

Def: Un sir (x_n) de numere reale se numește

- mărginit inferior dacă multimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită inferior.
 - mărginit superior dacă multimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită superior.
 - mărginit dacă sirul este atât mărginit inferior cât și superior. În acest caz $\exists m, M \in \mathbb{R}$ a.î.
- $$m \leq x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Obs: Orice sir convergent este mărginit. Reciproc nu este adevărată.

Ex: $x_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Def: Un sir (x_n) de numere reale se numește

- crescător dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \geq n_0$
- descrecător dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \geq n_0$
- monoton dacă sirul este crescător sau descrecător.

Analog se introduc noțiunile de sir strict crescător, respectiv strict descrecător, înlocuind inegalitățile de mai sus cu inegalități stricte.

Ex: $x_n = \frac{2000^m}{m!}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2000^m}{m!} \cdot \frac{(m+1)!}{2000^{m+1}} = \frac{m+1}{2000} > 1, \forall n \geq 2000.$$

(Weierstrass)

Fie (x_n) sir de numere reale. Au loc afirmațiile

1º. Dacă (x_n) este crescător și mărginit inferior

$\Rightarrow (x_n)$ convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

2º. Dacă (x_n) este crescător și mărginit superior

$\Rightarrow (x_n)$ convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

3º. Dacă (x_n) este monoton și mărginit $\Rightarrow (x_n)$ convergent.

Denum: 1º. $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mărginită inferior $\Rightarrow \underline{x} = \inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} i) \underline{x} \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N} \\ ii) \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a. s. } x_{n_0} < \underline{x} + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \underline{x} < x_n + \varepsilon \quad (*)$

(x_n) crescător $\Rightarrow x_n \leq x_{n_0}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n < \underline{x} + \varepsilon, \forall n \geq n_0 \quad (**)$

Din $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow \underline{x} - \varepsilon < x_n < \underline{x} + \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n - \underline{x}| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{x} \Rightarrow (x_n)$ convergent

2º. analog (temă)

3º. evidentă.

Prop: Fie (x_n) sir de numere reale. Au loc afirmațiile

1º. Dacă (x_n) este crescător și nemărginit superior

$\Rightarrow (x_n)$ are limită $+\infty$

2º. Dacă (x_n) este crescător și nemărginit inferior

$\Rightarrow (x_n)$ are limită $-\infty$.

3º. Dacă (x_n) este monoton $\Rightarrow (x_n)$ are limită (limită sau nu)

Idee:

$$1^{\circ} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ a.i. } x_{m_0} > \varepsilon \quad \left. \begin{array}{l} (\{x_n\} \text{ crescător}) \Rightarrow x_n \geq x_{m_0}, \forall n \geq m_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_n > \varepsilon, \forall n \geq m_0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

2^o analog; 3^o evident.

I (criteriul dreptului)

Fie $(x_n), (y_n), (z_n)$ trei siruri de numere reale având următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} i) \quad & \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ a.i. } x_n \leq y_n \leq z_n, \forall n \geq m_0 \\ ii) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \stackrel{\text{mat}}{=} \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lambda. \end{aligned}$$

Dem: $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_1 \in \mathbb{N} \text{ a.i. } \forall n \geq m_1: |x_n - \lambda| < \varepsilon$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_2 \in \mathbb{N} \text{ a.i. } \forall n \geq m_2: |z_n - \lambda| < \varepsilon$$

$$\text{Avem } x_n - \lambda \leq y_n - \lambda \leq z_n - \lambda, \forall n \geq m_0$$

$$\left. \begin{array}{l} y_n - \lambda \leq z_n - \lambda \leq |z_n - \lambda| \leq \max \{ |x_n - \lambda|, |z_n - \lambda| \} \\ \lambda - y_n \leq \lambda - x_n \leq |x_n - \lambda| \leq \max \{ |x_n - \lambda|, |z_n - \lambda| \} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y_n - \lambda| \leq \max \{ |x_n - \lambda|, |z_n - \lambda| \}, \forall n \geq m_0$$

$$\Rightarrow |y_n - \lambda| < \varepsilon, \forall n \geq \max \{ m_0, m_1, m_2 \} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lambda.$$

Def: Fie (x_n) un sir de numere reale și $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ un sir infinit strict crescător de indici (numere naturale).

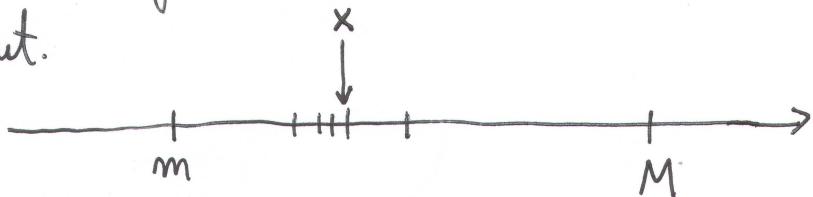
Sirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ se numește subseq al sirului (x_n) .

Ex: $x_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{2k} = 1$, $x_{2k+1} = -1$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Prop: Sirul (x_n) are limită $x \in \bar{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ Orice subseq al sirului (x_n) are limită x .

I (cesaro)

Orice sir mărginit de numere reale are un subseq convergent.



Def: Fie (x_n) un sir de numere reale. Multimea

$\text{LiM}(x_n) \stackrel{\text{nat}}{=} \left\{ x \in \bar{\mathbb{R}} \mid \exists (x_{n_k}) \text{ subseq al lui } (x_n) \text{ a.î. } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \right\}$

se numește multime punctelor limită ale sirului (x_n) .

Ex: $x_n = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{LiM}(x_n) = \{-1, 1\}$.

Prop: Pentru orice sir de numere reale (x_n) are loc

$$\text{LiM}(x_n) \neq \emptyset$$

Def: a) Numărul $\inf \text{LiM}(x_n)$ se numește limită inferioră a sirului (x_n) și se notează cu $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

b) Numărul $\sup \text{LiM}(x_n)$ se numește limită superioră a sirului (x_n) și se notează cu $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Prop: Fie (x_n) un sir de numere reale. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \bar{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Dem: Rezultă din echivalenta $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \text{LIM}(x_n) = \{x\}$

Def: Un sir (x_n) de numere reale se numește fundamental

dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.s. $\forall m, M \geq n_0 : |x_m - x_M| < \varepsilon$

Formularea este echivalentă cu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ a.s. } \forall M \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{M+p} - x_M| < \varepsilon$$

prin urmare $m = M+p \geq n_0$.

Prop: Orice sir fundamental este mărginit.

Dem: Pentru $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.s. $\forall m, M \geq n_0 : |x_m - x_M| < 1$.

$$|x_m| = |x_m - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_m - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|, \forall m \geq n_0$$

Dacă notăm $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x_{n_0}|\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow |x_m| \leq M, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow -M \leq x_m \leq M, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)$ mărginit.

Prop: Orice sir fundamental este convergent.

Dem: (x_n) fundamental $\Rightarrow (x_n)$ mărginit $\Rightarrow \exists (x_{n_k})$ un
subsir convergent.
Ceasare

Notăm $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k}$, deci

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}$ a.s. $\forall k \geq k_0 : |x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

(x_n) fundamental $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.s. $\forall m, M \geq n_0 : |x_m - x_M| < \varepsilon$

Alegem $m = n_k \geq k$ (căci $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$)

$$\Rightarrow |x_{m_k} - x_n| < \varepsilon, \forall k \geq m_0$$

Fie $\varepsilon > 0$ fixat și $k \geq \max\{k_0, m_0\}$ astfel

$$|x_n - x| = |\underbrace{x_n - x_{m_k}}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{x_{m_k} - x}_{\leq 2\varepsilon}| \leq |x_n - x_{m_k}| + |x_{m_k} - x| < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow (x_n)$ convergent la x .

Prop: Orice sir convergent este fundamental.

Item: Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, arătu

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq m_0 : |x_n - x| < \varepsilon$, astfel

$$\forall m, n \geq m_0 : |x_m - x_n| = |x_m - x + x - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow (x_n)$ fundamental.

I (Cauchy)

Un sir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este fundamental

Obs: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall n \geq m_0 : |x_n - x| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \forall m, n \geq m_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Ex: Natură sirului $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$?

(x_n) strict crescător $\Rightarrow (x_n)$ are limită

Este (x_n) mărginit superior ?

$$x_{10} \approx 2.1$$

Ariatām cā (x_n) nu este fundamental

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ a.i. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m, l \geq n$ a.i. $|x_m - x_l| \geq \varepsilon$

Alegem $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $m = 2n$, $l = n$, unde $n \in \mathbb{N}$ fixat.

$$\begin{aligned} |x_{2n} - x_n| &= \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \right| = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\text{m ori}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x_n)$ nu este convergent, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

3. Serii de numere reale

Fișe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sir de numere reale.

Def: a) Suma infinită $x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ se numește serie de numere reale asociată sirului (x_n) și se notează cu $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ sau $\sum_{n \geq 0} x_n$.

b) Sirul $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se numește sirul sumelor parțiale ale seriei.

c) Siria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se numește convergentă dacă sirul (S_n) este convergent. Limita $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ se numește

suma seriei și scriem $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S$

d) O serie care nu este convergentă se numește divergentă.