С. С. Марченков, В. А. Простов, Критерий полноты относительно оператора замыкания по перечислению в трехзначной логике, *Дискрет. матем.*, 2021, том 33, выпуск 2, 86–99

DOI: https://doi.org/10.4213/dm1641

Дискретная математика

том 33 выпуск 2 * 2021

УДК 519.716 DOI https://doi.org/10.4213/dm1641

Критерий полноты относительно оператора замыкания по перечислению в трехзначной логике

© 2021 г. С. С. Марченков*, В. А. Простов*

На множестве P_k функций k-значной логики рассматривается оператор замыкания по перечислению (П-оператор). Доказано, что при любом $k \geqslant 2$ любой позитивно предполный класс в P_k является также П-предполным. Установлено, что в трехзначной логике других П-предполных классов не существует.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 19–01–00200.

Ключевые слова: оператор замыкания по перечислению, функции трехзначной логики

Введение. Одним из инструментов классификации функций многозначной логики являются операторы замыкания. Среди операторов замыкания наиболее известен оператор суперпозиции. Несмотря на широкое распространение, в вопросах классификации оператор суперпозиции обладает одним существенным «изъяном»: при любом $k \geqslant 3$ число замкнутых классов в k-значной логике P_k континуально [17]. Это обстоятельство заставляет искать другие, более сильные операторы замыкания, по отношению к которым число замкнутых классов в P_k конечно либо счетно (такие операторы получили название сильных операторов замыкания).

К настоящему времени в ряде работ на основе различных идей определено более десятка сильных операторов замыкания. Все они являются расширениями оператора суперпозиции. Обычно после доказательства того, что вводимый оператор замыкания при любом $k \geqslant 2$ порождает на множестве P_k конечную либо счетную классификацию, проводится исследование получаемой классификации при $k = 2$. Этот этап исследований для сильных операторов замыкания выполняется относительно легко. Однако наиболее интересным, на наш взгляд, представляется изучение действия сильных операторов замыкания на множестве P_3.

Для первого из известных сильных операторов замыкания — оператора параметрического замыкания — все 25 замкнутых классов булевых функций определены А. В. Кузнецовым [3]. В случае трехзначной логики все 2986 замкнутых классов найдены и подробно описаны А. Ф. Данильченко [1, 2, 18]. В [4] введено понятие

*Место работы: МГУ им. М. В. Ломоносова, e-mail: ssmarchen@yandex.ru, vasyapro08@mail.ru

S-классификации функций многозначной логики (оператор S-замыкания). В [13] найдены все 48 S-замкнутых классов трехзначной логики (полное и автономное доказательство этого результата содержится в книге [6]). Один из способов введения сильного оператора замыкания состоит в добавлении к любому замкнутому классу фиксированной функции. На этом пути в [7] описаны все 144 замкнутых класса трехзначной логики, которые содержат тернарный дискриминатор p. Естественное «позитивное» обобщение оператора параметрического замыкания приводит к оператору позитивного замыкания [5]. Все 192 позитивно замкнутых класса функций трехзначной логики найдены в [9]. Интересные сильные операторы замыкания предложены в [14,15]; для одного из них в классе P_3 имеется конечное число замкнутых классов, для другого — счетное множество. Отметим дальнейшее обобщение оператора позитивного замыкания — оператор импликативного замыкания, для которого в [12] определены все 17 замкнутых классов из P_3.

В [10] введен сильный оператор замыкания — оператор замыкания по перечислению (оператор П-замыкания). Этот оператор получается применением к функциям многозначной логики идеи перечисления графика функции с помощью набора (всюду определенных) функций — эта идея широко используется в теории рекурсивных функций. Однако, в отличие от рекурсивных функций, для функций многозначной логики графики функций приходится перечислять, вообще говоря, с помощью нескольких наборов функций. Это свойство оператора П-замыкания — перечисление графика функции «по частям» — существенно отличает оператор П-замыкания от других сильных операторов замыкания. В [10] установлены основные свойства оператора П-замыкания, в частности, доказано, что для любого $k \geqslant 2$ в P_k существует только конечное число П-клонов, и найдены все П-клоны булевых функций. Однако даже в P_3 все П-предполные классы не известны.

Одним из хорошо изученных сильных операторов замыкания является оператор позитивного замыкания [5, 8, 9, 11]. Поэтому вновь вводимые сильные операторы замыкания часто сравнивают с оператором позитивного замыкания. В [10] показано, что оператор позитивного замыкания сильнее оператора П-замыкания: всякий позитивно замкнутый класс состоит, вообще говоря, из нескольких П-замкнутых классов.

В настоящей работе мы сравниваем операторы П-замыкания и позитивного замыкания на уровне предполных классов. Прежде всего устанавливаем, что при любом $k \geqslant 2$ любой позитивно предполный класс в P_k является также П-предполным. Для $k = 3$ этот результат усиливаем: множества позитивно предполных и П-предполных классов в P_3, содержащих тождественную функцию, совпадают и состоят ровно из 10 классов. Тем самым в трехзначной логике получаем эффективный критерий П-полноты для систем функций, содержащих тождественную функцию.

Основные понятия. Пусть k — натуральное число, $k \geqslant 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и P_k — множество всех функций на E_k (множество функций k-значной логики). Если $Q \subseteq P_k$ и $n \geqslant 1$, то через $Q^{(n)}$ обозначим множество всех функций из Q, зависящих от n переменных. *Селекторной функцией* назовем функцию, значения которой совпадают со значениями некоторой из ее переменных.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(x)$ — функции из P_k. Будем говорить, что g есть *эндоморфизм* функции f, если выполняется тождество

$$f(g(x_1), \dots, g(x_n)) = g(f(x_1, \dots, x_n)).$$

Множество всех функций из P_k, имеющих эндоморфизм g, обозначим через $F(g)$.

На множестве P_k предполагаем заданной операцию (оператор) суперпозиции. Посредством $[Q]$ будем обозначать замыкание множества функций $Q \subseteq P_k$ относительно операции суперпозиции. Хорошо известно [9, 11], что для любой функции $g(x)$ множество $F(g)$ содержит все селекторные функции и замкнуто относительно операции суперпозиции.

Пусть функции $g_1, \dots, g_n, g_{n+1}$ принадлежат множеству $P_k^{(m)}$. Назовем набор функций $(g_1, \dots, g_n, g_{n+1})$ *корректным*, если для любых двух наборов $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)$ из E_k^m справедлива импликация

$$\begin{gathered}(g_1(a_1, \dots, a_m) = g_1(b_1, \dots, b_m)) \mathbin{\&} \dots \mathbin{\&} (g_n(a_1, \dots, a_m) = g_n(b_1, \dots, b_m)) \\ \Rightarrow (g_{n+1}(a_1, \dots, a_m) = g_{n+1}(b_1, \dots, b_m)).\end{gathered}$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$ и

$$\{(g_{11}, \dots, g_{1n}, g_{1,n+1}), \ \dots, \ (g_{s1}, \dots, g_{sn}, g_{s,n+1})\} \tag{1}$$

— система корректных наборов функций из $P_k^{(m)}$. Будем говорить, что система наборов (1) *перечисляет* (или П-*определяет*) функцию f, если график $f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}$ функции f есть объединение всех множеств

$$\{(g_{i1}(y_1, \dots, y_m), \dots, g_{in}(y_1, \dots, y_m), g_{i,n+1}(y_1, \dots, y_m)) : \quad y_1, \dots, y_m \in E_k\},$$

где $i = 1, 2, \dots, s$. Таким образом, на множестве P_k определена *операция перечисления*.

Из определения следует, что если система наборов (1) П-определяет функцию f, то для любого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, справедливо тождество

$$f(g_{i1}(y_1, \dots, y_m), \dots, g_{in}(y_1, \dots, y_m)) = g_{i,n+1}(y_1, \dots, y_m)$$

и, кроме того, для любого набора $(a_1, \dots, a_n)$ из E_k^n существует такое число i, $1 \leqslant i \leqslant s$, и такой набор $(b_1, \dots, b_n)$ из E_k^n, что

$$(g_{i1}(b_1, \dots, b_m), \dots, g_{in}(b_1, \dots, b_m)) = (a_1, \dots, a_n).$$

Пусть $Q \subseteq P_k$. Назовем П-*замыканием* множества Q (обозначение $\Pi[Q]$) множество всех функций, которые можно получить из функций множества Q с помощью операций суперпозиции и перечисления.

Множество Q называем П-*замкнутым классом*, если $\Pi[Q] = Q$. Понятие П-порождающей системы (для П-замкнутого класса) вполне аналогично соответствующему понятию для операции суперпозиции. Так же, как для операции суперпозиции, П-замкнутый класс будем называть П-*клоном*, если он содержит все селекторные функции.

Назовем множество функций $Q \subseteq P_k^{(m)}$ *накрывающим*, если в множестве Q существуют такие функции $g_1, \ldots, g_k$, что для некоторого набора $(a_1, \ldots, a_m) \in E_k^m$ имеет место равенство

$$\{g_1(a_1, \ldots, a_m), \ \ldots, \ g_k(a_1, \ldots, a_m)\} = E_k.$$

В [10] доказано, что если Q — П-замкнутый класс функций и множество $Q^{(m)}$ является накрывающим, то $Q = \Pi[Q^{(m)}]$. Кроме того, в [10] установлено, что система, состоящая из всех функций-констант, является П-полной.

Результаты. Известно [9, 11], что всякий позитивно предполный в P_k класс представим в виде $F(g)$, где $g(x)$ — либо идемпотентная функция из P_k, отличная от тождественной, либо перестановка на E_k, которая разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины и, возможно, циклов длины 1, число которых в этом случае должно быть не менее двух. Далее мы рассмотрим обе эти возможности и установим, что соответствующий класс $F(g)$ является П-предполным в P_k. Поскольку всякий позитивно замкнутый класс является также П-замкнутым, нам достаточно показать, что для любого позитивно предполного класса Q и любой функции f, не принадлежащей Q, выполняется равенство $\Pi[Q \cup \{f\}] = P_k$.

Сначала рассмотрим случай идемпотентной функции $g(x)$, отличной от тождественной функции. В этом случае существуют такое разбиение $\{D_1, \ldots, D_s\}$ множества E_k на непустые попарно не пересекающиеся подмножества и такие элементы $d_1, \ldots, d_s$, что $s < k$ и

$$d_1 \in D_1, \ \ldots, \ d_s \in D_s, \quad g(D_1) = d_1, \ \ldots, \ g(D_s) = d_s.$$

Нетрудно показать, что одноместная функция f принадлежит классу $F(g)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему условию: для всякого i, $1 \leqslant i \leqslant s$, существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant s$, что

$$f(D_i) \subseteq D_j \quad \text{и} \quad f(d_i) = d_j.$$

Отсюда, в частности, следует, что класс $F(g)$ содержит все константы $d_1, \ldots, d_s$ и не содержит ни одной из остальных констант.

Лемма 1. *Пусть $g(x)$ — идемпотентная функция, отличная от тождественной, и $f \notin F(g)$. Тогда в классе $[F(g) \cup \{f\}]$ имеется одноместная функция, не принадлежащая классу $F(g)$.*

Доказательство. Согласно определению функции f существует такой набор $\tilde{a}$, что $g(f(\tilde{a})) \neq f(g(\tilde{a}))$. Сначала в функции f проведем отождествление переменных в соответствии с равенством компонент в наборе $\tilde{a}$. Это приведет к функции, зависящей не более чем от k переменных. Затем в полученной функции заменим произвольную переменную x_i константой d_j, если на соответствующем месте в наборе $\tilde{a}$ стояло значение d_j (все такие константы входят в класс $F(g)$). В результате получим функцию f_1, зависящую от $m < k$ переменных, которая также не входит в класс $F(g)$. Иными словами, для некоторого набора $(b_1, \ldots, b_m)$ будем иметь

$$g(f_1(b_1, \ldots, b_m)) \neq f_1(g(b_1), \ldots, g(b_m)).$$

Удобно считать, что $(b_1, \ldots, b_m)$ — поднабор набора $\tilde{a}$. Если тогда $b_1 \in D_{i_1}, \ldots, b_m \in D_{i_m}$ (среди индексов $i_1, \ldots, i_m$ возможны повторения), то каждое из множеств $D_{i_1}, \ldots, D_{i_m}$ содержит по крайней мере два элемента и $b_1 \neq d_{i_1}, \ldots, b_m \neq d_{i_m}$. Предполагая, что $m > 1$, определим функции $h_2(x), \ldots, h_m(x)$ следующим образом: $h_j(d_{i_1}) = d_{i_j}$, $h_j(x) = b_{i_j}$ при $x \in D_{i_1} \setminus \{d_{i_1}\}$ и $h_j(x) = x$ в остальных случаях. Нетрудно убедиться, что функции $h_2, \ldots, h_m$ принадлежат классу $F(g)$. Положим

$$f_2(x) = f_1(x, h_2(x), \ldots, h_m(x)).$$

Тогда

$$f_2(d_{j_1}) = f_1(d_{j_1}, d_{j_2}, \ldots, d_{j_m}) = f_1(g(b_1), g(b_2) \ldots, g(b_m))$$

и (поскольку $b_1 \neq d_1$)

$$f_2(b_1) = f_1(b_1, b_2, \ldots, b_m),$$

что устанавливает соотношение $f_2 \notin F(g)$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 1. *Для любого $k \geqslant 2$ и любой идемпотентной функции $g(x)$ из P_k, отличной от тождественной функции, класс $F(g)$ является* П*-предполным в P_k.*

Доказательство. Пусть $f \notin F(g)$. В силу леммы 1 можно считать, что f — одноместная функция. Сразу выделим два простых случая. Если $s = 1$ (т.е. $D_1 = E_k$ и функция g есть константа d_1), то класс $F(g)$ состоит из всех функций, сохраняющих d_1. Этот класс не только позитивно предполон в P_k, но даже предполон в P_k относительно операции суперпозиции. Отсюда сразу получаем равенство $[F(g) \cup \{f\}] = P_k$.

Предположим, что $s > 1$ и существует такое i, $1 \leqslant i \leqslant s$, что $f(d_i) \notin \{d_1, \ldots, d_s\}$. Поскольку константа d_i принадлежит классу $F(g)$, мы получаем константу $f(d_i)$, отличную от $d_1, \ldots, d_s$. Теперь заметим, что для любых чисел a, b, не входящих в множество $\{d_1, \ldots, d_s\}$, в классе $F(g)$ имеется такая функция $f_{ab}(x)$, что $f_{ab}(a) = b$. Таким образом, приходим к выводу, что замыкание $[F(g) \cup \{f\}]$ содержит все константы, т. е. является П-полной системой.

Итак, в дальнейшем предполагаем, что $s > 1$ и для всякого i элемент $f(d_i)$ входит в множество $\{d_1, \ldots, d_s\}$. Будем также считать, что непринадлежность функции f классу $F(g)$ обеспечивается значениями функции f на множестве D_1: существуют такие элементы $a, b \in D_1$, что $f(a) \in D_i$, $f(b) \in D_j$ и $i \neq j$. В целях упрощения записи предположим еще, что $D_1 = \{0, 1, \ldots, d_1\}$ и $a = d_1$ (тогда, конечно, $f(d_1) = d_i$). Далее рассмотрим две возможности.

1. Существует такое $c \in D_1$, что $f(c) \in D_j \setminus \{d_j\}$. Определим функцию $h_{yz}(x)$:

$$h_{yz}(x) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $y = f(c)$ и $z \in D_j$, то функция h_{yz} принадлежит классу $F(g)$.

Рассмотрим функцию $h(x)$ с вектором значений $(\underbrace{c \ldots c}_{d_1} d_1 \ldots d_1)$. Как нетрудно видеть, она принадлежит классу $F(g)$. Полагая $f_1(x) = f(h(x))$, видим, что она имеет вектор значений $(\underbrace{f(c)\dots f(c)}_{d_1} d_i \dots d_i)$. Теперь для всякого элемента z из D_j положим $v_z(x) = h_{f(c)z}(f_1(x))$. Функция v_z имеет вектор значений $(\underbrace{z\dots z}_{d_1} d_i \dots d_i)$. Поскольку $d_i \neq d_j$, для каждого $z \in D_j$ набор функций $(v_z(x), f_1(x))$ является корректным. С помощью всех таких функций П-определяем функцию $w(x)$, принимающую значение $f(c)$ на множестве D_j. На всех остальных множествах D_l значение $w(x)$ полагаем равным x. Это достигается с помощью наборов функций $(h_l(x), h_l(x))$, где функция $h_l(x)$ из класса $F(g)$ тождественна на множестве D_l и равна d_i на всех остальных множествах.

С помощью функции w получаем константу c: $w(d_j) = c$. Это завершает рассмотрение случая 1.

2. Для любого x из D_1 либо $f(x) = d_j$, либо $f(x) \in D_i$, причем обе возможности реализуются. Переходя, если необходимо, к функции $g(f(x))$, можно предполагать, что на множестве D_1 функция f принимает только значения d_i, d_j. Пусть значение d_j функция f принимает в точке c.

Так же, как в случае 1, рассматриваем в классе $F(g)$ одноместную функцию $f_1(x)$ с вектором значений $(\underbrace{d_j\dots d_j}_{d_1} d_i \dots d_i)$. Кроме того, определяем в $F(g)$ двуместную функцию

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2, & \text{если } x_1 \in D_j, x_2 \in D_j, \\ d_i & \text{иначе.} \end{cases}$$

Далее полагаем $f_3(x_1, x_2) = f_2(f_1(x_1), x_2)$, при этом получаем

$$f_3(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2, & \text{если } x_1 \in D_1 \setminus \{d_1\}, x_2 \in D_j, \\ d_i & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теперь для произвольного элемента b из $D_1 \setminus \{d_1\}$ рассмотрим функцию

$$f_4(x_1, x_2) = \begin{cases} b, & \text{если } x_1 \in D_1 \setminus \{d_1\}, x_2 \in D_j, \\ d_1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Несложно заметить, что она принадлежит классу $F(g)$.

Далее определяем функцию $w(x)$. Как вытекает из определений, набор функций $(f_3(x_1, x_2), f_4(x_1, x_2))$ является корректным, его мы используем для задания функции $w(x)$ на множестве $D_j \cup \{d_i\}$: на множестве D_j она равна b и $w(d_i) = d_1$. Для любого l, отличного от i, j, функцию $w(x)$ можно задать на множестве D_l тождественным образом с помощью пары функций $(h_l(x), h_l(x))$, где функция $h_l(x)$ тождественна на D_l и равна d_l вне этого множества. Для определения функции $w(x)$ на множестве D_i следует воспользоваться корректным набором функций $(h_i(x), d_1)$, где функция $h_i(x)$ тождественна на множестве D_i и равна d_1 вне этого множества. Подстановкой константы d_j в функцию w получаем константу b из множества $D_1 \setminus \{d_1\}$.

Заметим, что функция w П-определена с помощью пар двуместных и одноместных функций. Чтобы выполнить условия применения операции перечисления, следует выбрать в классе $F(g)$ двуместную селекторную функцию и путем подстановки в одноместные функции добавить несущественную переменную. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Для любого $k \geqslant 2$ и любой перестановки $g(x)$ на E_k, которая разлагается в произведение циклов одной и той же простой длины и, возможно, циклов длины 1, число которых в этом случае не менее двух, класс $F(g)$ является Π-предполным в P_k.*

Доказательство. Хорошо известно [16], что если перестановка $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, а ее цикловое разложение не имеет циклов длины 1, то класс $F(g)$ является предполным в P_k даже относительно операции суперпозиции. Поэтому далее предположим, что в цикловом разложении перестановки g имеются одноэлементные циклы, состоящие из элементов $d_1, \ldots, d_s$, где $s > 1$. Для упрощения изложения будем считать, что цикловое разложение перестановки g имеет вид

$$(01 \ldots p-1)(p \ldots 2p-1) \ldots (mp \ldots (m+1)p-1)((m+1)p) \ldots (k-1),$$

где p — простое число, $(m+1)p < k$ и $d_1 = (m+1)p, \ldots, d_s = k-1$.

Покажем, что для любых $a, b \leqslant (m+1)p-1$ в класс $F(g)$ входит такая функция $g_{ab}(x)$, что $g_{ab}(a) = b$. В самом деле, если

$$a \in \{ip, \ldots, (i+1)p-1\}, \quad b \in \{jp, \ldots, (j+1)p-1\},$$

то

$$g_{ab}(a) = b, \quad g_{ab}(a+1) = b+1, \ \ldots, \ g_{ab}(a+p-1) = b+p-1,$$

где сложение в левых частях равенств проводится в цикле $(ip \ldots (i+1)p-1)$, а в правых частях — в цикле $(jp \ldots (j+1)p-1)$ (например, $(i+1)p-1+1 = ip$). Для значений x, не принадлежащих множеству $\{ip, \ldots, (i+1)p-1\}$, полагаем $g_{ab}(x) = x$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция, не принадлежащая классу $F(g)$. Покажем, что система функций $F(g) \cup \{f\}$ Π-полна в классе P_k. Тем самым будет доказана Π-предполнота класса $F(g)$.

Ввиду соотношения $f \notin F(g)$ существует такой набор $(b_1, \ldots, b_n) \in E_k^n$, что выполняется неравенство

$$f(g(b_1), \ldots, g(b_n)) \neq g(f(b_1, \ldots, b_n)). \tag{2}$$

Пусть $a \leqslant (m+1)p-1$. Для любого $l, 1 \leqslant l \leqslant n$, обозначим через g'_{ab_l} функцию g_{ab_l}, если $b_l \leqslant (m+1)p-1$, и функцию-константу b_l, если $b_l \geqslant (m+1)p$. Положим

$$f_a(x) = f(g'_{ab_1}(x), \ldots, g'_{ab_n}(x)).$$

Функция f_a получена суперпозицией функций множества $\mathrm{PG}(g) \cup \{f\}$ и, кроме того, в силу (2) имеет место неравенство

$$f_a(g(a)) \neq g(f_a(a)) \tag{3}$$

(функции $g'_{ab_1}, \ldots, g'_{ab_n}$ принадлежат классу $F(g)$ и потому при любом l выполняется соотношение $g'_{ab_l}(g(a)) = g(g'_{ab_l}(a))$).

Таким образом, при любом $a \leqslant (m+1)p-1$ получена функция f_a, для которой неравенство (3) опровергает ее принадлежность классу $F(g)$ на примере точек a и $g(a)$.

Мы хотим далее определить аналогичные функции, но для большего расстояния между точками «опровержения»: a и $g(g(a))$, a и $g(g(g(a)))$ и т.д. С этой целью при $p > 2$ зафиксируем значение q, $2 \leqslant q < p$, и рассмотрим, например, для $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ значения функции f_a в точках

$$a,\ a+q,\ a+2q,\ \ldots,\ a+lq,$$

где арифметические действия выполняются по модулю p и $lq \equiv 1 \pmod p$. Поскольку на множестве $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ имеем $g(x) = x+1 \pmod p$, а функция f_a согласно (3) удовлетворяет неравенству

$$f_a(a+lq) \neq f_a(a) + 1,$$

существует пара «соседних» точек $a+iq$ и $a+(i+1)q$, в которых будет нарушаться условие принадлежности функции f_a классу $F(g)$:

$$f_a(a+(i+1)q) \neq f_a(a+iq) + q.$$

Таким образом, если мы хотим для данного значения a определить функцию, у которой в точках a и $a+q$ достигается опровержение ее принадлежности классу $F(g)$, то можно, например, взять функцию $f_a(x+iq)$.

Для любых $a \leqslant (m+1)p-1$ и q, $1 \leqslant q < p$, обозначим через $f_{aq}(x)$ функцию, построенную описанным выше способом на основе функции f_a для точек a и $g^q(a)$, где g^q — q-кратная суперпозиция функции g. Положим $r = (m+1)p(p-1)$. Рассмотрим набор из $r+1$ функций

$$(x, f_{01}(x), \ldots, f_{p-1,p-1}(x), f_{p1}(x), \ldots, f_{2p-1,p-1}(x), \ldots \\ \ldots, f_{mp,1}(x), \ldots, f_{(m+1)p-1,p-1}(x)). \quad (4)$$

Заметим, что набор (4) при $x = 0, 1, \ldots, k-1$ дает k наборов из E_k^{r+1}, которые принадлежат различным орбитам функции g. В самом деле, если $a, b \in \{ip, ip+1, \ldots, (i+1)p-1\}$ и $a \neq b$, то элемент a переводится в элемент b подходящей q-й степенью перестановки g. Вместе с тем по построению соответствующая функция f_{aq} набора (4) обеспечит невхождение в одну и ту же орбиту функции g наборов

$$(a, f_{aq}(a)), \quad (b, f_{aq}(b)).$$

Если элементы a, b входят в различные циклы циклового разложения перестановки g, то равенство $g^q(a) = b$, очевидно, невозможно ни при каком q (используем принадлежность переменной x последовательности (4)).

То же самое получаем в случае, когда один из элементов a, b не превосходит величины $(m+1)p-1$, а другой больше этой величины, либо когда оба элемента больше $(m+1)p-1$.

Установленное свойство набора (4) позволяет определить в классе $F(g)$ такую функцию h от $r+1$ переменных, что при любом x выполняется равенство

$$h(x, f_{01}(x), \ldots, f_{(m+1)p-1,p-1}(x)) = 0.$$

Итак, функция, стоящая в левой части этого равенства, тождественно равна 0. С помощью функций g_{0b} получаем остальные константы $1, 2, \ldots, (m+1)p-1$ и приходим к П-полной системе всех констант. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *При любом $k \geqslant 2$ любой позитивно предполный класс в P_k является также* П*-предполным.*

Доказательство. Достаточно заметить [9, 11], что любой позитивно предполный класс в P_k имеет вид $F(g)$, где функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 или теоремы 2. □

Далее рассматриваем класс P_3. Произвольную функцию f из $P_3^{(1)}$ будем изображать вектором $(f(0)f(1)f(2))$. Посредством $V_{002}, V_{010}, V_{011}, V_{022}, V_{112}, V_{212}$ обозначим позитивно замкнутые классы $F(g)$ соответственно для эндоморфизмов (002), (010), (011), (022), (112), (212).

В последующем одноместные линейные функции рассматриваются по модулю 3. Через S_{x+1} обозначим класс $F(g)$, где $g(x) = x + 1$.

Лемма 2. *Класс S_{x+1}* П*-предполон в P_3 и* П*-порождается каждой из функций $x+1,\ x+2$.*

Доказательство. П-замкнутость класса S_{x+1} следует из теоремы 1. Кроме того, класс S_{x+1}, как хорошо известно [2], является предполным в P_3 относительно операции суперпозиции. Далее, каждая из функций $x+1,\ x+2$ получается из другой с помощью суперпозиции. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из S_{x+1}, $(a_1, \ldots, a_n) \in E_3^n$ и $f(a_1, \ldots, a_n) = a$, то набор из $n+1$ функций

$$(x + a_1,\ x + a_2, \ldots,\ x + a_n,\ x + a) \tag{5}$$

правильно определяет функцию f на трех наборах

$$(a_1, \ldots, a_n), \quad (a_1 + 1, \ldots, a_n + 1), \quad (a_1 + 2, \ldots, a_n + 2) \tag{6}$$

(и только на этих наборах). Поэтому функцию f можно П-определить системой из 3^{n-1} наборов вида (5), отвечающих попарно не пересекающимся тройкам (6). Лемма доказана. □

Лемма 3. *Если* П*-замкнутый класс Q содержит функцию $2x$ и функцию, не сохраняющую 0, то $Q = P_3$. Аналогичные утверждения справедливы для функций $2x+1,\ 2x+2$ и констант 2, 1.*

Доказательство. Поскольку функции $2x, 2x+1, 2x+2$ попарно сопряжены, рассмотрим только случай, когда класс Q содержит функцию $2x$. По условию в класс Q входит функция, не сохраняющая 0. Отождествлением всех переменных получаем из нее функцию $f_1(x) = (abc)$, где $a, b, c \in E_3$ и $a \neq 0$. Рассмотрим сначала случай, когда a, b, c — различные числа, т.е. f_1 — перестановка на E_3, отличная от перестановок $x, 2x$. Тогда, как хорошо известно, суперпозициями перестановок $2x, f_1(x)$ можно получить любую из оставшихся перестановок $x+1, x+2, 2x+1, 2x+2$. Ввиду леммы 2 будем иметь $S_{x+1} \subset Q$. Поскольку функция $2x+1$ не входит в класс S_{x+1}, а класс S_{x+1} П-предполон в P_3, приходим к выводу, что $Q = P_3$.

Далее предполагаем, что f_1 не является перестановкой. Кроме того, так как в класс Q входит функция $2x$, будем считать, что $f_1(0) = 1$. Последовательно рассмотрим возможные случаи для функции f_1.

Пусть $f_1 = (100)$. Тогда суперпозициями с функцией $2x$ получаем также функции (011), (022), (200). Определим функцию $f_2(x_1, x_2)$ с помощью корректной системы наборов одноместных функций:

$$((011),(022),(022)),\quad ((022),(011),022)),\quad ((100),(022),(200)),$$

$$((022),(100),(200)),\quad ((011),(011),(022)),\quad ((022),(022),(022)).$$

Проверяем, что функция f_2 принимает значение 0 на наборах (0,0), (0,2), (2,0) и значение 2 на всех остальных наборах. Поэтому функция $f_2((100)(x),(011)(x))$ есть константа 2. Подставляя ее в функции (100) и (011), образуем далее константы 0 и 1. Получаем П-полную систему трех констант.

Предположим, что $f_1 = (101)$. С помощью функции $2x$ получаем далее функции (110), (202), (220). Подстановка функции (110) в себя дает константу 1, а подстановка константы 1 в функции (101) и (220) — константы 0 и 2. Приходим к П-полной системе трех констант.

Пусть $f_1 = (110)$. Подстановка функции $2x$ в функцию f_1 дает рассмотренную выше функцию (101).

Предположим, что f_1 есть константа 1. Тогда у нас имеется и константа 2. Теперь определяем функцию $f_3(x_1, x_2)$ с помощью корректной системы наборов одноместных функций:

$$((012),(021),(021)),\quad ((012),(111),(021)),\quad ((012),(222),(222)),$$
$$((111),(012),(222)),\quad ((222),(012),(012)).$$

Замечаем, что $f_3(x,x) = (022)$. Применение функции $2x$ к функции (022) дает функцию (011).

Следующий этап — определение функции $f_4(x_1, x_2)$:

$$((011),(011),(111)),\quad ((011),(111),(111)),\quad ((011),(222),(111)),$$
$$((111),(011),(111)),\quad ((222),(011),(111)),\quad ((222),(222),(222)).$$

Имеем $f_4(x,x) = (112)$. С помощью функции $2x$ образуем функции (121), (212), (221). Теперь определяем функцию $f_5(x_1, x_2)$:

$$((022),(022),(111)),\quad ((012),(121),(111)),\quad ((012),(221),(111)),$$
$$((112),(121),(011)),\quad ((121),(012),(111)),\quad ((221),(012),(111)).$$

Очевидно, что $f_5(x,x) = (101)$. Этот случай нами разобран выше.

Пусть $f_1 = (112)$. С помощью функции $2x$ получаем также функции (121), (212), (221). Определяем функцию $f_6(x_1, x_2)$:

$$((012),(021),(112)),\quad ((012),(121),(112)),\quad ((012),(221),(112)),$$
$$((121),(012),(121)),\quad ((221),(012),(121)),$$
$$((112),(121),(112)),\quad ((212),(221),(112)).$$

Функция $f_6(x,x)$ есть константа 1. Этот случай рассмотрен нами выше.

Пусть $f_1 = (121)$. Подстановка функции $2x$ в функцию f_1 дает рассмотренную функцию (112). Если же $f_1 = (122)$, то $f_1(f_1(x)) = 2$. С помощью функции $2x$ получаем константу 1. Соответствующий случай рассмотрен выше. Лемма доказана. □

Посредством T_0, T_1, T_2 обозначим классы вида $F(g)$, где функция g есть соответственно константа 0, 1, 2. В теореме 4 мы рассматриваем только П-предполные классы, содержащие тождественную функцию x. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, все позитивно замкнутые классы содержат данную функцию. Поэтому сравнивать оператор П-замыкания с оператором позитивного замыкания в данном случае представляется более естественным на множестве замкнутых классов одного «типа» — содержащих функцию x. А во-вторых, наличие функции x в П-замкнутых классах позволяет сократить перебор в доказательстве теоремы 4 и отсечь некоторые П-предполные классы, которые заведомо не могут быть позитивно замкнутыми (например, классы, которые состоят из функций, принимающих лишь фиксированные два значения).

Теорема 4. *Все* П*-предполные в* P_3 *классы, содержащие тождественную функцию* x, *исчерпываются классами*

$$T_0, \quad T_1, \quad T_2, \quad S_{x+1}, \quad V_{002}, \quad V_{010}, \quad V_{011}, \quad V_{022}, \quad V_{112}, \quad V_{212}. \tag{7}$$

Доказательство. Список (7) состоит из всех классов, позитивно предполных в P_3, в частности, ни один из них целиком не содержится в другом.

Теперь для установления справедливости утверждения теоремы возьмем произвольное множество Q функций из P_3, которое целиком не содержится ни в одном из классов последовательности (7), и покажем, что множество Q П-полно в P_3. Это будет означать, что классы последовательности (7) образуют относительно оператора П-замыкания критериальную систему.

Поскольку нас интересует П-полнота множества Q, можно без ограничения общности предполагать, что Q — П-замкнутый класс. Из функций класса Q, не входящих в классы T_0, T_1, T_2, отождествлением переменных получаем функции $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ класса Q, которые соответственно не входят в классы T_0, T_1, T_2. Отметим, что все три функции $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ отличны от тождественной функции x. Обозначим через $f(x)$ какую-либо из этих функций и рассмотрим для нее имеющиеся возможности.

Прежде всего, в силу леммы 2 можно считать, что $f(x) \notin \{x+1, x+2\}$ (иначе $S_{x+1} \subseteq Q$, а ввиду $Q \nsubseteq S_{x+1}$ класс Q будет совпадать с P_3). Из леммы 3 следует, что функцию $f(x)$ можно считать отличной от функций $2x$, $2x+1$, $2x+2$.

Предположим, что $f = (001)$. Тогда, очевидно, $0 \in Q$. Подстановка функции 0 в функцию $f_0(x)$ дает одну из функций 1 или 2. Если имеется константа 2, то подстановкой ее в функцию f получаем константу 1, т. е. приходим к системе трех констант. Предположим, что имеется константа 1. Тогда с помощью корректной системы наборов одноместных функций определяем функцию $g(x_1, x_2)$:

$$((001),(012),(012)), \quad ((012),(001),(012)), \quad ((012),(012),(000)),$$
$$((000),(012),(012)), \quad ((012),(000),(012)).$$

Далее получаем $g(1,x) = (102)$. Теперь следует воспользоваться леммой 3.

В силу принципа сопряженности аналогичные построения и рассуждения справедливы для функций (020), (110), (122), (202), (211).

Как мы убедились выше, класс Q не может содержать только одну константу. Поэтому рассмотрим случай, когда в Q входят ровно две константы. Пусть это будут, например, константы 0 и 1. Поскольку мы рассматриваем только П-замкнутые классы, содержащие тождественную функцию x, множество $Q^{(1)}$ в этом случае оказывается накрывающим и, следовательно [10],

$$Q = \Pi[Q^{(1)}]. \tag{8}$$

Поэтому из соотношения $\{0,1,x\} \subset V_{010}$ и невхождении Q в класс V_{010} следует, что $Q^{(1)} \neq \{0,1,x\}$.

Если в $Q^{(1)}$ есть функция, не сохраняющая множество $\{0,1\}$, то в $Q^{(1)}$ входит константа 2, что приводит к П-полной системе трех констант. Исключая из рассмотрения такие функции, а также функции, уже рассмотренные выше, приходим к выводу, что в множество $Q^{(1)}$ помимо функций $0, 1, x$ могут входить лишь функции

$$(002), \quad (010), \quad (011), \quad (100), \quad (101), \quad (112). \tag{9}$$

Если $Q^{(1)} \subseteq \{0,1,x,(002),(010),(101)\}$ или $Q^{(1)} \subseteq \{0,1,x,(011),(100),\ (112)\}$, то получаем противоречие с равенством (4) и невхождением Q в классы V_{010}, V_{011}. Поэтому далее в качестве множества $Q^{(1)}$ будем рассматривать расширения множества $\{0,1,x\}$ с помощью функций из списка (5), в которые входят как функции множества $\{(002),(010),(101)\}$, так и функции множества $\{(011),(100),(112)\}$. Здесь возможны девять случаев.

1. $\{(002),(011)\} \subset Q^{(1)}$. Подстановка функции (002) в функцию (011) дает ранее рассмотренную функцию (001).

2. $\{(002),(100)\} \subset Q^{(1)}$. Суперпозиция функции (100) дает функцию (011), далее применяем п. 1.

3. $\{(002),(112)\} \subset Q^{(1)}$. Определяем функцию $g(x_1,x_2)$:

$$((000),(012),(012)), \quad ((012),(000),(012)), \quad ((111),(012),(112)),$$
$$((012),(111),(112)), \quad ((112),(112),(111)).$$

Имеем $g(x,x) = (011)$. Подстановка функции (002) в функцию (011) дает уже рассмотренную функцию (001).

4. $\{(010),(011)\} \subset Q^{(1)}$. Сначала определяем функцию $g_1(x_1,x_2)$:

$$((000),(012),(012)), \quad (012),(000),(012)), \quad (012),(012),(012)),$$
$$((111),(012),(111)), \quad ((012),(011),(012)).$$

Имеем $g_1(x,1) = (112)$. Далее определяем функцию $g_2(x_1,x_2)$:

$$((012),(012),(111)), \quad ((111),(012),(012)), \quad ((012),(111),(012)),$$
$$((010),(112),(110)), \quad ((112),(010),(110)).$$

Замечаем, что функция $g_2(0, x)$ совпадает с функцией (100). Теперь подстановка функции (010) в функцию (100) дает функцию (101), а подстановка функции (112) в функцию (101) — функцию (001). Эта функция рассмотрена нами выше.

5. $\{(010), (100)\} \subset Q^{(1)}$. Подстановка функции (100) в себя дает функцию (011), что возвращает нас к п. 4.

6. $\{(010), (112)\} \subset Q^{(1)}$. Подстановка функции (112) в функцию (010) дает функцию (110). Определяем функцию $g(x_1, x_2)$:

$$((012), (012), (010)), \quad ((111), (012), (010), \quad ((012), (111), (010)),$$
$$((110), (112), (111)), \quad ((112), (110), (111)).$$

Имеем $g(0, x) = (001)$, что приводит к рассмотренному выше случаю.

7–9). $(101) \in Q^{(1)}$ и $\{011), (100), (112)\} \cap Q^{(1)} \neq \varnothing$. Подстановка функции (101) в себя дает один из случаев 4–6.

Для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть случай, когда множество $Q^{(1)}$ не содержит констант. Нетрудно убедиться в том, что в этом случае множество $Q^{(1)} \setminus \{x\}$ может входить только в одно из трех попарно сопряженных множеств

$$\{(010),\ (011),\ (100),\ (101)\}, \quad \{(002),\ (022),\ (200),\ (220)\},$$
$$\{(112),\ (121),\ (212),\ (221)\}.$$

Пусть, например, для $Q^{(1)} \setminus \{x\}$ мы имеем включение в первое из множеств. Если в $Q^{(1)}$ входит пара функций (010), (100), то в $Q^{(1)}$ входят также функции (101) и (011). Определим функцию $g_1(x_1, x_2)$:

$$((010), (012), (011)), \quad ((101), (012), (011)), \quad ((012), (012), (011)),$$
$$((012), (010), (012)), \quad ((012), (011), (012)).$$

Аналогично определяем функцию $g_2(x_1, x_2)$:

$$((012), (012), (100)),\ ((100), (012), (100)),\ ((101), (012), (100)),$$
$$((012), (100), (012)), \quad ((012), (101), (012)).$$

Теперь система $(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))$ определяет функцию $2x+1$. Далее обращаемся к лемме 3.

Пусть в множество $Q^{(1)}$ входят функции (011), (101). Тогда множество $Q^{(1)}$ содержит также функции (100) и (010), что приводит к предыдущему случаю.

Остаются следующие возможности для множества $Q^{(1)} \setminus \{x\}$:

$$\{(010)\}, \quad \{(011)\}, \quad \{(010), (011)\}, \quad \{(010), (101)\}, \quad \{(011), (100)\}.$$

Первые три множества из этого списка целиком содержатся в классе T_0, что по условию невозможно. Рассмотрим случай $Q^{(1)} = \{(010), x, (101)\}$. Здесь множество $Q^{(1)}$ является накрывающим и потому имеем $Q = \Pi[Q^{(1)}]$. Однако $Q^{(1)} \subset V_{010}$. Следовательно, $Q \subseteq V_{010}$, что невозможно по предположению.

Аналогично рассматривается случай $Q^{(1)} = \{(011), x, (100)\}$. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

1. Данильченко А. Ф., "О параметрической выразимости функций трехзначной логики", *Алгебра и логика*, **16**:4 (1977), 397–416; англ. пер.: Danil'chenko A. F., "Parametric expressibility of functions of three-valued logic", **16** (1977), 266–280.
2. Данильченко А.Ф., "Параметрически замкнутые классы функций трехзначной логики", *Изв. АН МССР*, **2** (1978), 13–20.
3. Кузнецов А.В., "О средствах для обнаружения невыводимости и невыразимости", *Логический вывод*, 1979, 5–33.
4. Марченков С.С., "Основные отношения S-классификации функций многозначной логики", *Дискретная математика*, **8**:1 (1996), 99–128; англ. пер.: Marchenkov S.S., "Basic relations of the S-classification of functions of the multi-valued logic", *Discrete Math. Appl.*, **6**:2 (1996), 149–178.
5. Марченков С.С., "О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках", *Дискретная математика*, **11**:4 (1999), 110–126; англ. пер.: Marchenkov S.S., "On expressibility of functions of many-valued logic in some logical-functional languages", *Discrete Math. Appl.*, **9**:6 (1999), 563–581.
6. Марченков С.С., *S-классифация функций трехзначной логики*, М.: Физматлит, 2001.
7. Марченков С.С., "Дискриминаторные классы трехзначной логики", *Математические вопросы кибернетики*, 2003, № 12, 15–26.
8. Марченков С.С., "Критерий позитивной полноты в трехзначной логике", *Дискретный анализ и исследование операций*, **13**:3 (2006), 27–39.
9. Марченков С.С., "Задание позитивно замкнутых классов посредством полугрупп эндоморфизмов", *Дискретная математика*, **24**:4 (2012), 19–26; англ. пер.: Marchenkov S.S., "Definition of positively closed classes by endomorphism semigroups", *Discrete Math. Appl.*, **22**:5-6 (2012), 511–520.
10. Марченков С.С., "Об операторе замыкания по перечислению в многозначной логике", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 15. *Вычисл. матем. и киберн.*, 2 (2015), 33–39; англ. пер.: Marchenkov S.S., "On the enumeration closure operator in multivalued logic", *Moscow Univ. Comput. Math. and Cybernet.*, **39**:2 (2015), 81–87.
11. Марченков С.С., *Сильные операторы замыкания*, М.: МАКС Пресс, 2017.
12. Марченков С.С., "Расширения оператора позитивного замыкания с помощью логических связок", *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, **25**:4 (2018), 46–58; англ. пер.: Marchenkov S.S., "Extensions of the positive closure operator by means of logical connectives", *J. Appl. Industr. Math.*, **12**:4 (2018), 678–683.
13. Нгуен Ван Хоа, "О структуре самодвойственных замкнутых классов трехзначной логики P_3", *Дискрет. матем.*, **4**:4 (1992), 82–95.
14. Тарасова О.С.,, "Классы k-значной логики, замкнутые относительно расширенной операции суперпозиции", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 2001, № 6, 54–57.
15. Тарасова О.С., "Классы функций трехзначной логики, замкнутые относительно операций суперпозиции и перестановки", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 2004, № 1, 25–29.
16. Яблонский С.В., "Функциональные построения в k-значной логике", *Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики*, Тр. МИАН СССР, **51**, Изд-во АН СССР, М., 1958, 5–142.
17. Янов, Ю. И., Мучник, А.А., "О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих базиса", 1959, № 1, 44–46.
18. Danil'čenko A. F., "On parametrical expressibility of the functions of k-valued logic", *Colloq. Math. Soc. J.Bolyai*, **28** (1981), 147–159.

Статья поступила 28.08.2020.