1.1 FUNCŢII BOOLEENE

Pentru definirea funcţiilor booleene se consideră vectorul $\boldsymbol{X} = = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, ale cărui elemente $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pot lua valorile 0 sau 1. În acest caz rezultă că pot exista 2^n vectori $\boldsymbol{X}$. Se notează mulţimea acestor vectori cu B_2^n. De ase-menea, fiecărui vector din B_2^n i se pot atribui valorile 0 sau 1.

Definiţie. Se numeşte *funcţie booleană* funcţia $f(\boldsymbol{X}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{X} = = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, care aplică mulţimea B_2^n în mulţimea $\{0,1\}$.

Fie K o submulţime a lui B_2^n şi $\overline{\mathsf{K}}$ complementara lui K faţă de B_2^n: K, $\overline{\mathsf{K}} \subset \mathsf{B}_2^n$, $\mathsf{K} \bigcup \overline{\mathsf{K}} = \mathsf{B}_2^n$, $\mathsf{K} \bigcap \overline{\mathsf{K}} = \varnothing$. Atunci o funcţie booleană de n argumente, $f(\boldsymbol{X}) = = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se poate defini şi astfel:

$$\boldsymbol{X} \in \mathsf{K} \to f\left(\boldsymbol{X}\right) = 1,\ \boldsymbol{X} \in \overline{\mathsf{K}} \to f\left(\boldsymbol{X}\right) = 0. \tag{1.18}$$

Deci, unei funcţii booleene i se asociază un vector $\boldsymbol{V}_f = (f(\boldsymbol{X}))$ cu 2^n componente egale cu 0 sau 1, fiecare componentă fiind asociată unui vector $\boldsymbol{X}$ dat.

Consecinţă. Deoarece există 2^{2^n} vectori bivalenţi de 2^n elemente, rezultă că numărul funcţiilor booleene distincte de n argumente este finit şi egal cu 2^{2^n}.

Se notează valorile fixe ale elementelor unui vector din B_2^n prin $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$. Aceste valori pot fi privite ca o combinaţie de valori ale argumentelor unei funcţii booleene. Deoarece numărul acestor combinaţii este finit şi egal cu 2^n, atunci orice funcţie booleană poate fi complet definită printr-un tabel finit cu 2^n linii. În acest tabel, în partea stângă se trec combinaţiile valorilor argumentelor iar în partea dreaptă valorile corespunzătoare, 0 sau 1, ale funcţiei (v. tab. 1.2), cu $\alpha_i \in \{0,1\}$.

Există situaţii când pentru unele combinaţii ale valorilor argumentelor o funcţie booleană să nu aibă valoarea determinată. Astfel de funcţii nedeterminate, pentru una sau mai multe combinaţii ale valorilor argumentelor, se numesc *funcţii booleene incomplet definite*. În mod obişnuit în tabelele de definiţie ale funcţiilor, valorile nedeterminate sunt indicate cu $(*)$ sau d[1]. Tabelul de definiţie al unei funcţii incomplet definite este reprezentat în tabelul 1.3. Funcţia este nedeterminată pentru combinaţiile (0,1,0), (1,0,1) şi (1,1,0) ale valorilor argumentelor, valorile putând fi aplicate arbitrar din mulţimea {0,1}. Atribuind funcţiei valorile 0 sau 1 pentru combinaţiile respective ale valorilor argumentelor se pot obţine 8 funcţii complet definite.

---

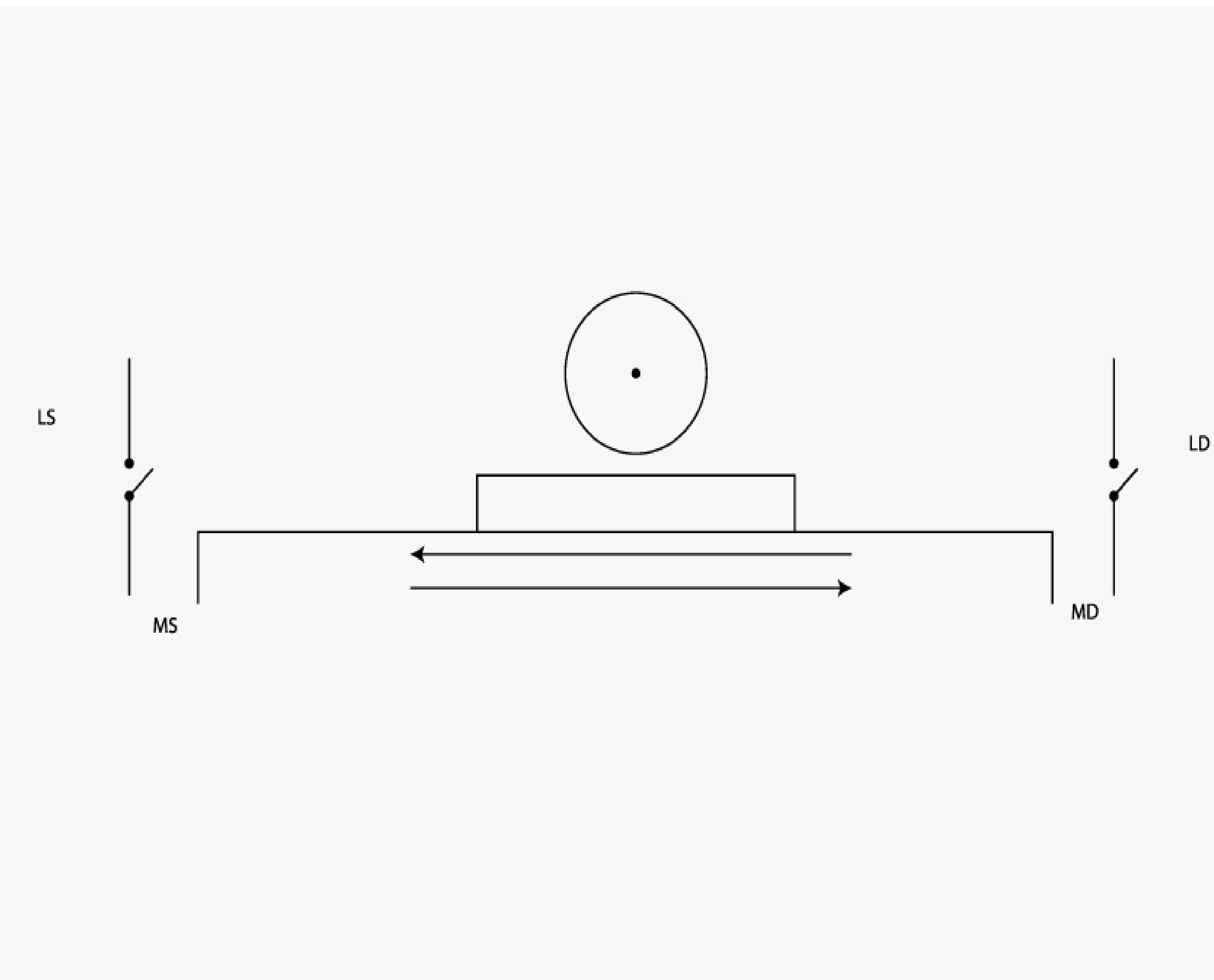
[1] Simbolul „*d*” provine de la prescurtarea expresiei englezeşti *„don't care”* (nu ţine cont).

FUNCȚII INCOMPLET DEFINITE - EXEMPLU

Se consideră exemplul platoului mobil al unei mașini unelte. Platoul se deplasează stânga-dreapta, cursa fiind delimitată de două limitatoare de cap de cursă/senzori LS/LD (v. figura).

Tabelul de adevăr al funcțiilor de ieșire ale automatului/circuitului combinațional (mișcarea/deplasarea dreapta/stânga) este următorul:

LS	LD	MS	MD
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	X	X



Tab.1.2 Tabel ce defineşte complet o funcţie booleană.

x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,x_2,\dots,x_n)$
0	0	$\dots$	0	0	α_1
0	0	$\dots$	0	1	α_2
0	0	$\dots$	1	0	α_3
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
1	1	$\dots$	1	1	α_n

Tab.1.3 Tabelul de definiţie al unei funcţii booleene incomplet definite.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	*
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	*
1	1	0	*
1	1	1	1

În general, dacă o funcţie booleană nu este definită pentru *r* combinaţii ale valorilor argumentelor atunci, prin definire arbitrară, se pot obţine 2^r funcţii noi complet definite. Funcţiile incomplet definite se întâlnesc frecvent în practică, evidenţierea situaţiilor de nedefinire şi atribuirea voită a valorilor 0 sau 1 fiind foarte importantă pentru simplificarea lor.

1.2.1 Operaţii cu funcţii booleene

Operaţiile cu funcţii booleene se definesc pe domeniul valorilor funcţiilor. Se consideră două funcţii $f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$ şi $f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Se spune că aceste funcţii sunt *identice* dacă iau valori identice pentru toate combinaţiile posibile ale valorilor argumentelor. În mod obişnuit identitatea a două funcţii booleene se scrie astfel:

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) = f_2(x_1,x_2,\dots,x_n). \tag{1.19}$$

Dacă pentru cel puţin o singură combinaţie a valorilor argumentelor (un *n*-uplu) cele două funcţii nu au aceeaşi valoare atunci:

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \neq f_2(x_1,x_2,\dots,x_n). \tag{1.20}$$

Fie f_1, f_2, şi f_3 funcţii booleene de *n* argumente. Operaţiile „+“, „·“, „–“, cu funcţii se definesc în modul următor:

• *reuniunea* (*suma logică*) *funcţiilor*:

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) + f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) = f_3(x_1,x_2,\dots,x_n), \tag{1.21}$$

dacă şi numai dacă valorile funcţiilor se combină corespunzător tabelului operaţiei „+“, pentru fiecare combinaţie a valorilor argumentelor;

• *intersecţia* (*produsul logic*) *funcţiilor*:

$$f_1(x_1,x_2,\dots,x_n) \cdot f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) = f_3(x_1,x_2,\dots,x_n), \tag{1.22}$$

dacă şi numai dacă valorile funcţiilor se combină conform tabelului operaţiei „·“, pentru fiecare *n*-uplu al argumentelor;

• *negarea* (*complementarea*) *funcţiilor*:

$$\bar{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1.23}$$

dacă şi numai dacă valorile funcţiilor respectă tabelul de definiţie al operaţiei de complementare.

Din cele de mai sus rezultă că pentru operarea cu funcţii booleene se consideră succesiv valorile funcţiilor corespunzătoare celor 2^n combinaţii ale argumentelor. Funcţiile f_1 şi f_2 aplică fiecare din cele 2^n *n*-uple în mulţimea $\{0,1\}$. Se obţin astfel 2^n perechi de valori ale funcţiilor. Operaţiile binare SAU (suma logică) şi ŞI (produsul logic) asupra celor două funcţii aplică cele 2^n perechi în mulţimea $\{0,1\}$. Operaţia unară de complementare aplică cele 2^n *n*-uple ale unei funcţii în $\{0,1\}$. Pentru operarea cu funcţii booleene este avantajoasă folosirea tabelelor.

1.2.2 Funcţii booleene elementare

În acest paragraf se vor defini funcţiile booleene fundamentale, cu ajutorul cărora se pot construi funcţii mai complexe.

Aceste funcţii booleene denumite şi *funcţii elementare* au o deosebită importanţă practică pentru realizarea circuitelor logice modulare. În mod obişnuit, funcţiile elementare se definesc pe mulţimea funcţiilor de două argumente. Cele $2^{2^2} = 16$ funcţii booleene de două argumente sunt prezentate în tabelul 1.4.

Tab.1.4 Definirea funcţiilor booleene elementare.

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Din examinarea tabelului rezultă şi se definesc următoarele funcţii elementare:

• funcţiile f_0 şi f_{15} sunt funcţii constante, nedepinzând de argumentele x_1 şi x_2. Sunt denumite şi funcţiile logice *constanta* 0 şi respectiv *constanta* 1:

$$f_0(x_1, x_2) = 0, \; f_{15}(x_1, x_2) = 1, \tag{1.24}$$

• funcţiile f_{10} şi f_{12} corespund valorilor argumentelor:

$$f_{10}(x_1, x_2) = x_2, \; f_{12}(x_1, x_2) = x_1 \tag{1.25}$$

şi care se mai numesc *funcţii identitate*;

• funcţiile f_3 şi f_5 corespund funcţiilor f_{10} şi f_{12} negate:

$$f_3(x_1,x_2) = \bar{f}_{12}(x_1,x_2) = \bar{x}_1,\ f_5(x_1,x_2) = \bar{f}_{10}(x_1,x_2) = \bar{x}_2 \tag{1.26}$$

şi se numesc *funcţiile negaţie*.

Observaţie. Funcţiile definite mai sus depind numai de unul dintre argumente sau de nici unul. Se spune că aceste funcţii elementare sunt funcţii degenerate de două argumente.

• funcţia f_8 corespunde produsului logic al funcţiilor f_{10} şi f_{12} şi se numeşte *funcţia conjuncţie* sau *funcţia* ŞI:

$$f_8(x_1,x_2) = f_{10}(x_1,x_2)\cdot f_{12}(x_1,x_2) = x_1x_2, \tag{1.27}$$

• funcţia f_{14} corespunde sumei logice a funcţiilor f_{10} şi f_{12}, numindu-se *funcţia disjuncţie* sau *funcţia* SAU:

$$f_{14}(x_1,x_2) = f_{10}(x_1,x_2) + f_{12}(x_1,x_2) = x_1 + x_2, \tag{1.28}$$

• funcţia f_1 poartă denumirea de *funcţia lui Pierce* sau *funcţia lui Webb* şi se notează în modul următor:

$$f_1(x_1,x_2) = x_1 \downarrow x_2. \tag{1.29}$$

Examinând valorile acestei funcţii se observă că ea reprezintă negata funcţiei disjunctive:

$$f_1(x_1,x_2) = \bar{f}_{14}(x_1,x_2) = \overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2. \tag{1.30}$$

Având în vedere cele de mai sus se mai poate scrie:

$$f_1(x_1,x_2) = f_3(x_1,x_2)\cdot f_5(x_1,x_2) = f_{10}(x_1,x_2) \downarrow f_{12}(x_1,x_2). \tag{1.31}$$

Din relaţia precedentă se observă că simbolul „↓“ are rol de operator, definind situaţia de „nici x_1 şi nici x_2“. Din acest motiv funcţia f_1 se mai numeşte şi *funcţia* NICI. În literatură este întâlnită şi sub denumirea de *funcţia* NOR, provenind din limba engleză (NOT OR = NOR).

• funcţia f_7 se numeşte *funcţia lui Sheffer* şi se simbolizează astfel:

$$f_7(x_1,x_2) = x_1 \uparrow x_2 = x_1 / x_2. \tag{1.32}$$

Examinând în tabel valorile acestei funcţii, se poate observa că ea reprezintă negarea funcţiei conjunctive de unde îi rezultă şi denumirea de *funcţie* ŞI-NU sau *funcţie* NAND (în limba engleză NOT AND ≡ NAND):

$$f_7(x_1,x_2) = \bar{f}_8(x_1,x_2) = \overline{x_1x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = f_{10}(x_1,x_2) \uparrow f_{12}(x_1,x_2). \tag{1.33}$$

Corespunzător relaţiilor de mai sus se mai poate spune că funcţia lui Sheffer defineşte situaţia de „numai x_1 sau numai x_2“, fapt ce a condus şi la denumirea de *funcţie* NUMAI.

Funcţiile NICI şi NUMAI au o deosebită importanţă atât pentru teoria funcţiilor booleene cât şi pentru aplicarea practică a acesteia în realizarea circuitelor logice modulare.

• funcţia f_9 are de asemenea importanţă pentru teoria funcţiilor booleene, fiind denumită *funcţia echivalenţă*:

$$f_9(x_1,x_2) = x_1 \sim x_2, \tag{1.34}$$

desemnând „echivalenţa între x_1 şi x_2“. Se poate demonstra că această funcţie poate fi descrisă prin funcţiile conjuncţie, disjuncţie şi negaţie:

$$f_9(x_1,x_2) = x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2). \tag{1.35}$$

Într-adevăr, folosind tabelele (v. tab. 1.5.a,b), pentru cele două părţi ale identităţii, se obţine rezultatul precizat mai sus. Întrucât pentru toate combinaţiile posibile ale valorilor argumentelor cele două părţi ale identităţii au aceleaşi valori, demonstraţia este făcută.

Tab.1.5 Tabelele funcţiei echivalenţă.

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(a)

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 + x_2$	$x_1 + \bar{x}_2$	$(\bar{x}_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

(b)

• funcţia f_6 se numeşte *funcţia suma modulo* 2 sau *funcţia* SAU-EXCLUSIV şi se notează astfel:

$$f_6(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2. \tag{1.36}$$

Comparând în tabelul de definiţie valorile acestei funcţii cu ale funcţiei f_9, rezultă:

$$f_6(x_1,x_2) = \bar{f}_9(x_1,x_2) = \overline{x_1 \sim x_2} = \overline{(\bar{x}_1 + x_2)(x_1 + \bar{x}_2)} = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2, \tag{1.37}$$

• funcţiile f_{11} şi f_{13} sunt denumite *funcţiile implicaţie*:

$f_{11}(x_1,x_2) = x_1 \to x_2$, implicaţia lui x_1 în x_2, (1.38)

$f_{13}(x_1,x_2) = x_1 \leftarrow x_2$, implicaţia lui x_2 în x_1, sau implicaţia inversă. (1.39)

Folosind reprezentarea tabelară se poate arăta uşor că:

$$f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 + x_2, \tag{1.40}$$

$$f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \leftarrow x_2 = x_1 + \bar{x}_2, \tag{1.41}$$

• funcţiile f_2 şi f_4 sunt denumite *funcţiile interdicţie* sau *funcţiile inhibare*:

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \not\leftarrow x_2 = \bar{x}_1 x_2,\ x_1 \text{ inhibă } x_2, \tag{1.42}$$

$$f_4(x_1, x_2) = x_2 \not\leftarrow x_1 = x_1 \bar{x}_2,\ x_2 \text{ inhibă } x_1 \text{, sau inhibare inversă.} \tag{1.43}$$

Din definirea funcţiilor booleene elementare de două argumente se poate desprinde concluzia că se pot genera funcţii booleene noi prin:

• permutarea argumentelor;
• introducerea de funcţii ca argumente ale noilor funcţii.

FUNCȚII BOOLEENE ELEMENTARE – VERIFICĂRI

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

- Funcțiile *identitate* f_{10} și f_{12} corespund valorilor argumentelor:
  $f_{10}(x_1, x_2) = x_2$, $f_{12}\,(x_1, x_2) = x_1$. (1.25)

  Verificare:
  $f_{10}(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 = x_2(\bar{x}_1 + x_1) = x_2 \cdot 1 = x_2$,
  $f_{12}\,(x_1, x_2) = x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 = x_1(\bar{x}_2 + x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1$,
  $\bar{f}_{10}(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_2(\bar{x}_1 + x_1) = \bar{x}_2 \cdot 1 = \bar{x}_2$, $f_{10}(x_1, x_2) = x_2$,
  $\bar{f}_{12}(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_2) = \bar{x}_1 \cdot 1 = \bar{x}_1$, $f_{12}(x_1, x_2) = x_1$.

- Funcția *disjuncție* sau funcția *SAU* f_{14}:
  $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. (1.28)

  Verificare:
  $$\begin{aligned} f_{14}(x_1, x_2) &= \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 \\ &= \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2 + x_1 x_2 = (\bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2) + (x_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2) \\ &= x_2(\bar{x}_1 + x_1) + x_1(\bar{x}_2 + x_2) = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 = x_1 + x_2, \end{aligned}$$
  $\bar{f}_{14}(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2$, $f_{14}(x_1, x_2) = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2} = x_1 + x_2$.

- Funcția *lui Sheffer* sau funcția *ȘI-NU* (*NAND*) f_7:
  $f_7(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$. (1.33)

  Verificare:
  $$\begin{aligned} f_7(x_1, x_2) &= \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 \\ &= (\bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2) + (\bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 \bar{x}_2) = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_2) + \bar{x}_2(\bar{x}_1 + x_1) = \bar{x}_1 \bar{x}_2, \end{aligned}$$
  $\bar{f}_7(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $f_7(x_1, x_2) = \overline{x_1 x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$.

- Funcția *suma modulo 2* sau funcția *SAU-EXCLUSIV* (*XOR*) f_6:
  $f_6(x_1, x_2) = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$. (1.37)

  Verificare:
  $\bar{f}_6(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2$,
  $$\begin{aligned} f_6(x_1, x_2) &= \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 + x_1 x_2} = (x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = x_1 \bar{x}_1 + x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_2 \bar{x}_2 \\ &= x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2. \end{aligned}$$

- Funcția *implicație inversă* f_{13}:
  $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 + \bar{x}_2.$ (1.41)

  Verificare:
  $f_{13}(x_1, x_2) = \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_1\bar{x}_2 + x_1x_2 + x_1\bar{x}_2$
  $= \bar{x}_2(\bar{x}_1 + x_1) + x_1(x_2 + \bar{x}_2) = x_1 + \bar{x}_2,$
  $\bar{f}_{13}(x_1, x_2) = \bar{x}_1x_2, f_{13}(x_1, x_2) = \overline{\bar{x}_1x_2} = x_1 + \bar{x}_2.$