CURS 8

Circuite in regim tranzitoriu

În funcţionarea unui sistem intervin **perturbaţii** care determină ieşirea sistemului din regim stabilizat. Ca urmare, este necesară studierea comportării sistemului în cadrul producerii unor astfel de perturbaţii situaţie în care **sistemul funcţionează în sistem tranzitoriu**.

Exemplu de regim tranzitoriu: cuplarea unei laturi de circuit la sursă. Închiderea sau deschiderea unui întrerupător- declanşează un regim tranzitoriu.

Regimul permanent poate fi considerat ca un caz particular al unui regim tranzitoriu.

Pentru a rezolva regimul tranzitoriu al unei reţele electrice este necesară integrarea ecuţiilor diferenţiale care descriu funcţionarea reţelei. Pentru a efectua această integrare este necesară cunoaşterea **condiţiilor iniţiale** precum şi a unor condiţii referitoare la variaţia mărimilor care descriu funcţionarea sistemului ca urmare a producerii unei perturbaţii.

Regim tranzitoriu într-o latură de circuit care conţine o bobină

În acest caz este necesar să fie îndeplinită, la orice moment, legea inducţiei electromagnetice.

$$u_e = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

Din expresia legii rezultă că fluxul magnetic trebuie să fie o funcţie derivabilă adică trebuie să fie funcţie continuă.

Fluxul nu poate să varieze discontinuu.

$$\boxed{\Psi(t_0 - \varepsilon) = \Psi(t_0 + \varepsilon)}$$ (relaţia de continuitate a fluxului)

$$\Psi = Li$$

$$\boxed{i(t_0 - \varepsilon) = i(t_0 + \varepsilon)}$$

La producerea unei perturbaţii într-o latură de circuit care conţine bobină, curentul (respectiv fluxul magnetic) prin această latură nu poate varia discontinuu.

Regim tranzitoriu într-o latură de circuit care conţine un condensator.

Trebuie respectată legea conservării sarcinii electrice:

$$i = \pm \frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}t}$$

- dacă condensatorul se descarcă

\+ dacă condensatorul se încarcă

Sarcina electrică nu poate să varieze brusc pe armăturile unui condensator.

$$\boxed{q(t_0 - \varepsilon) = q(t_0 + \varepsilon)}$$

$$C = \frac{q}{u_c} \quad \rightarrow \quad u_c = \frac{q}{C}$$

$$\boxed{u_c(t_0 - \varepsilon) = u_c(t_0 + \varepsilon)}$$

Tensiunea între armăturile unui condensator nu poate să varieze discontinuu.

Dacă latura de circuit conţine şi *L* şi *C* atunci cele 2 condiţii se impun simultan.

Pentru rezolvarea circuitului în regim tranzitoriu pot fi folosite 3 metode:

1. Metoda integrării directe a ecuaţiilor diferenţiale care descriu funcţionarea circuitului. Poate fi aplicată doar pentru configuraţii simple datorită faptului că metoda presupune un volum foarte mare de calcule. Avantajul: pune în evidenţă şi permite explicarea fenomenelor care apar în regim tranzitoriu.

2. Metoda transformatei Laplace

- intră în categoria metodelor operaţionale adică este de acelaşi tip cu metoda reprezentării în complex a mărimilor sinusoidale.
-permite transformarea operaţiilor de derivare şi integrare în operaţii algebrice de înmulţire respectiv împărţire. Ca urmare, transformă sistemul de ecuaţii întegro-diferenţiale într-un sistem algebric. Metoda poate fi aplicată pentru orice grad de complexitate de reţea dar cu cât reţeaua este mai complicată cu atât volumul de calcule este mare.

3. Metoda integrării numerice a ecuaţiilor diferenţiale

- constă în rezolvarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale
- se poate aplica sistemelor de orice complexitate

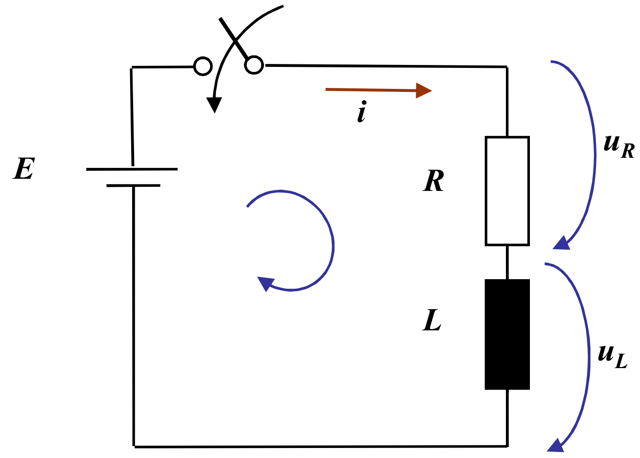
Metoda integrării directe a ecuaţiilor diferenţiale

Latură de circuit ***R L*** : cuplarea la o sursă constantă

Presupunem că la $\boldsymbol{t_0 = 0}$ se închide întrerupătorul.

Prin latura de circircuit se stabileşte un curent care urmează să fie determinat.

La orice moment este necesar ca tensiunea electromotoare ***E*** să fie egală cu suma căderilor de tensiune pe cele 2 elemente care formează circuitul.



$i(0) = 0$ condiţia initială

$$E = u_R + u_L = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E}$$

Ecuaţia de tensiuni care descrie funcţionarea laturii

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E$$

Pentru rezolvare se procedează în felul următor:

Funcţia necunoscută $\boldsymbol{i(t)}$ se descompune în 2 componente:

componentă liberă: $\boldsymbol{i_l(t)}$ datorată producerii regimului tranzitoriu, se obţine prin rezolvarea ecuaţiei diferenţiale **omogenă** (se obţine anulând membrul drept)

componentă permanentă: $\boldsymbol{i_p(t)}$ valoarea mărimii în regim permanent (stabilizat) se obţine prin rezolvarea ecuaţiei diferenţiale **neomogene**

$$\boxed{i(t)=i_\ell(t)+i_p(t)}$$

componenta liberă: $i_l(t)$

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0$$

Se caută soluţia sub forma unei exponenţiale $i=Ke^{rt}$

$$LrKe^{rt}+RKe^{rt}=0 \quad \Big|: Ke^{rt}$$

$$\boxed{Lr+R=0}$$

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale date

$$r=-\frac{R}{L} \qquad i_\ell(t)=Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

K = constantă de integrare care va fi deteterminată în continuare pe baza respectării condiţiilor iniţiale referitoare la această latură de circuit:

$$i(t_0-\varepsilon)=i(t_0+\varepsilon)$$

componentă permanentă: $i_p(t)$

- se determină din ecuaţia diferenţială neomogenă;

-se caută soluţia de regim permanent ca o soluţie particulară de forma membrului drept.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

Se caută o soluţie de forma unei constante: $i_p = A$

$$R \cdot A = E \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{E}{R}$$

$$\boxed{i_p(t) = \frac{E}{R}}$$

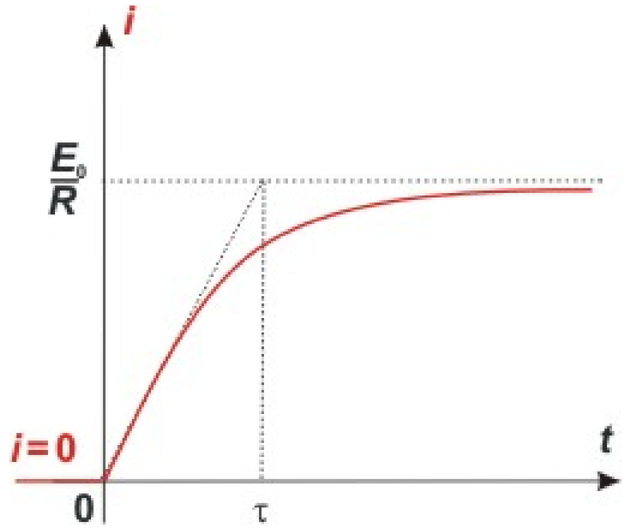
$$i(t) = i_\ell(t) + i_p(t) \qquad i_\ell(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} \qquad i_p(t) = \frac{E}{R}$$

$$\boxed{i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}}$$

Pentru determinarea constantei de integrare K, trebuie verificată condiţia iniţială $i(0) = 0$:

$$0 = K + \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{E}{R}$$

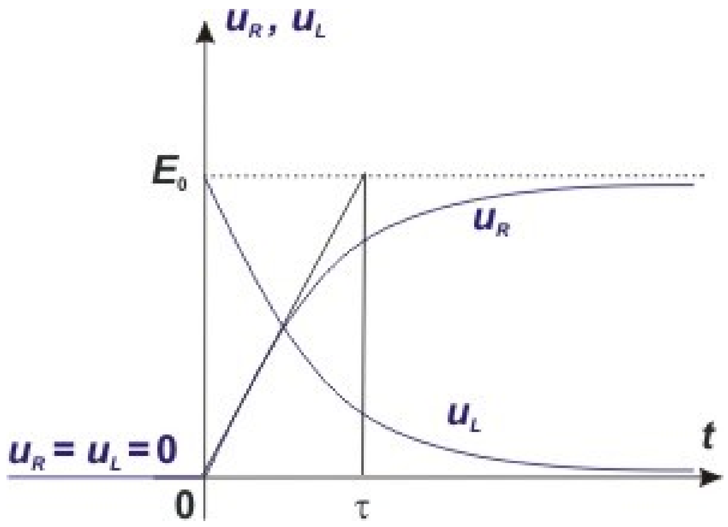
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$



$$u_R = Ri = E\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = Ee^{-\frac{R}{L}t}$$

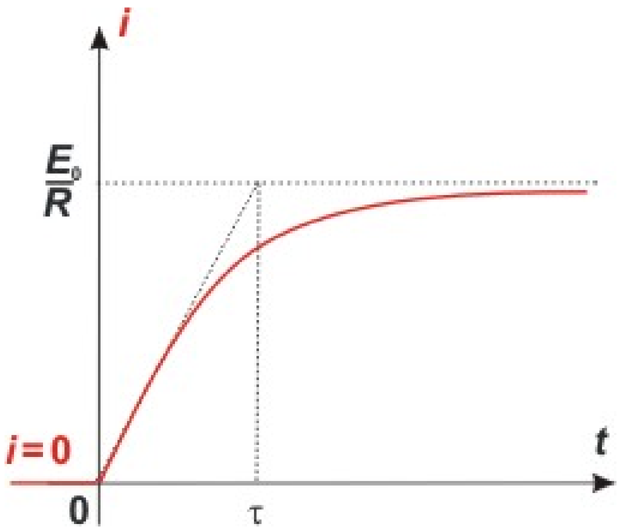
$$u_R + u_L = E$$



Tensiunea pe bobină are variaţie discontinuă spre deosebire de curent şi u_R

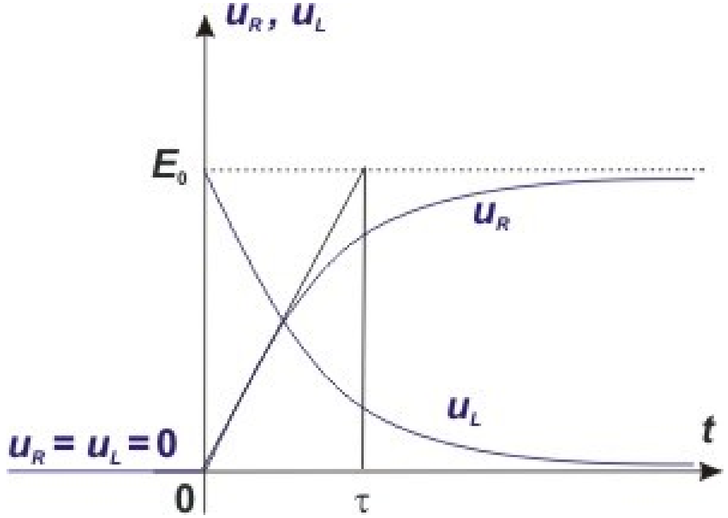
$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Prin **constanta de timp** (τ) se înţelege intervalul de timp în care s-ar atinge valoarea de regim stabilizat dacă curentul ar varia liniar după o dreaptă care este tangenta la grafic în punctul iniţial:



$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{E}{R}\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right|_{t=0}=\frac{E}{L}$$

$$\left.\begin{array}{l} i(t)=\dfrac{E}{R} \\[2ex] i(t)=\dfrac{E}{L}t \end{array}\right. \Rightarrow \quad \frac{E}{L}t=\frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau=\frac{L}{R}}$$

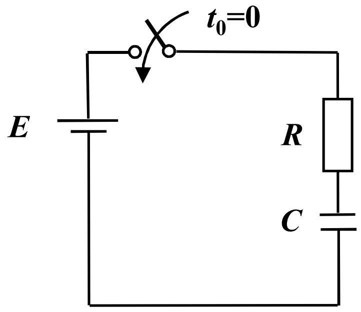


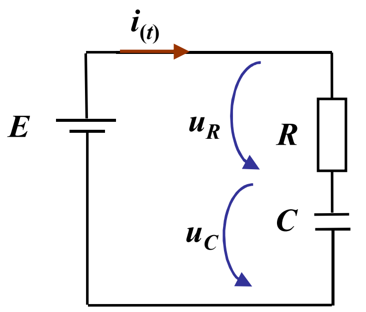
$$\frac{[H]}{[\Omega]}=\frac{\dfrac{Wb}{A}}{\dfrac{V}{A}}=\frac{V\cdot s}{V}=s$$

Se consideră regimul tranzitoriu încheiat după un interval de timp mai mare decât 3 constante de timp: $t>3\tau$

Latură de circuit *R C* : cuplarea la o sursă constantă

Presupunând că iniţial condensatorul nu e încărcat => tensiunea pe condensator este 0





$u_C(0) = 0$ condiţia initială

Tensiunea sursei se aplică laturii => încărcarea condensatorului.

$$E = u_R + u_C = Ri + u_C$$

Trebuie îndeplinită şi legea conservării sarcinii electrice: $i = \dfrac{dq}{dt}$

Expresia se ia cu + datorită faptului că are loc încărcarea condensatorului (– dacă era vorba de descărcarea condensatorului).

$$E = u_R + u_C = Ri + u_C \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_c}{dt} \qquad u_C = \frac{1}{C}\int i dt$$

Pentru a obţine o ecuaţie diferenţială trebuie să folosim ca necunoscută tensiunea u_c

$$E = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

Rezultă ecuaţia de tensiune a circuitului: $$\boxed{RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E}$$

$$\boxed{u_C(t) = u_{C\ell}(t) + u_{Cp}(t)}$$

componenta liberă: $u_{Cl}(t)$ $$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$RCr + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{1}{RC} \qquad \boxed{u_{C\ell} = Ke^{-\frac{1}{RC}t}}$$

componentă permanentă: $u_{Cp}(t)$

- se determină din ecuaţia diferenţială neomogenă;

-se caută soluţia de regim permanent ca o soluţie particulară de forma membrului drept.

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E \qquad u_{Cp}=A$$

$$A=E \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{Cp}=E}$$

$$u_C(t)=u_{C\ell}(t)+u_{Cp}(t)$$

$$u_C(t)=Ke^{-\frac{1}{RC}t}+E$$

$$0=K+E \quad \Rightarrow \quad K=-E$$

$$u_C(0)=0$$

$$\boxed{u_C(t)=E\left[1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right]}$$

Metodologie de rezolvare

1. Se rezolva reteaua pentru momentele t<0 (inainte de aparitia regimului tranzitoriu). Deoarece sursele sunt de curent continuu, se va rezolva o retea de c.c.➔bobinele nu se iau in calcul, iar condensatoarele sunt reprezentate ca fiind in circuit deschis.
   Se rezolova reteaua si se calculeaza curentii ce trec prin bobine si tensiunile pe condensatoare, acestea reprezentand de fapt valoriile initiale.

   $i(t_0-\varepsilon)$ – curentul intitial pe bobina

   $u(t_0-\varepsilon)$ – tensiunea initiala pe condensator

2. Se deseneaza schema pentru momentul t>0 (cand a inceput regimul tranzitoriu) si se scrie cu teorema a II-a a lui Kirchoff ecuatiile circuitului.
3. Dupa rezolovare, se obtine o ecuatie diferentiala, solutia gasita avand doi termeni:

$i(t)=i_l(t)+i_p(t)$

$i_l(t)$ – este solutia libera, reprezinta soluatia ecuatiei omogene (fara termeni liberi).

Metodologie de rezolvare

Solutia libera = o suma de termeni exponentiali.

$$i_l(t) = \sum_{k=1}^{n} K_k \cdot e^{r_k \cdot t}$$

n – reprezinta ordinul ecuatiei diferentiale;

K_k – reprezinta constante ce se vor determina din conditiile initiale ale problemei;

r_k– reprezinta solutiile ecuatiei caracteristice ce se obtine din ecuatia omogena, inlocuind derivata de ordin 1 cu **r**, de ordinul 2 cu $\mathbf{r^2}$ s.a.m.d.

Aceasta solutie de regim liber trebuie sa se amortizeze in timp (r_k<0).

$i_p(t)$ – este solutia permanenta, reprezinta solutia particulara a ecuatiei neomogene (are forma termenului liber).

$i_p(t) = A$ – constanta A se determina prin impunerea sa satisfaca solutia neomogena.

Metodologie de rezolvare

Conditii initiale necesare pentru determinarea C_k:

Daca circuitul are bobine (L), se impune ca fluxurile magnetice sa se conserve:

$$\Psi(t_0 - \varepsilon) = \Psi(t_0 + \varepsilon)$$
$$t < 0 \qquad\qquad t > 0$$

In cazul particular in care exista in circuit o singura bobina:

$$L \cdot i(t_0 - \varepsilon) = L \cdot i(t_0 + \varepsilon) \rightarrow i(t_0 - \varepsilon) = i(t_0 + \varepsilon)$$

Aceasta solutie de regim liber trebuie sa se amortizeze in timp ($r_k<0$).

$i(t_0 - \varepsilon)$ – a fost determinat la punctul 1;

$i(t_0 + \varepsilon)$ – se deduce din $\quad i(t) = \sum_{k=1}^{n} K_k \cdot e^{r_k \cdot t} + A \ (t = 0)$

Metodologie de rezolvare

Daca circuitul are condensatoare (C), conditia initiala este de conservare a sarcinii electrice: $q(t_0-\varepsilon)=q(t_0+\varepsilon)$

$$\sum K_k \cdot u_{ck}(t_0-\varepsilon)=\sum K_k \cdot u_{ck}(t_0+\varepsilon)$$

$u_{ck}(t_0-\varepsilon)$ – a fost determinat la punctul 1;

$i(t_0+\varepsilon)$ – se deduce din $u_{ck}(t)=u_{ck_l}(t)+u_{ck_p}(t) \quad (t=0)$

In cazul particular in care exista in circuit un singur condensator:

$$K \cdot u_c(t_0-\varepsilon)=K \cdot u_c(t_0+\varepsilon) \rightarrow u_c(t_0-\varepsilon)=u_c(t_0+\varepsilon)$$

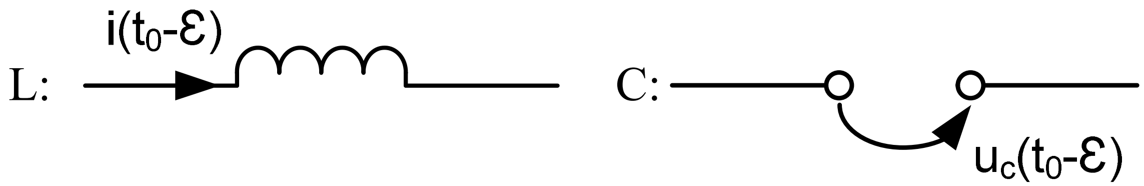
4. Se reprezinta grafic variatia curentului/tensiunii. In general, din grafic se pot determina si constantele de timp τ

$\tau=\left|\frac{1}{r}\right|$ Practic, timpul de regim tranzitoriu se considera a fi cuprins intre: $t_t \in (3 \div 5)\tau$

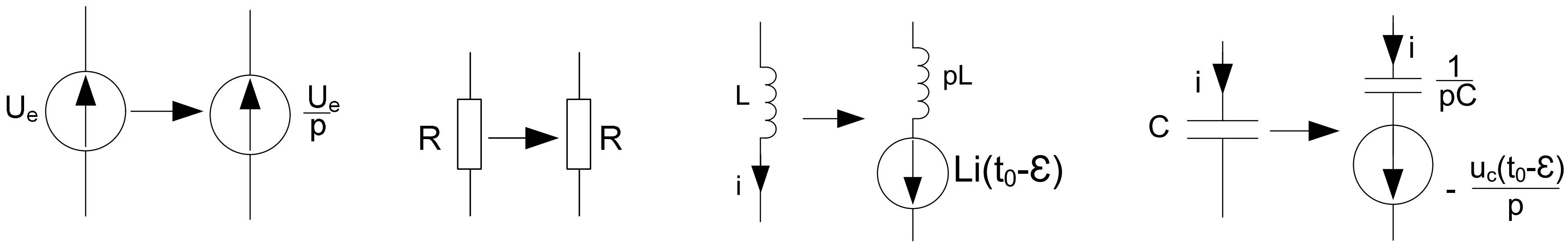
2. Metoda transformatei Laplace

Metodologie de rezolvare

1. Se determina conditiile initiale. Pentru aceasta se deseneaza schema la t<0. Sursa de tem este in regis stationar si ca urmare la t<0, circuitul este unul de curent continuu. Bobina nu exista, condensatorul este un circuit deschis. Se rezolva reteaua de c.c. si se determina pentru bobine $i(t) = i(t_0 - \varepsilon)$ iar pentru condensatoare $u_c(t) = u_c(t_0 - \varepsilon)$



2. Se realizeaza schema operationalaq a retelei pentru t>0. Sursa de tem se transforma intr-o sursa egala cu U_e/p, bobina se transforma tot intr-o bobina pL + o sursa $Li(t_0\text{-}\varepsilon)$ care are acelasi sens cu curentul *i*. Condensatorul se transforma tot intr-un condensator avand valoarea 1/pC + o sursa avand valoarea - $u_c(t_0\text{-}\varepsilon)$ /p. Rezistorul ramane la aceasi valoare.



Metodologie de rezolvare

Se determina curentii folosind teoremele lui Kirchoff. Curentii din laturi se noteaza cu litere mari si reprezinta transformatele laplace a curentilor din laturi. Prin rezolvarea sistemului de ecuatii, se obtin curentii din laturi:

$$I = \frac{P_1(p)}{P_2(p)}$$

In cazul problemelor de electrotehnica, gradul lui $P_1 <$ gradul lui P_2.

$$P_2(p) = 0 \quad p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n$$

rezulta solutii simple.

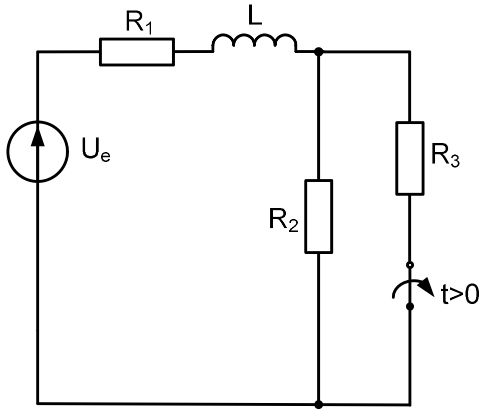
Valoarea curentului tranzitoriu i(t) se determina cu ajutorul teoremelor lui Heviside si exista 2 variante:

1. Toate radacinile sunt diferite de 0, $p_k \neq 0$:
$$i(t) = \sum_{1}^{n} \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}$$

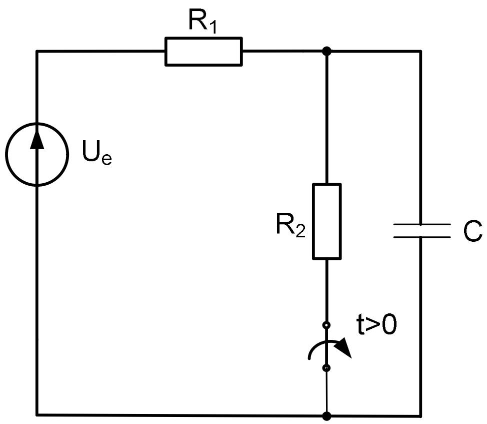
2. Cand o radacina este egala cu 0, $p_1 = 0$:
$$i(t) = \frac{P_1(0)}{P_3(0)} + \sum_{2}^{n} \frac{P_1(p_k)}{p_k \cdot P_3'(p_k)} \cdot e^{p_k \cdot t}$$
$$P_2(p) = p \cdot P_3(p)$$

Aplicatii

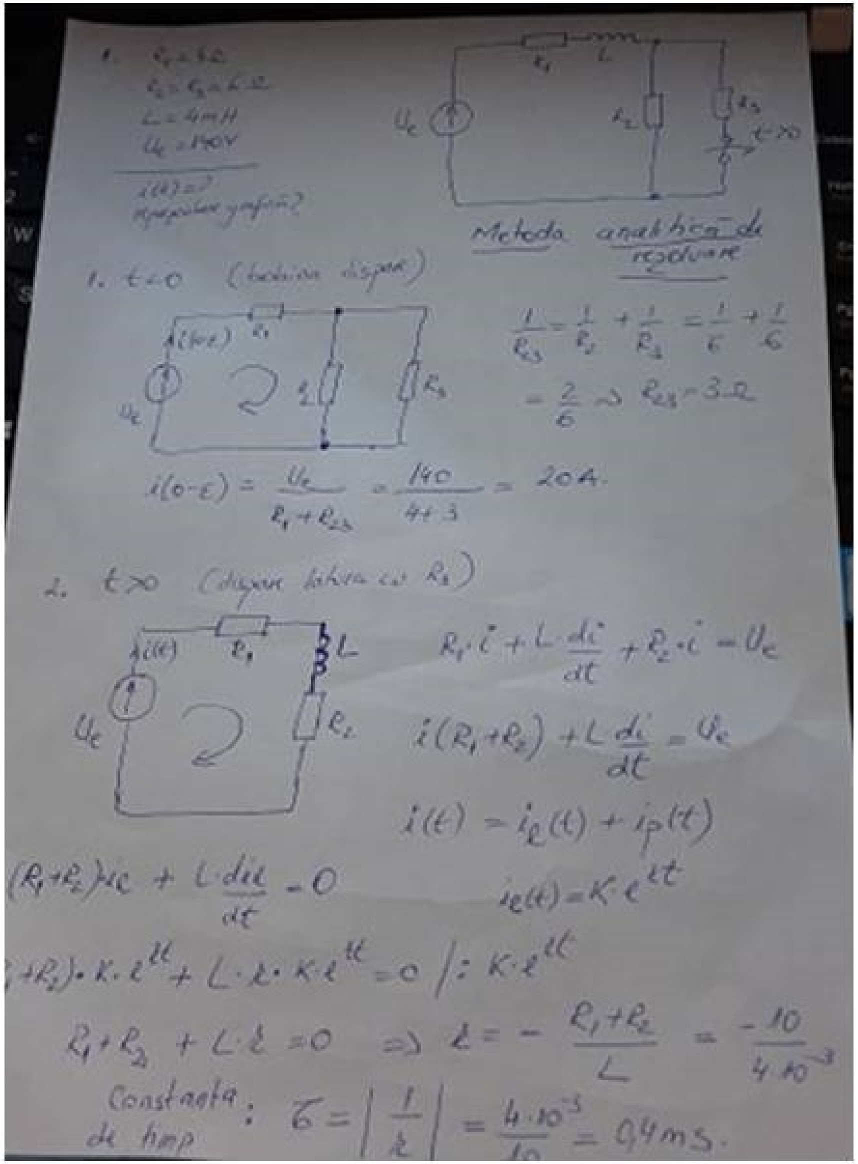
1. Sa se determine variatia curentului pentru reteaua de mai jos. Se cunosc: $R_1=4\Omega$, $R_2=R_3=6\Omega$, $L=4mH$, $U_e=140V$.



2. Sa se determine variatia curentului pentru reteaua de mai jos. Se cunosc: $R_1=3\Omega$, $R_2=7\Omega$, $C=3mF$, $U_e=200V$.



Metoda analitica



1. $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = R_3 = 6\Omega$, $L = 4mH$, $U_e = 140V$

$i(t) = ?$ reprezentare grafică?

Metoda analitică de rezolvare

1. $t<0$ (bobina dispare)

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \Rightarrow R_{23} = 3\Omega$$

$$i(0-\varepsilon) = \frac{U_e}{R_1 + R_{23}} = \frac{140}{4+3} = 20A$$

2. $t>0$ (dispare latura cu R_3)

$$R_1 \cdot i + L\frac{di}{dt} + R_2 \cdot i = U_e$$

$$i(R_1+R_2) + L\frac{di}{dt} = U_e$$

$$i(t) = i_l(t) + i_p(t)$$

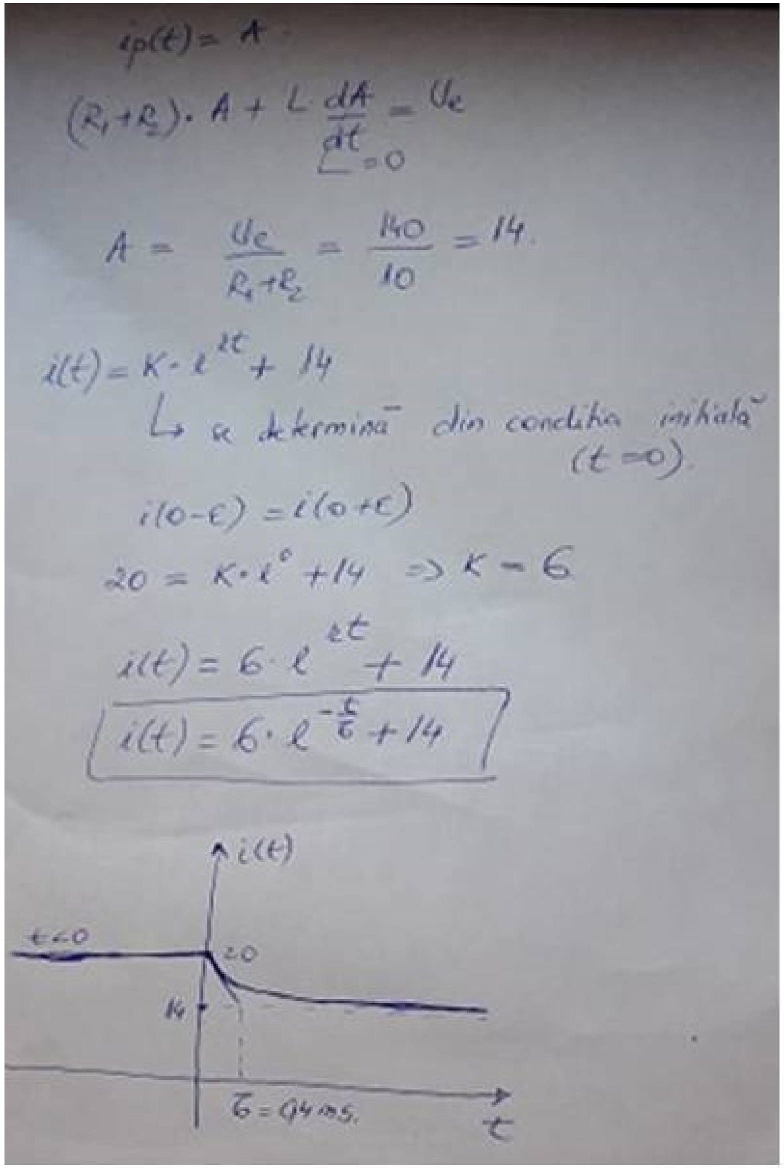
$$(R_1+R_2) i_l + L\frac{di_l}{dt} = 0$$

$$i_l(t) = K \cdot e^{rt}$$

$$(R_1+R_2) \cdot K \cdot e^{rt} + L \cdot r \cdot K \cdot e^{rt} = 0 \quad /: K \cdot e^{rt}$$

$$R_1 + R_2 + L \cdot r = 0 \Rightarrow r = -\frac{R_1+R_2}{L} = \frac{-10}{4 \cdot 10^{-3}}$$

Constanta de timp: $\tau = \left|\frac{1}{r}\right| = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{10} = 0{,}4ms$.



$i_p(t) = A$

$$(R_1+R_2) \cdot A + L\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{=0} = U_e$$

$$A = \frac{U_e}{R_1+R_2} = \frac{140}{10} = 14$$

$i(t) = K \cdot e^{rt} + 14$

↳ se determină din condiția inițială ($t=0$).

$$i(0-\varepsilon) = i(0+\varepsilon)$$

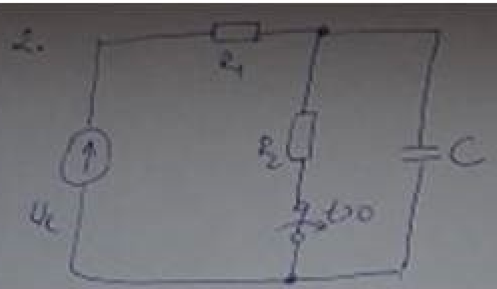
$$20 = K \cdot e^0 + 14 \Rightarrow K = 6$$

$$i(t) = 6 \cdot e^{rt} + 14$$

$$\boxed{i(t) = 6 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 14}$$

Metoda operationala

2.



$R_1 = 3\Omega$

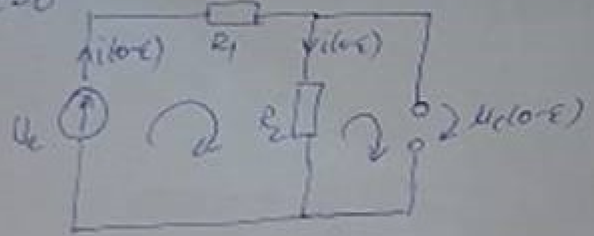
$R_2 = 7\Omega$

$C = 3mF$

$U_e = 200V$

Metoda operatională Laplace

$t<0$

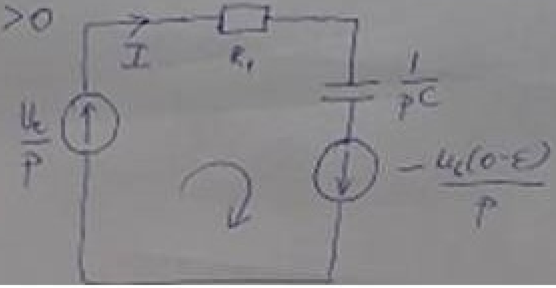


$$i(0-\varepsilon) = \frac{U_e}{R_1+R_2} = \frac{200}{10} = 20A.$$

$$0 = -R_2\cdot i(0-\varepsilon) + u_c(0-\varepsilon)$$

$$u_c(0-\varepsilon) = R_2\cdot i(0-\varepsilon) = 7\cdot 20 = 140V$$

$t>0$



$$I\left(R_1+\frac{1}{pC}\right) = \frac{U_e}{p} - \frac{u_c(0-\varepsilon)}{p}$$

$$I = \frac{\frac{U_e}{p} - \frac{u_c(0-\varepsilon)}{p}}{R_1+\frac{1}{pC}} = \frac{U_e - u_c(0-\varepsilon)}{p\left(R_1+\frac{1}{pC}\right)}$$

$$I = \frac{U_e - u_c(0-\varepsilon)}{p\cdot R_1 + \frac{1}{C}} = \frac{P_1(p)}{P_2(p)} \quad p_k \neq 0$$

$$\boxed{i(t) = \frac{P_1(p_k)}{P_2'(p_k)}\cdot e^{p_k\cdot t}}$$

$$P_2(p) = 0$$

$$p\cdot R_1 + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{R_1 C} = -\frac{1}{9\cdot 10^{-3}}$$

$$\tau = \left|\frac{1}{p}\right| = 9ms$$

$$P_2'(p) = R_1 = 3$$

$$P_1(p) = U_e - u_c(0-\varepsilon) = 200-140 = 60.$$

$$i(t) = \frac{60}{3}\cdot e^{pt} = 20\cdot e^{pt}$$