

## Задание. Ручной счет

1. Расщепить функцию  $f(x)$  в сумму масштабирующей функции и вейвлета, т.е. представить в виде разложения по базису пространства  $V_0 \oplus W_0$ . Построить графики функции и разложения. Использовать вейвлеты Хаара.

2. По данному вектору данных  $y = (y_1 \dots y_{2^n})$  записать вейвлет-разложение функции  $f(x) = y_1 \varphi_{n0}(x) + y_2 \varphi_{n1}(x) + \dots + y_{2^n} \varphi_{n,2^n-1}(x)$ , т.е. представить ее в виде  $f = a_{00} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{jk} \psi_{jk}$ , где  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0; 1) \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1), \end{cases}$  а  $n$  и  $y$  брать в соответствии с вариантом. Построить график функции  $f$  и график ее разложения. Использовать вейвлеты Хаара.

3. Изображение задано матрицей  $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти его разложение по вейвлетам Добеши D4, используя периодическое продолжение.

4. Найти  $\lambda^2$  по данному  $\lambda^0$  и маске схемы подразделений  $a$ , которая указана на носителе  $\text{supp } a$ . Построить примерный график предельной функции данной схемы подразделения.

## Варианты

### Вариант 1.

- $f(x) = 2\chi_{[0;1/2)}(x) + 3\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
- $n = 3$ ,  $y = (2, 1, -1, 0, 2, 1, 3, 1)$ ;
- $I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
- $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha,3}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = \frac{1}{8} (1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$ , носитель  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
- Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $\{0, 1, 1, 0\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

### Вариант 2.

- $f(x) = -2\chi_{[0;1/2)}(x) + 4\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
- $n = 4$ ,  $y = (-1, 1, -1, 0, 2, -2, 3, -3, 0, 2, 1, 3, 2, 0, -2, 1)$ ;
- $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha,0}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3} \ 3 - \sqrt{3} \ 3 + \sqrt{3} \ 1 + \sqrt{3})$ , носитель  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .
- Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $\{-1, 0, 1, 0\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

### Вариант 3.

- $f(x) = -3\chi_{[0;1/2)}(x) + 2\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
- $n = 4$ ,  $y = (-2, -1, 1, 2, 1, -3, 0, 1, 0, 2, 0, -3, 2, 0, 2, -1)$ ;
- $I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ;
- $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha,0}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = (-0,0625 \ 0 \ 0,5625 \ 1 \ 0,5625 \ 0 \ -0,0625)$ , носитель  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ .
- Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преоб-



зование Фурье последовательности  $\{-1, 1, 1, -1\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

**Вариант 4.**

1.  $f(x) = -2\chi_{[0;1/2)}(x) + 6\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
2.  $n = 3$ ,  $y = (-2, 0, -3, 2, -2, 1, -3, 1)$ ;
3.  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
4.  $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha,-2}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = \frac{1}{8} (1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$ , носитель  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
5. Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $\{2, 1, 1, -1\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

**Вариант 5.**

1.  $f(x) = -7\chi_{[0;1/2)}(x) + 3\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
2.  $n = 4$ ,  $y = (-2, 0, 1, 0, 1, 2, 0, -1, 0, 3, 2, -4, 2, 1, -2, -1)$ ;
3.  $I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
4.  $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha,1}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3} \ 3 - \sqrt{3} \ 3 + \sqrt{3} \ 1 + \sqrt{3})$ , носитель  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .
5. Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $\{-1, 1, 1, -1\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

**Вариант 6.**

1.  $f(x) = -4\chi_{[0;1/2)}(x) + 5\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
2.  $n = 3$ ,  $y = (1, 3, -3, 2, 5, 1, 3, -1)$ ;
3.  $I = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
4.  $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha,-1}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = (-0,0625 \ 0 \ 0,5625 \ 1 \ 0,5625 \ 0 \ -0,0625)$ , носитель  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ .
5. Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $\{3, 1, 0, -3\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

**Вариант 7.**

1.  $f(x) = 4\chi_{[0;1/2)}(x) - 8\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
2.  $n = 4$ ,  $y = (1, -2, -1, 2, 0, 5, -2, 1, 0, -3, 2, -5, 3, 1, 2, -1)$ ;
3.  $I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
4.  $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha,-4}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = \frac{1}{8} (1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$ , носитель  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
5. Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $\{-2, 1, 1, -3\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

**Вариант 8.**

1.  $f(x) = 8\chi_{[0;1/2)}(x) - 3\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
2.  $n = 3$ ,  $y = (-1, 5, 0, -2, 5, 7, 3, 3)$ ;
3.  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
4.  $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha,-7}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = \frac{1}{4} (1 - \sqrt{3} \ 3 - \sqrt{3} \ 3 + \sqrt{3} \ 1 + \sqrt{3})$ , носитель  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .
5. Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преоб-



зование Фурье последовательности  $\{1, 1, 2, -1\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

**Вариант 9.**

1.  $f(x) = 7\chi_{[0;1/2)}(x) - 5\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
2.  $n = 4$ ,  $y = (3, -1, 5, 1, -6, 2, -2, 1, 2, 0, 3, -7, 3, 1, 2, 2)$ ;
3.  $I = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
4.  $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha, -10}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = \frac{1}{8} (1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1)$ , носитель  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
5. Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $\{-3, 0, 1, 1\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

**Вариант 10.**

1.  $f(x) = 2\chi_{[0;1/2)}(x) + 8\chi_{[1/2;1)}(x)$ ;
2.  $n = 4$ ,  $y = (1, -2, 3, 1, -2, 1, -5, 6, 3, 0, 0, -2, 1, 6, 4, 3)$ ;
3.  $I = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
4.  $\lambda_\alpha^0 = \delta_{\alpha, -5}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{Z}$ ,  $a = (-0,0625 \ 0 \ 0,5625 \ 1 \ 0,5625 \ 0 \ -0,0625)$ , носитель  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ .
5. Используя алгоритм быстрого преобразования Фурье, найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $\{5, 1, 1, -2\}$ . Вычислить обратное преобразование Фурье полученного результата по определению.

## Список литературы

- [1] Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры / М. Фрейзер; пер. с англ. – М. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 487 с.: ил.
- [2] Столниц Э. Вейвлеты в компьютерной графике / Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
- [3] Вейвлет-анализ. Основы теории. Москва, 2004. – 280 с.
- [4] A. S. Cavaretta, W. Dahmen, and C. A. Micchelli, Stationary Subdivision Schemes, Mem. Amer. Math. Soc. 93, 1-186.

