2.3.1.6 Minimizarea sistemelor de funcţii booleene

Comportarea unui circuit de comutare combinaţional cu n intrări şi m ieşiri este descrisă de un sistem de m funcţii booleene de n variabile. Pentru a se realiza un astfel de circuit cu un număr minim de circuite de comutaţie elementare de un anumit tip, care să fie la rândul lor cât mai simple, nu este suficient să se minimizeze fiecare funcţie în parte, ci trebuie să se aducă întreg sistemul de funcţii la o formă minimă printr-o minimizare corelată a funcţiilor acestuia.

Formele minime pentru un sistem de funcţii booleene sunt acele expresii booleene disjunctive sau conjunctive în care apare un număr minim de termeni respectiv factori normali diferiţi, având un număr minim de variabile. Acestor forme le corespunde o reţea de comutare cu două niveluri cu număr minim de elemente logice, prin urmare cu cost minim. Pentru obţinerea formelor minime ale unui sistem de funcţii booleene dat, se procedează, aşa cum s-a mai precizat, la minimizarea corelată a funcţiilor acestuia, adică la determinarea setului minim de implicanţi primi care acoperă (includ) toţi termenii canonici ai tuturor funcţiilor sistemului.

Una dintre metodele de minimizare corelată a mai multor funcţii booleene, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, se bazează pe determinarea implicanţilor primi ai funcţiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ şi ai funcţiilor produs $f_1 \cdot f_2, f_1 \cdot f_3, \ldots, f_{n-1} \cdot f_n, f_1 \cdot f_2 \cdot f_3, f_1 \cdot f_2 \cdot f_4, \ldots, f_{n-2} \cdot f_{n-1} \cdot f_n, \ldots$ $\ldots, f_1 \cdot f_2 \cdot f_{3.} \cdot \ldots \cdot f_n$. Având acest set de implicanţi primi, se calculează acoperirile posibile pentru fiecare dintre funcţii iar apoi se alege cea mai avantajoasă combinaţie de acoperiri din punct de vedere al costului, care reprezintă acoperirea minimală a sistemului.

Pentru obţinerea acoperirii minimale după această metodă se parcurg următoarele etape [22]:

Regulă.

1. Se calculează funcţiile produs. De exemplu, se cere minimizarea sistemului de funcţii:

$$
\begin{aligned}
&f_1^{\mathrm{FCD}}(x_1, x_2, x_3) = \sum(1,5,6,7), \\
&f_2^{\mathrm{FCD}}(x_1, x_2, x_3) = \sum(1,4,5,6), \\
&f_3^{\mathrm{FCD}}(x_1, x_2, x_3) = \sum(0,2,5,6,7),
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

unde, sub semnul sumei booleene s-au dat indicii zecimali ai termenilor canonici prezenţi în FCD a fiecărei funcţii.

În prima etapă se calculează funcţiile produs:

$$
\begin{aligned}
&f_1 \cdot f_2 = \sum(1,5,6), \quad f_1 \cdot f_3 = \sum(5,6,7), \\
&f_2 \cdot f_3 = \sum(5,6), \quad f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 = \sum(5,6).
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

Funcţiile (2.88) conţin termenii canonici comuni pentru cele două, respectiv trei funcţii, făcându-se produsul logic.

2. Se determină implicanţii primi ai fiecăreia dintre funcţiile (2.87) şi (2.88).

În cazul exemplului considerat, pentru determinarea implicanţilor primi ai acestor funcţii se folosesc diagramele Karnaugh, prezentate în figura 2.16. În acelaşi scop se pot folosi şi metodele Quine-McCluskey respectiv a consensurilor.

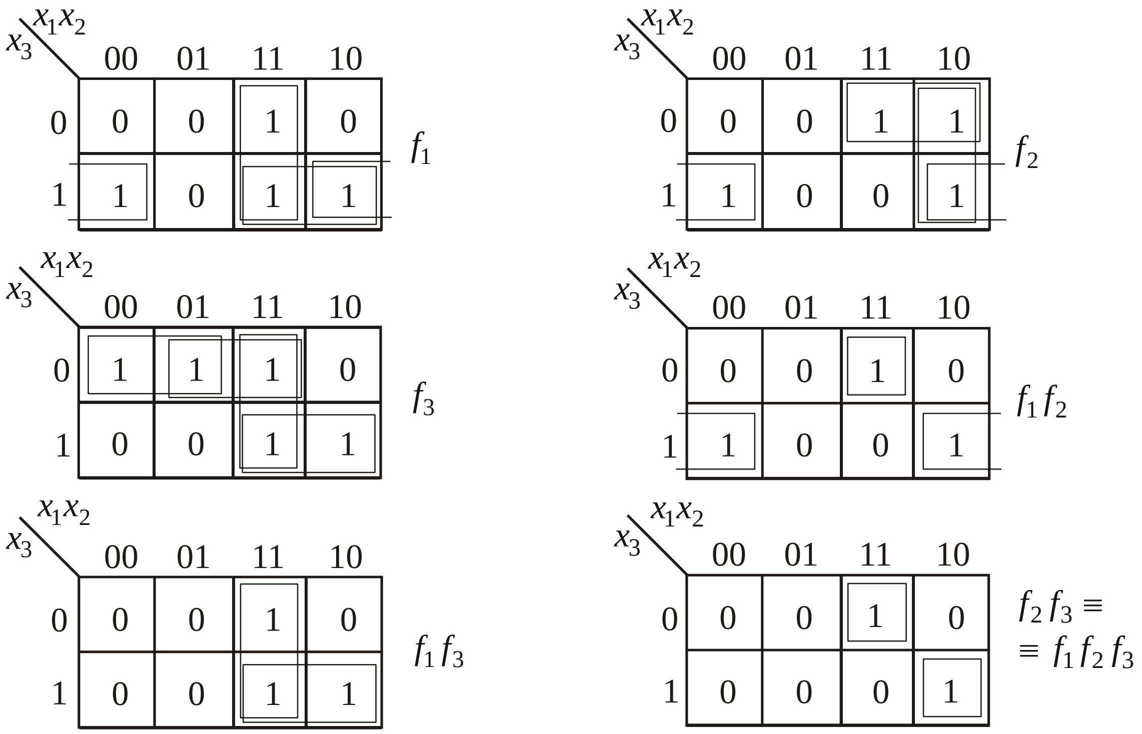

Fig.2.16 Minimizarea sistemelor de funcţii booleene.

Din figura 2.16 se obţin, pentru funcţiile considerate, implicanţii primi din tabelul 2.9.

Tab.2.9 Tabelul implicanţilor primi pentru sistemul de funcţii din exemplu.

Funcţia	Implicanţi primi			Funcţia	Implicanţi primi		
	Indicii	Expresia	Notaţia		Indicii	Expresia	Notaţia
f_1	1,5	$\bar{x}_2 x_3$	-	f_3	6,7	$x_1 x_2$	-
	6,7	$x_1 x_2$	-		5,7	$x_1 x_3$	-
	5,7	$x_1 x_3$	-	$f_1 \cdot f_2$	1,5	$\bar{x}_2 x_3$	e
f_2	1,5	$\bar{x}_2 x_3$	-		6	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	-
	4,6	$x_1 \bar{x}_3$	i	$f_1 \cdot f_3$	6,7	$x_1 x_2$	d
	4,5	$x_1 \bar{x}_2$	h		5,7	$x_1 x_3$	c
f_3	0,2	$\bar{x}_1 \bar{x}_3$	g	$f_2 f_3 =$	6	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	b
	2,6	$x_2 \bar{x}_3$	f	$= f_1 f_2 f_3$	5	$x_1 \bar{x}_2 x_3$	a

3. Se notează simbolic implicanţii primi ai sistemului, pe coloana a patra a tabelului 2.9, începând cu ultimul implicant prim al ultimei funcţii produs. Implicanţii primi care apar de mai multe ori se notează o singură dată.

4. Se întocmeşte un tabel al acoperirilor funcţiilor sistemului, în care se înscriu pe linii toţi implicanţii primi găsiţi la punctul 2, iar pe coloane termenii canonici ai fiecăreia dintre funcţiile sistemului, luate în ordine.

Tabelul 2.10 reprezintă tabelul acoperirilor sistemului de funcţii (2.87).

Tab.2.10 Tabelul acoperirilor sistemului de funcţii din exemplu.

Implicanţi primi			Termeni canonici												
			Funcţia f_1				Funcţia f_2				Funcţia f_3				
Notaţie	Indici	Funcţii	1	5	6	7	1	4	5	6	0	2	5	6	7
a	5	f_1, f_2, f_3		*					*				*		
b	6	f_1, f_2, f_3			*					*				*	
c	5,7	f_1, f_3		*		*							*		*
d	6,7	f_1, f_3			*	*								*	*
e	1,5	f_1, f_2	*	*			*		*						
f	2,6	f_3										*		*	
g	0,2	f_3									*	*			
h	4,5	f_2						*	*						
i	4,6	f_2						*		*					

5. Se completează tabelul acoperirilor marcând, de exemplu cu asterisc, în dreptul termenilor canonici ai uneia dintre funcţii, pe cei incluşi în implicantul prim de pe o anumită linie. Trebuie menţionat că acest lucru este posibil numai dacă implicantul prim respectiv este implicant prim al funcţiei considerate sau al unei funcţii produs al acesteia. Pentru a respecta această condiţie s-a prevăzut în tabelul 2.10 o coloană în care se specifică funcţiile în acoperirile cărora poate intra fiecare implicant prim.

6. Pe baza tabelului 2.10 se determină acoperirile fiecărei funcţii, conform celor arătate la punctul 2.3.1.2. Pentru exemplul considerat, acoperirea funcţiei f_1, notată cu $A(f_1)$, este:

$$A(f_1) = ed + ecb = A_1 + A_2. \tag{2.89}$$

De asemenea:

$$A(f_2) = ei + ehb = B_1 + B_2, \tag{2.90}$$

iar

$$A(f_3) = gcb + gcd + gcf + gad = C_1 + C_2 + C_3 + C_4. \tag{2.91}$$

Prin urmare, pentru funcţia f_1 s-au găsit două acoperiri, pentru f_2 de asemenea două acoperiri, iar pentru f_3 patru acoperiri. Pentru a se forma o acoperire a sistemului se ia câte una dintre acoperirile fiecărei funcţii. Pentru a se găsi acoperirea minimală a sistemului se continuă cu punctul următor.

7. Se scriu toate acoperirile posibile ale sistemului de funcţii şi se alege dintre acestea acoperirea cu număr minim de elemente. Numărul acoperirilor posibile este dat de produsul numerelor acoperirilor fiecăreia dintre funcţii. Pentru exemplul considerat există $2 \times 2 \times 4 = 16$ acoperiri (enumerate în tabelul 2.11). Numărul elementelor unei acoperiri a sistemului este egal cu numărul implicanţilor primi distincţi care intră în

acoperirile tuturor funcţiilor din sistem.

Din tabelul 2.11 rezultă că sistemul de funcţii considerat are patru acoperiri minimale cu câte cinci elemente, dintre care, din punctul de vedere al costului C_R, cea mai avantajoasă este acoperirea $A_1B_1C_2$.

Tab.2.11 Lista tuturor acoperirilor posibile pentru sistemul de funcţii din exemplu.

Nr. crt.	Acoperirea	Elementele acoperirii	Nr. elem.	Costul C_R
1	$A_1B_1C_1$	*edigcb*	6	13
2	$A_1B_1C_2$	*edigc*	5	10
3	$A_1B_1C_3$	*edigcf*	6	12
4	$A_1B_1C_4$	*ediga*	5	11
5	$A_1B_2C_1$	*edhbgc*	6	13
6	$A_1B_2C_2$	*edhbgc*	6	13
7	$A_1B_2C_3$	*edhbgcf*	7	15
8	$A_1B_2C_4$	*edhbga*	6	14
9	$A_2B_1C_1$	*ecbig*	5	11
10	$A_2B_1C_2$	*ecbigd*	6	13
11	$A_2B_1C_3$	*ecbigf*	6	13
12	$A_2B_1C_4$	*ecbigad*	7	16
13	$A_2B_2C_1$	*ecbhg*	5	11
14	$A_2B_2C_2$	*ecbhgd*	6	13
15	$A_2B_2C_3$	*ecbhgf*	6	13
16	$A_2B_2C_4$	*ecbhgad*	7	16

8. Pe baza acoperirii cu cost minim găsită la punctul 7, se scriu expresiile minime ale sistemului de funcţii.

Pentru exemplul tratat, corespunzător acoperirii $A_1B_1C_2$, se obţin expresiile:

$$\begin{aligned} f_1^{\mathrm{FMD}}(x_1,x_2,x_3) &= \bar{x}_2x_3 + x_1x_2, \\ f_2^{\mathrm{FMD}}(x_1,x_2,x_3) &= \bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_3, \\ f_3^{\mathrm{FMD}}(x_1,x_2,x_3) &= \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3 + x_1x_2. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Procedura de minimizare a sistemului de funcţii incomplet definite diferă de metoda prezentată pentru sistemele de funcţii complet definite, în ceea ce priveşte modalitatea de stabilire a setului de implicanţi primi pentru funcţiile sistemului. În acest caz, datorită valorilor indiferente ale funcţiilor, apar implicanţi primi care pot, sau nu, să implice o anumită funcţie, după cum se ia în considerare valoarea 0 sau 1 a acesteia, pentru termenii/combinaţiile indiferenţi/indiferente. În se prezintă o metodă de minimizare a acestor sisteme de funcţii, în care, pentru determinarea implicanţilor primi ai sistemului de funcţii, s-a folosit metoda consensurilor (v. §2.3.1.4).