apare negată, iar în celălalt adevărată, de exemplu $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ şi $x_1\bar{x}_2x_3x_4$, apar pe diagramă în compartimente vecine, deci se recunoaşte uşor că sunt adiacenţi. În conformitate cu relaţia (2.36) aceşti doi termeni se pot înlocui cu un termen normal în care variabila, prin care cei doi termeni canonici diferă, lipseşte (este o variabilă redundantă):

$$x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 = x_1\bar{x}_2x_3(\bar{x}_4 + x_4) = x_1\bar{x}_2x_3\,. \qquad (2.36)$$

În reprezentarea pe hipercub a unei funcţii booleene, doi termeni canonici care îndeplinesc condiţia de mai sus corespund la două noduri adiacente, deci definesc o latură a hipercubului *n*–dimensional (v. Anexa A). Din acest motiv se spune că două compartimente vecine sau adiacente pe diagrama Karnaugh reprezintă un *subcub* 1–*dimensional* (v. fig. 2.9,a). Un grup de patru compartimente, dintre care fiecare este vecin cu alte două compartimente din acelaşi grup, formează un *subcub* 2–*dimensional* (v. fig. 2.9,b). În acest caz cei patru termeni canonici corespunzători acestor compartimente au o parte comună formată din două variabile. În baza relaţiei (2.37) aceşti patru termeni pot fi înlocuiţi cu partea lor comună:

$$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_3\bar{x}_4 . \qquad (2.37)$$

În cazul general, termenii canonici care formează un subcub 2–dimensional se pot înlocui cu un termen normal având cu două variabile mai puţin decât termenii canonici. Pe o diagramă de patru variabile se pot forma şi *subcuburi* 3–*dimensionale* care cuprind 8 compartimente astfel grupate încât fiecare dintre ele este vecin cu alte trei din acelaşi grup (v. fig. 2.9,c).

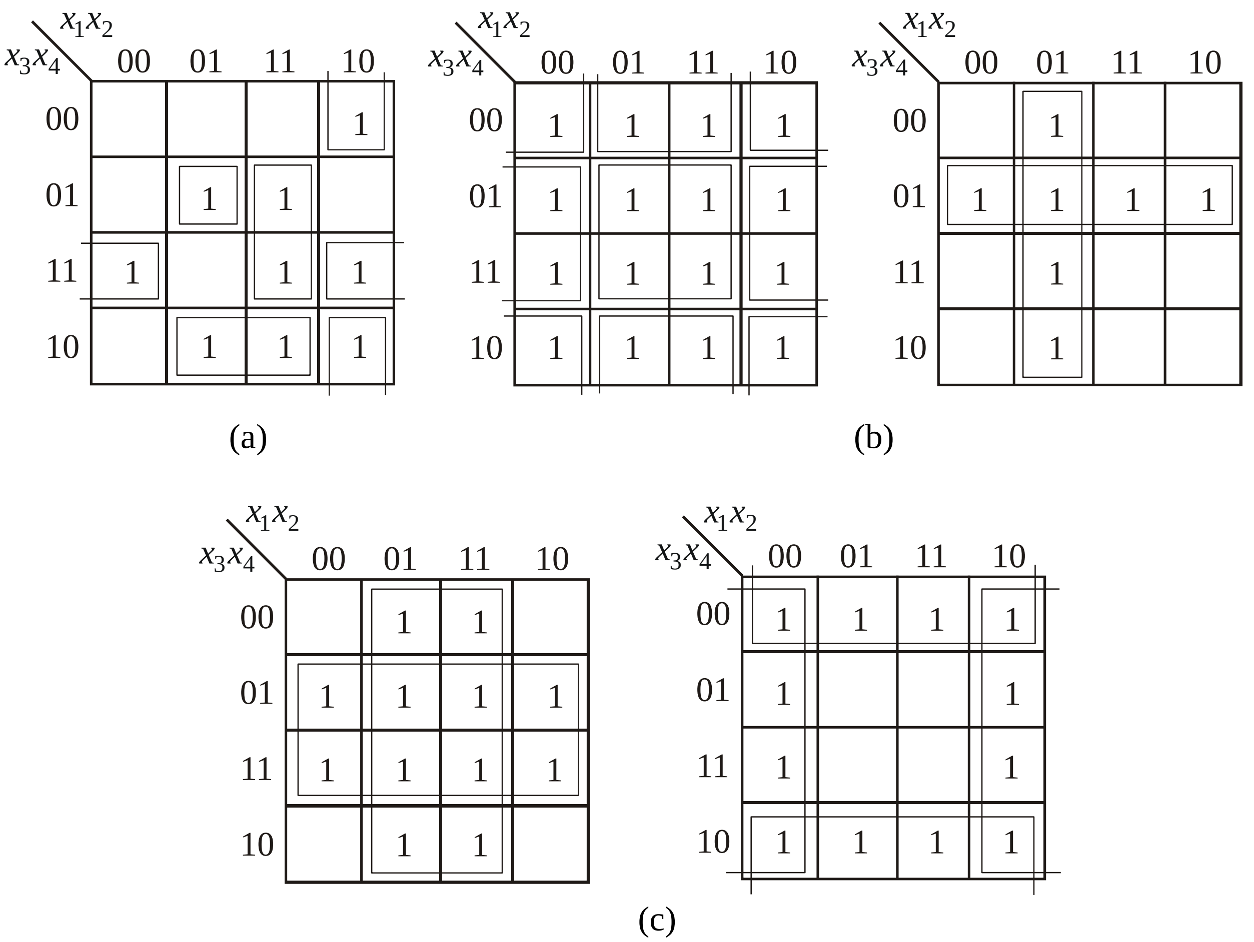


Fig.2.9 Reprezentarea pe diagrame Karnaugh a subcuburilor 0–dimensionale (a), 1–dimensionale (a), 2–dimensionale (b) şi 3–dimensionale (c).

Termenii canonici reprezentaţi de compartimentele din diagrama de patru variabile care formează un subcub 3–dimensional au o parte comună formată dintr-o singură variabilă. Prin urmare, pot fi înlocuiţi cu un termen normal care are o singură variabilă, cum se vede în exemplul de mai jos:

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + \\ + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = x_2. \tag{2.38}$$

Pe o diagramă care reprezintă o anumită funcţie booleană se pot forma în modul arătat mai sus subcuburi de diverse dimensiuni. În cazul general al unei funcţii booleene de *n* variabile, dacă o parte dintre termenii canonici ai funcţiei formează un subcub *k*–dimensional, aceştia se pot înlocui cu un singur termen normal având *n*–*k* variabile. Un subcub care nu este inclus într-un subcub de dimensiune mai mare se numeşte *implicant prim* al funcţiei date. Formând suma booleană a tuturor implicanţilor primi ai unei funcţii date, se obţine o formă disjunctivă a acesteia, care, în cazul general, este mult mai simplă decât FCD a aceleiaşi funcţii. Pentru a găsi implicanţii primi ai unei funcţii reprezentată pe diagrama Karnaugh, compartimentele marcate cu 1 trebuie astfel grupate încât să se obţină subcuburi cu dimensiunea cea mai mare posibilă. Astfel, pe o diagramă de patru variabile se va căuta să se formeze în primul rând subcuburi 3–dimensionale, apoi în ordine, subcuburi 2–dimensionale şi 1–dimensionale. O parte (dar nu toate) dintre compartimentele notate cu 1 ale unui subcub poate face parte din mai multe subcuburi de diverse dimensiuni.

Exemplu. Se dă funcţia booleană de patru variabile (v. fig. 2.10):

$$f^{\text{FCD}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = P_1 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{12} + P_{13}. \tag{2.39}$$

Procedând în modul arătat mai sus se obţin implicanţii primi ai acestei funcţii şi anume subcuburile 2–dimensionale $x_1\bar{x}_3$ şi $\bar{x}_3 x_4$ şi subcuburile 1–dimensionale $\bar{x}_1 x_2 x_4$ şi $\bar{x}_1 x_2 x_3$.

Pentru mai multă claritate, compartimentele care reprezintă un implicant prim sunt înscrise într-un contur, iar în dreptul conturului se scrie termenul normal corespondent implicantului prim încadrat (cu asterisc s-au marcat compartimentele care nu mai sunt incluse în alte subcuburi). Folosind pentru descrierea funcţiei implicanţii primi în locul termenilor canonici se obţine forma normală disjunctivă a funcţiei dată de relaţia (2.40):

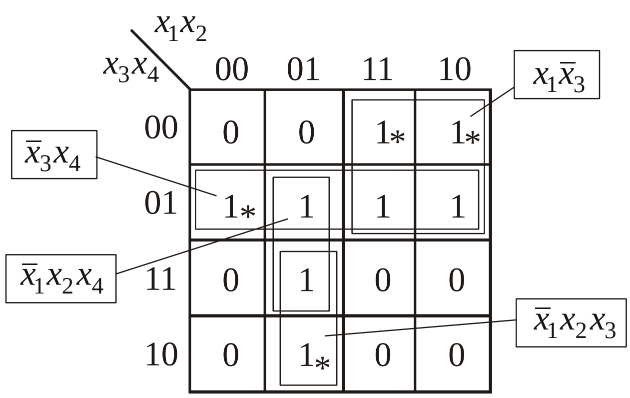


Fig.2.10 Determinarea implicanţilor primi pe diagrama Karnaugh.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_3 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3. \tag{2.40}$$

Nu toţi implicanţii primi ai unei funcţii sunt însă necesari pentru definirea acesteia. Unii dintre implicanţii primi pot fi termeni redundanţi la care se poate renunţa, obţinându-se astfel o formă mai simplă a funcţiei. Prin urmare, se pune problema alegerii unui număr minim de implicanţi primi din mulţimea implicanţilor primi ai unei funcţii booleene care să includă însă toţi termenii canonici ai funcţiei. Problema alegerii acestui set de implicanţi este o problemă de acoperire cu cost minim. Expresia unei funcţii booleene în care intră un număr minim dintre implicanţii săi primi se numeşte, aşa cum s-a mai precizat, forma minimă disjunctivă (FMD) a funcţiei. Dacă un termen canonic al funcţiei este inclus într-un singur implicant prim, din mulţimea de implicanţi primi ai funcţiei, acela devine *implicant prim esenţial* şi trebuie să apară în mod obligatoriu în FMD a funcţiei. Pentru găsirea FMD trebuie deci determinaţi în primul rând implicanţii primi esenţiali. Pentru aceasta se marchează pe diagramă într-un mod special, de exemplu cu asterisc, acele celule notate cu 1 care sunt incluse într-un singur implicant prim (v. fig. 2.10). Implicanţii primi care conţin compartimente marcate cu asterisc devin esenţiali. Compartimentele marcate cu 1, rămase neacoperite de către implicanţii primi esenţiali, se caută să se acopere folosind un număr cât mai mic din implicanţii funcţiei care au mai rămas. În cazul exemplului din figura 2.10, toate compartimentele marcate cu 1, adică toţi termenii canonici ai funcţiei, sunt acoperiţi de implicanţii primi esenţiali $x_1\bar{x}_3$, $\bar{x}_3x_4$ şi $\bar{x}_1x_2x_3$. Implicantul $\bar{x}_1x_2x_4$ reprezintă un termen redundant deoarece ambii termeni canonici pe care îi include sunt cuprinşi în implicantul prim esenţial $\bar{x}_3x_4$, respectiv $\bar{x}_1x_2x_3$. Din cele prezentate mai sus rezultă că FMD a funcţiei, dată de relaţia (2.39), este:

$$f^{\text{FMD}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\bar{x}_3+\bar{x}_3x_4+\bar{x}_1x_2x_3. \tag{2.41}$$

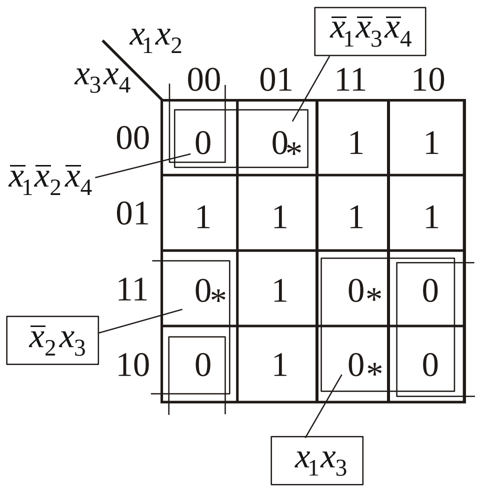


Fig.2.11 Obţinerea FMC.

O funcţie booleană are şi o formă minimă conjunctivă (FMC). Pentru a vedea care dintre aceste două forme minime, disjunctivă sau conjunctivă, conduce la o reţea cu cost mai mic trebuie găsite ambele. O metodă simplă de determinare a FMC este aceea a căutării FMD pentru negata funcţiei date şi negarea acesteia. Pentru exemplificare se ia tot funcţia dată prin diagrama Karnaugh din figura 2.10. Negata acestei funcţii se obţine luându-se în considerare compartimentele marcate cu zero. Aplicând această metodă de minimizare pentru funcţia $\bar{f}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ (v. fig. 2.11), unde $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ este dată de relaţia (2.39), se obţine pentru aceasta forma (2.42) (termenul $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ este redundant):

$$\bar{f}^{\text{FMD}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_2x_3+x_1x_3+\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4, \tag{2.42}$$

de unde rezultă prin negare:

$$\bar{\bar{f}}^{\text{FMD}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=f^{\text{FMC}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_3)(x_1+x_3+x_4). \tag{2.43}$$

Diagramele pentru mai mult de patru variabile se construiesc din diagrame de patru variabile, considerate diagrame elementare (v. fig. 2.12). Se pot construi însă diagrame Karnaugh pentru un număr mai mare de variabile şi considerând ca diagrame elementare, diagramele de trei variabile. În cazul diagramelor pentru mai mult de patru variabile se consideră vecine, două compartimente şi atunci când ocupă aceeaşi poziţie în două diagrame elementare vecine, adică în două diagrame elementare alăturate sau aflate la extremităţi pe o aceeaşi linie sau coloană.

Diagramele Karnaugh pentru mai multe variabile se pot construi şi sub forma unei singure diagrame elementare dacă se folosesc pentru notarea liniilor şi coloanelor coduri binare reflectate (v. fig. 2.12,b). În acest fel se asigură ca oricare două compartimente alăturate sau aflate la extremităţile unei linii sau coloane să fie adiacente.

Având în vedere relaţiile (2.33) şi algoritmul de trecere de la reprezentarea tabelară a funcţiei booleene la reprezentarea algebrică (v. algoritmul 1.2), se poate transpune în diagrama Karnaugh şi minimizarea funcţiilor date prin FCC. În acest caz se reunesc în diagrama Karnaugh compartimentele notate cu 0 care sunt adiacente, eliminându-se variabilele redundante. Implicanţii primi esenţiali se obţin sub forma termenilor disjunctivi minimali. În final, se obţine FMC realizată cu termenii minimali disjunctivi corespunzători reuniunilor compartimentelor adiacente notate cu zero.

Exemplu. Să se minimizeze, prin metoda diagramelor Karnaugh funcţia *f* dată prin FCC:

$$
\begin{aligned}
f^{\,\mathrm{FCC}}(x_1,x_2,x_3,x_4) = {} & (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+\bar{x}_2+x_3+x_4)(\bar{x}_1+x_2+x_3+x_4)\times \\
& \times(x_1+\bar{x}_2+x_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+x_2+x_3+\bar{x}_4)\times \\
& \times(x_1+x_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4)\times \\
& \times(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4).
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

În figura 2.13,a este reprezentată diagrama Karnaugh pentru funcţia considerată. Reunind compartimentele adiacente notate cu zero se obţine următoarea expresie minimă conjunctivă:

$$
f^{\,\mathrm{FMC}}(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_3+x_4)(\bar{x}_1+x_2+x_3)(\bar{x}_2+\bar{x}_4)(\bar{x}_3+\bar{x}_4)\,. \tag{2.45}
$$

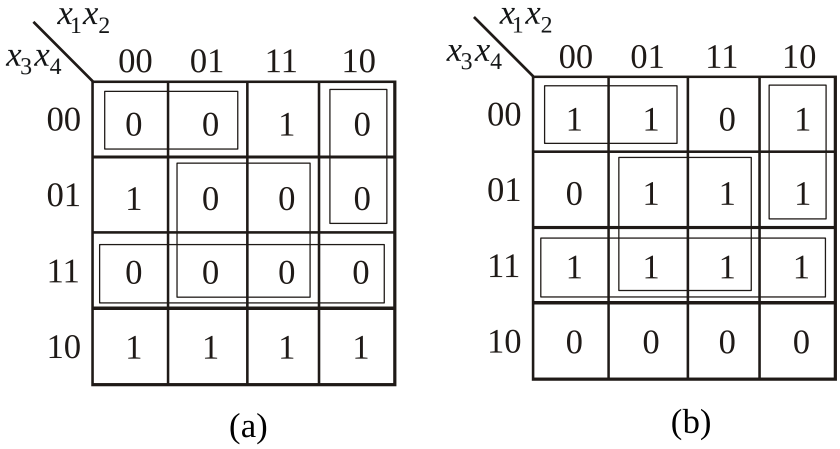
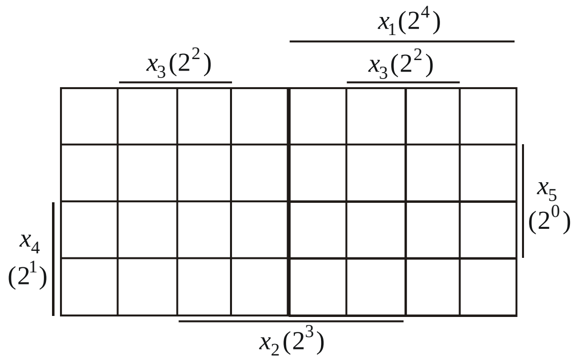


Fig.2.13 Reprezentări ale funcţiei *f* din exemplu în diagrame Karnaugh.

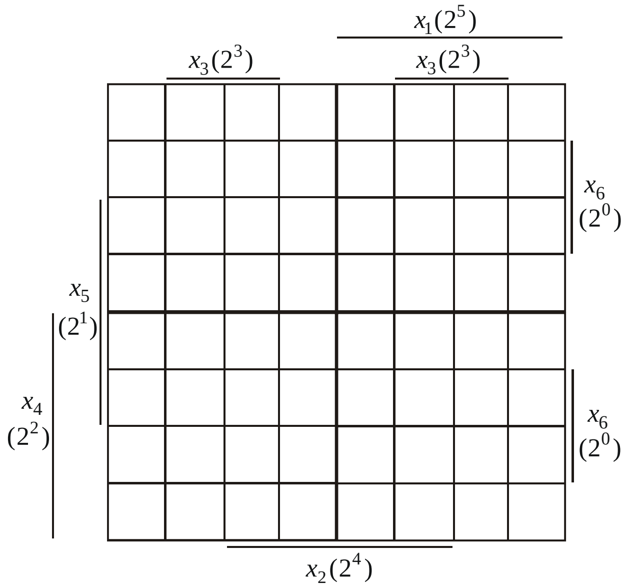
Forma minimă conjunctivă se poate obţine şi dacă se consideră negata FCC a funcţiei. Evident FCC negată corespunde diagramei Karnaugh complementate (0 se înlocuieşte cu 1 şi invers). Aplicând diagramei complementate metodologia corespunzătoare FCD, se obţine expresia minimă pentru funcţia negată. În figura 2.13,b este prezentată diagrama Karnaugh complementată pentru funcţia din exemplul dat. Pentru acest caz rezultă:

$$
\bar{f}^{\,\mathrm{FMD}}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_2x_4 + x_3x_4\,. \tag{2.46}
$$



(a)

x_4x_5 \ $x_1x_2x_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18



(b)

$x_4x_5x_6$ \ $x_1x_2x_3$	000	001	011	010	110	111	101	100
000	0	8	24	16	48	56	40	32
001	1	9	25	17	49	57	41	33
011	3	11	27	19	51	59	43	35
010	2	10	26	18	50	58	42	34
110	6	14	30	22	54	62	46	38
111	7	15	31	23	55	63	47	39
101	5	13	29	21	53	61	45	37
100	4	12	28	20	52	60	44	36

Fig.2.12 Diagrame Karnaugh pentru 5 variabile (a) şi pentru 6 variabile (b).

Negând expresia obţinută rezultă:

$$f^{\mathrm{FMC}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_4)(\bar{x}_3 + \bar{x}_4)\,. \qquad (2.47)$$