CURS 6

Circuite in curent alternativ

CONTINUT

- Definiţii. Caracteristici
- Reprezentarea mărimilor sinusoidale in complex:
  - Asocierea numărului complex
  - Corespondenta in complex a operaţiilor cu mărimi sinusoidale
  - Transformarea inversa
- Circuite simple in regim permanent sinusoidal:
  - Circuitul pur rezistiv;
  - Circuitul pur inductiv;
  - Circuitul pur capacitiv.
- Circuitul RLC serie

- **Definiţii. Caracteristici**

Se considera o mărime a variabilei in timp după o lege sinusoidala:

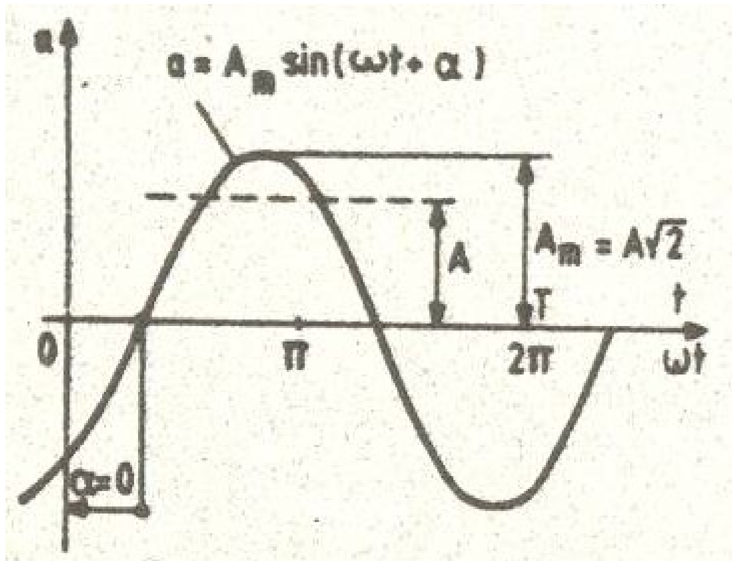
$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha)$$

Simbol	**Ce reprezintă**	**Semnificaţie**
a	Valoarea instantanee	Valoarea pe care o are mărimea la un moment dat *t*
A_m	Amplitudinea	Modulul mărimii maxime a mărimii sinusoidale
ωt+α	Faza mărimii sinusoidale liniar dependenta de timp, [rad]	
α	Faza iniţiala, cuprinsa intre (–π ÷ π)	Valoarea fazei la momentul iniţial $t = 0$
ω	Pulsaţia funcţiei periodice de timp *a,* [s^{-1} rad]	$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
f	Frecventa, [Hz]	Numărul de perioade ale mărimii alternative cuprinse in unitatea de timp
T	Perioada	Cel mai mic interval de timp după care o mărime alternativa isi repeta valorile instantanee

Definiţii. Caracteristici

Mărimile sinusoidale = **periodice**, succesiunea valorilor instantanee se repeta după perioada *T*.

$$a(t_1) = a(t_1 + nT)$$



Defazaj φ intre doua mărimi sinusoidale = diferenţa intre fazele lor:

$$\varphi = (\omega \cdot t + \alpha_1) - (\omega \cdot t + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$$

Defazajul = diferenţa fazelor iniţiale, se defineşte numai pentru mărimi sinusoidale de aceeaşi pulsaţie.

Definiţii. Caracteristici

Valoare efectiva I_{ef} a curentului electric sinusoidal = valoarea curentului care produce pe rezistenta R aceeaşi căldura in unitatea de timp ca si curentul continuu de valoare ***I*.**

In curent continuu: $Q_{cc} = R \cdot I^2 \cdot T = R \cdot I_{ef}^2 \cdot T$

In curent alternativ: $Q_{ca} = \int_0^T R \cdot i^2 dt = R \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t \, dt = \dfrac{R \cdot I_m^2}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt$

$$Q_{ca} = \frac{R \cdot I_m^2 \cdot T}{2} = Q_{cc} = R \cdot I_{ef}^2 \cdot T \quad \Longrightarrow \quad I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I$$

O mărime sinusoidala oarecare: $a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} \cdot A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$

Definiţii. Caracteristici

Observaţie: Aparatele de măsura a mărimilor sinusoidale de curent alternativ indica valoarea efectiva a acestora.

Se conectează un circuit liniar la o sursa de tensiune sinusoidala, de frecventa si amplitudine constanta.

Regimurile de funcţionare sunt:

1. **Tranzitoriu** – amplitudinea curentului este variabila in timp (la frecventa de 50 Hz durează câteva fracţiuni de secunda);

2. **Permanent** - curentul isi păstrează amplitudinea constanta.

Definiţii. Caracteristici

Tensiunea de alimentare: $u = U\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t + \alpha)$

Curentul: $i = I\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t + \beta)$

Impedanţa circuitului: $Z = \dfrac{U}{I}$

Defazajul dintre tensiune si curent: $\varphi = \alpha - \beta$

Daca se cunosc impedanţa si defazajul, se poate calcula **curentul ce apare in circuit**:

$$i = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\sin(\omega \cdot t + \alpha - \varphi)$$

Caracterizarea circuitului se mai poate face prin:

- **Rezistenta si reactanţa** – înlocuiesc impedanţa;

$$R = Z \cdot \cos\varphi \qquad X = Z \cdot \sin\varphi \qquad Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Definiţii. Caracteristici

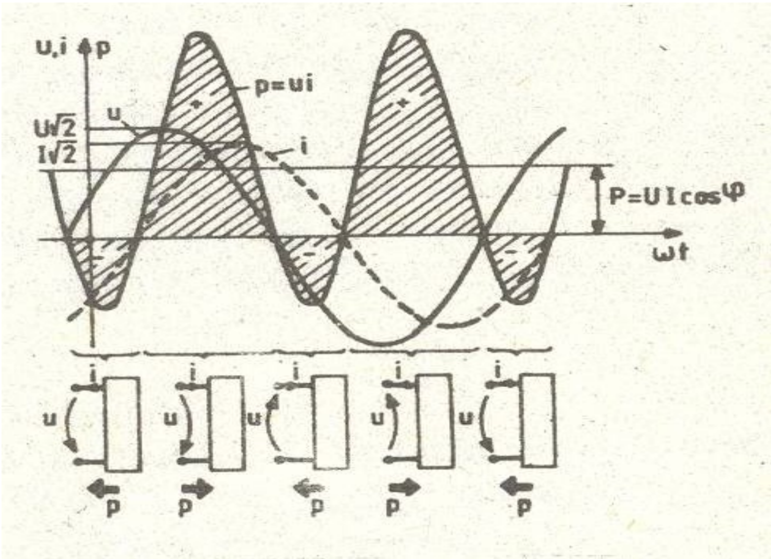
Puterea instantanee transferata de sursa de tensiune alternativa in circuit:

$$p = u \cdot i$$

Este putere primita sau cedata in funcţie de sensul tensiunii si curentului.

$$p = 2 \cdot U \cdot I \cdot \sin(\omega t + \alpha) \cdot \sin(\omega t + \beta)$$

$$= U \cdot I \cdot \cos\varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$



Este o mărime periodica, cu următoarele componente:

- constanta;
- alternativa, de frecventa dubla fata de frecventa tensiunii de alimentare a circuitului.

Definiţii. Caracteristici

Puterea activa = valoarea medie a puterii instantanee: $P = \widetilde{p} = \frac{1}{T}\int_0^T u \cdot i \cdot dt$

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi \qquad [W]$$

Puterea aparenta= puterea de definiţie a aparatului, indica valorile nominale ale tensiunii si curentului la care este dimensionat:

$$S = U \cdot I \qquad [VA]$$

Factor de putere = raportul dintre puterea activa si puterea aparenta:

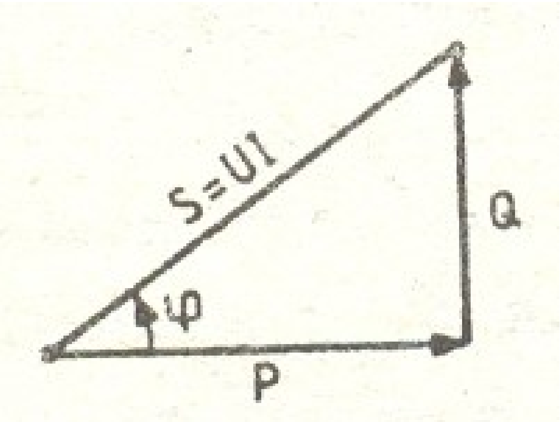
$$K_p = \frac{P}{S}$$

Definiţii. Caracteristici

In regimul sinusoidal permanent: $K_p = \dfrac{U \cdot I \cdot \cos\varphi}{U \cdot I} = \cos\varphi$

Puterea reactiva = ansamblul puterilor in c.a: $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$ [var]

Triunghiul puterilor:



$$Q^2 = S^2 - P^2 = (U \cdot I)^2 - (U \cdot I)^2 \cos^2\varphi$$
$$= (U \cdot I)^2 \sin^2\varphi$$

Relaţia dintre puteri: $S^2 = P^2 + Q^2$

Reprezentarea mărimilor sinusoidale in complex

Metoda consta in asocierea unui număr complex fiecărei mărimi sinusoidale.

- Fiecare operaţie cu mărimi sinusoidale este înlocuita cu operaţie cu mărimi reprezentative complexe;
- Se executa operaţiile si se obţin soluţii corespunzătoare in complex;
- Se aplica transformarea inversa soluţiilor si se obţin mărimile sinusoidale căutate.

Asocierea numărului complex

Formele unui număr complex: algebrica, exponenţiala si trigonometrica.

$$\underline{C} = a + j \cdot b = r \cdot e^{j \cdot \alpha} = r \cdot (\cos\alpha + j \cdot \sin\alpha)$$

j = unitatea imaginara trigonometrica $\longrightarrow$ $j = \sqrt{-1}$

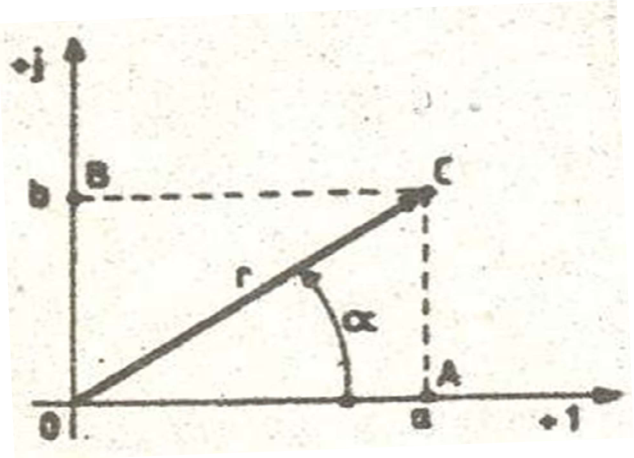
r = modulul numărului complex $\longrightarrow$ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

α = argumentul numărului complex $\longrightarrow$ $\alpha = arctg\dfrac{b}{a}$

In planul complex: Nr. complex → Punct → Fazor.

Nr. complex *A* $\longleftrightarrow$ Mărimea sinusoidala *a(t)*:

$$a(t) \leftrightarrow \underline{A} = A \cdot e^{j \cdot \alpha}$$



Corespondenta in complex a operaţiilor cu mărimi sinusoidale

a). **Suma** a doua mărimi sinusoidale ←→ Suma numerelor complexe asociate:

$$a_1 + a_2 \leftrightarrow \underline{A}_1 + \underline{A}_2$$

$$A_1\sqrt{2}\sin(\omega\cdot t + \alpha_1) + A_2\sqrt{2}\sin(\omega\cdot t + \alpha_2) \leftrightarrow a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2$$

b). **Amplificarea** cu un scalar a mărimii sinusoidale ←→ Amplificarea cu un scalar a numărului complex asociat (imaginea in complex a mărimii):

$$\lambda \cdot a \leftrightarrow \lambda \cdot \underline{A}$$

c). **Derivarea** in raport cu timpul a mărimii sinusoidale ←→ Inmultirea imaginii in complex cu jω:

$$\frac{da}{dt} \leftrightarrow j \cdot \omega \cdot \underline{A}$$

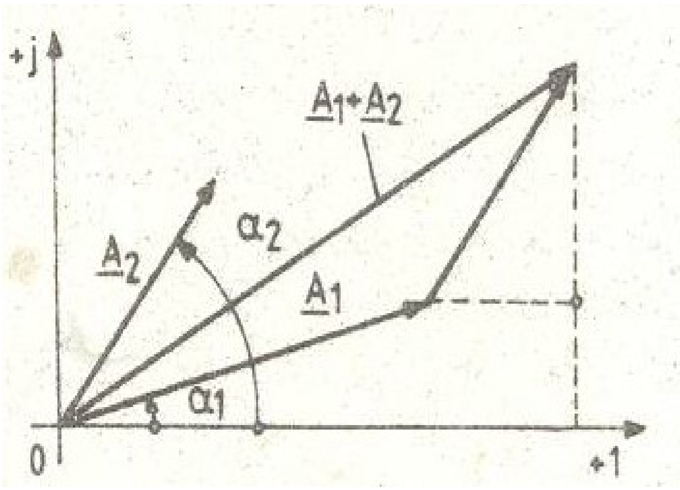
d). **Integrarea** in raport cu timpul a mărimii sinusoidale ←→ Impartirea imaginii in complex cu jω:

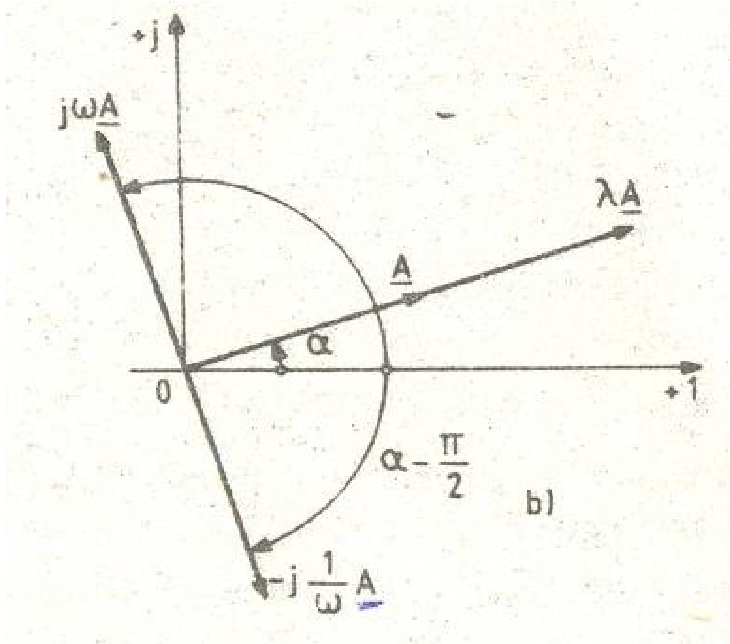
$$\int a \cdot dt \leftrightarrow \frac{\underline{A}}{j\omega}$$

Corespondenta in complex a operaţiilor cu mărimi sinusoidale

1). **Derivarea:** se inmulteste fazorul cu ω si se roteşte in sens trigonometric cu π/2.

2). **Integrarea:** se împarte fazorul cu ω si se roteşte in sens invers trigonometric cu π/2.





Corespondenta in complex a operaţiilor cu mărimi sinusoidale

Puterea complexa: $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$

*I** = imaginea complexa conjugata a curentului sinusoidal $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta)$:

$$\underline{I}^* = I \cdot e^{-j \cdot \beta}$$

Deci:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j \cdot \alpha} \cdot I \cdot e^{-j \cdot \beta} = U \cdot I \cdot e^{j(\alpha - \beta)} = S \cdot e^{j \cdot \varphi}$$

$$\underline{S} = S \cdot e^{j \cdot \varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jQ$$

Puterea complexa are:

- Modulul egal cu puterea aparenta;
- Argumentul egal cu defazajul circuitului;
- Partea reala egala cu puterea activa;
- Partea imaginara egala cu puterea reactiva.

Transformarea inversa

Operaţiile in complex se efectuează sub forma algebrica.

Rezultatele operaţiilor se trec in instantaneu cu relaţiile:

$$\underline{A}_\Sigma = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2)$$

$$r = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

$$\underline{A}_\Sigma = r \cdot e^{j\alpha} \leftrightarrow a(t) = \sqrt{2}\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\,\sin(\omega t + arctg\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2})$$

Circuite simple in regim permanent sinusoidal

Circuit simplu = circuitul format dintr-un singur element de circuit: **Rezistenta (R), Condensator (C) sau Bobina (L).**

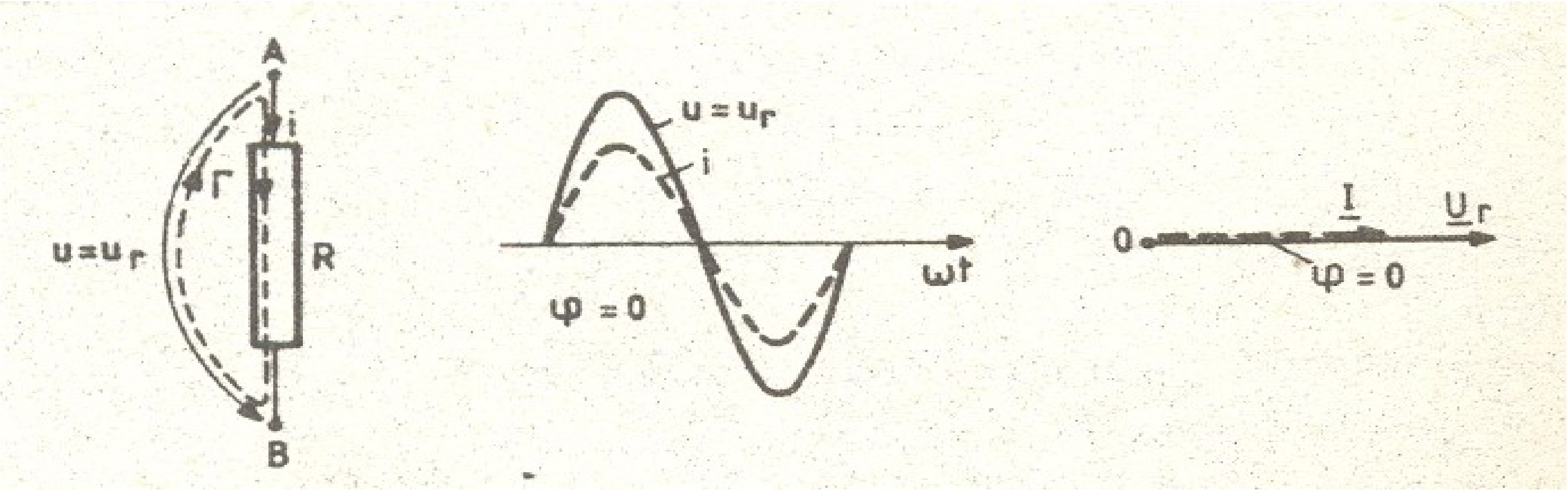
Ipoteze simplificatoare de calcul:

- Circuitele sunt filiforme, densitatea de curent este constanta;
- Elementele de circuit sunt ideale;
- Circuitul este izolat de influente electrice si magnetice exterioare;
- Parametrii circuitului (R, L, C) nu depind de valoarea curentului sau tensiunii (liniari).

Circuitul pur rezistiv

Se aplica unui rezistor ideal o tensiune sinusoidala la borne:

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$



Circuitul pur rezistiv

Se aplica legea circuitului magnetic:

$$u_{e\Gamma} = \oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt} = 0 \qquad \text{pt. ca } L = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = \int_{A}^{B} \overline{E} \cdot d\overline{l} + \int_{B}^{A} \overline{E} \cdot d\overline{l} = R \cdot i - u = 0 \longrightarrow u = R \cdot i$$

$$i = \frac{u}{R} = \sqrt{2}\,\frac{U}{R}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$I = \frac{u}{R}; \quad \beta = \alpha; \quad \varphi = 0; \quad Z = \frac{u}{I} = R$$

Circuitul pur rezistiv

Calculul in complex:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} \longrightarrow U \cdot e^{j\alpha} = R \cdot I \cdot e^{j\beta}$$

- **Impedanţa are numai rezistenta;**
- **Defazajul este nul;**
- **Curentul si tensiunea sunt in faza.**

Circuitul pur rezistiv

Puterile sunt:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = U \cdot I$$

$$S = U \cdot I = P$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 0$$

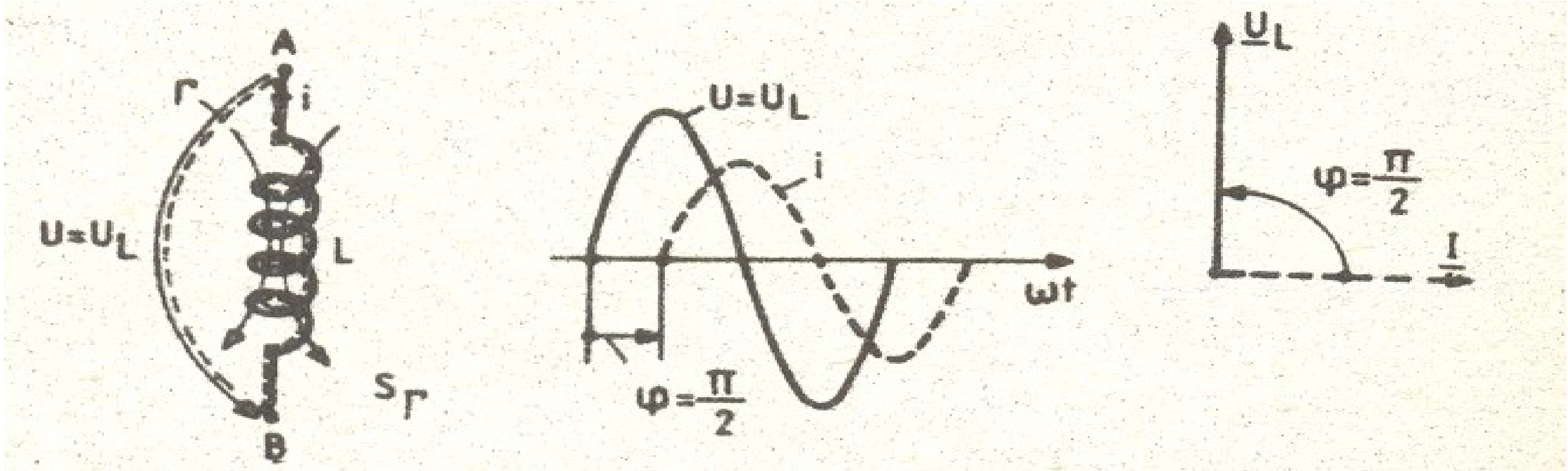
$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j\alpha} \cdot I \cdot e^{-j\alpha} = U \cdot I = P$$

- **Rezistorul ideal consuma numai putere activa;**
- **Rezistorul ideal transforma puterea activa in putere termica;**
- **Rezistorul ideal este un element de circuit disipativ.**

Circuitul pur inductiv

Consta intr-o inductanţa ideala căruia i se aplica o tensiune sinusoidala la borne.

Bobina ideala = element de circuit care la trecerea curentului electric produce doar câmp magnetic ce inlantuie spirele bobinei.



Circuitul pur inductiv

Se aplica legea circuitului magnetic circuitului: $u_{e\Gamma} = \oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot d\overline{l} = \int_{A}^{B} \overline{E} \cdot d\overline{l} + \int_{B}^{A} \overline{E} \cdot d\overline{l} = R \cdot i - u = -u$$

Deci: $u = L\frac{di}{dt}$

$$di = \frac{1}{L} u \cdot dt \quad \rightarrow \quad i = \frac{1}{L}\int u \cdot dt = \frac{1}{L}\int U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \alpha) dt = -\frac{U\sqrt{2}}{\omega L}\cos(\omega t + \alpha)$$

Totodată: $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \beta) = \frac{U\sqrt{2}}{\omega L}\sin(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2})$

$$\begin{cases} I = \frac{U}{\omega L}; \quad \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}; \\ Z = \frac{U}{I} = \omega L = X_L; \quad \varphi = \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Reactanţa inductiva

Circuitul pur inductiv

Calculul in complex al curentului pleacă de la ecuaţia: $u = L\dfrac{di}{dt}$

In complex aceasta ecuaţie este: $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$ $\longrightarrow$ $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{j\omega L}$

$$I \cdot e^{j\beta} = \frac{1}{j\omega L} U \cdot e^{j\alpha} = \frac{U}{\omega L} \cdot e^{j(\alpha - \frac{\pi}{2})}$$

- **Impedanţa bobinei ideale X_L este direct proporţionala cu frecventa;**
- **In c.c. reactanţa este nula, iar la frecvente f. mari tinde la infinit → curentul este mare la frecvente mici si mic la frecvente mari;**
- **Defazajul intre tensiune si curent este π/2;**
- **Inductivitatea ideala defazează curentul in urma tensiunii cu π/2.**

Circuitul pur inductiv

Puterile sunt: $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = 0$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\frac{\pi}{2} = U \cdot I = S$$

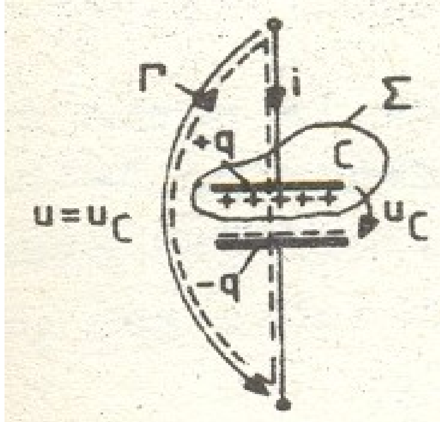
$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = U \cdot e^{j\alpha} \cdot I \cdot e^{-j(\alpha - \frac{\pi}{2})} = U \cdot I \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j \cdot U \cdot I = j \cdot Q$$

Puterea instantanee: $p = u \cdot i = L\frac{di}{dt} \cdot i = (\frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2) = \frac{dW_m}{dt}$

- **Puterea instantanee absorbita de bobina la borne duce la creşterea energiei câmpului magnetic.**
- **Puterea circulata este doar reactiva → bobina ideala = circuit pur reactiv.**
- **Bobina reala = inductanţa + rezistenta in serie. La frecvente mari rezistenta devine neglijabila.**

Circuitul pur capacitiv

Consta intr-un condensator ideal care are proprietatea ca nu disipa energie electromagnetica. Se aplica legea conservării sarcinii electrice pentru suprafaţa din figura.



$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt}; \quad i_{\Sigma} = -i; \quad i = \frac{dq}{dt}; \quad q = C \cdot u$$

$$i = C\frac{du}{dt}; \quad u = \frac{1}{C}\int i \cdot dt$$

Pentru o tensiune sinusoidala:

$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$

$$\begin{cases} i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \beta) = C\sqrt{2}U\omega\cos(\omega t + \alpha) = C\sqrt{2}\omega U\sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \\ i = \sqrt{2}\omega CU\sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Reactanţa capacitiva

$$I = \omega CU; \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}; \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C} = X_c; \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Circuitul pur capacitiv

In complex se obţine:

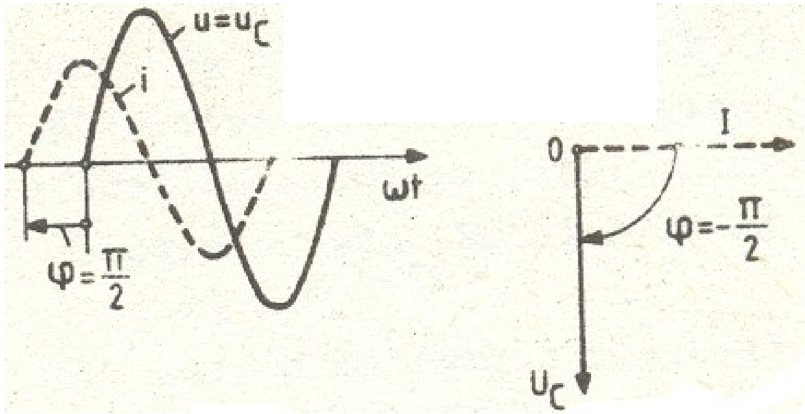
$$\underline{I} = j\omega C \cdot \underline{U};$$

$$I \cdot e^{j\beta} = \omega C \cdot U \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega C \cdot U \cdot e^{j(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$

Impedanţa condensatorului ideal (reactanţa capacitiva) este: $X_c = \dfrac{1}{\omega C}$

La f = 0 condensatorul întrerupe trecerea curentului electric ($X_c = \infty$);
La frecvente f. mari reactanţa capacitiva este neglijabila.

Defazajul dintre tensiune si curent este –π/2, deci reactanţa capacitiva defazează curentul înaintea tensiunii cu π/2.



Circuitul pur capacitiv

Puterile in curent alternativ corespunzătoare circuitului pur capacitiv:

$$\begin{cases} P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = U \cdot I \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 \\ Q = U \cdot I \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) = -U \cdot I \\ \underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^{*} = U \cdot e^{j\alpha} \cdot I \cdot e^{-j(\alpha + \frac{\pi}{2})} \\ \quad = U \cdot I \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \cdot U \cdot I = -j \cdot Q \end{cases}$$

Calculul puterii instantanee absorbite la borne de circuitul pur capacitiv:

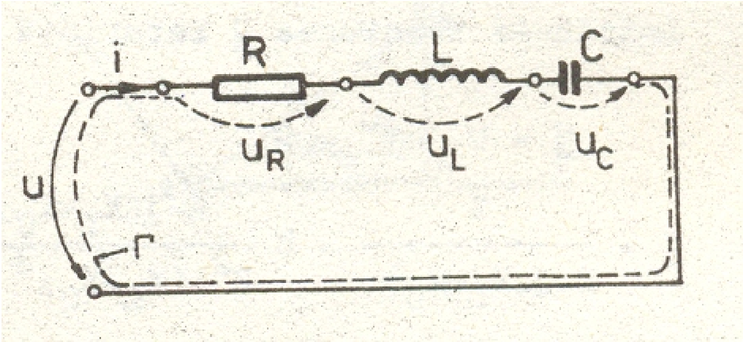
$$p = u \cdot i = C \cdot u \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} C \cdot u^{2}) = \frac{dW_{e}}{dt}$$

Puterea instantanee absorbita de condensator la borne duce la creşterea energiei câmpului electric din condensator.
Condensatorul = circuit pur reactiv (nedisipativ).

- **Bobina ideala absoarbe putere reactiva de la reţea (Q>0);**
- **Condensatorul ideal cedează energie reactiva reţelei (Q<0).**

Circuitul R, L, C serie

Se inseriaza: rezistor, bobina, condensator:



Se doreşte sa se calculeze curentul *i* ce apare in circuit la aplicarea tensiunii sinusoidale *u.*

Se presupune circuitul izolat de influente exterioare si se aplica legea inducţiei electromagnetice pe conturul circuitului:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = u_R + u_L + u_C - u = -\frac{d\Phi_{ext}}{dt} = 0$$

$$\rightarrow u = u_R + u_L + u_C \rightarrow U\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha) = R \cdot i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i \cdot dt$$

$$= \sqrt{2}I \cdot R\sin(\omega t + \beta) + \sqrt{2}\omega L \cdot I\sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2}\frac{I}{\omega C}\sin(\omega t + \beta - \frac{\pi}{2})$$

Circuitul R, L, C serie

Rezolvarea in complex:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \cdot \underline{I} = [R + j(X_L - X_C)] \cdot \underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + j(X_L - X_C)}$$

Se considera *U* referinţa de faza si defazajul nul:

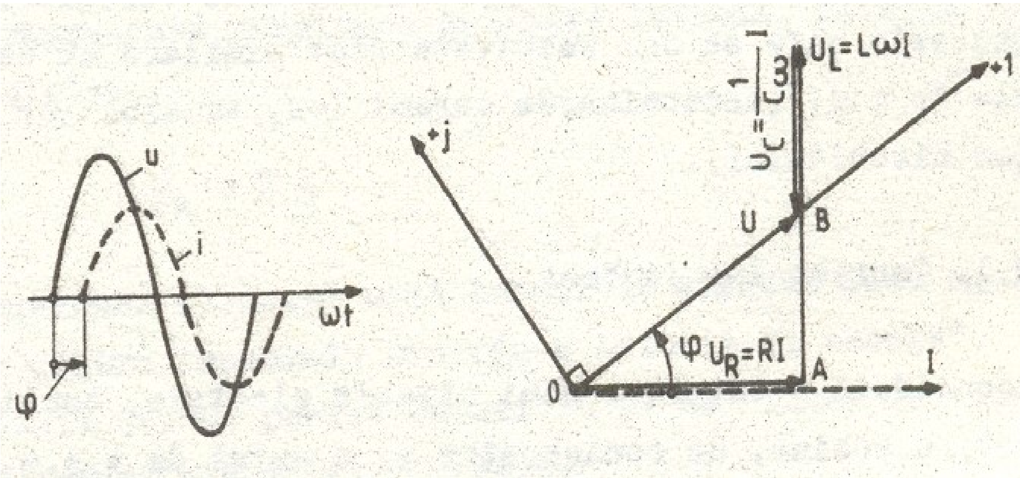
$$\begin{cases} I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \dfrac{U}{Z} \\ \beta = arctg\,(-\dfrac{X_L - X_C}{R}) \\ Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2} \\ \varphi = \alpha - \beta = arctg\,\dfrac{X_L - X_C}{R} \end{cases}$$

Circuitul R, L, C serie

Transformarea inversa se face folosind forma exponenţiala a mărimii complexe:

$$I \cdot e^{j\beta} \leftrightarrow i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t + \alpha - arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})$$



Defazajul = pozitiv → Curentul este defazat in urma tensiunii → Circuitul are **caracter inductiv**.

Defazajul = negativ → Curentul este defazat înaintea tensiunii → Circuitul are **caracter capacitiv**.

Circuitul R, L, C serie

Puterile sunt:

$$\begin{cases} P = U \cdot I \cdot \cos\varphi \\ Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi \\ S = U \cdot I \\ \underline{S} = P + jQ \end{cases}$$

Factorul de putere al circuitului:

$$K_p = \frac{P}{S} = \cos\varphi$$

Subiecte examen

1. Defazajul intre doua mărimi sinusoidale (tensiune si curent) – formula, semnificaţie mărimi
2. Valoarea efectiva a curentului electric sinusoidal – formula, semnificaţie mărimi
3. Impedanţa circuitului – definiţie, formula, semnificaţie mărimi, unitate de măsura
4. Puterea activa/reactiva/aparenta/factor de putere intr-un circuit de curent alternativ – definiţie, formula, semnificaţie mărimi, unitate de măsura
5. Forma algebrica si trigonometrica a unui număr complex - formula, semnificaţie mărimi
6. Reprezentati forma de unda a teniunii si a curentului pentru un circuit pur rezistiv/inductiv/capacitiv.
7. Puterea activa si reactiva in cazul unui circuit pur rezistiv/inductiv/capacitiv – formule, semnificaţie mărimi, unitati de măsura
8. Pentru un circuit pur rezistiv/inductiv/capacitiv sa se scrie:

   a. curentul;

   b. impedanţa;

   c. defazajul.