

Elemente de teoria haosului

4

Putem spune, de la bun început, că acest capitol va apela la maturitatea gândirii voastre. Vom încerca să prezentăm și să descriem fenomene pe care fizica le-a lăsat mult timp deoparte dar nu din cauza unei neglijențe, ci din cauza complexității fenomenelor și a lipsei unor teorii care să permită înțelegerea lor.

Vom merge mai departe încercând nu doar simplu să prezentăm fapte, ci să și „construim” noțiuni și teorii care

să permită înțelegerea acelor fenomene care au fost greu sau deloc inteligibile până acum. Este ca un voiaj într-un tărâm necunoscut, plin de surprize, în care gândirea (rațională) trebuie să lupte uneori cu „bunul simț fizic” construit în decursul contactului vostru cu lumea exterioară, de la cele mai fragede vârste, și întărit de către ceea ce ati învățat în școală sub denumirea de fizică clasăcă.

A. Determinism și predictibilitate

A.1. Determinismul

Determinismul și predictibilitatea sunt aspecte ale modului de gândire al științei moderne. Spunem că un fenomen care s-a petrecut este rezultatul sigur al unui ansamblu de cauze, și că dacă aceste cauze sunt prezente, fenomenul se va repeta în același fel. Astfel, determinismul poate fi considerat ca un principiu al științei, principiu care afirma că *aceleasi cauze produc aceleasi fenomene*. Altfel spus, cauza este punctul de plecare al schimbării. Acest principiu a fost statornicit după ce Isaac Newton (1642-1727), P. S. Laplace (1749-1827) și ceilalți fizicieni care au urmat (fig. 4.1-4.2), au arătat că mișcarea unui obiect (punct material sau ansamblu de puncte materiale) se va petrece la fel dacă condițiile initiale sunt aceleasi.



a.



b.

Fig. 4.1. Determinismul modern dezvoltat de către I. Newton (a) și P. S. Laplace (b).

În fizica clasăcă (respectiv mecanica clasăcă) se consideră că dacă sunt cunoscute poziția și viteza inițială a unui punct material, atunci traectoria și deci orice alte mărimi caracteristice (impulsul, energia) vor fi bine determinate la orice moment ulterior.



Fig. 4.2. I. Newton in filatelie

Un exemplu simplu este cel al *aruncării sub un unghi* (sau cazul particular al căderii corpuri la suprafața Pământului). Mecanica ne furnizează o serie de formule, pe baza legilor de mișcare, care ne permit să spunem la orice moment ulterior unde se va afla obiectul (punctul material).

Folosim în mod instinctiv acest principiu la oricare din jocurile care presupun aruncarea unei mingi (de fotbal, volei, tenis, biliard, popice etc.) dar și la atletism sau alte activități practice. În toate aceste cazuri, învățăm prin

antrenament și practică îndelungată să controlăm poziția noastră inițială, astfel încât să reproducem mișcarea perfect de fiecare dată, adică să fie controlabilă (deci *predictibilă*).

Determinismul poate fi examinat numai cu referire la cauze fizice care își produc cu necesitate efectele.

Spre exemplu, putem încerca să aplicăm *principiul determinismului* la viața noastră cea de toate zilele. Ne conducem în acțiunile noastre pe principiul determinismului: facem ceva care să fie cauză a unui eveniment dorit, sau care să preîntâmpine un eveniment nedorit. Suntem destul de convinși într-o măsură destul de mare că o serie de acțiuni ale noastre vor fi cauze ale unor evenimente ulterioare. Generalizând această afirmație, am putea spune că întreaga viață poate fi determinată de cauze mai mult sau mai puțin cunoscute. Cu alte cuvinte, suntem (uneori) convinși că „noi ne facem viață”, adică putem acționa eficient astfel încât rezultatele să depindă doar de noi. Suntem, altfel zis, agenți liberi capabili să facem anumite lucruri sau să ne abținem de la ele, în funcție doar de opțiunea noastră. Acest punct de vedere este cel al ideii de *liber-arbitru*, prin care acțiunile noastre sunt dictate

doar de vointa noastră. În opoziție cu aceasta, ar fi ideea de *determinism*, prin care noi nu avem acces la toate posibilitățile sau variantele, deoarece trăim într-o lume în care nu controlăm toate cauzele și prin urmare suntem „*controlați*” de cauze externe.

Aceste aspecte sunt de natură filosofică iar răspunsul la această dilemă legată de cât de liberi suntem să ne controlăm acțiunile și cât nu, poate să fie greu de precizat. Suntem însă siguri, mai ales după ce vom afla în ceea ce urmează, că avem „norocul” să trăim într-o lume în care avem control (partial) asupra acțiunilor noastre și deci nu suntem sub influența unei *predestinări absolute*, dar nici sub controlul *absolut* al liberului-arbitru. La aceasta contribuie într-un mod extrem de complex natura noastră fizică, chimică și biologică, dar și conceptele noastre morale, religioase, etice și structura socială în care trăim.

Este însă destul de sigur că fenomenele descriptibile după legile naturii au caracter de inevitabilitate absolută, adică acele fenomene care se supun legilor naturii prezintă un determinism total. Vom vedea mai încolo care sunt limitele acestei afirmații, limite pe care știința modernă le-a deslușit în mare parte.

A.2. Predictibilitatea

Pe baza determinismului exprimat prin legile naturii și pe care oamenii l-au deslușit în decursul istoriei, ca urmare a cercetării fenomenelor naturale, putem face o *predictie* a evoluției ulterioare a unui sistem fizic (cel mai simplu fiind punctul material). Până în cele din urmă această capacitate de predicție este și principala utilitate și valoare a științei.

Dezvoltarea fizicii moderne își datorează începiturile faptului că a înțeles că *verificarea experimentală a afirmațiilor este fundamentală*. Printre precursori putem enumera pe Galileo Galilei (1564-1642), și R. Descartes (1596-1650), figura 4.3.

Să intrăm puțin mai în amănunt în problema determinismului și mai ales a predictibilității.

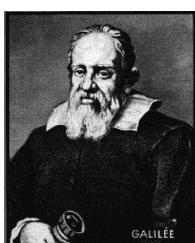


Fig. 4.3. Galileo Galilei (a) și (b) R. Descartes.

Suntem obișnuiți, chiar dacă nu ne dăm seama întotdeauna, ca explicațiile date de fizică, sau de alte științe, să se bazeze pe *modele „construite” de noi*. Cu alte cuvinte, teoriile noastre surprind realitatea fizică doar cu o oarecare precizie, limitată de neglijarea, de obicei, a unor aspecte considerate neesentiale. În această situație, *exactitatea* predicției este și ea limitată. Putem spune că *rezultatele predicției sunt doar aproximative*. Aproximația făcută la construirea modelelor se va reperca asupra aproximăției cu care se vor obține rezultatele predicției. Soluția pentru îmbunătățirea exactității predicției constă în îmbunătățirea modelelor cu care lucrăm. Aceasta se poate obține dacă fenomenele sunt mai îndelung și mai atent studiate.

O altă cauză a preciziei limitate a predicțiilor o constituie *cunoașterea doar cu aproximatie a condițiilor initiale* și respectiv a *valorilor mărimilor* care intervin în calculele predicției.

Dacă îmbunătățirea modelelor este o operație de lungă durată, obținerea de date mai precise, mai exacte, este, în anumite limite, ceva mai ușor de realizat. Spre exemplu, putem face mai multe măsurători asupra mărimilor initiale, astfel încât să reducem sensibil erorile de cunoaștere a acestora. Dar și îmbunătățirea preciziei aparatelor de

măsură va conduce la o predicție mai exactă. Suntem astfel conduși la o concluzie destul de firească, și anume că putem crește oricât de mult dorim precizia prognozelor.

Din păcate, așa ceva nu se obține întotdeauna. Unul dintre exemplele cele mai evidente este acela legat de *predicția vremii*. Există astăzi nenumărate laboratoare și centre meteorologice peste tot pe Pământ. Cu toate acestea, pre- zicerea vremii se face cu o aproximatie destul de bună doar pentru un interval de una-două zile în avans, dar devine tot mai slabă, adică mai puțin precisă, dacă ne referim la o prognoză de mai lungă durată, cum ar fi o săptămână, o lună, un an sau câțiva ani. Ori, această predicție este vitală pentru soarta omului și totuși eforturile nu sunt încununate de succese pe măsură. Oare de ce? Iată încă una dintre întrebările la care vom căuta să răspundem în cele ce urmează.

Să luăm un exemplu simplu.

Căderea unui corp

Căderea corpurilor este studiată la mecanică de foarte mult timp, și cu toții cunoaștem relația faimoasă a lui Galilei (fig. 4.4) privind căderea corpurilor:

$$v^2 = 2gh \text{ sau } h = \frac{v^2}{2g} \quad (1)$$

unde v este viteza, g este acceleratia gravitațională iar h este înălțimea. În cuvinte am spune că dacă dorim ca un obiect să fie aruncat astfel încât să ajungă până la înălțimea h , atunci trebuie să-i imprimăm o viteză care se calculează din relația de mai sus.

Condiția inițială pentru această problemă va fi deci viteza inițială necesară unui obiect pentru a ajunge la înălțimea h .



Fig. 4.4. Turnul din Pisa, Italia, unde se spune că Galileo Galilei ar fi făcut experimentele privind căderea corpurilor în câmp gravitațional (a) și un timbru care evocă pe marele om de știință (b).

Dacă viteza inițială este mai mică sau mai mare ca aceea rezultată din relația anterioară, obiectul fie nu va ajunge, fie va depăși înălțimea h . Să vedem ce eroare facem în privința predicției legate de înălțimea la care va ajunge obiectul. Dacă se presupune că înălțimea la care dorim să ajungă obiectul este de 12,80 metri (aproximativ etajul patru al unei clădiri) este nevoie să aruncăm obiectul cu viteza inițială de 16,00 m/s (pentru simplificarea calculelor am ales pentru g valoarea de 10,00 m/s²). Să presupunem că am greșit viteza inițială și aruncăm cu 15,9 m/s. Până la ce înălțime va ajunge obiectul? Calculul direct ne dă 12,64 m. Cu alte cuvinte, o eroare de 0,1 m/s a condus la o eroare de 16 cm. Această eroare poate fi mică sau mare, după cum este problema dată. Dacă, spre exemplu, miza acestei aruncări este ca un om de la etajul al IV-lea să prindă o funie aruncată de cineva de la sol pentru a se putea salva, de exemplu, de la un incendiu, această eroare îl poate fi fatală! În alte situații, această eroare este neglijabilă. Dar importanța principală este că o eroare în condițiile inițiale poate conduce la o eroare de *predicție* care uneori este gravă. Modelul nostru este destul de corect (suntem la suprafața Pământului și, să zicem că putem neglija frecarea și că obiectul aruncat poate fi considerat punct material). Rezultă că, cel puțin pentru exemplul simplu de față, putem să controlăm fenomenul, căci micsorând imprecizia în viteza inițială putem spune că obiectul va ajunge cu bine la etajul al IV-lea. Am putea imagina o situație în care predicția noastră să dea greș, și anume, să presupunem că exact atunci când aruncăm apare o pală de vânt puternică care deplasează obiectul sau îl duce mai sus (sau mai jos). Spunem că o astfel de situație a fost *nepredictibilă*, adică a fost o *întâmplare*, dar că *în mod normal* (condiții inițiale riguroz fixate) așa ceva nu s-ar fi întâmplat. Spunem atunci, pe baza experienței noastre de toate zilele (uneori denumit *bun simț fizic*) că:

mici variații ale condițiilor inițiale (erori) conduc la mici variații (erori) ale predicției finale!

Pe această *rezumție*, sau, altfel spus, *ipoteză*, se bazează toată fizica clasica. Până de curând această afirmație nu a fost contestată sau pusă la îndoială. În ultimul timp (ultimii 40 de ani) s-a constatat că afirmația de mai sus nu este corectă. Pentru unele dintre fenomenele de toate zilele, această lipsă de precizie a predicției este neglijabil de mică și eroarea finală este neimportantă din punct de vedere practic. Dar așa cum am amintit, ea devine supărătoare, spre exemplu, în cazul predicției vremii (prognoza meteorologică).

A.3. Limitele predictibilității

Cele discutate mai sus aruncă o umbră asupra capacitatei noastre de predicție a desfășurării unor fenomene fizice și ne generează o insatisfacție legitimă. În fond, știința trebuie să ne furnizeze predicții cât mai riguroase, căci altfel nu este știință! Există trei mari puncte de cotitură care au schimbat modul nostru de gândire în decursul secolului al XX-lea. Care sunt?! Fizica are altă față acum. Să încercăm să o înțelegem.

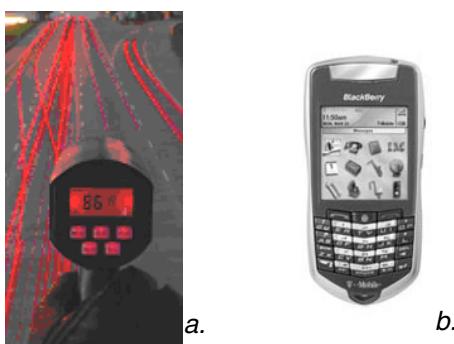


Fig. 4.5. Aplicații ale noilor teorii: radarul (a), telefonia mobilă (b)

De la începutul secolului al XX-lea, asistăm la o schimbare treptată a modului în care interpretăm fenomenele fizice. Aceste schimbări altereză imaginea standard a gândirii noastre fizice. Spre exemplu, *teoria relativității (restrânsă)* dezvoltată de o serie de fizicieni, și în final organizată într-o teorie coerentă de A. Einstein, ne-a produs, spre exemplu, o surpriză neplăcută, aceea a dispariției conceptelor de spațiu și timp absolut.

Cu alte cuvinte, putem spune fără să greşim că fiecare „are timpul său” în funcție de cum se mișcă (unul față de altul), astfel că în epoca începuturilor călătoriilor spațiale avem probleme cu modul în care se desfășoară evenimentele (măsurate cu ceasornicile) pe Pământ și pe navele cosmice (interstelare!). Mai în serios, mai în glumă, conform noilor idei, am putea să avem probleme cu modul în care ne dăm întâlnire într-un loc și la un moment dat de timp; s-ar putea să nu ne găsim la același moment în locul stabilit sau să fim la momentul potrivit dar în locuri diferite! Începe să apără o lipsă de predictibilitate dacă nu știm să calculăm bine!

În prima jumătate a secolului al XX-lea, a apărut o teorie a fenomenelor la scară microscopică: *mecanica cuantică*. Mecanica cuantică ne arată că în domeniul atomilor, nucleelor sau particulelor, imprecizia, predictibilitatea și

determinismul suferă mari schimbări. Începem să ajungem la concluzia că determinismul în sensul discutat în fizica clasică, își pierde sensul. Lipsa de predictibilitate în sens clasic este un fapt care trebuie acceptat cu toată neplăcerea pe care ne-o produce. Spre exemplu, nu are sens să ne punem întrebarea „care este traекторia unui electron în atom”.

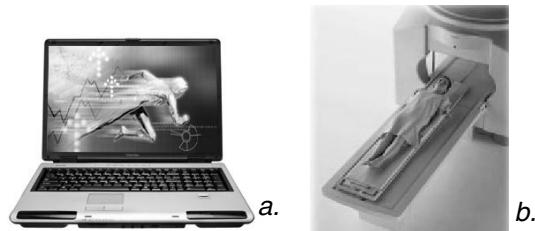


Fig. 4.6. Aplicații ale noilor teorii: calculatorul modern (a) și diagnosticul prin rezonanță magnetică nucleară (b).

Considerăm astăzi că mecanica cuantică, permite să se prevadă *tot ce se poate spune despre un fenomen fizic* (adică ne dă maximul de informație posibil) și că prevederile ei sunt riguros confirmate de experimente. Mecanica cuantică descrie fenomenele din domeniul microcosmosului și ne spune că unpredictibilitatea la acest nivel nu este întâmplătoare (ca în exemplul cu pala de vânt) ci este intrinsecă fenomenelor. Nu puteam scăpa de ea nici prin înmulțirea numărului de măsurători și nici prin mărire precizia lor! În schimb, ne spune că predictibilitatea se realizează la nivel de calcul al șansei ca un fenomen să se petreacă. Mecanica cuantică ne poate da valoarea acestei șanse sub formă de probabilitate. Ca atare ea ne permite realizarea predicțiilor. Cele mai convingătoare argumente în acest sens sunt marea majoritate a dezvoltărilor tehnologice moderne de care beneficiem acum.

Ca exemple pot fi radioul și televiziunea, dispozitivele semiconductoare și calculatoarele, radarul (fig. 4.5), laserul, dispozitivele cu cristale lichide, sistemele de poziționare globală (GPS), cupoarele cu microunde, vopsele, catalizatorii, medicamentele, sistemele de diagnoză cu radiatii X, gama, sau rezonanță magnetică (fig. 4.6-4.7) și lista poate să continue încă mult înainte. Realitatea este că nici nu ne dăm seama cât de bine știu azi fizicienii și oamenii de știință să se descurce cu „lipsa de predictibilitate clasică”.

În fine, aspectele pe care le vom descrie pe scurt în cele ce urmează vor scoate în evidență cea de a treia direcție

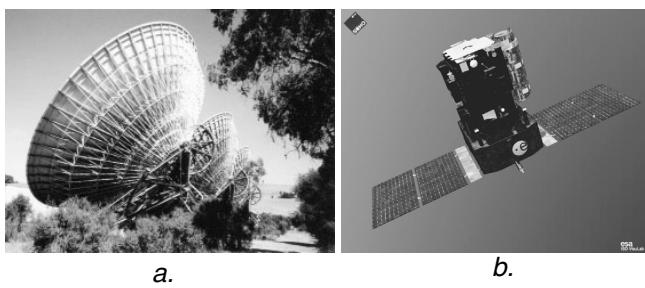


Fig. 4.7. (a) Radiotelescop; (b) Satelit de urmărire a Soarelui, SOHO.

a științei prezentului, care dă o lovitură „sub centură” noțiunilor clasice de determinism, predictibilitate și tot ce rezultă de aici.

Tot ce rezultă de aici este de fapt o și mai bună cunoaștere a realității, o și mai serioasă capacitate a noastră de a descrie fenomenele și, în ultimă instantă, de a folosi acestea

Alte provocări

1. Știm în linii mari cum se formează norii (fig. 4.6), dar oare de ce au formele pe care le vedem?



Fig. 4.8. Nori cumulus, de vreme frumoasă.

2. Știm ce înseamnă un trăsnet, dar de ce are el o formă în zigzag, sau de ce se ramifică?



Fig. 4.9. Trăsnet care loveste un copac.

pentru a realiza produse, tehnologii, facilități pentru viața de toate zilele, dar și o mai bună și mai completă cunoaștere a realității. Apare o perspectivă nouă, care oarecum este supărătoare, și anume că imaginea simplă sau cel puțin considerată de către noi ca fiind simplă a naturii se înlocuiește cu una mult mai complicată și uneori mult mai puțin familiară nouă, dar sigur mai corectă.

În această nouă direcție sunt cuprinse diferite teorii, cum sunt: *teoria haosului*, *teoria complexității*, sau *teoria sistemelor dinamice neliniare*. *Teoria fractalilor*, *teoria catastrofelor*, *teoria percolăției*, *teoria turbulentei* și.m.d. sunt aspecte ale teoriilor mai sus enunțate.

În cele ce urmează vom face cunoștință cu elemente ale acestor teorii și cu modul în care apar ele în viața noastră de toate zilele.

Încercați să vă gândiți și să răspundeți la următoarele întrebări:

3. Știm cum se mișcă corpurile cerești în jurul Soarelui (planete, comete, asteroizi) dar ne este greu să apreciem dacă vom fi loviți sau nu de către un asteroid, chiar dacă îl depistăm din timp și îi cunoaștem poziția și viteza la un moment dat. De ce?

4. Știm ce înseamnă un cutremur, dar ne este aproape imposibil să-l prevedem. De ce?

5. Știm ce înseamnă o prognoză meteorologică și știm multe despre atmosfera Pământului, dar ne este aproape imposibil să prevedem vremea cu precizie. De ce (fig. 4.10)?



Fig. 4.10. Hartă meteorologică a Europei: fronturi.

6. Știm că râurile curg la vale, colectează pâraiele și se varsă în râuri mai mari sau în mări și oceane. Putem descrie multe din comportamentele acestor râuri, cum ar fi debitul și viteza apei, eroarea malurilor dar nu știm de ce râurile prezintă meandre (fig. 4.11)?



Fig. 4.9. Meandre pe Amazon.

Încercați să depistați acele elemente care ne fac dificil răspunsul la întrebările de mai sus.

Atât timp cât ne vom referi la modele simple, asemănătoare cu cele descrise în manualele standard, predictibilitatea este asigurată de utilizarea unor legii fizice date. De asemenea, exemplele din manuale sunt alese astfel încât să poată prezenta rezultate pe care le putem observa și deci verifica în realitatea cotidiană. Dacă însă luăm în considerare cele discutate anterior, predictibilitatea este legată și de precizia cu care dorim să obținem predicția respectivă.

B. Determinism și impredictibilitate

B.1. Sisteme impredictibile

Ceea ce este important este să nu se confundă aspectele pe care le vom discuta în continuare cu dificultățile pe care le avem în studiul unor fenomene, dificultăți care sunt determinate de complexitatea fenomenelor, sau de lipsa unor modele adecvate, sau de intervenția unor factori necontrolabili (aleatori) sau de lipsa unei teorii matematice adecvate. Vom vedea că *fenomenele haotice* de care ne vom ocupa nu intră în niciuna din categoriile de mai sus.

În acest scop, să analizăm o situație pe care o cunoaștem deja și anume, *comportarea unui gaz (ideal) aflat într-o incintă*. Legea generală a gazelor de dă următoarea expresie matematică pentru parametrii care determină starea gazului:

$$P V = n R T.$$

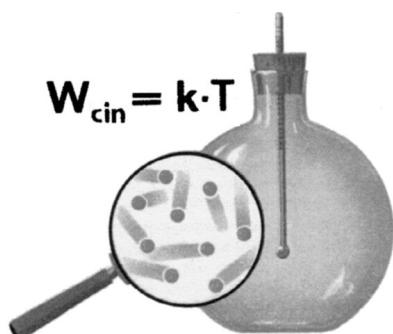


Fig. 4.12. Haosul molecular.

Formula gazelor redă aspectul macroscopic al unor fenomene microscopice: ciocnirile successive și la întâmplare ale moleculelor gazului din recipient (fig. 4.10). Din punct de vedere microscopic, fiecare ciocnire este la întâmplare, dar în același timp este independentă de

celelalte ciocniri. În recipient domnește astfel un *haos*, aşa cum l-a văzut Boltzmann. Acesta este aşa numitul *haos clasic*, în care nici o viteza, direcție sau moleculă nu este privilegiată. În interpretarea lui Boltzmann, *presiunea* este rezultatul ciocnirilor moleculelor cu peretii, și anume, media în timp a variației impulsului transferat de molecule la ciocnirile cu peretii. Variația de impuls în unitate de timp este o *forță*, iar dacă aceasta este raportată la aria peretelui definește presiunea P din formula de mai sus. Energia totală cinetică, medie, a mișcării dezordonate a moleculelor (dintr-un mol de gaz) este, din punctul de vedere al lui Boltzmann, o mărime care poate fi măsurată macroscopic și a fost denumită *temperatură termodinamică*. Legea generală a gazelor, de mai sus, în interpretarea lui Boltzmann, exprimă proporționalitatea dintre presiune și temperatură, ambele fiind mărimi statistice *medii*. Ca atare, relația generală a gazelor este o relație statistică între valori medii. Ea exprimă astfel un *determinism statistic* și nu mecanic (clasic), cu toate că se bazează pe mecanică, adică pe ciocnirile elastice dintre molecule (punctiforme) pentru care legile de conservare a energiei și a impulsului sunt valabile. Presupunerea (ipoteza) fundamentală a lui Boltzmann este aceea că, în incintă domnește un *haos complet* care definește *echilibrul termodinamic*. Dacă acest echilibru nu există, atunci nici temperatura și nici presiunea nu mai sunt mărimi bune (valide) pentru a descrie starea gazului. Ceea ce este uimitor aici este faptul că *indiferent cum se ciocnesc moleculele din gaz, relația de mai sus rămâne valabilă!* În realitate, egalitatea dintre membrul din dreapta și membrul din stânga relației nu este perfectă, ci doar *în medie*. Adică, putem avea momente

în care membrul drept să fie mai mare sau mai mic ca cel din dreapta. Acest aspect definește o relație (o lege) statistică (clasică).

Aspecte haotice în mișcarea a trei coruri sub influența forțelor gravitaționale se poate vedea în figura 4.13 și care a fost obținută folosind un program de calcul al mișcării corurilor în câmp gravitațional. Cele două coruri massive A și B se consideră ca fiind fixe (și sunt și punctiforme; în imagine sunt desenate mai mari pentru a le putea vedea mai ușor). Un alt obiect mult mai mic, notat cu a, intră în câmpul celor două coruri. Traекторia, cu totul neașteptată și deci imprevizibilă, este reprezentată în continuare.

Ne putem imagina această situație realizată în cazul a trei coruri reale: Soare, Jupiter și un asteroid. Avem imediat imaginea nepredictibilității asteroizilor și deci

dificultatea de a prezice traectoria lor pe termen lung, și mai ales răspunsul la întrebarea: va intersecta acest asteroid traectoria Pământului? Dacă da, când anume?

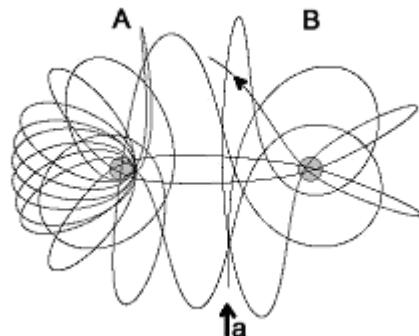


Fig. 4.11. Mișcarea haotică a trei coruri

C. Descrierea comportamentului haotic. Spațiul fazelor

C.1. Spațiul fazelor

Spațiul fazelor este un mod de a vizualiza starea unui sistem. Dacă dorim să vizualizăm *traiectoria* mișcării unui corp, vom scrie ecuațiile de mișcare (să zicem pentru o mișcare în plan) pe axele ox și pe oy și din cele două ecuații vom elimina variabila timp. În spațiul fazelor vizualizăm nu *traiectoria* corpului (adică dependența coordonatei x de coordonata y) ci dependența impulsului de coordonată. În fizică se lucrează cu reprezentarea mișcării în planul impuls-coordonată din următorul motiv: orice mișcare mecanică poate fi urmărită și ca o succesiune de modificări ale energiei cinetice și a energiei potențiale. Pe de altă parte, energia cinetică este determinată de viteza (impulsul) obiectului iar energia potențială de poziția obiectului. A descrie mișcarea urmărind energia cinetică (impulsul) și energia potențială (poziția) este convenabil, căci energia totală se conservă. Astfel, într-o reprezentare impuls-pozitie se poate urmări mai bine starea, respectiv energia obiectului. Pentru clarificare să luăm câteva exemple.

a) Căderea unui corp descrisă în spațiul fazelor

Relația care descrie căderea unui corp leagă *spațiul* descris de corp în cădere de timp. Căderea este verticală și dacă luăm originea în punctul de la care lăsăm corpul să cadă vom avea axa ox vertical în jos, iar ecuațiile spațiului și ale vitezei vor fi

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \text{ și } v = gt. \quad (2)$$

Dacă neglijăm frecarea, pe tot parcursul căderii energia totală (mecanică) se va conserva, adică vom avea relația

$$\frac{p^2}{2m} = mgx \quad (3)$$

unde $p = m \cdot v$ este impulsul obiectului, g este accelerarea gravitației iar x este distanța parcursă de corp de la lansarea pe verticală. Ca să descriem această mișcare în spațiul fazelor, vom desena graficul impuls – distanță. De exemplu, pentru un corp de 1kg, care cade de la 20 m la suprafața Pământului ($g = 10 \text{ m/s}^2$) acest grafic este prezentat în figura 4.14.

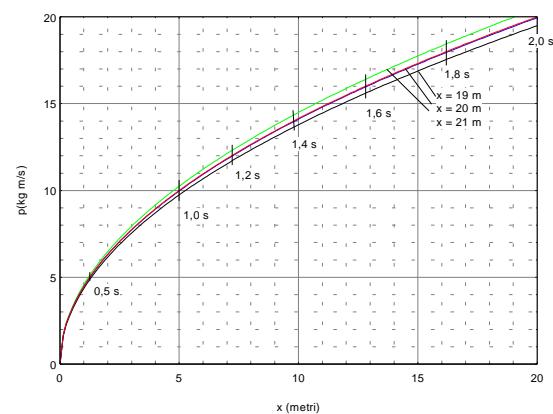


Fig. 4.14. Traietoria în spațiul fazelor pentru căderea unui corp.

Stările succesive ale corpului care cade sunt parcurse de la poziția inițială ($x = 0$) la cea finală ($x = 19\text{ m}$, 20 m și 21 m) și vizualizate pe curba traectoriei în spațiul fazelor. Dacă dorim, putem marca pe traекторie și unele momente de timp (calculate din ecuația de mișcare) astfel încât să putem urmări și momentele stărilor în succesiunea lor (pe grafic sunt trecute în fracții de secundă). Se observă că parcurgerea traectoriei în spațiul fazelor se face prin *stări successive*, din aproape în aproape, ordonate de la stânga spre dreapta. Această observație va fi importantă pentru analiza de mai târziu. De asemenea, pe grafic s-au prezentat pe lângă traectoria în spațiul fazelor a corpului care cade de la 20 m și cea a căderii lui de la 19 m sau 21 m pentru a putea compara traectoriile în spațiul fazelor.

b) Oscillatorul liniar simplu descris în spațiul fazelor.

Oscillatorul este prezentat mai jos (fig. 4.15).

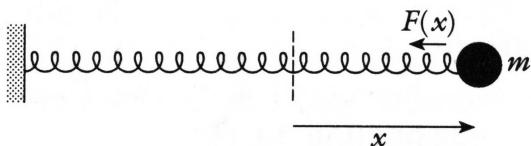


Fig. 4.15. Oscillatorul liniar armonic.

Dacă ne amintim de expresiile energiei cinetice și energiei potențiale pentru un oscillator, legea de conservare a energiei se scrie astfel:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.} \quad (4)$$

Dacă rescriem această relație scăzând în evidență impulsul și coordonata și împărțim prin energia totală, obținem:

$$\frac{p^2}{2mE_{\text{tot}}} + \frac{kx^2}{2E_{\text{tot}}} = 1,$$

sau și mai aproape de ce dorim să vedem:

$$\frac{p^2}{2mE_{\text{tot}}} + \frac{x^2}{(2E_{\text{tot}}/k)} = 1. \quad (5)$$

Această relație care pare complicată este, de fapt, ecuația care descrie o elipsă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6)$$

unde x și y sunt cele două coordonate ale unui punct pe elipsă iar a și b sunt cele două semiaxe ale elipsei (fig. 4.16).

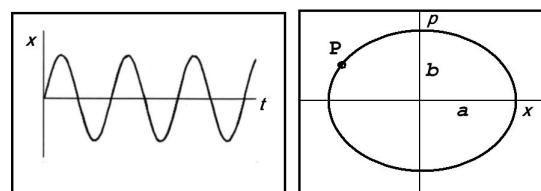


Fig. 4.16. Mișcarea oscillatorie în graficul spațiu-timp și în spațiul fazelor.

Oscilația prezentată în coordonatele $x - t$ și traectoria în spațiul fazelor și pentru oscillator.

Dacă ne uităm la ecuația elipsei și la ecuația obținută anterior pentru oscillator, vedem că cele două au aceeași formă matematică în care putem să recunoaștem cele două semiaxe a și b :

$$a = \sqrt{\frac{2E_{\text{tot}}}{k}} \text{ și } b = \sqrt{2mE_{\text{tot}}}. \quad (7)$$

Deci, în fiecare moment, un punct P de pe elipsă este caracterizat prin două coordonate, una fiind x (chiar coordonata de poziție a obiectului legat de arc) și alta y (adică impulsul pe care-l are acest obiect în mișcare). Punctul P , cu aceste coordonate, în graficul impuls-coordonată se numește *punct figurativ* și ne descrie prin mișcarea lui pe elipsă stările pe care le parurge obiectul în decursul oscilației lui în timp. Această descriere se face astfel în *spațiul fazelor* iar elipsa se numește *traectorie în spațiul fazelor*.

Spre deosebire de traectoria în spațiul fazelor pentru căderea corpurilor, traectoria în spațiul fazelor pentru mișcarea oscillatorie (neamortizată), este o elipsă, respectiv o curbă închisă. O proprietate interesantă se poate vedea dacă calculăm aria acestei elipse. Aria elipsei este dată de formula $\text{Aria} = \pi \cdot a \cdot b$, (se observă că pentru cerc $a = b$ și formula se transformă în relația cunoscută pentru aria cercului, $\pi \cdot a^2$). Dacă introducem expresiile pentru a și b în relația pentru aria descrisă de traectoria elipsei în spațiul fazelor obținem:

$$\text{Aria} = 2\pi E_{\text{tot}} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8)$$

Dacă ne amintim că pentru un oscillator armonic frecvența este dată de relația:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

atunci aria descrisă de traectoria oscillatorului în spațiul fazelor va fi:

$$\text{Aria} = \frac{E_{\text{tot}}}{v}. \quad (10)$$

Această relație remarcabil de simplă ne arată o serie de lucruri care merită observate:

- dacă energia totală crește sau scade, atunci elipsa care descrie mișcarea va avea o arie mai mare sau mai mică, prin creșterea sau descreșterea proporțională a semiaxelor;
- dacă aria trebuie să rămână constantă, atunci frecvența de mișcare și energia totală rămân proporționale;

Din prima observație putem înțelege ușor ce se întâmplă dacă, spre exemplu, oscilatorul pierde energie, adică este un *oscillator amortizat* (așa cum sunt toate oscilatoarele reale care nu sunt întreținute). În acest caz, forma traectoriei în spațiul fazelor va fi doar aproximativ elliptică,

deoarece pierderea de energie (continuă) se va resimți prin continua micșorare a celor două semiaxe și traectoria va fi de gen spirală (fig. 4.17).

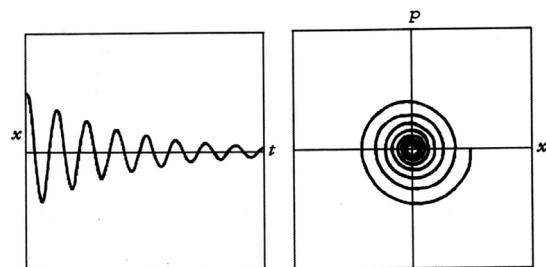


Fig. 4.17. Mișcarea oscilatorie amortizată în graficul spațiu-timp și în spațiul fazelor.

Oscilația prezentată în coordonatele $x - t$ și traectoria în spațiul fazelor și pentru oscillatorul amortizat.

C.2. Atractori

Dacă analizăm puțin ultimul rezultat, observăm că traectoria oscillatorului amortizat în spațiul fazelor arată că punctul figurativ se deplasează și în final ajunge în centrul sistemului de coordinate. Acest rezultat este normal, căci odată ce oscillatorul pierde energie, amplitudinea oscilațiilor scade, la fel ca și amplitudinea vitezei obiectului, până ce obiectul se oprește. Punctul de oprire este $x = 0$ și $v = 0$, adică originea coordonatelor spațiului fazelor. Se spune că acest punct (final) este un *punct de echilibru*, sau în acest caz un *punct atractor*. Pentru acest caz echilibrul se realizează atunci când punctul figurativ ajunge în originea sistemului de coordinate.

Descrierea în spațiul fazelor a dinamicii evoluției unui sistem, așa cum am văzut până acum, pare să nu aducă ceva important în înțelegerea mai profundă a evoluției unui sistem. În realitate, dacă sistemul este mai complicat descrierea în spațiul fazelor poate să evidențieze aspecte care altfel ar fi greu de observat. Să analizăm un caz relativ simplu și ușor de înțeles calitativ.

1. Sistemul vânător-vânat (oi – lupi pe o insulă, sau rechini și creveti), evoluția sistemului în spațiul fazelor (*modele de competiție*).

Să presupunem că undeva există o zonă limitată în care coexistă doar două tipuri de vietuitoare, rechini și creveti. Rechinii mănâncă crevetii. Si iată problema: care este dinamica populației de rechini și creveti? Prin *dinamica populației* se înțelege modul în care variază în timp numărul de rechini și numărul de creveti, presupunând că și rechinii

și crevetii se înmulțesc sau mor normal, cu o rată (număr de nașteri sau de morți în unitate de timp) care depinde de condițiile de viață: numărul crevetelor (n_1) crește atunci când numărul rechinilor (n_2) descrește și reciproc. Graficul (calitativ) al *evoluției populațiilor* celor două specii este dat în figura 4.18.

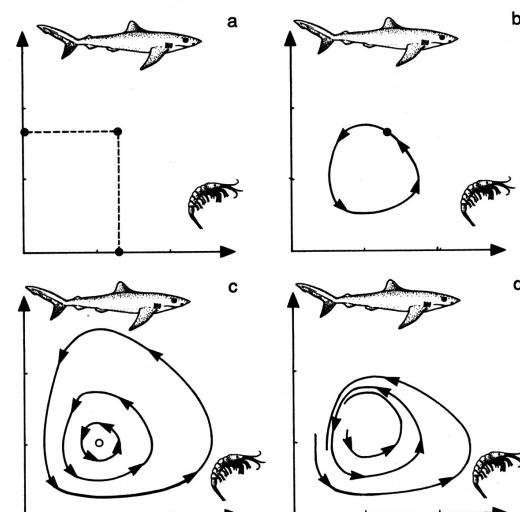


Fig. 4.18. Sistemul vânător-vânat.

Cum interpretăm aceste grafice? În graficul a, pe cele două axe sunt puse: x – numărul de creveti, y – numărul de rechini. Valorile dau situația momentană printr-un punct în spațiul fazelor. Pentru o populație inițială dată de creveti și de rechini, traectoria în spațiul fazelor este o curbă

închisă ca în cazul oscilatorului armonic: cele două populații cresc sau scad în număr alternativ. Dacă există mulți rechini, se împuținează numărul de creveti. Dar în acest caz rechinii nu mai au ce mâncă așa că numărul lor scade. Dar ca urmare a acestei scăderi, numărul de creveti va crește și.a.m.d. Fenomenul este *oscilator* (figura b), dar nu armonic (adică nu (figura c). Dar este interesant de evidențiat că în unele condiții ale dinamicii de interacție sinusoidal, respectiv nu are o singură frecvență caracteristică).

Pentru alte valori initiale ale populațiilor, curbele închise se regăsesc, însă pot avea forme sau arii închise de ele, de valori diferite dintre cele două specii, curba la care se ajunge la *echilibru* (cea care urmează tot timpul aceeași traiectorie în spațiul fazelor) se stabilizează și mai ales *nu depinde* de valorile initiale ale populațiilor; indiferent de populația initială, situația oscilează pe aceeași traiectorie în spațiul fazelor (figura d). Se spune că avem de a face cu un *atractor*. Atractorul se caracterizează printr-o *formă bine definită a traiectoriei în spațiul fazelor și care se atinge la echilibru* indiferent din ce zonă (a spațiului fazelor) pornește evoluția sistemului. Această comportare este foarte des prezentă în ecosistemele animale, mai ales în cele relativ izolate. Acest model este extrem de util pentru a determina dinamica populației funcție de condițiile existente și permite prognoza evoluției populațiilor identificând factorii de care această dinamică depinde și putând astfel controla sistemul. În istorie, creșteri necontrolate ale unor specii în dauna altora, sau a intervenției umane în necunoștiță de cauză, au produs dezechilibre ecologice. Acum, grăție acestor modele, putem găsi mai ușor și mai sigur modul de a echilibra și însănătoși ecosistemele prin echilibrarea speciilor conlocuitoare.

În general când într-un sistem există cel puțin două tendințe contrară în competiție, o astfel de dinamică este de așteptat.

2. Un exemplu din fizică este cel al **magnetizării și demagnetizării unui material feromagnetic** (de exemplu, otel). Un material magnetic are în constituția lui dipoli magnetici care se pot orienta în câmp magnetic, producând fenomenul de magnetizare. În același timp, agitația termică, determinată de temperatura diferită de zero K, caută sădezorganizeze acest sistem de dipoli cu tendință de ordonare sub influența unui câmp magnetic. Există astfel două tendințe în competiție: *magnetizarea materialului*, sub influența unui câmp magnetic extern și *demagnetizarea* lui, datorată agitației termice. Din aceste două

tendințe rezultă o stare intermediară de magnetizare a corpului. Dacă acum creștem sau descreștem intensitatea câmpului magnetic extern, magnetizarea se va modifica. Curba de variație în timp a magnetizării se numește *curbă de magnetizare* sau *demagnetizare* iar atunci când câmpul magnetic extern crește și descrește periodic, se obține o curba închisă denumită *curbă de histerezis* (fig. 4.19). Curba de histerezis este un exemplu tipic de evoluție a unor procese în competiție (ordonare-dezordonare, considerat ca o transformare de fază) și explică dinamica de magnetizare.

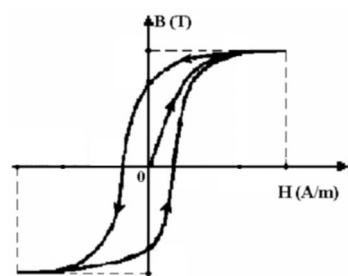


Fig. 4.19. Curba de histereză care scoate în evidență că magnetizarea și demagnetizarea unui corp feromagnetic se fac pe drumuri diferite

3. Experiment pe calculator. Curba logistică

Dacă dinamica de competiție este destul de dificil de verificat sau prelucrat cu metode simple (având nevoie de un aparat matematic de calcul ceva mai evoluat), putem însă să exemplificăm un astfel de caz utilizând chiar și un simplu calculator de buzunar.

Să presupunem un model simplu, idealizat: pe o insulă trăiesc în pace niște iepuri, care nu au acolo nici un dușman. Ca atare, atât timp cât au ce mâncă (iarbă) ei trăiesc, se înmulțesc și mor în mod natural. Descriem această situație printr-o dinamică a numărului de iepuri care există pe insulă la un moment dat. Fie acest număr x . Pentru a scrie ecuația care descrie evoluția numărului de iepuri, adică variația lui x în timp, va trebui să „construim o ecuație” care după rezolvare să ne spună ce se întâmplă cu numărul de iepuri. În acest scop, să vedem de cine depinde creșterea sau descreșterea acestui număr. Deoarece există destulă iarbă pe insulă, înseamnă că numărul de iepuri care vor apărea după o generație (considerată ca unitate de timp) va fi proporțional cu numărul de iepuri existenți în generația anterioară. Vom scrie acest lucru astfel:

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = cx_1 \quad (11)$$

Aici $(t_2 - t_1) = \tau$, – unitatea de timp (generația), x_1 este numărul de iepuri din generația inițială, x_2 este numărul de iepuri din următoarea generație, iar c este o constantă.

Această ecuație se citește așa: creșterea $(x_2 - x_1)$ populației în unitatea de timp, τ , este proporțională cu numărul de iepuri din generația anterioară. Coeficientul c este o constantă care indică (descrie) viteza de creștere a populației. Dacă se rescrie ecuația de mai sus astfel:

$$x_2 - x_1 = cx_1\tau, \text{ sau } x_2 = x_1 + cx_1\tau. \quad (12)$$

evoluția se poate calcula și interpreta simplu.

Relația ne arată că la fiecare generație populația de iepuri crește cu cantitate $cx_1\tau$. Dacă $c = 0$, populația rămâne constantă în timp. Dacă c este > 0 , populația crește, dacă c este < 0 , populația va descrește. Pentru exemplificare vom alege $x_1 = 1000$, și $c = 0.01$. Înseamnă că după prima generație vom avea o populație de $x_2 = 1000 + 0.01 \times 1000 \times 1 = 1000 + 10 + 1010$ iepuri. În generația următoare vom avea (și vom nota totdeauna, la fiecare două generații consecutive, generația anterioară cu x_1 și generația care apare cu x_2): $x_2 = 1010 + 0.01 \times 1010 \times 1 = 1020,1$. Dacă continuăm calculele vom obține pentru generațiile succesive următoarele cifre pentru populație: 1030,301, mai departe 1040,60401 și.a.m.d. Putem să facem calculul cu un simplu calculator de buzunar. După un timp de calcul vom vedea că populația începe să crească tot mai rapid: este normal că creșterea se accelerează pe măsură ce numărul de iepuri crește și.a.m.d. Datele obținute pot fi trecute pe un grafic ca cel ce urmează (fig. 4.20).

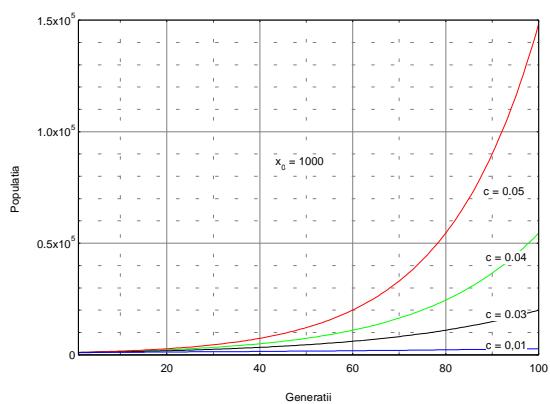


Fig. 4.20. Evoluția exponențială a populației

Se vede de aici că pentru un coeficient de creștere de 0,01, după 100 de generații populația devine mai mare de 2500 de iepuri, dar pentru un coeficient de creștere de numai cinci ori mai mare, $c = 0,05$, după 100 de generații populația ajunge la $1,5 \cdot 10^5 = 150.000$. Creșterea este foarte

rapidă la coeficienți de creștere mai mari. Ce înseamnă un coeficient de 0,05? Înseamnă apariția de 5 iepuri din 1000 inițiali, la o generație. Acest coeficient este în realitate foarte mic. Ar fi normal să considerăm că în medie apare după o generație căci un iepure la doi inițiali, adică un coeficient de 50% (= 0,5). În această situație creșterea populației este absolut vertiginoasă. Sunt necesare doar 10 generații pentru a ajunge la o populație de 150.000 de iepuri!

Modul de creștere studiat se numește *exponențial*. Acest model este valabil la orice sistem de populații sau mărimi a cărui creștere în unitate de timp este proporțională cu populația dintr-o generație anterioară. Atunci când puneti banii la bancă aveți parte de o astfel de creștere, doar că la bancă coeficientul de creștere este de obicei de ordinul a 3% - 8% iar unitatea de timp este anul! Puteti să vă calculați singuri creșterea depozitului bancar în timp după același model ca și cel de sus.

Dar ce se întâmplă de fapt cu populația noastră de iepuri? Iepurii, la o astfel de creștere exponențială, vor avea în curând o problemă: nu vor mai avea ce să mănânce, se termină iarba! Populația de iepuri va suferi de foame iar creșterea se va încetini, adică coeficientul c va scădea. Cum se ține cont în model de acest efect de modificare a coeficientului? Se poate considera că acest coeficient scade odată cu creșterea populației astfel încât de la o anumită populație maximă (limită) populația nu va mai crește (adică c devine egal cu zero). Dacă se ține cont de acest efect, ecuația care descrie variația populației poate fi scrisă (după unele modificări matematice la următoarea formă:

$$X = 4\lambda X(1 - X), \quad (13)$$

unde X este acum populația exprimată sub formă relativă la maximum de populație posibil ($X = 1$ este valoarea maximă, iar $X = 0$ este populație nulă), iar λ joacă rolul coeficientului de creștere. Ecuația de mai sus se numește *ecuație logistică* și descrie acest caz al cantității limitate a resurselor alimentare (iarbă) ale iepurilor de pe insulă. Din modul în care s-a ales variabila X , ea poate să ia valori între 0 și 1, iar λ poate avea orice valoare între 0 și 4. Coeficientul λ se mai numește *parametru de control* deoarece pentru acest model, el controlează schimbarea dinamicii de creștere a populației. Motivul acestor alegeri este neesențial pentru a descrie ce se întâmplă în acest caz. Spațiul fazelor în acest caz se reduce la urmărirea succesiunii stărilor după fiecare generație. Este evident că discutând de generații, vom avea stări pe care le putem defini la o generație sau alta și nu vom putea discuta despre o „generație” fractionară, cum ar fi 2,3 sau 15,6 generații!

Prin urmare, pe graficul succesiunii stărilor se vor reprezenta puncte care reprezintă starea la acel moment, iar liniile care unesc stările nu au nici o altă interpretare decât de a ne permite urmărirea mai ușoară a evoluției de la o stare la alta.

Dacă efectuăm calculele după același model ca cel anterior, vom obține pentru modelul logistic următoarea desfășurare de evenimente descrise în spațiul fazelor. Calculul poate fi făcut și cu un simplu program scris în BASIC:

```
FOR I=1 TO 40
X=LAMBDA*X*(1-X)
PRINT X
NEXT
```

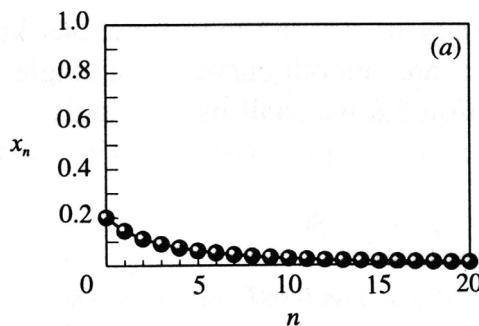


Fig. 4.21, a. Evoluția conform modelului logistic.

În graficele care urmează se vede modul în care variază populația de iepuri funcție de timp, pentru diferite valori ale parametrului de control.

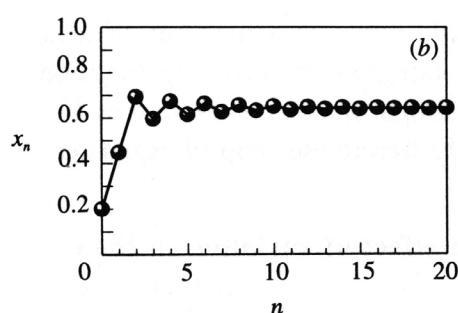


Fig. 4.21, b. Evoluția conform modelului logistic.

Graficele corespund la un parametru de control care au valorile $\lambda = 0,9$ (rezultă o scădere continuă spre zero, fig. 4.20, a), $2,60$ (stare staționară cu perioada 1) (fig. 4.21, b), $3,20$ (stare staționară cu perioada 2), $3,52$ (stare staționară cu perioada 4, fig. 4.21, d), $4,00$ (comportament caotic, fig. 4.21, e).

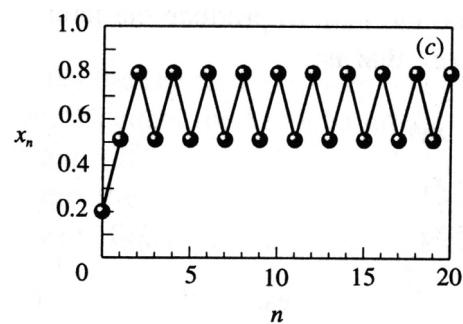


Fig. 4.21, c. Evoluția conform modelului logistic.

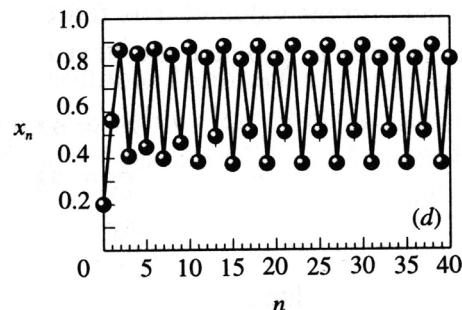


Fig. 4.21, d. Evoluția conform modelului logistic.

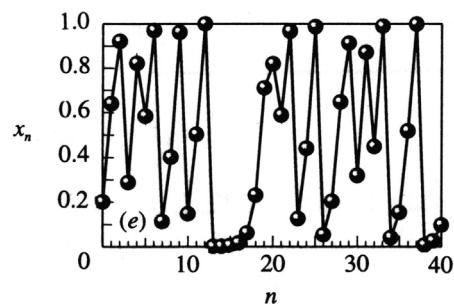


Fig. 4.21, e. Evoluția conform modelului logistic.

Cele două tabele dă rezultatele evoluției sistemului logistic pentru trei valori ale lui λ .

t	$\lambda = 2$	$\lambda = 1 + \sqrt{5}$	$\lambda = 4$
0	0.40000	0.40000	0.40000
1	0.48000	0.77666	0.96000
2	0.49920	0.56133	0.15360
3	0.50000	0.79684	0.52003
4	0.50000	0.52387	0.99840
5	0.50000	0.80717	0.00641
6	0.50000	0.50368	0.02547
7	0.50000	0.80897	0.09928
8	0.50000	0.50009	0.35768
9	0.50000	0.80902	0.91898
10	0.50000	0.50000	0.29782
11	0.50000	0.80902	0.83650
12	0.50000	0.50000	0.54707
13	0.50000	0.80902	0.99114
14	0.50000	0.50000	0.03514
15	0.50000	0.80902	0.13561

Primul tabel corespunde evoluției sistemului care pleacă de la valoare inițială $X_0 = 0,4$ iar al doilea corespunde evoluției pentru $X_0 = 0,35$.

t	$\lambda = 2$	$\lambda = 1 + \sqrt{5}$	$\lambda = 4$
0	0.35000	0.35000	0.40001
1	0.45500	0.73621	0.96001
2	0.49595	0.82847	0.15357
3	0.49997	0.75561	0.51995
4	0.50000	0.59758	0.99841
5	0.50000	0.77820	0.00636
6	0.50000	0.55856	0.02526
7	0.50000	0.79792	0.09850
8	0.50000	0.52180	0.35518
9	0.50000	0.80748	0.91610
10	0.50000	0.50307	0.30743
11	0.50000	0.80899	0.85167
12	0.50000	0.50006	0.50531
13	0.50000	0.80902	0.99989
14	0.50000	0.50000	0.00045
15	0.50000	0.80902	0.00180

Valorile îngroșate scot în evidență diferențele de evoluție între cele două cazuri. Ceea ce este evident de această dată este faptul că pentru $\lambda = 4$, predictibilitatea este inexistentă în sensul că mici variații ale condiției initiale schimbă complet evoluția ulterioară a sistemului. Să comparăm acest rezultat cu cel obținut pentru exemplul analizei căderii corpurilor. Acolo, mici variații ale condiției initiale ($x = 19, 20$ sau 21 m) evident modifică evoluția sistemului, dar această evoluție este predictibilă și deci utilizabilă practic. În cazul unui fenomen care urmează un model de tip logistic, la parametrii de control $\lambda > 3,52$ *evoluția sistemului devine nepredictibilă!*

Câteva **concluzii importante** se pot extrage din acest experiment (matematic) simplu:

a) Cu toate că starea sistemului este descrisă de o ecuație simplă și foarte bine definită (*ecuația logistică*), evoluția acestui sistem poate fi *predictibilă* sau *impredictibilă*, depinzând de valoarea parametrului de control; pentru valori ale parametrului de control mai mari decât o valoare critică, sistemul se comportă *haotic*. Spune că avem de a face cu *haos determinist*. Cuvântul *determinist* provine de la faptul că avem o ecuație matematică corectă care descrie sistemul, dar comportamentul sistemului în acest regim este *impredictibilă*.

b) *Evoluția sistemului este foarte puternic dependentă* (mai ales în regiunea corespunzătoare unui parametru de control mai mare decât cel critic) de *condiția inițială*. Această caracteristică este uneori denumită *efect de fluture*, descoperit de către Edward Lorenz (un meteorolog care a studiat sistemul atmosferic și care a dat un model simplu de atmosferă pe baza căruia a presupus că se pot face prognoze meteorologice mai precise). Efectul se mai poate enunța astfel: *mici variații ale condițiilor inițiale datorate, de exemplu, bătăii de aripi a unui*

fluture, undeva pe glob, poate să conducă în viitor la modificări dramatice ale stării vremii, în altă parte de pe glob.

Efectul se mai numește *efect de sensibilitate la condiții inițiale*. Dacă un asemenea efect dramatic se poate produce chiar și în cazul unui sistem simplu, atunci pentru sisteme mai complicate acest efect trebuie să fie cu siguranță prezent.

În imaginea următoare (fig. 4.22) se ilustrează grafic evoluția a două sisteme (*a, b*) practic identice ce pornesc din aceleasi condiții initiale. După un timp mai mult sau mai puțin scurt, evoluția celor două sisteme se diferențiază în atât încât nu se va mai putea face nici o predicție a evoluției lor viitoare.



Fig. 4.22. Sensibilitatea la condițiile initiale

Cât de importantă este această observație poate fi înțeleasă din următorul exemplu. Se știe astăzi că evoluția vietii pe o planetă (de exemplu Pământ) este condiționată de stabilitatea climatică pe intervale de timp foarte mari (timpi geologici sau planetari). S-a ajuns azi la concluzia că Pământul a putut fi leagănul vietii deoarece clima a fost relativ stabilă pe o mare întindere de timp. S-a observat că alte planete nu au beneficiat de o astfel situație. Motivul pentru care Pământul a fost în această situație favorabilă a fost determinat de faptul că la un moment dat, la scară cosmică de timp, Pământul a captat Luna. Captarea Lunii a stabilizat axa de rotație a Pământului permitând o evoluție lentă, dar stabilă a climei, și astfel viața a putut să apară, să se stabilizeze, să evolueze și să ajungă acolo unde este acum. Altfel mișcarea planetelor în jurul Soarelui ar fi fost destul de impredictibilă și de haotică astfel încât pe termen lung clima nu ar fi fost stabilă, ar fi avut variații drastice, aşa cum constatăm că există pe Mercur, Marte sau Venus, spre exemplu.

c) Cauza acestei sensibilități la condițiile initiale și care are ca rezultat o comportare impredictibilă a sistemului este dată de *natura neliniară a sistemului în cauză*. Pentru orice sistem fizic neliniar, ne putem aștepta ca în anumite

condiții el să treacă într-un regim de *haos determinist* astfel încât evoluția lui ulterioră să nu mai poată fi prezisă. Insistăm asupra faptului că nepredictibilitatea evoluției sistemului nu este determinată nici de complexitatea sistemului, nici de cunoașterea imperfectă a condițiilor initiale, nici de necunoașterea exactă a legii de evoluție și nici din cauze de calcul matematic. Impredictibilitate este de natură „organică” adică rezidă în natura lucrurilor sau a fenomenelor însăși.

d) Deoarece majoritatea sistemelor reale sunt neliniare (și nu ne referim la modelele liniare folosite pentru studiul simplificat al fenomenului) *aspectele de haos determinist sunt prezente peste tot*. Doar aproximările simple sunt liniare și predictibile. În schimb, unele sisteme prezintă

impredictibilitate chiar *pentru o evoluție pe termen scurt* (cum ar fi fenomenele meteorologice) sau *pe un termen lung* (cum sunt cele de natură cosmică). Rezultă că este nevoie să știm până în ce moment putem conta pe o predictibilitate acceptabilă și de la ce moment nu mai avem această posibilitate. Studiul dinamicii neliniare a fenomenelor poate să dea răspuns la această întrebare. Este necesară cunoașterea precisă a sistemului și luarea în considerare a acelor aspecte care prezintă neliniaritate, chiar dacă aparent aceste efecte (sau termeni în ecuațiile sistemului) sunt neglijabile. Se constată însă că ele nu sunt neglijabile. Rolul dinamicii neliniare este să indice limitele până la care aproximările pot da rezultate predictibile.

C.3. Sisteme departe de echilibru

Majoritatea sistemelor care pot prezenta fenomene descrise ca *haos determinist* sunt *sisteme departe de echilibru*.

Un sistem se numește departe de echilibru dacă se găsește într-o stare care, în mod normal, nu poate să subziste fără o intervenție din afară. De exemplu, un oscilator real are nevoie de un supliment continuu de energie pentru a-și menține oscilațiile. Pentru ca un corp încălzit, să rămână în starea respectivă, trebuie să primească încontinuu energie din exterior (ca atunci când fierbem mult timp mâncarea care necesită o preparare la o temperatură constantă, sau pentru ca un bec să lumineze etc.). Aceste sisteme sunt deci sisteme disipative, adică sisteme care pierd energie (spre exterior).

Efectele de neliniaritate se simt cu atât mai mult cu cât aducem sistemul mai departe de echilibru, deci cu cât energia furnizată sistemului este mai mare.

Un exemplu clasic și destul de simplu este cel al oscilațiilor unui pendul mai complex. Ce înseamna asta?

Să analizăm, pentru început, o situație simplă la prima vedere, dar care ridică unele întrebări serioase dacă examinăm situația mai în amănunt. Este vorba de experiența simplă pe care am avut-o în copilărie, atunci când ne-am dat în leagăn. O schiță clarificatoare ne va ajuta. Leagănul este, în esență, un pendul în care ne putem „da”. Din fizică știm că pentru ca un pendul să se pună în mișcare, trebuie scos din starea de echilibru (fig. 4.23). De obicei, atunci când ne suim în el îl scoatem din echilibru și astfel ne balansăm. Dar pentru a întreține balansul, trebuie să-i furnizăm energie. În acest scop știm să folosim o serie de mișcări, care corespund modificării centrului de greutate

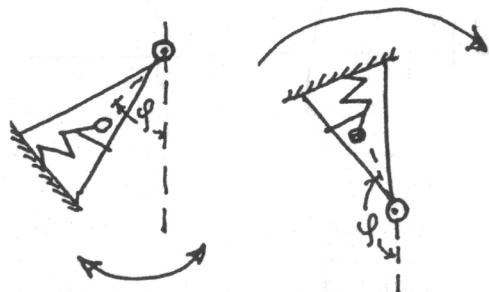


Fig. 4.23. Fizica leagănlui.

și care permit chiar amplificarea mișcării, astfel în cât cei mai curajoși se pot da și peste cap. Analiza fizică a acestei mișcări nu este deloc simplă. În orice caz, este un exemplu tipic de sistem neliniar! Menținerea oscilațiilor presupune în acest caz aducerea sistemului departe de echilibru. Un copil cu experiență poate controla perfect această mișcare. Cum o descriem?

În graficul de mai sus (fig. 4.24) se poate recunoaște descrierea oscilațiilor în spațiul fazelor, pe elipsele desenate.

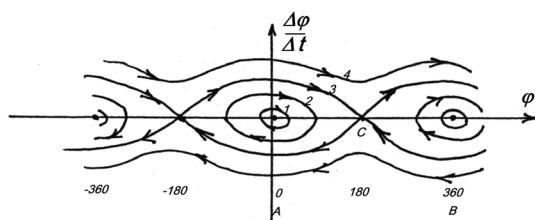


Fig. 4.24. Traекторii în spațiul fazelor pentru mișcarea leagănlui.

Cele două variabile ale graficului sunt unghiul φ și variația în unitate de timp a acestui unghi. Unghiul joacă rol de coordonată de poziție, iar variația lui în timp joacă rol de impuls (generalizat). Este necesar să utilizăm variabila unghi deoarece oscilațiile sunt mari și deci nu putem aproxima mișcarea cu aceea a unui oscilator liniar. În graficul de mai sus elipsele descriu oscilația leagănu lui pentru amplitudini relativi mici (curbele 1 și 2). Dar dacă copilul din leagăn dorește să-si facă un balans mai mare el se poate da peste cap (curbele 3 și 4). În acest caz, unghiul poate să aibă valori mai mari decât 360° și deci graficul trebuie să permită descrierea acestui caz. De aceea el are pe axa orizontală valoarea unghiului care poate să crească indefinit, peste 360° . Oscilația din jurul punctului A, este aceea obișnuită la un pendul. Oscilația din jurul punctului B, corespunde oscilației în jurul verticaliei, după ce copilul s-a rotit odată în jurul punctului de rotație. Poziția verticală, cu capul în jos a fost atinsă în punctul C. Traiectoriile 3 și 4 din spațiu fazelor indică această situație în care se pot face un număr mare de rotiri, care să ducă la creșterea continuă a unghiului de rotație. Cazul acesta se poate întâlni atunci când la un concurs gimnastul realizează la bara fixă multe rotații, figură denumită în limbaj sportiv „gigantica”. Ce putem să spunem despre evoluția acestui sistem, privind traieria lui în spațiu fazelor? În primul rând, observăm că doar în punctul C (și toate cele echivalente), variația unghiulară este nulă. Pentru un pendul în mișcare, acestea sunt singurele puncte de repaus. Punctele A și C pot fi de repaus doar dacă pendulul nu se mișcă de loc (nu are energie cinetică). Punctele A și B sunt puncte de echilibru stabil și reprezintă finalul sistemului lăsat să evolueze liber (să disipeze toată energia). Punctul C este un punct de echilibru instabil, căci pendulul aflat în această poziție se vadezchilia la cea mai mică perturbație și se va duce spontan spre A sau B. Acest punct se numește punct de să. Punctele A și C se numesc centre sau puncte fixe. Traieria 3 care trece prin punctul C se numește separatrice, căci separă zonele în care oscilația este limitată de zonele în care oscilația este nelimitată (unghiul φ poate să crească indefinit).

Toate acestea au fost necesare pentru a putea descrie în spațiu fazelor o mișcare mai complexă. Să prezintăm un astfel de caz.

Pendulul dublu

Un exemplu clasic și destul de simplu este cel al oscilațiilor unui pendul mai complex (format, de exemplu, din asocierea a mai multor pendule simple ca, de exemplu, în figura 4.25).

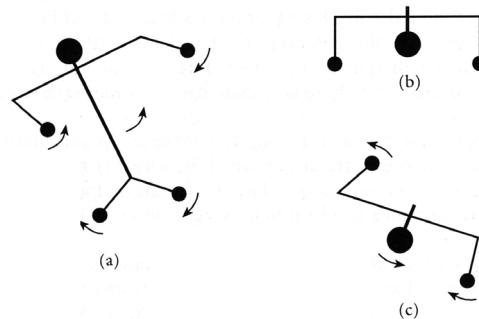


Fig. 4.25. Trei variante de pendule multiple.

În figura 4.26 se prezintă un pendul dublu, în două poziții diferite de mișcare.

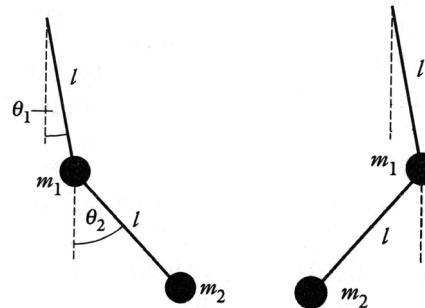


Fig. 4.26. Pendulul dublu în două momente de oscilație.

Surpriza cea mare este faptul că acest sistem, ceva mai complicat decât cel al unui pendul simplu, posedă o mișcare care se încadrează în aşa numitul *haos determinist*. Mișcarea este haotică deoarece nu putem prevedea pozițiile successive ale celor două pendule, unghiurile θ_1 și θ_2 putând să varieze complet haotic în timp. La două reluări succesive ale oscilațiilor (pe figura 4.27, evoluțiile a și b), desfășurarea evenimentelor va difera. Suntem în cazul haosului determinist.

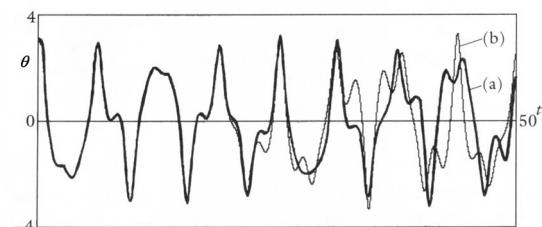


Fig. 4.26. Imagine a haosului determinist.

Atractor strani

Am văzut că evoluția oricărui sistem dinamic se poate descrie în spațiu fazelor dacă avem setul de ecuații care

descrie sistemul. După ce oamenii de știință au descoperit proprietățile curioase ale unor sisteme dinamice descrise prin ecuații simple (cum ar fi curba logistică) au dezvoltat o direcție nouă în matematică și în fizică și anume *experimentul pe calculator*. Experimentul pe calculator nu este un simplu calcul, sau o simplă modelare sau vizualizare a unui fenomen. Este altceva. Este ca un fel de „realitate virtuală”, în sensul că poti să-ți construiești un sistem fizic după cum dorești, dând doar sistemul de ecuații de plecare.

Dacă acest sistem corespunde sau nu cu un sistem fizic, rămâne de văzut. Este un experiment de tipul „să vedem ce se întâmplă dacă.....”. Studiem sistemul în spațiul fazelor calculatorul face toate calculele, iar noi încercăm să interpretăm rezultatele. S-au făcut nenumărate astfel de experimente. Pentru majoritatea s-au descoperit și fenomene fizice care pot fi explicate cu ajutorul lor.

Un exemplu din multele existente este aşa numitul *sistem Hénon*, după numele celui care l-a studiat. În figura 4.24 este prezentat sistemul Hénon ca sistem de ecuații de tip iterativ (ca și curba logistică) precum și o porțiune din evoluția din spațiul fazelor a sistemului.

Din multe experimente s-au tras o serie de **concluzii**, comune pentru nenumărate cazuri. Câteva dintre ceste sunt următoarele:

a) Sistemul Hénon parcurge stările din spațiul fazelor pe curbe de forma indicată în figura 4.28, indiferent de valorile inițiale ale variabilelor x și y .

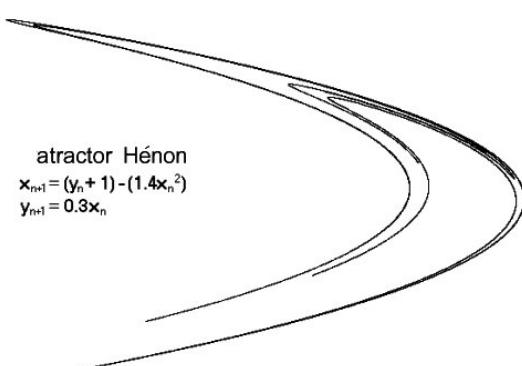


Fig. 4.28. Traекторii în spațiul fazelor pentru sistemul Hénon.

Faptul că toate stările sistemului se găsesc pe acele curbe, arată că ele sunt singurele traectorii stabile ale sistemului. Sistemul nu poate să se găsească decât în colecția de stări din figură. Numim aceste traectorii *atractori stranii* și vom vedea de ce sunt „stranii”.

b) Dacă însă încercăm să urmărim *temporal* succesiunea de stări vom avea o mare surpriză. Ceea ce se întâmplă puteți vedea în figura 4.29, unde pe traекторie au fost indicate punctele (stările) în succesiunea lor. Se observă lipsa oricărei ordini în această succesiune. Să ne amintim de traectoria eliptică în spațiul fazelor a oscillatorului armonic. Acolo putem găsi totdeauna succesiunea de momente care sunt ordonate, unul după altul, astfel încât putem să definim un *sens de mers* (evoluție) pe traectoria din spațiul fazelor. Avem, cu alte cuvinte, *predictibilitate*. Acest lucru nu se întâmplă cu traectoria multor sisteme dinamice reale. Succesiunea stărilor este total *aleatoare*, dar multimea stărilor va fi mereu aceeași, indiferent de condițiile initiale. Acest gen de comportare a condus la termenul de *straniu* și este caracteristic multor sisteme dinamice neliniare și mai ales unor sisteme *departe de echilibru*.

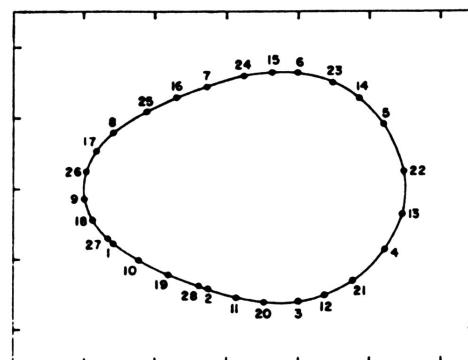


Fig. 4.29. Traectorie în spațiul fazelor pentru un sistem de tip Hénon, în care sunt prezentate succesiuni ale stărilor, numerotate în ordine crescătoare.

Tot ceea ce am discutat până acum este valabil pentru sistemele care sunt departe de echilibru. De obicei, chiar dacă sistemul este neliniar, dacă el este foarte aproape de echilibru, efectele neliniarității nu se văd și de multe ori considerăm că sunt sisteme „cuminti”. În realitate nu este aşa. Este doar rezultatul faptului că sunt aproape de echilibru. Am putea spune că noi trăim într-o lume fizică în care energiile implicate sunt relativ mici, iar efectele neliniarităților nu se văd. Cum mergem la energii mai mari cum ele încep să se vadă, iar fenomenele capătă altă comportare, uneori total neașteptată. Am putea spune, prin analogie, că la fel cum în teoria relativității apar fenomene neașteptate când ne apropiem de viteza luminii, și aici apar fenomene neașteptate atunci când energia crește.

Alte provocări

Schimbarea de stare de la **curgerea laminară la cea turbulentă** este un alt exemplu de sistem haotic. *Fumul de țigară* (fig. 4.30 a) sau cele două jeturi ale unei galaxii (fig. 4.30 b) reprezintă exemple interesante.

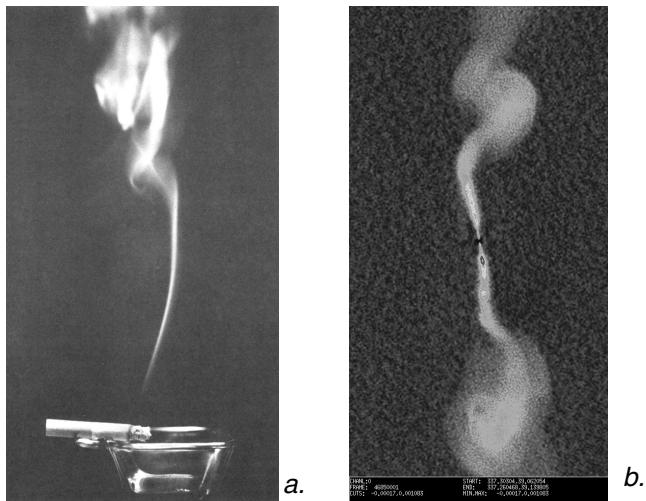


Fig. 4.30. Fumul de la o țigară (a) și jeturile galaxiei 3C449 (b).

Fenomenul poate fi înțeles calitativ astfel. Fumul de țigară se urcă datorită densității mai mici a aerului cald. Pe măsură ce urcă, viteza lui crește. *Curgerea este laminară* în sensul obișnuit folosit la curgerea unor fluide. La un moment dat, brusc, jetul („fuiorul”) de fum începe să curgă dezordonat. Face rotocoale, vârtejuri și începe să se disperseze în spațiu. Se spune că trece într-o *curgere turbulentă*. Ce anume a determinat ca mișcarea laminară să se transforme în una turbulentă? Cauzele sunt mult mai profunde și, aşa cum se schimbă starea de agregare (la topire, vaporizare, solidificare etc.) la fel se schimbă și aici starea de mișcare (adică caracterul ei): de la laminar trece la turbulent. Este un exemplu tipic pe care-l vedem uneori și la râuri. Starea turbulentă nu este, de fapt, chiar haotică, aşa cum pare la prima vedere. Vârtejurile presupun *mișcarea coordonată, coerentă*, a miliarde de molecule, adică este extrem de bine organizată. Este un alt fel de mișcare ordonată, dar nu ca aceea din mișcarea mecanică, dar nici atât de dezordonată ca a moleculelor dintr-un gaz! Această transformare (care face parte dintr-o categorie largă de transformări numite de *ordine-dezordine*) poate fi înțeleasă doar în cadrul teoriei haosului.

Caracterul *universal* al fenomenelor *haosului determinist* poate fi văzut pe structura jeturilor observate la unele galaxii din spațiu cosmic (figura 4.30b), total asemănătoare ca formă cu cea a fumului de țigară (figura 4.30a).

Un exemplu frumos este cel al **meandrelor pe fluvii** prezentat la începutul capitolului (fig. 4.4 Meandre pe Amazon).

Aceste meandre nu sunt determinate de accidente de teren și nu sunt întâmplătoare. Ca și în cazul fumului sau a jeturilor prezentate, și aici apariția meandrelor este *necesară* din motiv de dinamică haotică.

Să facem un experiment simplu. Pe o placă de sticlă bine curățată și puțin înclinată, se lasă să curgă continuu un firisor de apă. Firisorul va curge în josul plăcii de sticlă și ne așteptăm să meargă direct în jos. Nu este întotdeauna așa. Dacă micșorăm mult înclinarea plăcii de sticlă și dacă firicelul de apă este în adevăr foarte slab, vom observa că traiectoria lui va începe să șerpuiască! Un exemplu simplu de tranziție de la mișcarea deterministă (predictibilă) la una nepredictibilă. Nu știm precis nici când și nici cum se va duce firicelul de apă!

3. Sensibilitatea la condițiile initiale: exemplu pe masa de biliard

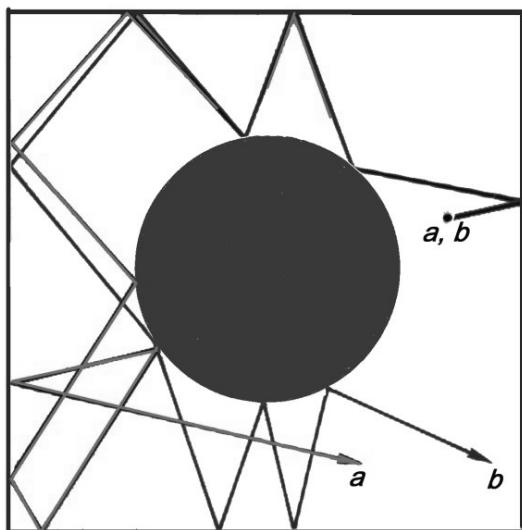


Fig. 4.31. Două traiectorii ale unei bile de biliard pe o masă specială.

Mesele de biliard pot fi de diferite forme. Unele pot fi dreptunghiulare cum sunt cele clasice, altele pot fi ovale, altele pot avea unul sau mai multe obstacole în centru. Să luăm ca exemplu masa din figura 4.31 care are în centru un obiect cilindric, așezat vertical. Se constată practic și se demonstrează matematic că două loviri

practic identice (a,b), din același punct, duc după un timp la traectorii total diferite. Cu alte cuvinte, *oricât de mică ar fi diferența* dintre cele două loviri, după un timp diferențele vor crește astfel încât traectoria finală nu poate fi prezisă. Este un exemplu simplu de *sensibilitate la condițiile initiale*.

D. Elemente de geometrie fractală – o incursiune în lumea formelor

Un fractal este un obiect geometric care este neregulat sau discontinuu la orice scară. I-am privi și care este „fracturat” într-un mod specific. Obiectul fractal poate fi desfăcut în părți care sunt fiecare *similară* cu obiectul original. Un fractal are o infinitate de detalii, care se prezintă într-o succesiune care se repetă.

Cu toate că obiecte fractale au fost descoperite încă de la sfârșitul secolului al XIX-lea (1872-K. Weierstrass, 1904-Helge von Koch) ele au fost recunoscute abia în 1975 ca reprezentând un domeniu nou în matematică de către B.

Mandelbrot care le-a denumit *fractali*. Mandelbrot a inventat cuvântul „*fractal*”, care derivă din latinescul „*fractus*”, derivat la rândul său din verbul „*frangere*” (a sparge, a face bucăți, a zdrobi în fragmente neregulate). *Geometria fractală este astfel acea ramură a matematicii care studiază proprietățile fractalilor*. S-a constat că nenumărate fenomene pot fi descrise folosind această geometrie iar fractalii și-au găsit aplicații în știință, tehnologie, economie, artă, calculatoare și multe alte domenii. Noi îi vom studia în contextul fizicii.

D.1. Notiunea de dimensiune

Cuvântul „geometrie” provine din limba greacă de la *Ge* = Pământ și *metro* = a măsura. Geometria este o parte a matematicii care se ocupă cu relațiile spațiale dintre figuri și a fost introdusă de către Thales. Notiunea centrală a geometriei este *congruență*. În geometria dezvoltată de către Euclid, se spune că două figuri sunt congruente dacă ele sunt legate între ele prin relații de reflexie, rotație sau translație. Există mai multe tipuri de geometrii, unele care diferă prin spațiul în care sunt definite: geometria plană sau euclidiană, geometria pe o sferă etc., sau prin modul în care se definesc transformările geometrice.

Măsurarea terenurilor (suprafețelor de pământ) a fost una dintre primele activități umane care au cerut măsurători de precizie. Spre exemplu, civilizația egipteană s-a bazat pe fertilitatea văii Nilului, pe inundarea periodică (primăvara) a malurilor lui. De aici a apărut necesitatea de a reîmpărți terenul între oameni, după inundarea care evident ștergea orice urmă de frontiere între terenuri. În acest scop, egiptenii aveau un corp de slujbași care măsurau și arandau terenurile în fiecare an. Pentru aceasta foloseau „frânghia cu noduri”, care avea lungimea de 12 unități (părți) și cu care se putea construi un triunghi dreptunghic, de laturi 3, 4 și 5, adică triunghiul lui Pitagora. Cu o astfel de frângie se pot nota pe teren unghiurile drepte, respectiv se pot trasa, la orice scară, parcele dreptunghiulare de teren.

Compararea și „transformarea” geometrică a terenurilor a fost astfel bine dezvoltată în antichitate (fig. 4.32).

Similaritatea este un concept extrem de important în geometrie. Conceptul de similaritate utilizat în matematică

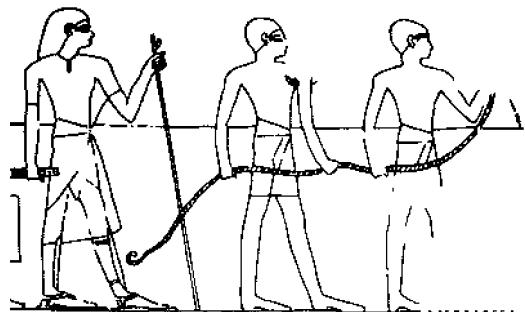


Fig. 4.32. Pictură egipteană (aprox. 1400 î.Hr.) în care se prezintă operația de măsurare a terenului.



Fig. 4.33. Pantera.

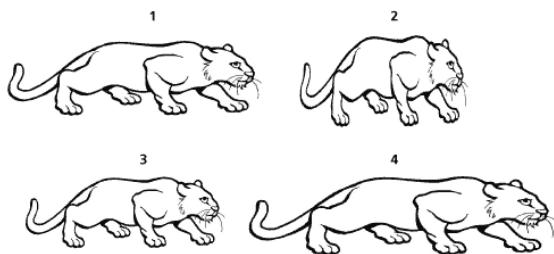


Fig. 4.34. „Transformări” geometrice suferite de pantera anteroiară.

este mai precis decât acela utilizat în vorbirea curentă. Spre exemplu, în figura 4.33, aveți un desen al unei pantere.

Puteți să recunoașteți pantera similară cu ea, dintre cele patru prezentate în figura 4.34?

Care este similară cu prima? Evident că ati ghicit. Dar oare cum ati rationat? Aduceti-vă aminte din matematică și explicați motivele pentru care două triunghiuri sunt asemenea (fig. 4.35) și aplicați rationamentul la problema cu pantere.

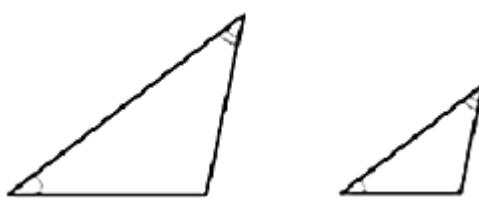


Fig. 4.35. Triunghiuri asemenea.

Ce înseamnă *dimensiune geometrică* (concept introdus de către Euclid) și relația cu *numărul de grade de libertate* ale unui sistem?

Ne-am obișnuit ca în viața de toate zilele să aproximăm formele care apar în natură prin noțiuni geometrice abstractive, cum ar fi: puncte, linii, cercuri, plane. Această atitudine este un punct central al geometriei lui Euclid, exprimată în lucrarea lui denumită *Elementele* (fig. 4.36). Această carte reprezintă de mai mult de două mii de ani nu numai *fundamentele geometriei* dar și un exemplu de *teorie axiomatică*: se pleacă de la axiome alese ca fiind evidente și se deduc de aici toate consecințele logice, corecte. Toate figurile geometrice sunt aşadar mulțimi de puncte care sunt mai mult sau mai puțin conectate între ele. Printre aspectele fundamentale introduse de către Euclid a fost și noțiunea de *dimensiune*. Prin definiție,

Euclid a atribuit dimensiunea zero unui punct, dimensiunea 1 unei curbe, dimensiunea 2 unei suprafete și dimensiunea 3 unui corp. De aici, se poate spune că o curbă este o succesiune (densă) de puncte „puse cap la cap”, că o suprafată este compusă din curbe puse una lângă alta, iar un corp este o suprapunere de suprafete puse una peste alta. În toate cazurile, spațiul respectiv (1, 2 sau 3-dimensional) este complet umplut, adică nu rămân locuri „goale”. Este un mod intuitiv de a înțelege *structurile geometrice*.

Putem completa această imagine cu ideea (dezvoltată ulterior) că dacă încercăm să stabilim poziția unui punct pe o dreaptă avem nevoie de un *număr (coordonată)*. Acest număr va indica *distanța pe curbă* de la un punct de pe curbă, luat ca origine, până la punctul considerat. Dacă însă dorim să stabilim poziția unui punct în plan, avem nevoie de două numere, iar dacă dorim să stabilim poziția unui punct în spațiu sunt necesare trei puncte. Spunem că discutăm despre un *spațiu unidimensional (curba)*, *bidiimensional (suprafața)* sau *tridimensional (corpul)*. Spunem, printre altele, că noi trăim într-un spațiu tridimensional, căci ne putem mișca pe trei direcții independente: înainte sau înapoi, la dreapta sau la stânga, în sus sau în jos.

Dacă alegem să reprezentăm spațiul printr-un sistem de axe (de exemplu rectangular - cartezian), cele trei numere de care avem nevoie pentru a stabili poziția unui punct în acest spațiu se numesc *coordonate* ale punctului. Cu ajutorul coordonatelor se poate descrie ușor traectoria unui obiect în spațiu fizic.

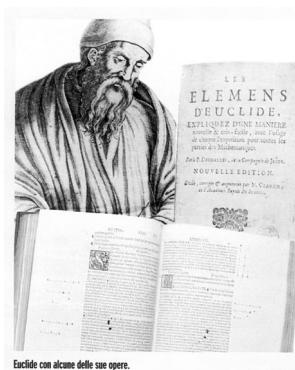


Fig. 4.29. Desen care imaginează portretul lui Euclid alături de imagini ale operei lui, cartea *Elementele* în ediții ceva mai noi.

D.2. Limitele geometriei euclidiene

Pentru a înțelege dificultatea întâmpinată în definirea intuitivă a *dimensiunii* să luăm următorul exemplu. Să considerăm un ghem de sfoară cu diametrul de 10 cm, având firul de 1 mm grosime. De la 10 m distanță, ghemul este asimilabil cu un punct (dimensiunea sa efectivă este 0); observat mai de aproape, de la 10 cm, de exemplu, ghemul este reprezentat printr-o bilă tridimensională. Pe măsură ce ne apropiem, dimensiunea efectivă a ghemului se schimbă: la o distanță de 10 mm, acesta este percepțut ca un ansamblu de fire, putând fi identificat cu o linie (dimensiunea sa efectivă este 1); la o distanță de 0,1 mm firul este percepțut ca un obiect cilindric și totul devine tri-dimensional. La scară microscopică, ghemul se reduce la o serie finită de atomi punctiformi și redevine 0 dimensional! Deci, dimensiunea efectivă a unui obiect oarecare nu are o valoare fixă. Ea depinde de condițiile de observare.

Unde intervine geometria în fizică?

În general, în fizică se ignoră forma obiectului, reducându-l fie la un punct material, fie la o linie fără grosime, fie la o suprafață fără grosime și.a.m.d. După cum spunea, de exemplu, Descartes, forma este „aparentă exterioară a corpuriilor”.

Există nenumărate probleme de fizică în care elementele geometrice sunt necesare pentru a calcula lungimi, arii sau volume, cum este în cazul mărimilor: densitate, rezistență electrică a unui conductor, capacitatea unui condensator, mersul razelor de lumină printr-o lentilă sau prismă, expresia matematică a traectoriei unui obiect în mișcare, forma suprafeței de undă etc. În multe cazuri geometria intervine profund, esențial, dar uneori pentru o rezolvare mai simplă putem să nu o luăm în considerare. Astfel, problema se simplifică în mod corespunzător. Există multe cazuri care scot în evidență faptul că uneori, în încercarea de descriere a unui fenomen, prin simplificarea lui „scapă” tocmai esența fenomenului. Pe de altă parte, luarea în considerare a situației reale complică enorm problema. Dar dacă dorim ca fizica să explice fenomenele *lumii reale* va trebui să nu neglijăm unele aspecte și să nu simplificăm lucrurile. Ca un prim exemplu, să considerăm un corp real care este mărginit de o suprafață reală, care cu siguranță nu este perfect plană. Oare putem neglija faptul că una dintre fețele unui corp nu este perfect plană? Uneori da, alteori nu. De exemplu, atunci când avem o oglindă, dacă ea este destul de plană, imaginea în ea va fi destul de clară, dacă nu, această imagine va fi neclară și distorsionată. De ce trebuie să studiem și suprafețe care nu sunt „perfect” plane? Pentru că ele sunt, de fapt, suprafețele

corpuriilor reale. Aceste suprafețe care nu sunt perfect plane, se numesc *rugoase* (fig. 4.37). Unde intervine faptul că o suprafață este rugoasă? Iată câteva exemple: la curgerea fluidelor prin țevi (rezistență la înaintare și fenomenele de cădere de presiune de la uzina de apă până la locuința noastră), la frecarea de alunecare a corpuriilor (de la frânele mașinilor la lagărele care trebuie să fie cât mai perfecte, de la realizarea sculelor de tăiat până la hârtia de șmirghel, la contactele electrice de la intrerupătoare etc. Să luăm ca exemplu contactul electric. Un contact electric trebuie să aibă o rezistență electrică cât mai mică pentru că altfel se încălzește și se strică. În acest scop, suprafața de contact trebuie să fie destul de mare, la fel și forță cu care sunt strânse cele două suprafețe metalice în contact. Dar dacă suprafața nu este perfect plană, contactul este prost. În figura 4.37 se arată (exagerat) un profil de suprafață reală (rugoasă).

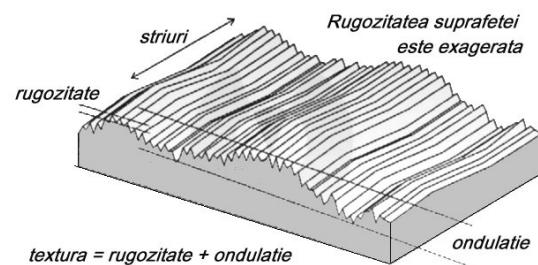


Fig. 4.30. Elementele unei suprafețe rugoase.

Dacă facem contact între două astfel de suprafețe este împede că aria reală de contact este foarte mică (fig. 4.38). Cum calculăm rezistența electrică a unui astfel de contact? Putem modela destul de bine suprafața de contact ca în figura 4.38 (cu *a* și *b* au fost notate cele două suprafețe ale contactului). Modelul scoate în evidență că numai în anumite puncte cele două suprafețe sunt realmente în contact. Cum calculăm rezistența? Vom vedea că un model fractal poate conduce la rezultate bune.

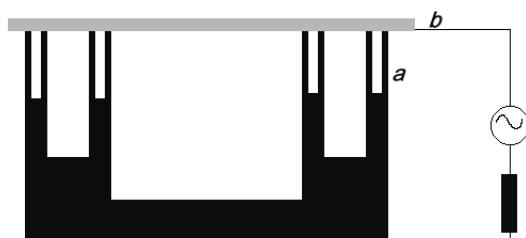


Fig. 4.38. Model de contact electric care evidențiază contacte în puncte discrete.

D.2. Geometria fractală

Formele studiate în geometria fractală sunt caracterizate printr-o complexitate întrinsecă, de o neregularitate fundamentală, care se manifestă la toate scările de observație.

Pentru a înțelege mai bine ce înseamnă un *fractal* să luăm ca exemplu o figură euclidiană elementară, cercul de rază R , definit simplu, ca locul geometric al tuturor punctelor egal depărtate de centru. Să calculăm lungimea cercului aproximându-l prin perimetru unui poligon regulat de latură L , înscris în cerc. Lungimea cercului va fi aproximată (prin lipsă), cu o valoare dependentă chiar de numărul laturilor poligonului $N(L)$:

$$P(L) \sim N(L)L$$

O aproximare mai bună se face dacă L scade, adică dacă coarda se apropiș din ce în ce mai mult de arcul subîntins. Pentru o serie de poligoane înschise în cercul de măsurat, cu laturi din ce în ce mai mici, putem scrie că:

$$L_1 > L_2 > L_3 > \dots > L_n$$

Și obținem sirul de aproximări:

$$P_1(L_1) < P_2(L_2) < P_3(L_3) < \dots < P_n(L_n)$$

Se spune că obiectul analizat este măsurabil, și deci are sens să discutăm despre valoarea perimetrului, doar dacă *limita sirului de mai sus există, este finită și diferită de 0*. În acest caz, limita este chiar valoarea cunoscută: $P = 2\pi R$ (P fiind perimetru cercului). Analiza ne spune deci că pentru a minimiza eroarea, trebuie folosită o scară cât mai mică (poligon de latură cât mai mică) (fig. 4.39).

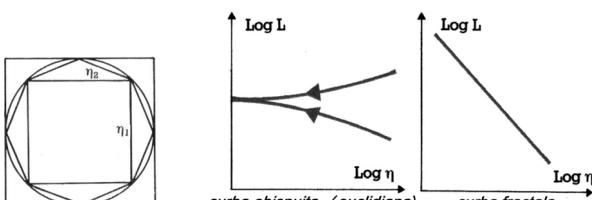


Fig. 4.32. Aproximarea unui cerc cu poligoane regulate înschise (sau circumscrise), de latură h . Pentru cazul poligoanelor regulate lungimea tinde către $2\pi R$. Pentru curbe fractale (perimetru țărmurilor insulelor) tinde spre infinit!

Dar, se constată că nu orice obiect măsurat „se lasă supusă măsurării”. Lewis Richardson a efectuat la începutul

secolului al XX-lea măsurători ale perimetrelui coastelor unei insule (fig. 4.40). Surpriza mare a lui Richardson a constat în observația că aproximările din ce în ce mai bune ale perimetrelui, facilitate de hărți din ce în ce mai detaliate, nu au format un sir convergent spre o limită finită, contrazicând practic însăși ipoteza de bază a măsurabilității: lungimea măsurată a coastelor a rezultat a fi cu atât mai mare cu cât unitatea de măsură era mai mică. Concluzia a fost că perimetru liniei frânte a coastelor insulei reale (nu una idealizată, rotunjită și aproximată fie cu un cerc fie cu o elipsă, fie cu o altă formă geometrică *euclidiană*) nu poate fi determinat.

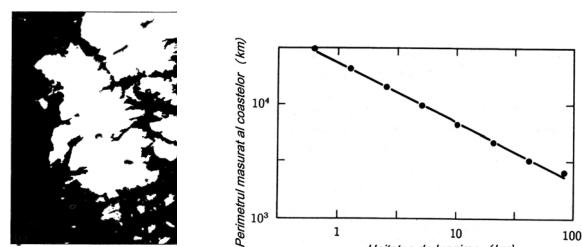


Fig. 4.40. Harta țărmurilor unei insule și dependența perimetrului de lungimea unității de măsură.

În cazul măsurătorilor unor corpuri reale, pe lângă valoarea numerică găsită trebuie specificată și scara utilizată la măsurătoare. Richardson a propus o formulă empirică pentru calcularea perimetrului insulei, arătând că există întotdeauna două constante λ și D , astfel încât numărul de laturi ale poligonului care aproximează insula să fie:

$$N(L) = \lambda L^{-D} = \frac{\lambda}{L^D}, \quad (15)$$

(unde L reprezintă lungimea laturii poligonului, sau a unității de măsurare).

Atunci, lungimea liniei poligonale va fi dată de:

$$\begin{aligned} P(L) &= LN(L) \\ P(L) &= L\lambda L^{-D} = \lambda L^{1-D} \end{aligned} \quad (16)$$

Mandelbrot a găsit o semnificație geometrică pentru constantele λ și D care intervin în formula empirică de mai sus, și anume: λ reprezintă lungimea coastei măsurate iar D este dimensiunea ei fractală.

Situată se prezintă la fel atunci când studiem, de exemplu, ce suprafață internă are plămânul (adică suprafața de contact a plămânlui cu aerul. Dacă se fac măsurătoarea și calculul respectiv, ajungem la concluzia uimitoare că

aria plămâului nostru este ceva mai mare decât a unui teren de tenis. Din nou, avem de-a face cu un mod de „împachetare” a unei suprafețe care într-o zonă mică cuprinde o arie enormă, fapt specific unei structuri fractale. Astfel de cazuri se întâlnesc frecvent în realitate și cu siguranță nu pot fi tratate prin fizica obișnuită.

În geometrie, sensul noțiunii de *dimensiune* este legat de modul în care sunt descrise proprietățile de similaritate și de scalare (transformare de scală) ale unei forme geometrice. Un segment de linie poate fi considerat ca fiind de exemplu format din două copii similare ale lui, fiecare scalat cu $1/2$. Un pătrat poate fi considerat ca fiind format din patru copii ale lui (pătrătele), fiecare scalat cu 1 (lungimea laturii). Un cub poate fi considerat ca fiind format din opt copii ale lui (cubulete), fiecare scalat cu 1 (lungimea laturii). Să scriem mai exact această proprietate de scalare și care ne poate lămuri mai exact noțiunea de dimensiune.

Dacă dividem un segment de linie de lungime 1 în N părți similare, fiecare de lungime micșorată de k ori (*factor de scală*), atunci lungimea segmentului va avea proprietatea că

$$N k = 1,$$

adică segmentul este compus din N părți similare, fiecare parte fiind scalată cu factorul $k=1/N$. Dacă facem aceeași operație la un pătrat de arie unitate, divizând latura cu factorul k , vom obține relația

$$N k^2 = 1,$$

adică suprafața de arie unitate este compusă din N părți (auto)similare scalate cu factorul $k=1/N^{1/2}$. Utilizând aceeași logică, vom obține pentru un cub de volum unitate o relație asemănătoare:

$$N k^3 = 1,$$

adică cubul de volum unitate este format din N părți (auto)similare scalate cu factorul $k=1/N^{1/3}$.

Examinând cele trei relații, observăm că exponentul lui k este în fiecare caz o măsură a dimensiunii de (similaritate), D_s (unde prin indicele s am specificat dimensiunea de similaritate), a obiectului geometric, astfel încât putem scrie în general că:

$$N k^{D_s} = 1.$$

Dacă logaritmăm această expresie obține o formulă pentru determinarea dimensiunii:

$$D_s = \frac{\ln(N)}{\ln(1/k)}. \quad (17)$$

Pentru obiectele din geometria euclidiană această dimensiune este un număr întreg, $0, 1, 2$ sau 3 .

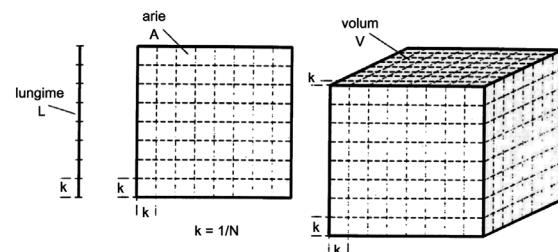


Fig. 4.41. Proprietățile de scalare ale obiectelor geometriei euclidiene.

Exemplu de curbă fractală

Curba lui Von Koch a fost imaginată în 1904 de matematicianul suedez Helge Von Koch, constituindu-se într-un frumos exemplu de curbă continuă fractală. Generarea sa implică alegerea unui *inițiator* (dreapta), a unei *legi* de construcție și a unui *proces* de iterare (se mai numește și recursiv, care se repetă la nesfârșit). Această operație dictată de legea aleasă, se aplică asupra fiecărei părți rezultante din operația initială (fig. 4.42).

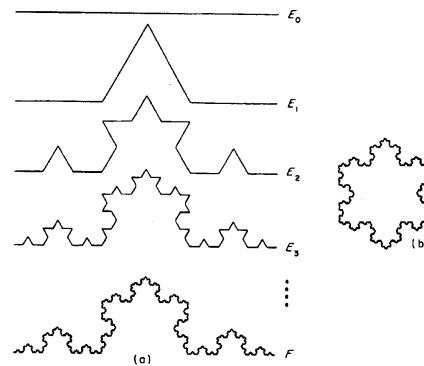


Fig. 4.42. Generarea curbei Koch prin iterare.

Concret, în acest caz, legea impune ca dreapta să fie divizată în $k = 3$ părți egale, să fie înălțată partea centrală și în locul ei să se pună un triunghi echilateral fără bază. Apoi, intervine procesul reversiv care presupune aplicarea legii pe fiecare segment de dreaptă rezultat. În acest caz, cele 4 segmente devin, fiecare în parte, un „nou” inițiator, suportul a 4 „imagini” micșorate și așezate după aceeași regulă, și aşa mai departe.

$$D = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln N(k)}{\ln \left(\frac{1}{k} \right)} \quad (18)$$

Dacă se repetă acest proces, se obține o linie poligonală închisă cu laturi de lungime din ce în ce mai

mică. Se observă că după fiecare iterație lungimea curbei crește. La limită, aceasta tinde la ∞ .

Curba Koch nu este rectificabilă (adică nu poate fi aproximată cu un sir finit de segmente), dar suprafața delimitată de ea are arie finită. Construcția este perfect regulată și, după fiecare trecere de la un nivel la altul, numărul de unghiuri crește. De asemenea, numărul de laturi ale liniei poligonale și lungimea totală a curbei crește, dar lungimile laturilor se micșorează și toate acestea într-un raport de autosimilaritate.

Să evaluăm dimensiunea sa fractală folosind formula anterioară:

$$D = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\ln N(k)}{\ln \left(\frac{1}{3}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3 \cdot 4^n)}{\ln 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln 3 + n \ln 4)}{n \ln 3} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 3}{n \ln 3} + \frac{n \ln 4}{n \ln 3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{\ln 4}{\ln 3} \right) \quad (19)$$

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26185\dots \quad (20)$$

Dacă operația aceasta se duce la infinit se obține o curba Koch care are o serie de proprietăți interesante:

- are lungime infinită,
- este frântă în toate punctele ei,
- fiecare parte a curbei seamănă cu întregul.

Curba obținută după o infinitate de iterări este un exemplu tipic de curbă denumită *fractală*. Se spune că toate curbele obținute în iterările succesive sunt *curbe pre-fractale*, doar la limită curba frântă obținută este cu adevărat fractală.

O metodă practică de evaluare a unității proprii (m^d) unei structuri fractale este cunoscută sub denumirea de „*box counting*”, adică „numărarea cutiilor”.

Să presupunem că avem o curbă dată desenată într-un plan. Putem să alegem dimensiunea maximă a obiectului (curbei) și să construim un pătrat care conține obiectul de analizat. Lungimea laturii acestui pătrat poate fi considerată unitatea de măsură. Împărțim această unitate în 2 părți

egale; se obțin, la scara $\frac{1}{2}$, 4 domenii din care doar (n_1) sunt ocupate de structura analizată. Împărțim din nou fiecare pătrat în patru părți egale (scara $\frac{1}{4}$) și se obțin 16 domenii, din care (n_2) sunt ocupate de părți ale obiectului de analizat. Procedăm asemănător, până la limita rezoluției de care dispunem. Se obțin deci două șiruri:

– unul pentru scări: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

– și unul pentru numărul de domenii ocupate raportat la numărul total de domenii, dependent de scări:

$$\frac{n_1}{4}, \frac{n_2}{16}, \frac{n_3}{64}, \frac{n_4}{256}, \dots$$

Se consideră un punct M care are coordonatele M (scara, numărul caracteristic determinat la acea scară). De

exemplu, $M_1 \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{n_1}{n_{\left(\frac{1}{2}\right)}} \right)$; $M_2 \cdot \left(\frac{1}{4}, \frac{n_2}{n_{\left(\frac{1}{4}\right)}} \right)$, etc. și se

reprezintă într-un sistem ortogonal plan, de coordonate logaritmice. Dimensiunea fractală a obiectului va fi numeric egală cu panta dreptei trăsătă de punctele M_1, M_2, \dots, M_n . Odată găsită valoarea lui D , se poate identifica obiectul, ca fiind fractal sau nu. Dacă D este foarte aproape de 1 sau 2, atunci obiectul analizat este de tip euclidian. Dacă D are valoare intermediară, fractionară, atunci acel obiect este fractal, caracterizat de valoarea determinată.

Această metodă este ușor de aplicat cu ajutorul calculatorului, care face ca precizia să crească foarte mult. Un exemplu de măsurare a lui D cu această metodă este prezentat mai jos (fig. 4.43).

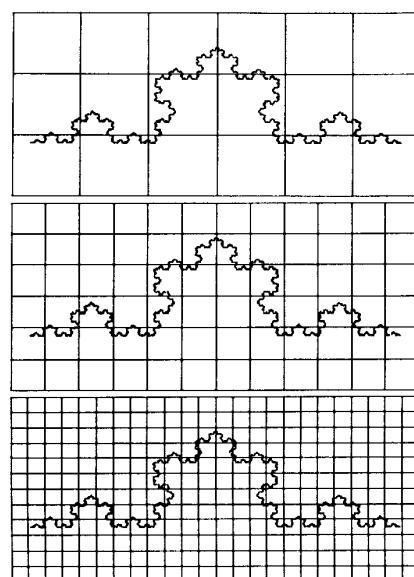


Fig. 4.43. Metoda *box counting* aplicată la curba Koch.

Fractalii pot fi înțeleși ca fiind mulțimi speciale de puncte (din anumite spații metrice), care se diferențiază de alte

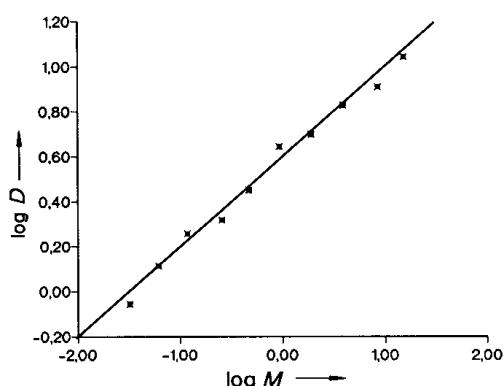


Fig. 4.44. Graficul log-log care permite determinarea dimensiunii fractale prin calcularea pantei dreptei obtinute.

multimi de puncte prin faptul că dimensiunea lor este fractionară, adică au dimensiunea neîntreagă.

Dimensiunea fractală este un număr care cuantifică gradul de neregularitate și de fragmentare a unei structuri geometrice sau a unui obiect din natură.



1. Determinați dimensiunea fractală pentru o frunză de ferigă, sau o altă frunză (fig. 4.45). Autosimilaritatea frunzei de ferigă se poate vedea prin existența unor replici în miniatură a frunzei pe fiecare rămurică. Copiați imaginea frunzei, (dacă găsiți una în natură o puteți copia utilizând o mașină de copiat de tip Xerox, la care puteți obține o copie mărită, ceea ce avantajează măsurătoarea), și utilizați metoda *box counting*.



Fig. 4.39. Frunza de ferigă este un exemplu natural, perfect pentru noțiunea de autosimilaritate.



2. Imagine cu vopsele și figuri obținute la îndoire. Luăți o colă de hârtie A4 și puneti pe centrul ei puțină vopsea de ulei sau eventual acuarelă. Apoi îndoiti hârtia în două, apăsați cele două părți în contact și apoi dezlipiți-le. Veți obține o figură simetrică cu un contur neregulat. Exersați metoda box counting pe această figură după ce vopseaua s-a uscat (fig. 4.46).

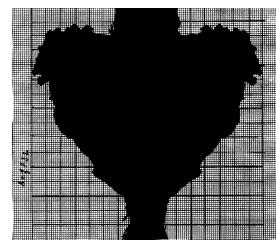


Figura 4.46. Obiect fractal obținut prin procedeul descris.



3. Relația diametru – masă pentru hârtia mototolită.

Faptul că un fractal are proprietăți geometrice deosebite se poate vedea și din următorul experiment. Se iau două coli de hârtie de format A0. Una dintre coli se taie ca în figura 4.47, b

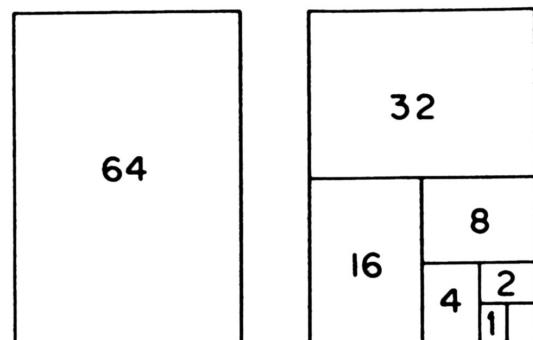


Figura 4.47. Una dintre colile A0 se lasă neatinsă iar cealaltă se decupează ca în figură.

Prin decupare se obțin colii tot mai mici care au mase în raportul ariilor lor, adică 64, 32, 16, 8, ...etc. unități. Se mototolesc toate părțile obținute, inclusiv coala A0. Se obțin o serie de bile din colii mototolite. Nu vă fie frică să le strângeti cât puteti de tare! Veți obține un sir de bile tot mai mici, ca în figura 4.48.

Măsurati diametrul acestor bile și scrieți-l într-un tabel în care treceți și aria colii din care a fost realizată bila. Să observăm că această aria este proporțională cu masa hârtiei, căci densitatea hârtiei este constantă iar grosimea



Fig. 4.48. Imaginea bilelor de hârtie mototolită.

ei la fel. Datele pentru două tipuri de hârtie experimentată de noi (albă și maro) sunt date ca exemplu în tabelul 1.

Tabelul 1. Datele pentru experimente cu două tipuri de hârtie de densități diferite.

Nr	1/n	1/n	Hartia albă				Hartia maro			
			Diam. [cm]	D ³	Perim. [cm]	Perim./π	Diam. [cm]	D ³	Perim. [cm]	Perim. /π
1	½	0.5	9	729	27	8.6	11	1331	31	9.87
2	¼	0.25	6.8	314.4	20	6.37	7.3	389	22	7.0
3	⅛	0.125	5	125	14	4.46	5.0	125	16	5.1
4	⅛	0.0625	3.6	46.6	10	3.18	3.8	54.9	12	3.82
5	⅛	0.03125	2.9	24.4	7	2.23	3.2	32.8	10	3.18
6	⅛	0.015625	2.0	8	-	-	2.5	15.6	-	-
7	⅛	0.0078125	1.5	3.37	-	-	2.0	8	-	-
8	⅛	0.00390625	1.2	1.73	-	-	1.4	2.75	-	-
9	⅛	0.512	0.9	0.73	-	-	1.0	1.0	-	-
10	⅛	0.1024	0.6	0.22	-	-	0.9	0.73	-	-
11	⅛	0.2048	0.5	0.125	-	-	0.5	0.125	-	-
12	⅛	0.4096	0.5	0.125	-	-	0.4	0.064	-	-
13	⅛	0.8192	0.3	0.027	-	-	-	-	-	-

Alcătuiți un grafic în care să treceți valorile log(masă) funcție de log(diametru). Veți obține o linie dreaptă ca în figura 4.49.

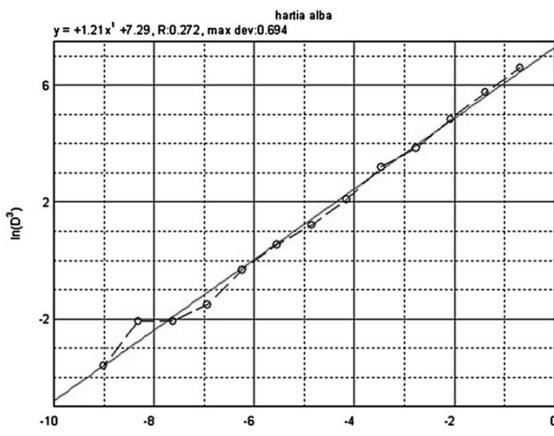


Fig. 4.49. Graficul log(masă) – log(diametru) pentru ghemotoacele din hârtie albă.

Măsurările indică, spre exemplu, pentru hârtia albă o pantă de 1,21 ceea ce corespunde la o dimensiune fractală de 2,21.

Sinteza capitolului

Determinismul este o gândire filosofică care afirmă că toate acțiunile (inclusiv cele umane) sunt predeterminate de evenimente anterioare, astfel încât liberul arbitru este o iluzie.

Haosul determinist exprimă fenomenul de comportare nepredictibilă care apare în sisteme guvernate de legi strict deterministe. Aspectul esențial care caracterizează *sistemele haotice* este *comportarea neliniară* care face ca modificări mici în condițiile initiale ale unui experiment (sau ale unei situații din lumea reală) să poată avea consecințe extrem de importante. Cu alte cuvinte, în aceste cazuri, erorile, determinate de impreciziile în cunoasterea condițiilor initiale, cresc rapid în timp, astfel încât, de la un moment dat încolo nu mai suntem în stare să prevedem comportarea viitoare a sistemului.

Într-un *sistem nehaotic* (adică în unul *liniar*) erorile sunt, de asemenea, prezente, și ele se cumulează în timp, dar rămân rezonabil de mici (limitate) astfel încât putem face o predicție mai mult sau mai puțin exactă.

Această situație nu apare ca urmare a incapacității noastre de a efectua măsurători cu o precizie oricât de bună. Acest aspect era cunoscut și de către gânditorii din Grecia Antică. Ei au dezvoltat ideea că un segment de dreaptă conține un număr infinit de puncte. Ca atare, a defini o poziție pe dreaptă (adică coordonata ei, cum spunem noi azi), presupune a face o aproximare la valoarea reală, căci ar trebui să cunoaștem acel număr cu o precizie dată printr-un număr infinit de zecimale. Astfel încât, grecii antici au descoperit că pentru acesta pot utiliza fractie! Ei considerau că orice număr zecimal poate fi scris precis printr-o fractie. Din păcate (pentru ei) această iluzie s-a lovit de faptul că există numere care *nu pot fi scrise ca o fractie*; aceste numere se numesc *iratională*. Ca atare, cu toată bunăvoița și ingeniozitatea, noi nu putem *în principiu* să cunoaștem decât aproximativ poziția (unui punct pe un segment de dreaptă). Rezultă că problema *predictibilității* se poate aplica doar la *sisteme liniare* la

care imprecizia (principială) asupra condițiilor inițiale nu afectează capacitatea noastră de predictie pe termen lung.

Concluzia este aceea că natura în sine nu este de fapt deterministă, cel puțin nu în sensul clasic al cuvântului. În teoria lui Newton, natura a fost imaginată ca un *Univers ceasornic, care merge perfect*.

Determinismul și predictibilitatea ne asigură că în anumite condiții putem prevedea și spune exacte evoluția în timp a unui sistem fizic.

Sisteme unpredictibile. Se constată că în natură și în tehnică există sisteme a căror evoluție în timp este deterministă dar unpredictibilă. Aceste exemple arată limitele predictibilității aşa cum am înțeles-o în fizica de până acum. Limitele predictibilității sunt parțial legate de faptul că utilizăm *modele* care sunt evident imperfecte și limitative. Am examinat de asemenea o serie de situații în care sunt îndeplinite *condițiile de apariție a comportamentului haotic*. Această situație se observă mai ales la sisteme aflate departe de echilibru, iar haosul care se observă are alt caracter ca de exemplu haosul molecular, care exprimă comportarea aleatoare a moleculelor într-un gaz.

Pentru a înțelege această nouă situație, comportamentului unui sistem fizic se descriere utilizând un nou concept *spațiu fazelor*. Descrierea comportamentului unui sistem fizic utilizând *traекторia punctului figurativ* în spațiu fazelor ne dă un supliment de înțelegere a comportamentului sistemului.

Atractorul descris în spațiu fazelor, caracterizează *comportamentul stabil sau instabil* al unui sistem fizic.

Dar dificultățile noastre în a descrie fenomenele dinamice nu se opresc aici. S-au produs modificări în înțelegerea noastră asupra geometriei spațiului în care trăim. De la spațiu curb al relativității generale la geometria fractală.

Figuri autosimilare, sunt curbe plane sau spațiale, sau suprafețe care constau din părți similare cu întregul (Paul Pierre Lévy – 1938), ele au proprietăți care nu pot fi descrise prin geometria euclidiană.

Este important să se știe că astăzi există multe definiții pentru noțiunea de dimensiune, ca un obiect poate fi autosimilar în mai multe moduri (relativ la diferite tipuri de transformări) și că nu orice fractal poate fi definit recursiv (prin iterări).

Teste