Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Курсовой проект
По курсу «Дискретная математика»
Тема: «Нахождение максимального пути в нагруженном графе»

Студент:	**Дюсекеев А. Е.**
Группа:	**М8О-104Б-17**
Преподаватель:	**Смерчинская С. О.**
Оценка:	
Дата:	

Москва, 2018 г.

Задание №8

Вариант №5: Нахождение максимального пути в нагруженном графе.

Для решения данной задачи будем использовать алгоритм Форда для поиска минимального пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей дуг, перестроенный под поиск максимального пути из любой вершины в любую.

Теоретические сведения.

Опр. Нагруженным называется граф, в котором каждой дуге $< v_i, v_j > \in X$ (каждому ребру) ставится в соответствие число $l_{ij} \geq 0$, называемое весом или длинной дуги (ребра).

Опр. Матрица весов нагруженного графа - квадратная матрица порядка n (n - число вершин) с элементами $C = ||C_{ij}||$.

$$C_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, \text{если } \exists \text{ дуга } < v_i, v_j > \\ \infty \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Опр. Длина пути в нагруженном орграфе - сумма длин его дуг:

$$L = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{дугам пути}}} l_{ij}$$

Опр. Путь из v_i в v_j называется максимальным, если его длина наибольшая по сравнению со всеми путями из v_i в v_j.

Алгоритм поиска максимального пути.

$\lambda_i^{(k)}$ – длина максимального пути из вершины v_1 в v_i, содержащего не более k дуг.

$\lambda_i^0, \dots, \lambda_i^{(n-1)}$ i=1,...,n (n-r) вершин

1) Положим $\lambda_i^{(0)} = \infty$ i=2,...,n

   $\lambda_j^{(0)} = 0,$ j=1,....,n

   …

k-1) $\lambda_i^{(k)} = max\,(\lambda_j^{(k-1)} + C_{ji}) \quad 1 \leq j \leq n$

$\lambda_i^{(n-1)}$ - длина максимального пути из v_1 в v_i.

Найдем вершины максимального пути $v_1 = v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k} = v_t$:

$$\lambda_{i_{k-1}}^{(k-1)} + C_{i_{k-1}i_k} = \lambda_{i_k}^{(k)}$$

$$\lambda_{i_{k-2}}^{(k-2)} + C_{i_{k-2}i_{k-1}} = \lambda_{i_{k-1}}^{(k-1)}$$

$$\dots\dots$$

$$\lambda_{j_0}^{(0)} + C_{i_0 i_1} = \lambda_{i_1}^{(1)}$$

Индексы по столбцам соответствуют номерам вершин максимального пути.

Может существовать несколько путей, тогда перебором находим все так же, как и в алгоритме «фронта волны».

Алгоритмическая блок- схема.

Вводим матрицу нагруженности и требуемые вершины для поиска максимального пути между ними

↓

Строим матрицу итераций по исходной матрице, определяя максимальные пути

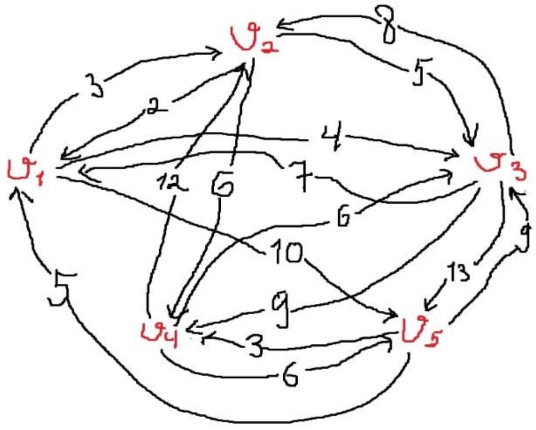
↓

Выводим длину максимального пути и промежуточные вершины.

Оценка сложности алгоритма.

Наибольшую сложность имеет подпрограмма составления матрицы итераций по исходной матрице нагруженности, согласно алгоритму Форда, перестроенного под поиск максимального пути. Сложность равна O(n^3).

Пример.



```
5
Нагруженный граф задан матрицей
     V1  V2  V3  V4  V5
V1  -1  3   4   -1  10

V2  2   -1  5   6   -1

V3  7   8   -1  9   13

V4  -1  12  6   -1  6

V5  5   -1  9   3   -1

Введите, из какой вершины в какую необходимо найти максимальный путь.
Исходная вершина: V2
Конечная вершина: V5
V1 -1  2   12  23  34
V2 0   0   0   0   0
V3 -1  5   12  27  34
V4 -1  6   14  21  36
V5 -1  -1  18  25  40

Максимальный путь:
V2 - V5 = 40

Описание пути:
V5
 |
V3
  |
V5
  |
V3
  |
V2
```

```
5
Нагруженный граф задан матрицей
     V1  V2  V3  V4  V5
V1  -1  3   4   -1  10

V2  2   -1  5   6   -1

V3  7   8   -1  9   13

V4  -1  12  6   -1  6

V5  5   -1  9   3   -1

Введите, из какой вершины в какую необходимо найти максимальный путь.
Исходная вершина: V1
Конечная вершина: V3
V1 0   0   0   0   0
V2 -1  3   12  27  40
V3 -1  4   19  26  41
V4 -1  -1  13  28  35
V5 -1  10  17  32  39

Максимальный путь:
V1 - V3 = 41

Описание пути:
V3
 |
V5
  |
V3
  |
V5
  |
V1
```

Прикладная задача.

Дорожной инспекции требуется провести мониторинг качества новой трассы в направлении из города А в город Б. Компания знает расстояния и направления движения между различными населёнными пунктами между этими городами. Необходимо провести мониторинг проложенной трассы, проезжая как можно меньше населённых пунктов, при этом оценивая качество как можно большего диапазона трассы между городами А и Б.