2.3.1.5 Minimizarea funcţiilor booleene incomplet definite

Minimizarea funcţiilor booleene incomplet definite are mare importanţă deoarece cea mai mare parte a comenzilor discrete conţin situaţii de nedefinire. Luarea în considerare a stărilor de nedefinire (nedeterminare), prin atribuirea de valori 0 sau 1 funcţiei, conduce în general la forme minime mai economice decât în cazul neconsiderării lor. Folosirea diferită a stărilor indiferente la obţinerea formelor minime disjunctivă şi conjunctivă conduce la rezultate diferite. Din acest motiv, în cazul funcţiilor incomplet definite este bine să se minimizeze în ambele forme şi să se păstreze forma cea mai avantajoasă. Sinteza optimă a unei reţele de comutare a cărei comportare este dată printr-o funcţie booleană parţial sau incomplet definită se face considerând că reţeaua trebuie să realizeze acea funcţie, din clasa funcţiilor booleene corespondente funcţiei incomplet definite, care are cea mai simplă FMD sau FMC.

Minimizarea funcţiilor booleene incomplet definite se poate face cu ajutorul oricăreia dintre metodele de minimizare prezentate anterior dar aplicate cu o serie de modificări. Astfel, pentru a se obţine FMD a acestei funcţii, în cazul folosirii metodei de minimizare cu ajutorul diagramelor Karnaugh, se procedează în felul următor:

Regulă.

1. Se reprezintă funcţia booleană dată în diagramă, notând cu 1 poziţiile corespunzătoare *n*-uplelor pentru care valoarea funcţiei este 1, cu 0 poziţiile corespunzătoare *n*-uplelor pentru care valoarea funcţiei este 0 şi cu *d* sau asterisc *n*-uplele pentru care valoarea funcţiei nu este precizată.

2. Se încearcă gruparea compartimentelor notate cu 1 şi formarea de subcuburi de dimensiuni cât mai mari, folosindu-se în acest scop, dacă ajută la realizarea acestui obiectiv şi compartimentele notate cu *d* (*), considerându-le marcate cu 1.

3. Se procedează în continuare ca şi la minimizarea funcţiei booleene complet definite cu observaţia că reprezintă implicanţi primi esenţiali numai acele subcuburi care conţin cel puţin un compartiment notat cu 1 care nu mai este inclus într-un alt subcub (subcuburile care conţin însă un compartiment notat cu *d* (*), care nu este conţinut în alte sub-

cuburi nu reprezintă un implicant prim esenţial). În continuare se caută o acoperire minimă a termenilor canonici neincluşi în implicanţii primi esenţiali.

Exemplu. Se cere găsirea FMD care corespunde funcţiei booleene incomplet definite dată prin tabelul 2.5. Se urmăreşte un cost C_P minim.

Tab.2.5 Tabelul de adevăr al funcţiei booleene incomplet definite din exemplu.

x_1	x_2	x_3	x_4	f	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	*d*
0	0	1	1	*d*	1	0	1	1	1
0	1	0	0	*d*	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	*d*
0	1	1	1	*d*	1	1	1	1	1

Această funcţie este descrisă de relaţiile (2.79) şi (2.80):

$$f^{\text{FCD}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=P_0+P_1+P_2+P_5+P_8+P_{11}+P_{15}, \tag{2.79}$$

$$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4=\bar{x}_1x_2x_3x_4=x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4=x_1x_2x_3\bar{x}_4=d\,, \tag{2.80}$$

unde, relaţia (2.79) reprezintă forma canonică disjunctivă a părţii definite din funcţie, iar relaţia (2.80) precizează că o parte dintre combinaţiile de valori ale variabilelor de intrare, corespunzătoare părţii nedefinite din funcţie, nu apar în funcţionare, prin urmare pot fi considerate combinaţii indiferente.

Pentru minimizarea acestei funcţii se întocmeşte diagrama din figura 2.15,a. Din această diagramă rezultă că termenul $\bar{x}_2\bar{x}_4$ este implicant prim esenţial. Celelalte unităţi din diagramă neincluse în acest implicant pot fi acoperite considerând implicanţii $\bar{x}_1\bar{x}_3$ sau $\bar{x}_1x_4$ şi x_3x_4 sau x_1x_3. Funcţia are deci patru FMD ce pot fi scrise prescurtat ca mai jos:

$$f^{\text{FMD}}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_2\bar{x}_4+\begin{Bmatrix}\bar{x}_1\bar{x}_3\\ \bar{x}_1x_4\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}x_3x_4\\ x_1x_3\end{Bmatrix}\;. \tag{2.81}$$

Pentru obţinerea FMC a funcţiei date se consideră zerourile din diagramă împreună cu compartimentele notate cu *d*, în scopul obţinerii FMD a negatei funcţiei, care apoi prin negare dă FMC a funcţiei. Obţinerea FMD a negatei funcţiei (2.79), (2.80) se face pe diagrama din figura 2.15,b. Din figura 2.15,b rezultă forma minimă a negatei funcţiei, dată de relaţia:

$$\bar{f}^{\,\mathrm{FMD}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_3 x_4, \tag{2.82}$$

de unde rezultă:

$$f^{\,\mathrm{FMC}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_2 + x_4)(\bar{x}_1 + x_3 + \bar{x}_4). \tag{2.83}$$

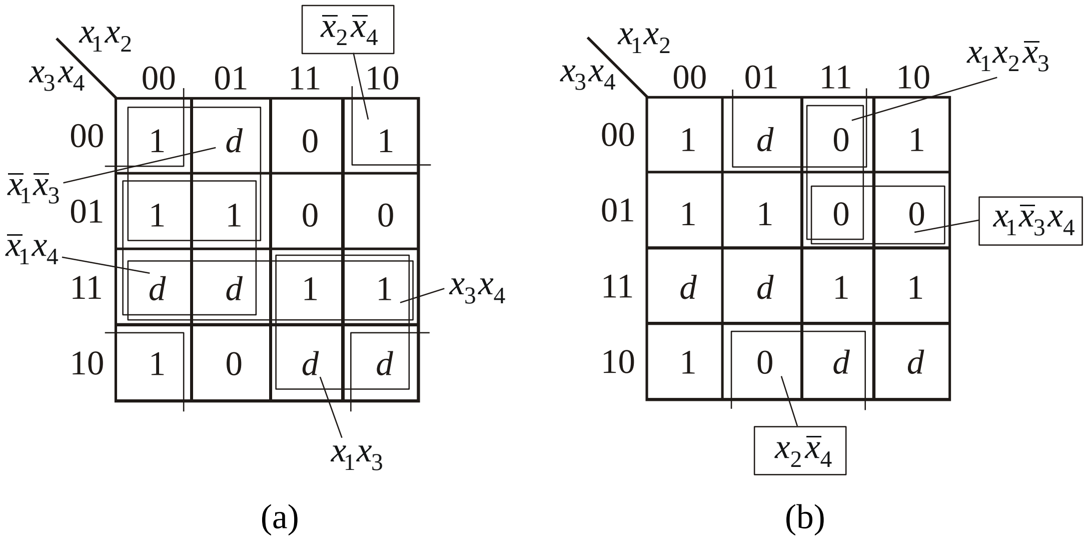

Fig.2.15 Minimizarea funcţiei booleene incomplet definite din exemplu.

Prin urmare, cea mai avantajoasă formă minimă a funcţiei este forma minimă conjunctivă.

Şi în cazul în care minimizarea funcţiilor incomplet definite se face folosind metoda Quine-McCluskey, apar faţă de cazul aplicării acestei metode funcţiilor complet definite, o serie de mici modificări care vor fi ilustrate prin exemplul tratat mai jos.

Exemplu. Se cere să se găsească FMD a funcţiei booleene incomplet definite, $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ dată prin relaţiile (2.84), (2.85), respectiv prin tabelul 2.6, folosind metoda Quine-McCluskey.

Aşa cum s-a mai precizat, funcţia este descrisă de următoarele relaţii:

$$f^{\,\mathrm{FCD}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = P_3 + P_4 + P_5 + P_9 + P_{11} + P_{20} + P_{21} + P_{28} + P_{29}, \tag{2.84}$$

$$P_{12} = P_{13} = P_{14} = P_{15} = P_{19} = P_{23} = P_{27} = P_{31} = *. \tag{2.85}$$

Se procedează la fel ca şi în cazul funcţiilor complet definite, împărţind echivalenţii binari ai termenilor canonici ai funcţiei în grupe, în raport de numărul de unităţi pe care aceştia îi conţin (v. tab. 2.7). Termenii indiferenţi sunt introduşi şi ei în tabel în grupele corespunzătoare, pe acelaşi principiu, dar se marchează de la început cu un semn distinct, de exemplu, cu un asterisc. Este necesar un marcaj special pentru a se putea distinge şi implicanţii de „clasă superioară“ obţinuţi numai din termeni indiferenţi. Şi aceştia se marchează, deja în momentul formării, cu asterisc. Implicanţii formaţi prin gruparea unor termeni indiferenţi, cu termenii funcţiei aplicaţi în 1, se consideră implicanţi obişnuiţi. Implicanţii obişnuiţi acoperiţi de către implicanţii de „clasă superioară“ formaţi în urma grupării, se marchează prin bifare. Toţi implicanţii rămaşi nemarcaţi în urma încheierii procedurii de grupare sunt implicanţii primi ai funcţiei. În tabelul 2.7 aceştia au fost notaţi simbolic cu literele *a*, *b*, *c*, *d*, *e* şi *f*.

Tab.2.6 Tabelul de adevăr al funcţiei booleene incomplet definite din exemplu.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f
0	0	0	0	0	0	0	16	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	17	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	18	1	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	1	19	1	0	0	1	1	*
4	0	0	1	0	0	1	20	1	0	1	0	0	1
5	0	0	1	0	1	1	21	1	0	1	0	1	1
6	0	0	1	1	0	0	22	1	0	1	1	0	0
7	0	0	1	1	1	0	23	1	0	1	1	1	*
8	0	1	0	0	0	0	24	1	1	0	0	0	0
9	0	1	0	0	1	1	25	1	1	0	0	1	0
10	0	1	0	1	0	0	26	1	1	0	1	0	0
11	0	1	0	1	1	1	27	1	1	0	1	1	*
12	0	1	1	0	0	*	28	1	1	1	0	0	1
13	0	1	1	0	1	*	29	1	1	1	0	1	1
14	0	1	1	1	0	*	30	1	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1	*	31	1	1	1	1	1	*

Întocmind tabelul 2.8 se constată că implicanţii primi *a*, *b* şi *c* sunt esenţiali şi că ei acoperă toţi termenii funcţiei aplicaţi în 1 (termenii canonici). Prin urmare, FMD a funcţiei este:

$$f^{\mathrm{FMD}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_5 \,. \tag{2.86}$$

Tab.2.8 Tabelul acoperirilor pentru funcţia *f*.

Implicanţi primi		Termeni canonici								
Notaţie simbolică	Indici	3	4	5	9	11	20	21	28	29
a	4,5,12,13,20,21,28,29		*	*			*	*	*	*
b	3,11,19,27	*				*				
c	9,11,13,15				*	*				
d	11,15,27,31					*				
e	21,23,29,31							*		*
f	13,15,29,31									*

Tab.2.7 Tabelul implicanților primi pentru funcția *f*.

Subcuburi 0–dimensionale							
Grupa	Indici	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	4	0	0	1	0	0	✓
2	3	0	0	0	1	1	✓
	5	0	0	1	0	1	✓
	9	0	1	0	0	1	✓
	20	1	0	1	0	0	✓
	12*	0	1	1	0	0	✓
3	11	0	1	0	1	1	✓
	21	1	0	1	0	1	✓
	28	1	1	1	0	0	✓
	13*	0	1	1	0	1	✓
	14*	0	1	1	1	0	✓
	19*	1	0	0	1	1	✓
4	29	1	1	1	0	1	✓
	15*	0	1	1	1	1	✓
	23*	1	0	1	1	1	✓
	27*	1	1	0	1	1	✓
5	31*	1	1	1	1	1	✓

Subcuburi 1–dimensionale							
Grupa	Indici	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	4,5	0	0	1	0	–	✓
	4,20	–	0	1	0	0	✓
	4,12	0	–	1	0	0	✓
2	3,11	0	–	0	1	1	✓
	3,19	–	0	0	1	1	✓
	5,21	–	0	1	0	1	✓
	5,13	0	–	1	0	1	✓
	9,11	0	1	0	–	1	✓
	9,13	0	1	–	0	1	✓
	20,21	1	0	1	0	–	✓
	20,28	1	–	1	0	0	✓
	12,28	–	1	1	0	0	✓
	12,13*	0	1	1	0	–	✓
	12,14*	0	1	1	–	0	✓
3	11,15	0	1	–	1	1	✓
	11,27	–	1	0	1	1	✓
	21,29	1	–	1	0	1	✓
	21,23	1	0	1	–	1	✓
	28,29	1	1	1	0	–	✓
	13,29	–	1	1	0	1	✓
	13,15*	0	1	1	–	1	✓
	14,15*	0	1	1	1	–	✓
	19,23*	1	0	–	1	1	✓
	19,27*	1	–	0	1	1	✓
4	29,31	1	1	1	–	1	✓
	15,31*	–	1	1	1	1	✓
	23,31*	1	–	1	1	1	✓
	27,31*	1	1	–	1	1	✓

Subcuburi 2–dimensionale							
Grupa	Indici	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	4,5,20,21	–	0	1	0	–	✓
	4,5,12,13	0	–	1	0	–	✓
	4,20,12,28	–	–	1	0	0	✓
2	3,11,19,27	–	–	0	1	1	(*b*)
	5,21,13,29	–	–	1	0	1	✓
	9,11,13,15	0	1	–	–	1	(*c*)
	20,21,28,29	1	–	1	0	–	✓
	12,28,13,29	–	1	1	0	–	✓
	12,13,14,15*	0	1	1	–	–	
3	11,15,27,31	–	1	–	1	1	(*d*)
	21,29,23,31	1	–	1	–	1	(*e*)
	13,29,15,31	–	1	1	–	1	(*f*)
	19,23,27,31*	1	0	0	1	1	

Subcuburi 3–dimensionale							
Grupa	Indici	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	4,5,20,21, 12,28,13,29	–	–	1	0	–	(*a*)