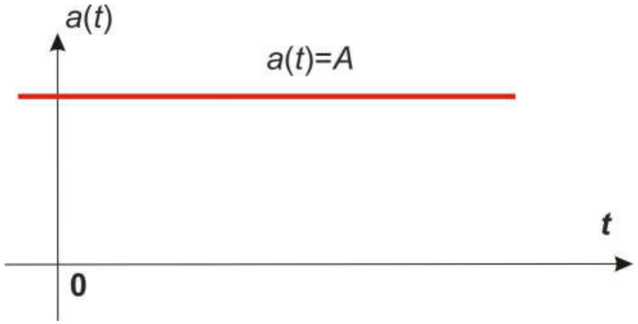
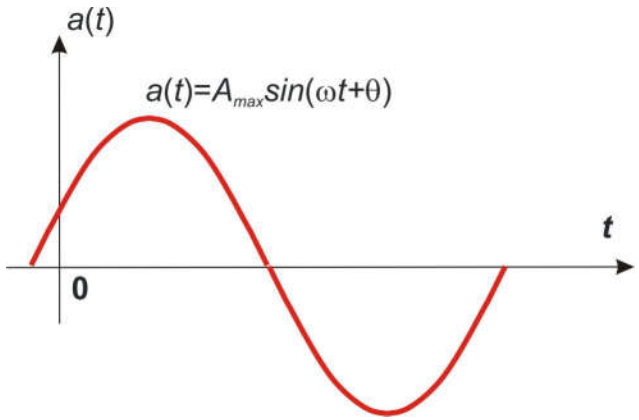
CURS 9_10

Circuite in regim nesinusoidal

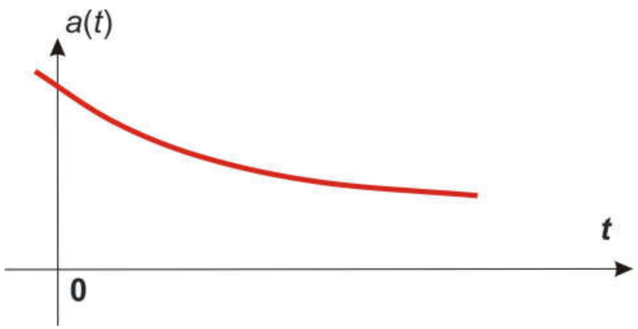
CIRCUITE IN REGIM NESINUSOIDAL

Până în prezent am considerat mărimi **constante** şi mărimi **sinusoidale**, ca în figură:

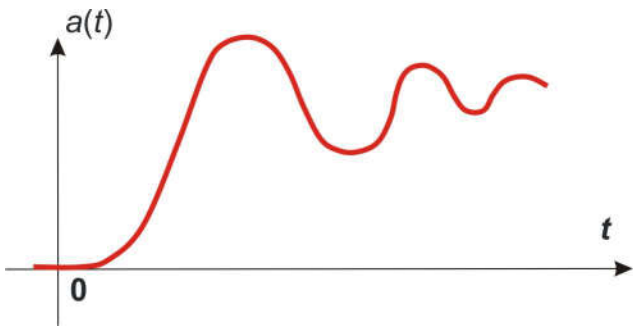




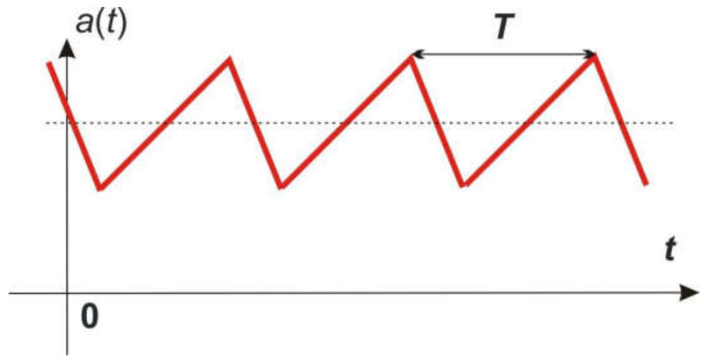
În practică multe mărimi nu sunt nici constante nici sinusoidale, exemple:



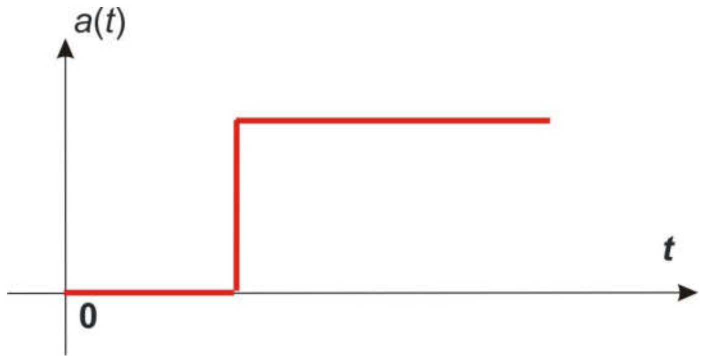
uni-directionale



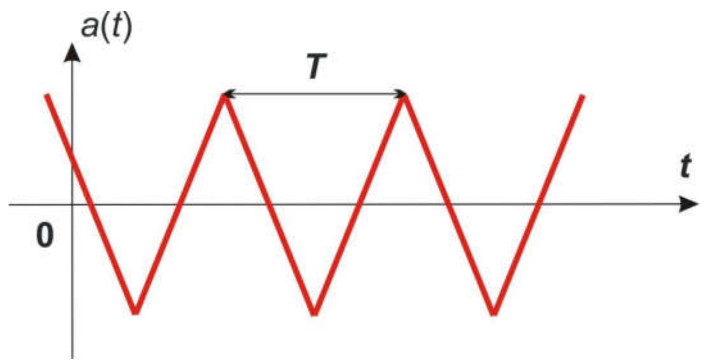
uni-directionale



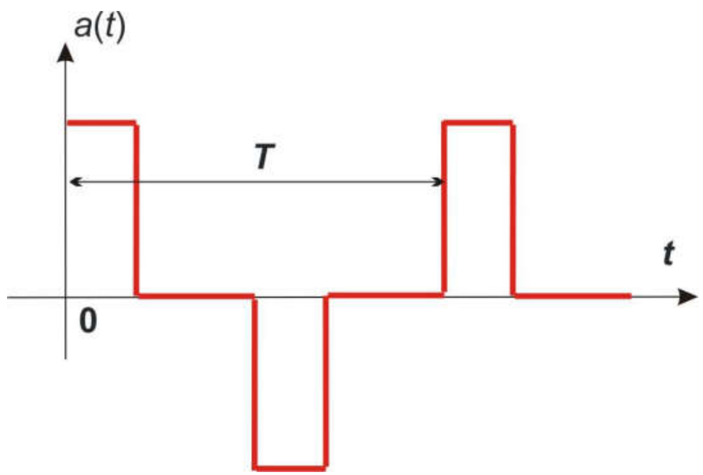
uni-directionale şi periodice cu valoare medie diferită de zero



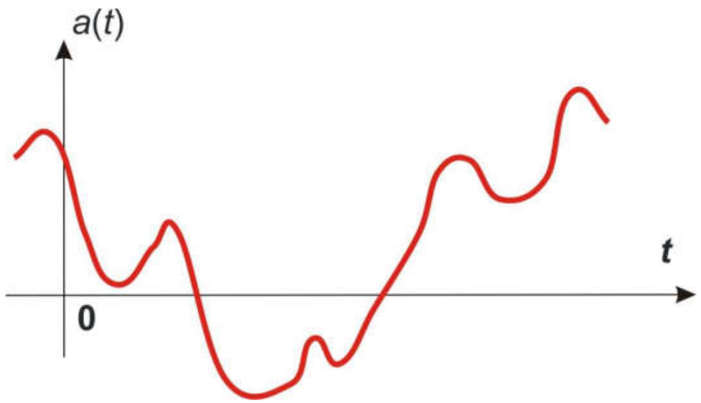
uni-directionale



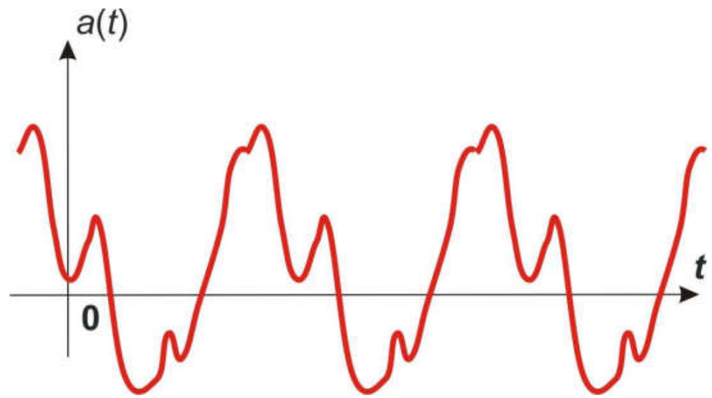
Periodică cu valoare medie zero



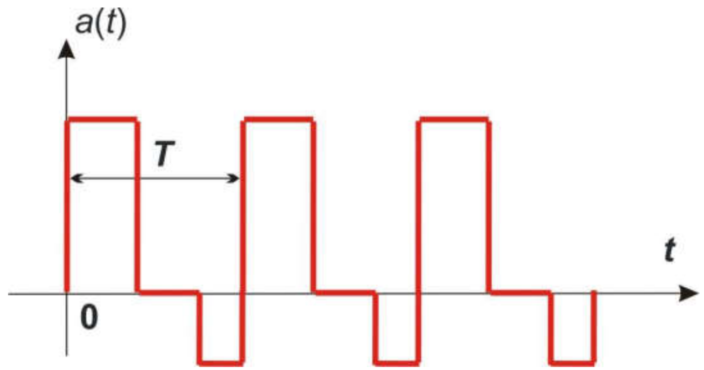
Periodică cu valoare medie zero



Alternantă dar neperiodică



periodică cu valoare medie diferită de zero



periodică cu valoare medie diferită de zero

Mărimile neperiodice sunt de două categorii: **periodice** şi **neperiodice**.

Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii nesinusoidale periodice:

.

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + B_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t) \right]$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot F_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t + \theta_n)$$

Funcţii nesinusoidale simetrice

Următoarele trei tipuri de simetrii permit reducerea calculelor pentru dezvoltarea în serie Fourier:

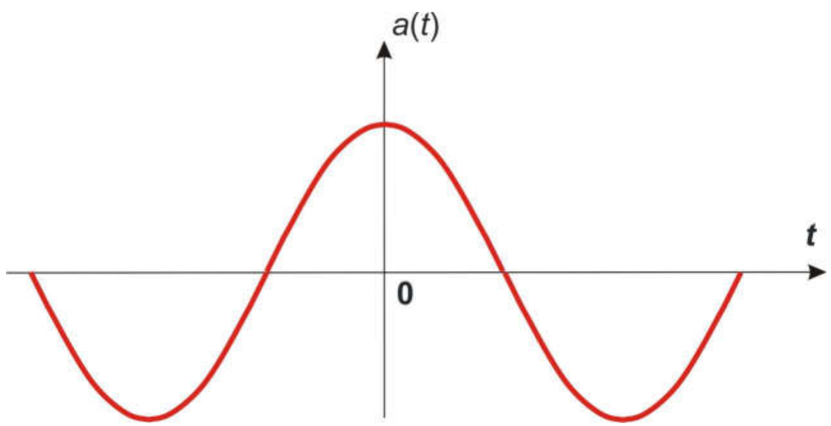
(i) Simetrie pară

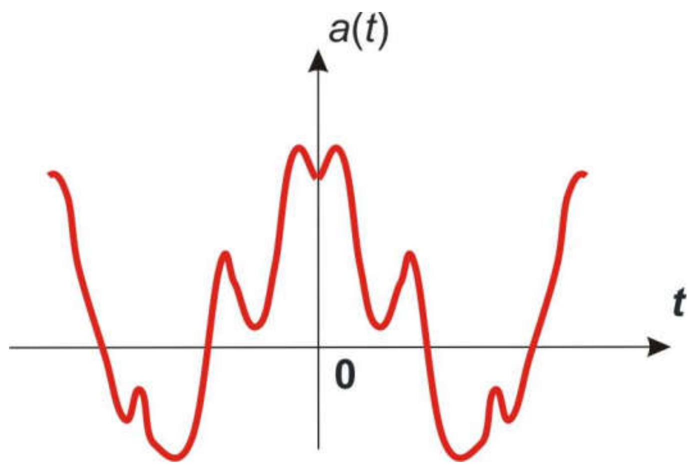
(ii) Simetrie impară

(iii) Simetrie pentru jumătate de perioadă

Simetrie pară $\boxed{f(t) = f(-t)}$

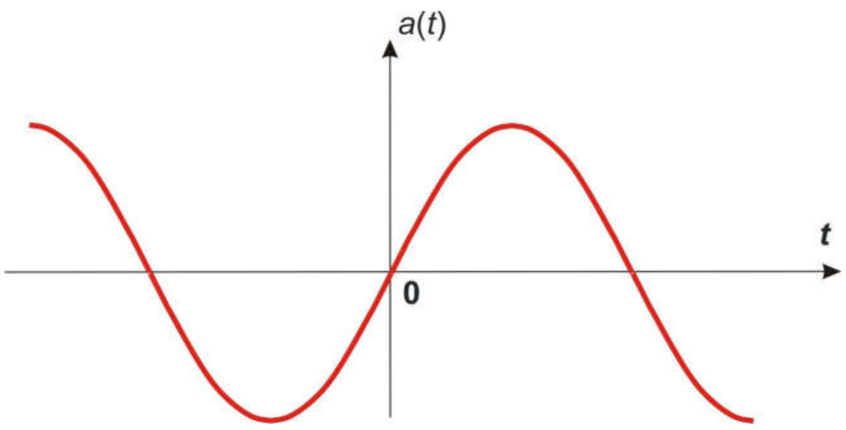
Axa verticală este axă de simetrie:

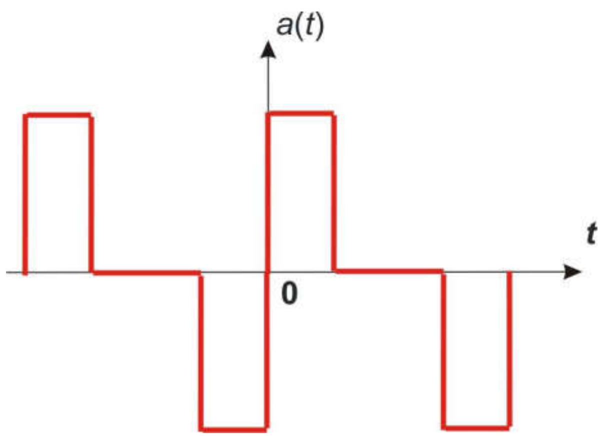




Simetrie impară $\boxed{f(t) = -f(-t)}$

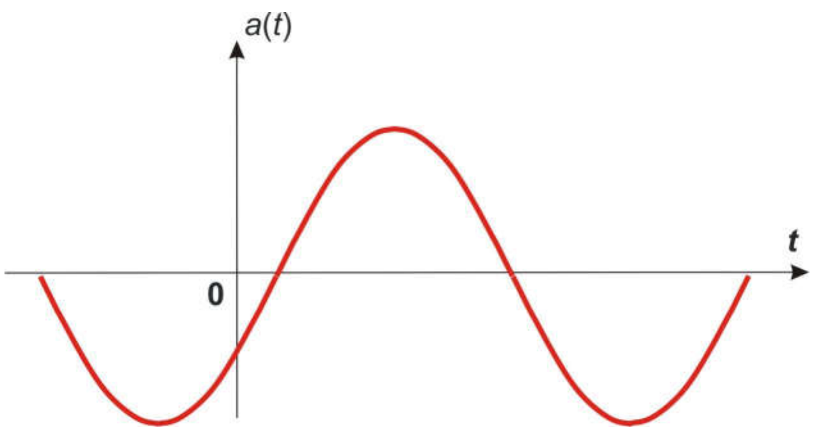
Grafic simetric faţă de originea axelor.

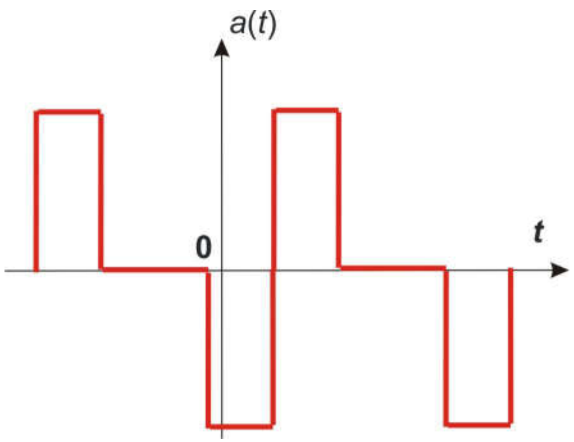




Simetrie pentru jumătate de perioadă $\boxed{f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)}$

O jumătate de perioadă este egală cu negativul jumătăţii precedente sau ulterioare.





Rezultate utile privind integralele unor funcţii trigonometrice

$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin \omega_0 t \cdot \mathrm{d}t = 0$	$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos \omega_0 t \cdot \mathrm{d}t = 0$
$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\ n\omega_0 t \cdot \mathrm{d}t = 0$	$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos\ n\omega_0 t \cdot \mathrm{d}t = 0$
$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\ n\omega_0 t \cdot \cos\ m\omega_0 t \cdot \mathrm{d}t = 0$	Pentru toate valorile lui ***m* şi *n***
$\int_{t_0}^{t_0+T} \sin\ n\omega_0 t \cdot \sin\ m\omega_0 t \cdot \mathrm{d}t \begin{cases} = 0 & \text{daca} \quad n \neq m \\ = \dfrac{T}{2} & \text{daca} \quad n = m \end{cases}$	
$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos\ n\omega_0 t \cdot \cos\ m\omega_0 t \cdot \mathrm{d}t \begin{cases} = 0 & \text{daca} \quad n \neq m \\ = \dfrac{T}{2} & \text{daca} \quad n = m \end{cases}$	

Evaluarea coeficienţilor A_n şi B_n

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)$$

Integrăm egalitatea pe un interval cu durata unei perioade:

$$\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{A_0}{2}\cdot\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_0+T}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot\mathrm{d}t+\int_{t_0}^{t_0+T}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cdot \mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{A_0}{2}\cdot\mathrm{d}t+0=\frac{A_0}{2}\cdot T\quad\Rightarrow\quad A_0=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cdot\mathrm{d}t$$

$$\boxed{A_0=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cdot\mathrm{d}t}$$

Integrăm egalitatea pe un interval cu durata unei perioade după amplificarea cu **cos $n\omega_0 t$** :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{A_0}{2}\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_0+T}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\right]\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$
$$+\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\right]\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t}$$

Integrăm egalitatea pe un interval cu durata unei perioade după amplificarea cu **sin $n\omega_0 t$** :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{A_0}{2}\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_0+T}\left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\right]\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$
$$+\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\right]\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

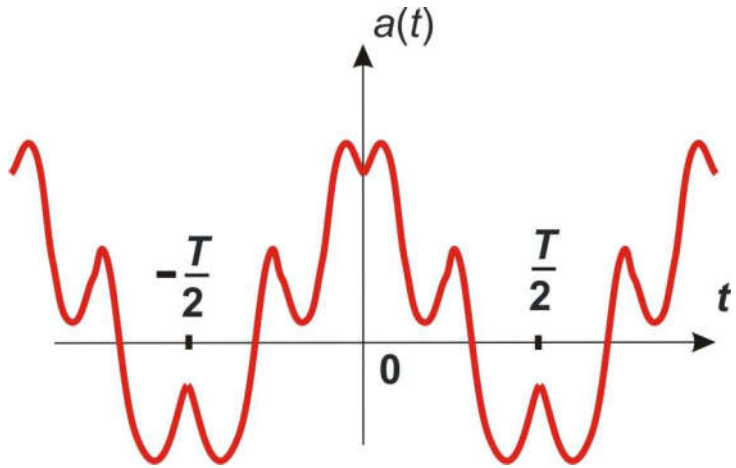
$$\boxed{B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t}$$

Cazurile de simetrie

Simetrie pară: .

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$



$f(t) = f(-t)$

În prima integrală efectuam o schimbare de variabilă, variabila **'*t*' este inlocuită cu '*-t*'** :

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)\cdot\cos(-n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot(-\mathrm{d}t) + \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

Deoarece avem simetrie pară, $f(t) = f(-t)$, şi $\cos(n\cdot\omega_0\cdot t) = \cos(-n\cdot\omega_0\cdot t)$

$$A_n = -\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

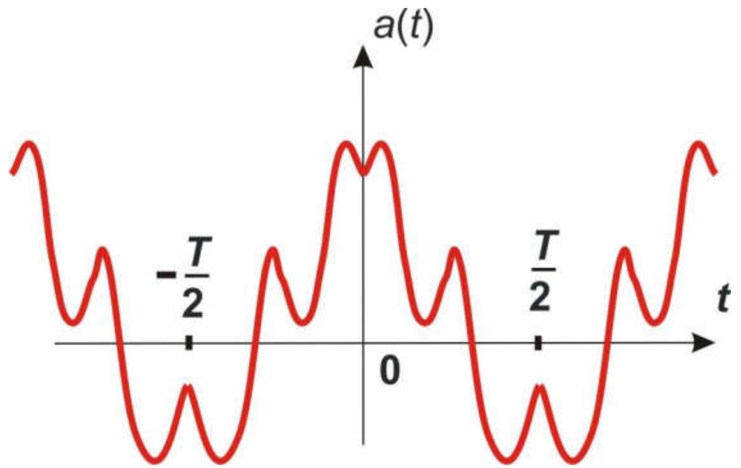
$$\boxed{A_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t}$$

Similar pentru $\boldsymbol{B_n}$:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)\cdot\sin(-n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot(\text{-}\,\mathrm{d}t)+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$f(t)=f(-t)$, şi $\sin(-n\cdot\omega_0\cdot t)=-\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)$



$f(t)=f(-t)$

Deci, $B_n = 0$ **pentru toate valorile lui** ***n*** **.**

Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii cu **simetrie pară** este:

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)$$

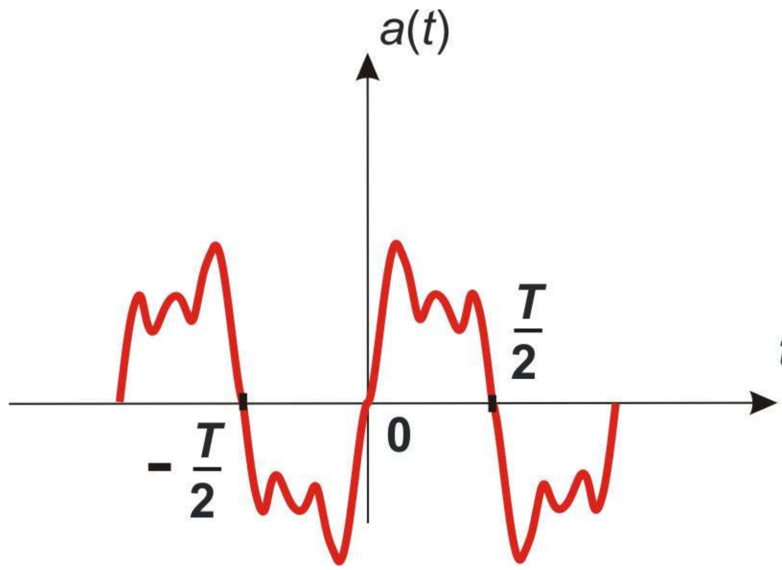
Unde:

$$A_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

Simetrie impară

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$



$f(t) = -f(-t)$

În prima integrală efectuam o schimbare de variabilă, variabila ***'t'* este inlocuită cu *'-t'*** :

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)\cdot\cos(-n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot(-\mathrm{d}t) + \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

Pentru simetrie impară: $f(t) = -f(-t)$, şi $\cos(n\cdot\omega_0\cdot t) = \cos(-n\cdot\omega_0\cdot t)$

$$A_n = -\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = 0$$

$A_n = 0$, pentru toate valorile lui n

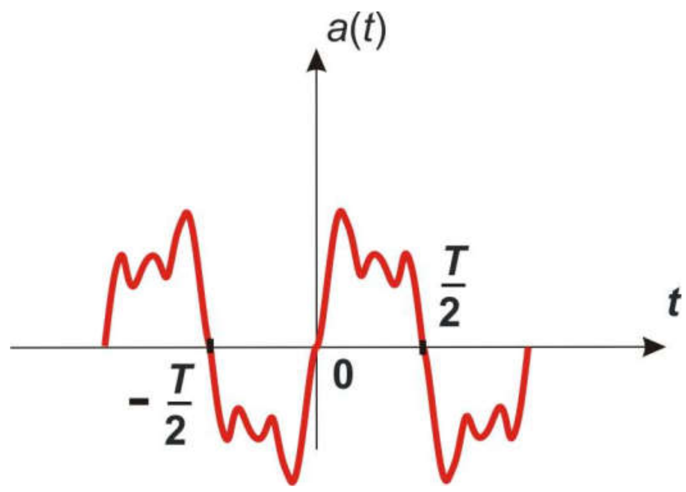
Similar pentru $\boldsymbol{B_n}$:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{0} f(-t)\cdot\sin(-n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot(-\mathrm{d}t)+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$f(t)=-f(-t)$, şi $\sin(-n\cdot\omega_0\cdot t)=-\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)$

$$B_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$



$f(t)=-f(-t)$

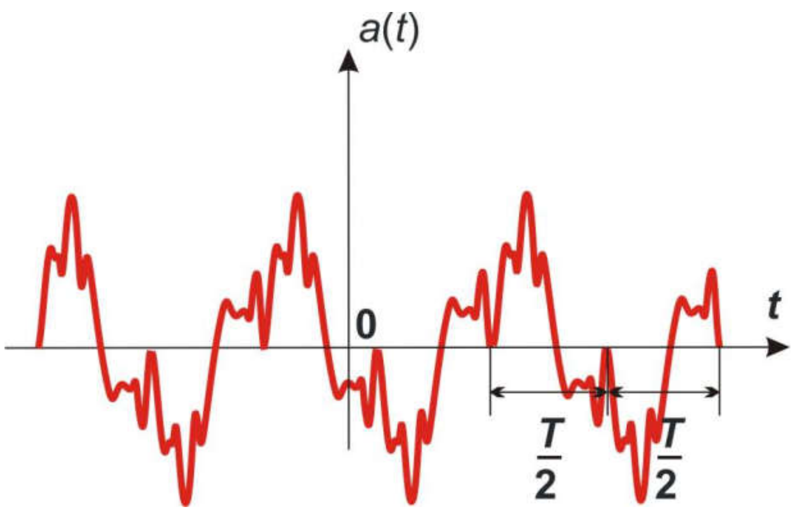
Dezvoltarea în serie Fourier a unei funcţii cu **simetrie impară** este:

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)}$$

unde

$$\boxed{B_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t}$$

Simetrie pentru jumătate de perioadă



$$f(t) = -f\left(t - \frac{T}{2}\right) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{t_0+\frac{T}{2}}^{t_0+T} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

În a doua integrală efectuam o schimbare de variabilă, variabila **'*t*' este inlocuită cu '*t-T/2*'** :

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f\left(t-\frac{T}{2}\right)\cdot\cos\left(n\cdot\omega_0\cdot\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\cdot \mathrm{d}\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

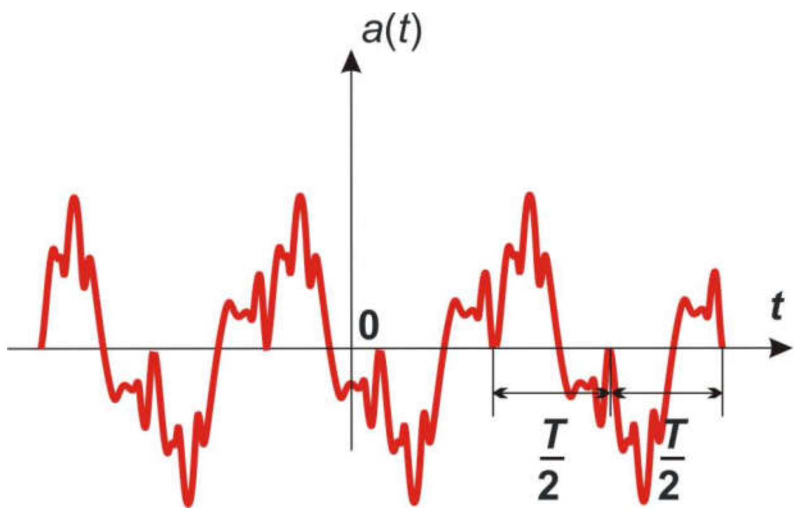
$$f(t) = -f\left(t-\frac{T}{2}\right) \qquad \omega_0\cdot T = 2\cdot\pi \quad\Rightarrow\quad \cos n\cdot\omega_0\cdot\left(t-\frac{T}{2}\right) = \cos(n\cdot\omega_0\cdot t - n\cdot\pi) \begin{cases} -\cos(n\cdot\omega_0\cdot t) & \text{când } \boldsymbol{n} \text{ este impar} \\ \cos(n\cdot\omega_0\cdot t) & \text{când } \boldsymbol{n} \text{ este par} \end{cases}$$

$$\boxed{A_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t; & \textit{n este impar} \\ 0; & \textit{n este par} \end{cases}}$$

Similar pentru $\boldsymbol{B_n}$:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{t_0+\frac{T}{2}}^{t_0+T} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t$$



În a doua integrală efectuam o schimbare de variabilă, variabila **'*t*'** **este inlocuită cu** **'*t-T/2*'** :

$$f(t) = -f\left(t-\frac{T}{2}\right) = -f\left(t+\frac{T}{2}\right)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f\left(t-\frac{T}{2}\right)\cdot\sin\left(n\cdot\omega_0\cdot\left(t-\frac{T}{2}\right)\right)\cdot \mathrm{d}\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

$$\omega_0\cdot T = 2\cdot\pi \quad\Rightarrow\quad \sin n\cdot\omega_0\cdot\left(t-\frac{T}{2}\right) = \sin(n\cdot\omega_0\cdot t - n\cdot\pi) = \sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cos(n\cdot\pi) \quad \begin{cases} -\sin(n\cdot\omega_0\cdot t) & \text{când } \boldsymbol{n} \text{ este impar} \\ \sin(n\cdot\omega_0\cdot t) & \text{când } \boldsymbol{n} \text{ este par} \end{cases}$$

$$\boxed{B_n = \begin{cases} \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t; & n \text{ este impar} \\ 0; & n \text{ este par} \end{cases}}$$

Rezumat

1. **Simetrie pară**: $\boldsymbol{B_n}$ este 0 pentru orice n, şi $\boldsymbol{A_n}$ este de patru ori integrala pe jumătate de perioadă începând de la zero

2. **Simetrie impară**: $\boldsymbol{A_n}$ este 0 pentru orice n, şi $\boldsymbol{B_n}$ este de patru ori integrala pe jumătate de perioadă începând de la zero

3. **Simetrie pentru jumătate de perioadă**: $\boldsymbol{A_n}$ şi $\boldsymbol{B_n}$ sunt 0 pentru *n par*, şi de patru ori integrala pe o jumătate de perioadă pentru *n impar*.

4. **Pentru orice caz**: $\boldsymbol{A_0/2}$ corespunde cu valoarea medie a mărimii nesinusoidale.

Spectru de frecvenţe

$$f(t)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot F_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\theta_n)=F_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot F_n\cdot\sin\theta_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot F_n\cdot\cos\theta_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)$$

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)$$

Prin identificarea termenilor obţinem:

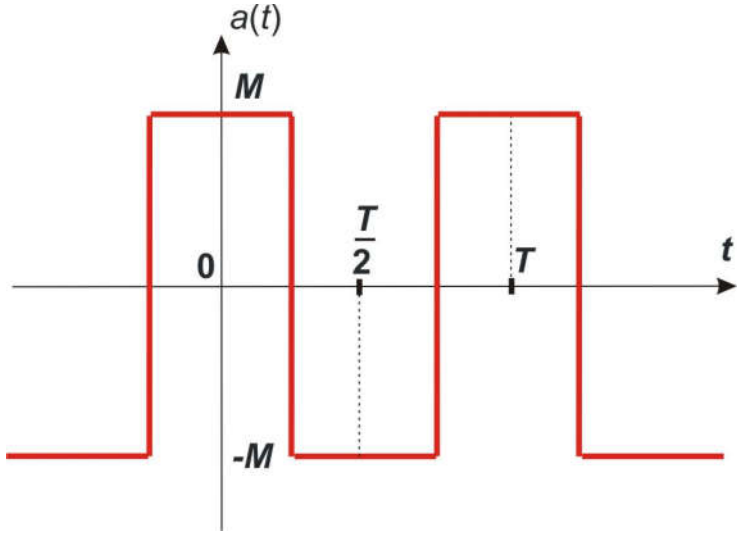
$$\boxed{F_0=\frac{A_0}{2}} \qquad \begin{cases}\sqrt{2}\cdot F_n\cdot\sin\theta_n=A_n\\ \sqrt{2}\cdot F_n\cdot\cos\theta_n=B_n\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}F_n=\dfrac{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}{2}\\ \theta_n=\mathrm{arctg}\dfrac{A_n}{B_n}\end{cases}}$$

Spectrul de frecvenţe este un grafic care reprezintă amplitudinea armonicilor care compun mărimea nesinusoidală,

Examplu

Să se determine dezvoltarea în serie Fourier a mărimii nesinusoidale din figură:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)$$



Soluţie

<u>Perioada</u> = ***T***

<u>Valoarea medie</u> = **0**

<u>Simetrie pară</u>: $\boldsymbol{B_n} = 0$ pentru orice ***n***

Simetrie pentru jumătate de perioadă: $\boldsymbol{A_n} = \boldsymbol{B_n} =$
= **0** pentru ***n par***

Deci, $\boldsymbol{A_n}$ poate fi obţinut pentru ***n impar,*** ca de 4 ori integrala pentru o jumătate de perioadă:

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{4\cdot M}{T}\int_0^{\frac{T}{4}}\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot\mathrm{d}t - \frac{4\cdot M}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\cos(n\cdot\omega_0\cdot t)\cdot\mathrm{d}t$$

$$A_n = \frac{4\cdot M}{n\cdot\omega_0\cdot T}\cdot\left[\sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\,\Big|_0^{\frac{T}{4}} - \sin(n\cdot\omega_0\cdot t)\,\Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\right]$$

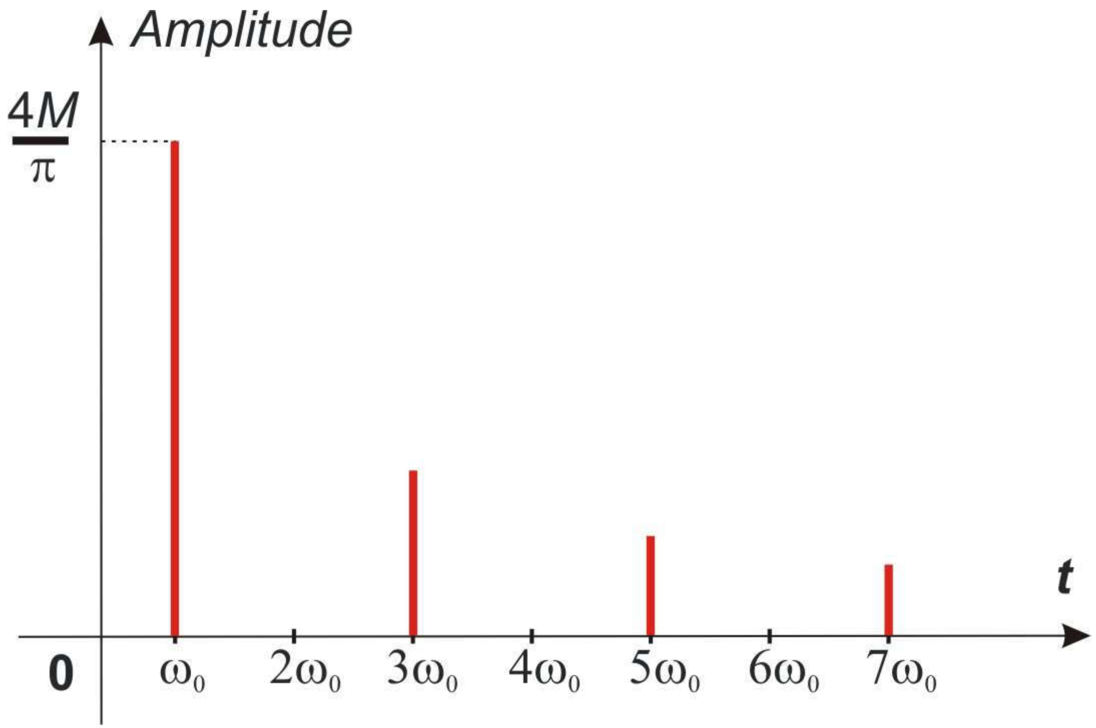
$$A_n = \frac{4\cdot M}{n\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot T}\cdot\left[\sin\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right) - \sin 0 - \sin\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) + \sin\left(n\cdot\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}\right)\right]$$

$$A_n = \frac{4 \cdot M}{n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot T} \cdot \left[\sin\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{4} \right) - \sin 0 - \sin\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \right) + \sin\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{4} \right) \right]$$

$$A_n = \frac{4 \cdot M}{n \cdot 2 \cdot \pi} \cdot \left[\sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \sin 0 - \sin(n \cdot \pi) + \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] \qquad A_n = \frac{4 \cdot M}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$ pentru ***n impar***.

$$A_1 = \frac{4 \cdot M}{\pi} \quad ; \quad A_3 = -\frac{4 \cdot M}{3 \cdot \pi} \quad ; \quad A_5 = \frac{4 \cdot M}{5 \cdot \pi} \quad ; \quad A_7 = -\frac{4 \cdot M}{7 \cdot \pi} \quad ; \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a(t) = \frac{4 \cdot M}{\pi} \cdot \left[\cos(\omega_0 \cdot t) - \frac{\cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t)}{3} + \frac{\cos(5 \cdot \omega_0 \cdot t)}{5} - \frac{\cos(7 \cdot \omega_0 \cdot t)}{7} + \ldots \right]$$



Valoarea efectivă a unei mărimi nesinusoidale

Se calculează cu relaţia generală:

$$A_{effective} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t)\cdot \mathrm{d}t}$$

Se cunoaşte dezvoltarea în serie Fourier a mărimii nesinusoidale:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot F_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\theta_n)$$

$$F^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot F_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\theta_n)\right]^2 \mathrm{d}t$$

$$F^2 = \frac{F_0^2}{T}\underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t}_{T} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} 2\cdot F_0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot F_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\theta_n)\cdot\mathrm{d}t}_{0} + \underbrace{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot F_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\theta_n)\right]^2\mathrm{d}t}_{\sum F_n^2}$$

Utilizând proprietăţile funcţiilor trigonometrice, rezultă:

$$\boxed{F = \sqrt{F_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}F_n^2}}$$

$\boldsymbol{F_0}$ este componenta continuă, iar $\boldsymbol{F_n}$ este valoarea eficace a armonicii de ordinul $\boldsymbol{n}$.

Valoarea eficace a unei mărimi nesinusoidale este rădăcina pătrată a sumei pătratelor valorilor eficace ale armonicilor.

Factorul de formă:

$$\text{factor de forma} = \frac{\text{valoarea eficace}}{\text{valoarea medie pe o semiperioada}}$$

$$\boxed{k_f = \frac{F}{\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+\frac{T}{2}} f(t)\cdot \mathrm{d}t}}$$

Factorul de putere în regim nesinusoidal

Considerăm cunoscute dezvoltările în serie Fourier a tensiunii şi curentului:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\cdot U_n \cdot \sin(n\cdot\omega_0\cdot t + \alpha_n) \quad ; \quad i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\cdot I_n \cdot \sin(n\cdot\omega_0\cdot t + \beta_n)$$

$$p(t) = u(t)\cdot i(t) \quad ;$$

Puterea medie absorbită este: $P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\cdot i(t)\mathrm{d}t$

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left[U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\cdot U_n \cdot \sin(n\cdot\omega_0\cdot t + \alpha_n)\right]\cdot\left[I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\cdot I_n \cdot \sin(n\cdot\omega_0\cdot t + \beta_n)\right]\mathrm{d}t$$

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[U_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot U_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\alpha_n)\right]\cdot\left[I_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot I_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\beta_n)\right]\mathrm{d}t$$

Utilizând proprietăţile funcţiilor trigonometrice obţinem:

$$\boxed{P=U_0\cdot I_0+\sum_{n=1}^{\infty}U_n\cdot I_n\cdot\cos(\alpha_n-\beta_n)=U_0\cdot I_0+\sum_{n=1}^{\infty}U_n\cdot I_n\cdot\cos\varphi_n\ [\mathrm{W}]}$$

Puterea reactivă este definită prin:

$$\boxed{Q=\sum_{n=1}^{\infty}U_n\cdot I_n\cdot\sin(\alpha_n-\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n\cdot I_n\cdot\sin\varphi_n\ [\mathrm{var}]}$$

Puterea aparentă:

$$\boxed{S=U\cdot I=\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}U_n^2}\cdot\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}I_n^2}\ [\mathrm{VA}]}$$

Se poate demonstra că: $S^2\neq P^2+Q^2$

Ca urmare, a fost definită puterea deformantă:

$$\boxed{D=\sqrt{S^2-P^2-Q^2}\ [\mathrm{vad}]}$$

Factorul de putere: $\boxed{k_p=\frac{P}{S}}$

Exemplu

Să se determine: 1) <u>valorile efective ale tensiunii şi curentului</u>, 2) <u>puterea activă consumată</u>, 3) <u>factorul de putere</u> and 4) <u>defazajul pentru armonicile fundamentare</u>, dacă dezvoltările în serie Fourier ale tensiunii şi curentului sunt:

$$u(t) = 5 + 8 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cdot \sin(3\omega t) \qquad [\mathrm{V}]$$

$$i(t) = 3 + 5 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2} \cdot \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad [\mathrm{A}]$$

Soluţie

1. Valorile efective:

$$F = \sqrt{F_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n^2}$$

$$U = \sqrt{5^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7{,}681 \quad [\mathrm{V}]$$

$$I = \sqrt{3^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4{,}796 \quad [\mathrm{A}]$$

2. Puterea activă:

$$P = U_0 \cdot I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot I_n \cdot \cos(\alpha_n - \beta_n) = U_0 \cdot I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot I_n \cdot \cos\varphi_n \ [\mathrm{W}]$$

$$P = 5 \cdot 3 + \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) + 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = 24 \quad [\mathrm{W}]$$

$$u(t) = 5 + 8 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cdot \sin(3\omega t) \qquad [V]$$

$$i(t) = 3 + 5 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 1 \cdot \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2} \cdot \sin\left(3\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \qquad [A]$$

3. Factorul de putere

$$k_p = \frac{P}{S} = \frac{24}{7{,}681 \cdot 4{,}796} = 0{,}651$$

4. Defazajul pentru armonicile fundamentale.

$$\cos\varphi_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$$

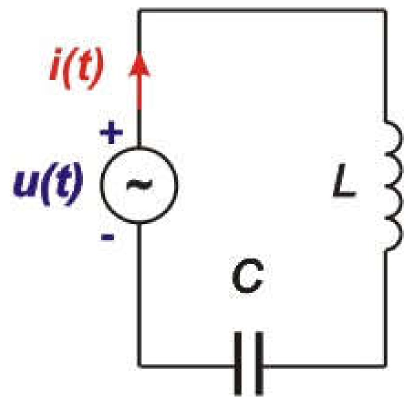
Rezolvarea reţelelor în regim nesinusoidal

Datorită prezenţei elementelor neliniare de circuit, tensiunile şi curenţi nu mai au formă sinusoidală. Ca urmare, devine necesară analiza circuitelor în regim nesinusoidal. **Rezolvarea acestui caz se poate face utilizând dezvoltarea în serie Fourier** şi **principiul superpoziţiei**.

Pentru fiecare armonică de tensiune, circuitul este rezolvat ca pentru regimul permanent sinusoidal, utilizând reprezentarea în complex, obţinând armonica corespunzătoare de curent pentru fiecare latură de circuit. Rezultatele se însumează corespunzător, obţinând curenţii nesinusoidali care circulă prin laturile reţelei.

Exemplu

Să se determine curenţii şi puterile absorbite de circuitul din figură, în care:



$$u(t) = 100 \cdot \sin 100t + 50 \cdot \sin 300t \,[\mathrm{V}] \qquad C = \frac{1}{3000}\,[\mathrm{F}] \qquad L = 0,05\,[\mathrm{H}]$$

Soluţie

Se va rezolva separat circuitul pentru fiecare armonică de tensiune:

$$u(t) = 100 \cdot \sin 100t + 50 \cdot \sin 300t \,[\mathrm{V}] = u_1(t) + u_3(t) \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = i_1(t) + i_3(t)$$

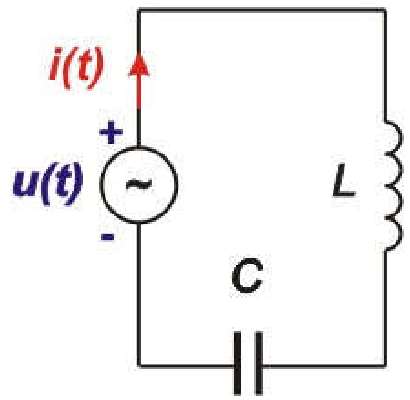
a) $u_1(t) = 100 \cdot \sin 100t$ Armonica de ordinul unu a tensiunii; $\underline{U}_1 = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0}$

$$\omega_1 = 100 = 2\pi f_1 \qquad \omega_1 L = 100 \cdot 0{,}05 = 5\,[\Omega] \qquad \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{3000}{100} = 30\,[\Omega]$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{j\omega_1 L + \frac{1}{j\omega_1 C}} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{j(5-30)} = 2\sqrt{2}\, j = 2\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$i_1(t) = 4 \cdot \sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right)[\mathrm{A}]$$ **Armonica de ordinul unu a curentului.**

$$u(t)=100\cdot\sin 100t+50\cdot\sin 300t\ [\mathrm{V}]=u_1(t)+u_3(t) \qquad i_1(t)=4\cdot\sin\left(100t+\frac{\pi}{2}\right)[\mathrm{A}]$$



b) $u_3(t)=50\cdot\sin 300t$ Armonica de ordinul trei; $\underline{U}_3=\frac{50}{\sqrt{2}}e^{j0}$

$$\omega_3=300=2\pi f_3 \qquad \omega_3 L=300\cdot 0{,}05=15\,[\Omega] \qquad \frac{1}{\omega_3 C}=\frac{3000}{300}=10\,[\Omega]$$

$$\underline{I}_3=\frac{\underline{U}_3}{j\omega_3 L+\frac{1}{j\omega_3 C}}=\frac{\frac{50}{\sqrt{2}}}{j(15-10)}=-\frac{10}{\sqrt{2}}j=\frac{10}{\sqrt{2}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$i_3(t)=10\cdot\sin\left(300t-\frac{\pi}{2}\right)[\mathrm{A}]$$ **Armonica de ordinul trei a curentului.**

Curentul prin circuit: $$i(t)=i_1(t)+i_3(t)=4\cdot\sin\left(100t+\frac{\pi}{2}\right)+10\cdot\sin\left(300t-\frac{\pi}{2}\right)[\mathrm{A}]$$

Valorile eficace ale tensiunii şi curentului:

$$u(t)=100\cdot\sin 100t+50\cdot\sin 300t\ [\mathrm{V}]=u_1(t)+u_3(t) \qquad U_1=\frac{100}{\sqrt{2}} \qquad U_3=\frac{50}{\sqrt{2}}$$

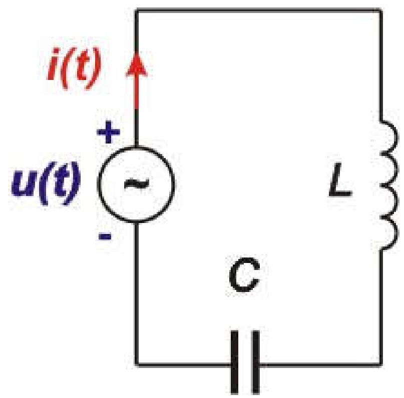
$$U=\sqrt{U_1^2+U_3^2}=50\sqrt{\frac{4+1}{2}}=50\sqrt{\frac{5}{2}}\,[\mathrm{V}]$$

$$i(t)=4\cdot\sin\left(100t+\frac{\pi}{2}\right)+10\cdot\sin\left(300t-\frac{\pi}{2}\right)[\mathrm{A}]=i_1(t)+i_3(t) \qquad I_1=\frac{4}{\sqrt{2}} \qquad I_3=\frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$I=\sqrt{I_1^2+I_3^2}=\sqrt{\frac{116}{2}}=\sqrt{58}\,[\mathrm{A}]$$

$$u(t)=100\cdot\sin 100t+50\cdot\sin 300t\ [\mathrm{V}]=u_1(t)+u_3(t)$$

$$i(t)=4\cdot\sin\left(100t+\frac{\pi}{2}\right)+10\cdot\sin\left(300t-\frac{\pi}{2}\right)[\mathrm{A}]=i_1(t)+i_3(t)$$



Puteri:

$$\varphi_1=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2} \qquad \varphi_3=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$P=\sum_{n=1}^{3}U_n\cdot I_n\cdot\cos\varphi_n=0$$

$$Q=\sum_{n=1}^{3}U_n\cdot I_n\cdot\sin\varphi_n=-U_1\cdot I_1+U_3\cdot I_3=-\frac{100}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{50}{\sqrt{2}}\cdot\frac{10}{\sqrt{2}}=50\ [\mathrm{var}]$$

$$S=U\cdot I=50\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{58}=50\sqrt{145}\ [\mathrm{VA}]$$

$$D=\sqrt{S^2-P^2-Q^2}=\sqrt{50^2\cdot 145-50^2}=50\cdot 12=600\ [\mathrm{vad}]$$

$$P=R\cdot I^2 \qquad R=0 \quad\Rightarrow\quad P=0$$

$$Q=\left(\omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}\right)\cdot I_1^2+\left(\omega_3 L-\frac{1}{\omega_3 C}\right)\cdot I_3^2=(5-30)\cdot\frac{16}{2}+(15-10)\cdot\frac{100}{2}=50\ [\mathrm{var}]$$

Factorul de distorsiune

Considerăm funcţia nesinusoidală:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot F_n \cdot \sin(n \cdot \omega_0 \cdot t + \theta_n)$$

Factorul de distorsiune este definit ca:

$$\boxed{K_d = \frac{\sqrt{F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \cdots}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \cdots}}}$$

Sau, folosind valoarea eficace: .

$$\boxed{K_d = \frac{\sqrt{F^2 - F_1^2 - F_0^2}}{\sqrt{F^2 - F_0^2}}}$$

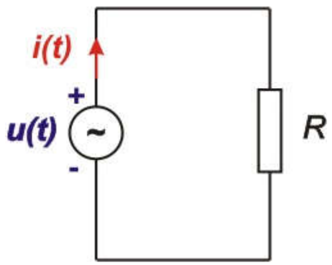
Factorul de distorsiune permite o apreciere a deformării funcţiei faţă de forma sinusoidală. În practică pentru o funcţie cu factor de distorsiune mai mic decât 0.05 (mai mic de 5%) funcţia este considerată practic sinusoidală.

Circuite simple în regim nesinusoidal

Considerăm tensiunea nesinusoidală ***u(t)***:

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot U_n\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\alpha_n) \qquad \text{cu} \qquad K_{d,u}=\frac{\sqrt{U_2^2+U_3^2+U_4^2+\cdots}}{\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2+\cdots}}$$

(a) Circuit pur rezistiv



Impedanţa circuitului nu depinde de frecvenţă.

Ecuaţia de tensiuni:

$$u=R\,i$$

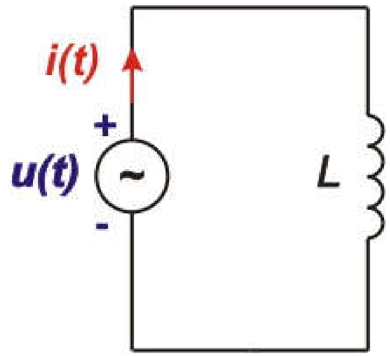
Rezultă curentul prin latură:

$$i(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\cdot\frac{U_n}{R}\cdot\sin(n\cdot\omega_0\cdot t+\alpha_n) \qquad \text{cu} \qquad K_{d,i}=\frac{\frac{1}{R}\sqrt{U_2^2+U_3^2+U_4^2+\cdots}}{\frac{1}{R}\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2+\cdots}}=\frac{\sqrt{U_2^2+U_3^2+U_4^2+\cdots}}{\sqrt{U_1^2+U_2^2+U_3^2+U_4^2+\cdots}}$$

$$\boxed{K_{d,i}=K_{d,u}}$$

Curentul şi tensiunea au aceeaşi formă

(b) Circuit pur inductiv



Dependenţa dinte tensiune şi curent este:

$$u = L\frac{di}{dt} \qquad \text{sau} \qquad i = \frac{1}{L}\int u(t)\,\mathrm{d}t$$

Impedanţa circuitului depinde de frecvenţă: $X_L = Z = \omega L$

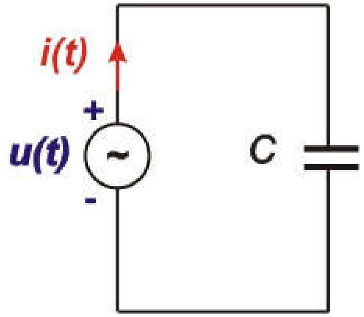
$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}\cdot\frac{U_n}{n\omega L}\cdot\sin\left(n\cdot\omega_0\cdot t + \alpha_n - \frac{\pi}{2}\right)$$

cu
$$K_{d,i} = \frac{\dfrac{1}{\omega L}\sqrt{\dfrac{U_2^2}{2^2}+\dfrac{U_3^2}{3^2}+\dfrac{U_4^2}{4^2}+\cdots}}{\dfrac{1}{\omega L}\sqrt{U_1^2+\dfrac{U_2^2}{2^2}+\dfrac{U_3^2}{3^2}+\dfrac{U_4^2}{4^2}+\cdots}} = \frac{\sqrt{\dfrac{U_2^2}{2^2}+\dfrac{U_3^2}{3^2}+\dfrac{U_4^2}{4^2}+\cdots}}{\sqrt{U_1^2+\dfrac{U_2^2}{2^2}+\dfrac{U_3^2}{3^2}+\dfrac{U_4^2}{4^2}+\cdots}}$$

Coeficientul de distorsiune al curentului este mai mic decât cel al tensiunii:

$$\boxed{K_{d,i} < K_{d,u}}$$

(c) Circuit pur capacitiv



Dependenţa dinte tensiune şi curent este:

$$i = C\frac{du}{dt}$$

Impedanţa circuitului depinde de frecvenţă: $X_C = Z_C = \dfrac{1}{\omega C}$

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \cdot n\omega C \cdot U_n \cdot \sin\left(n \cdot \omega_0 \cdot t + \alpha_n + \frac{\pi}{2}\right)$$

cu $$K_{d,i} = \frac{\omega C\sqrt{2^2 U_2^2 + 3^2 U_3^2 + 4^2 U_4^2 + \cdots}}{\omega C\sqrt{U_1^2 + 2^2 U_2^2 + 3^2 U_3^2 + 4^2 U_4^2 + \cdots}} = \frac{\sqrt{2^2 U_2^2 + 3^2 U_3^2 + 4^2 U_4^2 + \cdots}}{\sqrt{U_1^2 + 2^2 U_2^2 + 3^2 U_3^2 + 4^2 U_4^2 + \cdots}}$$

Coeficientul de distorsiune al curentului este mai mare decât cel al tensiunii:

$$\boxed{K_{d,i} > K_{d,u}}$$

Rezonanţa datorată armonicilor

Dacă tensiunea de alimentare este nesinusoidală este posibilă apariţia fenomenului de rezonanţă (serie sau paralel, după caz) corespunzător uneia dintre armonici. Ca urmare, rezultă o deformare mai accentuată a curentului absorbit şi pot apărea căderi de tensiune de valori periculoase pe bobinele şi condensatoarele din circuit.

Rezonanţa pentru armonica fundamentală se produce când:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Rezonanţa pentru armonica de ordinul 3 se produce când:

$$3\omega L = \frac{1}{3\omega C}$$

Rezonanţa pentru armonica de ordinul ***n*** se produce când:

$$\boxed{n\omega L = \frac{1}{n\omega C} \qquad \text{sau} \qquad n^2\omega^2 LC = 1}$$

Subiecte examen

1. In ce consta simetria pară la circuite in regim nesinusoidal.
2. In ce consta simetria impara la circuite in regim nesinusoidal.
3. In ce consta simetria pentru jumatate de perioada la circuite in regim nesinusoidal.
4. Circuit pur rezistiv în regim nesinusoidal (tensiune, curent, coeficient de distorsiune).
5. Circuit pur inductiv în regim nesinusoidal (tensiune, curent, coeficient de distorsiune).
6. Circuit pur capacitiv în regim nesinusoidal (tensiune, curent, coeficient de distorsiune).
7. Rezonanţa pentru armonica fundamentală/ de ordinul 3 / de ordinul n.