ANEXA C

SISTEME DE NUMERAŢIE. CODURI

Informaţia este o noţiune de mare generalitate, ca şi noţiunea de mulţime, despre care se poate afirma că reprezintă, pentru un sistem oarecare (biologic, tehnic, social, etc.) un mesaj despre evenimentele care au avut loc, au loc, sau vor avea loc în interiorul sau exteriorul sistemului.

Baza celor mai multe schimburi de informaţie o constituie reprezentările simbolice pentru idei, cantităţi, modele, etc. Reprezentarea simbolică se realizează cu ajutorul unei mulţimi de simboluri şi reguli care guvernează utilizarea acestor simboluri.

Reprezentarea simbolică a informaţiei într-un sistem numeric poate fi analizată prin prisma sistemelor de numeraţie şi a codurilor utilizate.

Sistemul de numeraţie este format din totalitatea regulilor de reprezentare a numerelor cu ajutorul unor simboluri numite *cifre*. Sistemele de numeraţie sunt de două feluri: *poziţionale* şi *nepoziţionale*. Un exemplu de sistem poziţional este sistemul zecimal, iar de sistem nepoziţional sistemul roman. În sistemele de calcul se folosesc în special sistemele de numeraţie poziţionale, datorită simplităţii de reprezentare şi de efectuare a calculelor aritmetice.

Sisteme de numeraţie poziţionale

Un sistem de numeraţie poziţional este caracterizat prin *bază*; aceasta reprezintă numărul total de simboluri (cifre) ale sistemului. În tabelul C.1 sunt prezentate câteva baze, împreună cu mulţimile de simboluri corespunzătoare.

Într-un sistem de numeraţie de bază b, un număr N, format din parte întreagă şi parte fracţionară, se poate reprezenta într-una din următoarele trei forme:

$$N = \begin{cases} a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1 a_0 a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}, \\ a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + \ldots + a_{-m}b^{-m}, \\ \sum_{i=-m}^{n-1} a_i b^i, \end{cases} \tag{C.1}$$

unde, b este baza sistemului, a_i sunt cifrele, n numărul de cifre ale părţii întregi, m numărul de cifre ale părţii fracţionare, a_{n-1} cifra cea mai semnificativă (c.m.s.), a_{-m} cifra cea mai puţin semnificativă (c.m.p.s.).

Tab.C.1 Sisteme de numeraţie.

Baza	Denumirea sistemului	Simboluri utilizate
2	Binar	0,1
3	Ternar	0,1,2
4	Cuaternar	0,1,2,3
8	Octal	0,1,2,3,4,5,6,7
10	Zecimal	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
16	Hexazecimal	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Deoarece numărul de cifre utilizate în sistem este egal cu baza, rezultă că:

$$0 \le a_i \le b-1, \quad \text{unde} \quad -m \le i \le n-1. \tag{C.2}$$

Dacă $n=0$, atunci numărul N este subunitar, iar dacă $m=0$, atunci numărul N este întreg.

Relaţia (C.1) arată de ce astfel de sisteme sunt denumite poziţionale: fiecare cifră a_i (din rangul i) intră în valoarea numărului respectiv cu o pondere dată de puterea i a bazei b. Fiecare număr se obţine din numărul anterior prin adăugarea unei unităţi la ultima cifră.

În general, conversia între două baze de numeraţie nu se poate efectua doar printr-o simplă substituire; sunt necesare unele operaţii aritmetice, existând în acest sens algoritmi de conversie. Algoritmul de conversie zecimal-binar, $N_{(10)} \to N_{(2)}$, pentru un număr întreg, se deduce pornind de la expresia (C.1), scrisă sub forma:

$$N = a_{n-1}\cdot 2^{n-1} + a_{n-2}\cdot 2^{n-2} + \ldots + a_3\cdot 2^3 + a_2\cdot 2^2 + a_1\cdot 2^1 + a_0\cdot 2^0, \tag{C.3}$$

prin împărţiri succesive:

$$\begin{aligned}
N &= 2\underbrace{(a_{n-1}\cdot 2^{n-2} + a_{n-2}\cdot 2^{n-3} + \ldots + a_3\cdot 2^2 + a_2\cdot 2^1 + a_1)}_{N_1} + a_0(\text{rest}),\\
N_1 &= 2\underbrace{(a_{n-1}\cdot 2^{n-3} + a_{n-2}\cdot 2^{n-4} + \ldots + a_3\cdot 2^1 + a_2)}_{N_2} + a_1(\text{rest}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
N_k &= 2(a_{n-1}\cdot 2^{n-k-2} + \ldots + a_{n-k-1}) + a_k(\text{rest}),
\end{aligned} \tag{C.4}$$

se obţin astfel resturile care sunt tocmai biţii numărului N exprimat în binar; de exemplu $93_{(10)} = ?_{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
93 &= 2\cdot 46+1\\
46 &= 2\cdot 23+0\\
23 &= 2\cdot 11+1\\
11 &= 2\cdot 5+1\\
5 &= 2\cdot 2+1\\
2 &= 2\cdot 1+0\\
1 &= 2\cdot 0+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
(2^6) & (2^5) & (2^4) & (2^3) & (2^2) & (2^1) & (2^0)
\end{array}
$$

$$93_{(10)} = 1011101_{(2)},$$

$$N = 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 93_{(10)}.$$

Algoritmul de conversie zecimal-binar, $N_{(10)} \to N_{(2)}$, pentru un număr fracţionar (subunitar) se deduce pornind de la expresia:

$$N = a_{-1}\cdot 2^{-1} + a_{-2}\cdot 2^{-2} + a_{-3}\cdot 2^{-3} + \ldots + a_{-(m-1)}\cdot 2^{-(m-1)} + a_{-m}\cdot 2^{-m}, \tag{C.5}$$

prin înmulţiri succesive cu 2:

$$
\begin{aligned}
N\cdot 2 &= a_{-1} + \underbrace{a_{-2}\cdot 2^{-1} + a_{-3}\cdot 2^{-2} + \ldots + a_{-(m-1)}\cdot 2^{-(m-2)} + a_{-m}\cdot 2^{-(m-1)}}_{N_1},\\
N_1\cdot 2 &= a_{-2} + \underbrace{a_{-3}\cdot 2^{-1} + \ldots + a_{-(m-1)}\cdot 2^{-(m-3)} + a_{-m}\cdot 2^{-(m-2)}}_{N_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
N_{k-1}\cdot 2 &= a_{-k} + \underbrace{a_{-k-1}\cdot 2^{-1} + \ldots + a_{-m}\cdot 2^{-(m-k)}}_{N_k},
\end{aligned}
\tag{C.6}
$$

se obţin părţi întregi (zero sau unu) care sunt tocmai biţii numărului *N*, exprimat în binar (operaţia de înmulţire se opreşte atunci când partea fracţionară devine zero sau când se consideră satisfăcător un număr de cifre binare pentru precizia stabilită); de exemplu $0.48932_{(10)} = ?_{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
&0.48932\times 2 = 0 + 0.97864 \to a_{-1} = 0,\\
&0.97864\times 2 = 1 + 0.95728 \to a_{-2} = 1,\\
&0.95728\times 2 = 1 + 0.91456 \to a_{-3} = 1,\\
&0.91456\times 2 = 1 + 0.82912 \to a_{-4} = 1,\\
&0.82912\times 2 = 1 + 0.75824 \to a_{-5} = 1,\\
&0.75824\times 2 = 1 + 0.51648 \to a_{-6} = 1,\\
&0.51648\times 2 = 1 + 0.03296 \to a_{-7} = 1,
\end{aligned}
$$

$$0.48932_{(10)} = 0.0111111\ldots_{(2)},$$

$$N = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 1 \cdot 2^{-7} + \ldots = 0.48932_{(10)}.$$

Pentru conversia zecimal-binară a unui număr ce prezintă atât parte întreagă, cât şi parte fracţionară, se combină cei doi algoritmi. Din exemplele de mai sus s-a putut vedea că pentru conversia binar-zecimală, $N_{(2)} \to N_{(10)}$, se adună puterile succesive ale lui 2, fiecare fiind înmulţită cu bitul din poziţia respectivă a numărului binar. Algoritmii deduşi mai sus ((C.4) şi (C.6)) pot fi aplicaţi şi în cazul conversiei zecimal-octal, zecimal-hexazecimal, etc.

Conversiile directe octal-binar, hexazecimal-binar, cât şi conversiile inverse binar-octal, binar-hexazecimal, se realizează mult mai simplu datorită faptului că 8 şi 16 sunt puteri ale lui 2. Un număr (mai mic decât baza) în octal şi în hexazecimal poate fi exprimat prin trei cifre binare (triadă), respectiv prin patru cifre binare (tetradă). Deci, conversiile în ambele sensuri se bazează pe corespondenţa dintre triade, în numărarea binară şi numerele până la şapte la numărarea în bază 8, respectiv dintre tetrade în numărarea binară şi numerele până la 15 în numărarea în baza 16.

Exemple.

$$\underbrace{001}_{1}\ \underbrace{101}_{5}.\underbrace{111}_{7}\ \underbrace{010}_{2}{}_{(2)} = 15.72_{(8)},$$

$$\overbrace{010}^{2}\ .\ \overbrace{000}^{0}\ \overbrace{100}^{4}{}_{(8)} = 10.0001_{(2)},$$

$$\underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1111}_{F}.\underbrace{0010}_{2}\ \underbrace{1010}_{A}{}_{(2)} = 90F.2A_{(16)},$$

$$1D.C_{(16)} = \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1101}_{D}.\underbrace{1100}_{C}{}_{(2)}.$$

Conversiile inverse binar-hexazecimal, binar-octal se realizează delimitând cuvântul binar de la dreapta spre stânga (sau, pornind de la punctul părţii fracţionare în ambele sensuri) în tetrade sau triade şi înlocuindu-le cu cifrele corespunzătoare din sistemul hexazecimal, respectiv din sistemul octal.

Conversiile directe hexazecimal-binar, octal-binar se realizează simplu prin substituţia cifrelor hexazecimale sau octale prin tetrade sau triade corespunzătoare.

Pentru modul de realizare a operaţiilor aritmetice în sistemele de numeraţie cu baza o putere a lui 2 (binar, octal, hexazecimal) se poate consulta.

Sistemul de numeraţie utilizat în sistemele numerice de calcul este *sistemul binar*. Reprezentarea numerelor în acest sistem prezintă mai multe forme în funcţie de soluţia aleasă pentru a se indica poziţia virgulei şi semnul numărului. Poziţia fixă sau variabilă a virgulei determină reprezentarea numită în *virgulă fixă* sau, respectiv în *virgulă mobilă*.