Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Факультет: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Отчет по курсовой работе
по курсу "Уравнения Математической Физики"

Студент: Дюсекеев А.Е.

Группы: М8О-304Б-17

Преподаватель: Колесник С.А.

Оценка

Москва 2020

Дюсекеев 80-304

Курсовая работа по УМФ
Вариант №3

Сформулировать и решить задачи:

1. Задачу о нагреве конечного стержня $x \in [0,l]$ с начальным распределением $T_0 = 300$, когда левый конец теплоизолирован, а правый – поддерживается при температуре $\mu_2(l) = 500\left(1-e^{-t}\right)$. Исследовать ортогональность собственных функций, их нормировка, построить результаты в виде графиков $u(xt)$, $\left(a^2 = 10^{-6}\right)$, $l = 0,1$м.

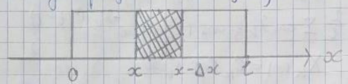
2. О свободных колебаниях конечного стержня $x \in [0;l]$, $l = 0,1$м, $a^2 = 10^6$ с начальным отклонением $\varphi_1 = \sin x$ и нулевой начальной скоростью, когда концы движутся по заданным законам $\mu_1 = e^{-t}$, $\mu^2 = \sin t$ соответственно результаты $u(x,t)$ оформить графически.

3. Задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольцевом секторе $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $r \in [0,5;1]$, когда на границах заданы условия $u(r_1 = 0,5;\varphi) = \sin(2\varphi)$; $u(r_2 = 1;\varphi) = 2\sin(2\varphi)$, а на радиальных границах заданы нулевые значения. Построить графики $u(r,0)$, $u(r,\pi/4)$, $u(r,\pi/2)$.

Курсовая работа по УМФ.

Вариант № 3

1) Задачу о нагреве конечного стержня $x \in [0, l]$ с начальным распределением $T_0 = 300$, когда левый конец теплоизолирован, а правый – поддерживается при температуре $\mu_2(l) = 500(1-e^{-t})$. Исследовать ортогональность собственных функций, их нормировка, построить результаты в виде графиков $u(x,t)$, $(a^2 = 10^{-6})$, $l = 0{,}1$ м.



$T(x,0) = \varphi(x)$

$q = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$

$q_x - q_{x+\Delta x} = \Delta Q = cm\Delta T$

$m = \rho S \Delta x$

$-\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_x + \lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x} = c\rho \Delta x S \frac{\partial T}{\partial x}$

$\Delta x \to 0 \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}$

$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \; a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) = 300 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(l,t) = \mu_2(l) = 500(1-e^{-t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{1t} + u_{2t} + u_{3t} = a^2 u_{1xx} + a^2 u_{2xx} + a^2 u_{3xx} \\ u_1(x,0) + u_2(x,0) + u_3(x,0) = \varphi(x) \\ u_{1x}(0,t) + u_{2x}(0,t) + u_{3x}(0,t) = 0 \\ u_1(l,t) + u_2(l,t) + u_3(l,t) = \mu_2(l) \end{cases}$$

$u(x,0) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \cos\lambda_k x = \varphi(x) = \sum \varphi_k \cos\lambda_k$

$\varphi_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \bar{\varphi} \cos(\lambda_n \xi)\, d\xi = c_k$

$$\begin{cases} u_{1xx} = 0 \\ u_{1x}(0,t) = \mu_1(t) = 0 \\ u_1(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$u_1(x,t) = C_1 x + C_2$

$u_{1x}(0,t) = C_1 = 0$

$u_1(l,t) = C_2 = \mu_2$

$u_1(x,t) = \mu_2(t)$; $u(x,0) = 500(1 - e^0) = 0$

$$\begin{cases} u_{2t} = a^2 u_{2xx} \\ u_2(x,0) = \varphi(x) - u_1(x,0) \\ u_{2x}(0,t) = u_2(l,t) = 0 \end{cases}$$

$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda^2$; $u(x,t) = X(x)T(t)$; $x'' + \lambda x = 0$

λ – отр, $-\lambda^2 < 0$, $x'' = -\lambda x$.

$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$.

1) $u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$

$\Rightarrow X'(0) = 0$

$X'(0) = \lambda C_1 \cos \lambda x - \lambda C_2 \sin \lambda x|_0 = \lambda C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

2) $u(l,t)$

$u(l,t) = X(l)T(t) = 0$

$X(l) = 0$

$X(l) = C_1 \sin \lambda l + C_2 \cos \lambda l \Rightarrow C_2 \neq 0 \quad \cos \lambda l = 0$

$\lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\lambda = \frac{\pi}{2l} + \frac{2\pi k}{2l}$

$\lambda_k = \frac{\pi}{2l}(1 + 2k)$

$X_k(x) = C_k \cos\left(\frac{\pi x}{2l}(1+2k)\right)$

$T' + a^2 \lambda^2 T = 0$; $\frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2$

$T_k(t) = C_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t}$

$u_2(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cos \lambda_k x \Big| \lambda_k = \frac{\pi}{2l}(1+2k)$

$$u_2(x,t)=\frac{2}{l}\int_0^l \cos(\lambda_k\cdot\xi)\cos(\lambda x)\, e^{-a^2\lambda_k t}\,\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

$$u_2(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\cdot\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi$$

$$\overline{\varphi}(\xi)=300-0=300$$

$$\begin{cases} u_{3t}=a^2 u_{3xx}+f(x,t)-u_1t \\ u_3(x,0)=0 \\ u_{3x}(0,t)=0 \\ u_3(l,t)=0 \end{cases}$$

$$\overline{F}=f(x,t)-u_1t=0-\mu_2'(t)=(-500(1-e^{-t}))'=$$

$$=(-500+e^{-t}\cdot 500)'=-500\cdot e^{-t}$$

$$u_3(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,\overline{F}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{l}\sum \cos\lambda_k\cdot\xi\cdot\cos(\lambda_k x)\cdot e^{-\lambda_k^2 a^2(t-\tau)}$$

$$\lambda_k=\frac{\pi}{2l}(2k+1)\qquad X_k(x)=C_k\cos\lambda_k x$$

$$\|X_k(x)\|^2=\int_0^l \cos^2(\lambda_k x)\,dx=\int_0^l \frac{1+\cos 2\lambda_k x}{2}\,dx=$$

$$=\int_0^l \frac{1}{2}\,dx+\int_0^l \frac{\cos 2\lambda_k x}{2}\,dx=\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\lambda_k}\int_0^l \cos 2\lambda_k x\,dx=$$

$$=\frac{l}{2}+\frac{1}{4\lambda_k}\sin 2\lambda_k x\Big|_0^l=\frac{l}{2}$$

$$\int_0^l \cos\lambda_n x\cos\lambda_m x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^l \cos(\lambda_n-\lambda_m)x\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l \cos(\lambda_n+\lambda_m)x\,dx=\frac{1}{2(\lambda_n-\lambda_m)}\sin(\lambda_n-\lambda_m)x\Big|_0^l+$$

$$+\frac{1}{2(\lambda_n-\lambda_m)}\sin(\lambda_n+\lambda_m)\Big|_0^l=0$$

$$u(x,t)=\mu_2(t)+\int_0^l G(x,\xi,t)\cdot\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,\overline{F}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

$$u(x,t) = 500(1-e^{-t}) + \int_0^l \frac{2}{l} \cos\lambda_k \xi \cos\lambda_k x \cdot e^{-a^2\lambda_k^2 t} \cdot 300 \, d\xi +$$
$$+ \int_0^t \int_0^l \frac{2}{l} \cos\lambda_k \xi \cos\lambda_k x \; e^{-\lambda_k^2 a^2 (t-\tau)} - 500 \cdot e^{-t} \, d\xi \, d\tau$$

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2l}(2k+1)$$

Проверка:

$$\begin{cases} u_{1xx} = 0 \\ u_{1x}(0,t) = \mu_1(t) = 0 \\ u_1(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$u_1(x,t) = 500(1-e^{-t})$$

$$u_{1x}(0,t) = 0 \Rightarrow u_{1xx} = 0$$

$$u_1(l,t) = 500(1-e^{-t})$$

$$\begin{cases} u_{2t} = a^2 u_{2xx} \\ u_2(x,0) = \varphi(x) - u_1(x,0) = 300 \\ u_{2x}(0,t) = u_2(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$u_2(x,t) = \frac{2 \cdot 300}{l \cdot \lambda_k} \cos(\lambda_k \cdot x) e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \sin(\lambda_k \cdot l)$$

$$u_{2t} = \frac{2 \cdot 300}{l \cdot \lambda_k} \cos(\lambda_k \cdot x) \cdot \sin(\lambda_k \cdot l) e^{-a^2\lambda_k^2 t} \cdot (-a^2 \lambda_k^2)$$

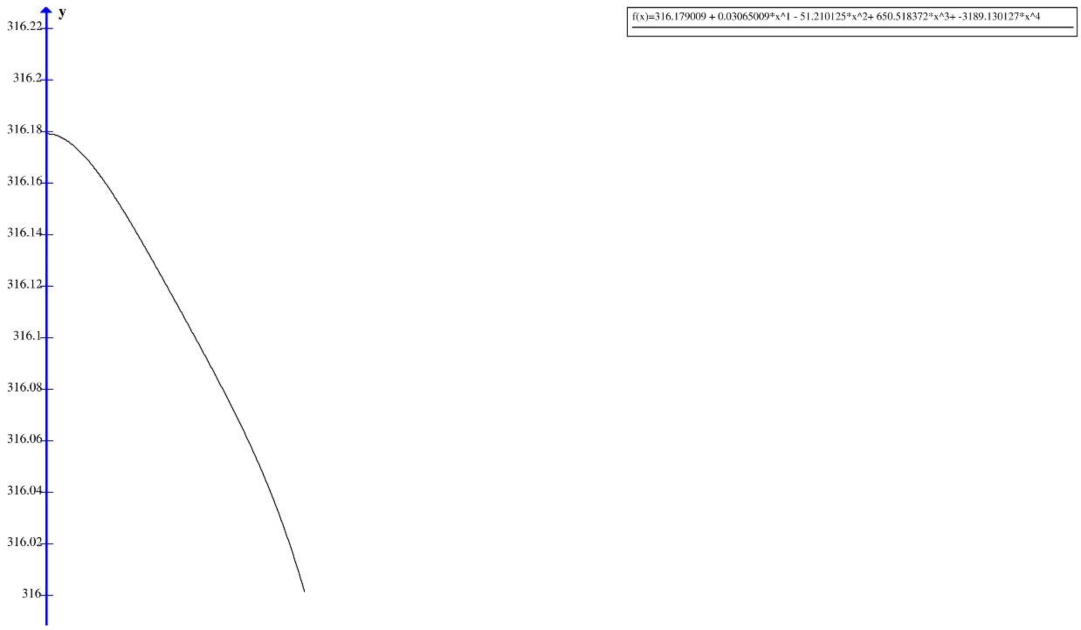
$$u_x = -\frac{2 \cdot 300}{l \cdot \lambda_k} \lambda_k \sin(\lambda_k \cdot x) \cdot e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \sin(\lambda_k \cdot l)$$

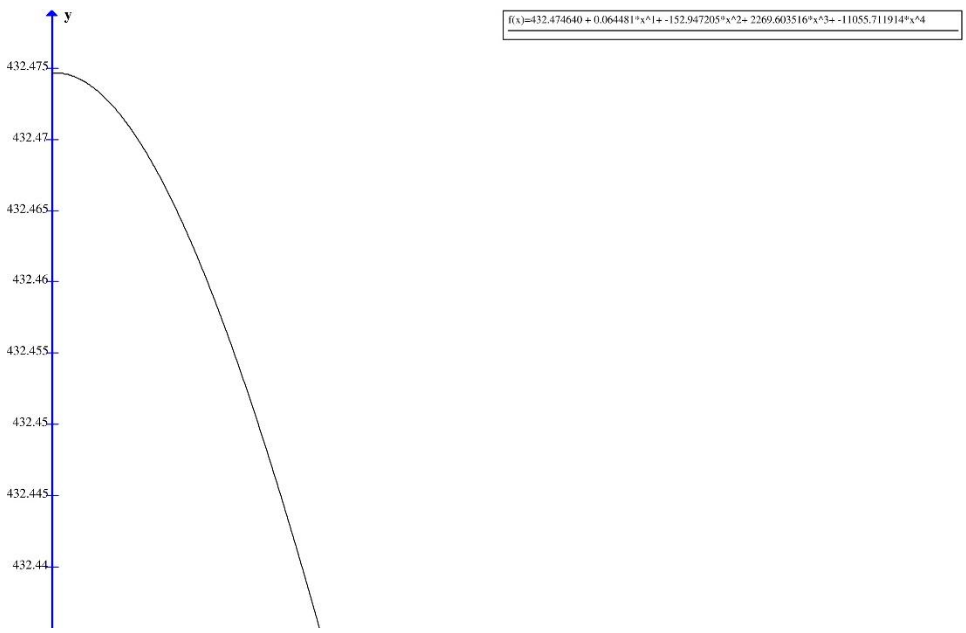
$$u_{xx} = \frac{-2 \cdot 300}{l} \lambda_k \cos(\lambda_k \cdot x) \cdot e^{-a^2 \lambda_k t} \sin(\lambda_k l)$$

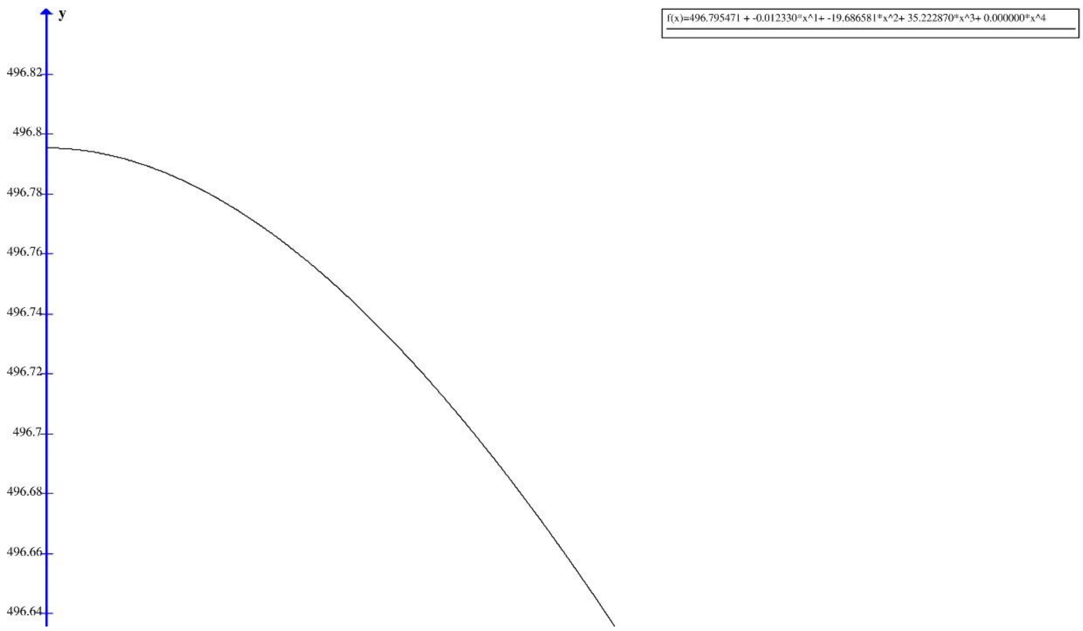
$$u_{2t} = a^2 u_{xx}$$

$$u_{2x}(l,t) = \frac{2 \cdot 300}{l \cdot \lambda_k} \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} \cdot l\right) \cdot e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cdot$$

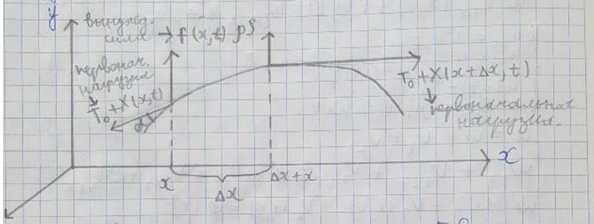
$$\cdot \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}\right) = 0$$


y
316.22
316.2
316.18
316.16
316.14
316.12
316.1
316.08
316.06
316.04
316.02
316
f(x)=316.179009 + 0.03065009*x^1 - 51.210125*x^2+ 650.518372*x^3+ -3189.130127*x^4


y
432.475
432.47
432.465
432.46
432.455
432.45
432.445
432.44
f(x)=432.474640 + 0.064481*x^1+ -152.947205*x^2+ 2269.603516*x^3+ -11055.711914*x^4


y
496.82
496.8
496.78
496.76
496.74
496.72
496.7
496.68
496.66
496.64
f(x)=496.795471 + -0.012330*x^1+ -19.686581*x^2+ 35.222870*x^3+ 0.000000*x^4

2. О свободных колебаниях конечного стержня $x \in [0; l]$, $l = 0{,}1$ м, $a^2 = 10^6$ с начальным отклонением $\varphi_1 = \sin x$ и нулевой начальной скоростью, когда концы движутся по заданным законам $\mu_1 = e^{-t}$, $\mu^2 = \sin t$ соответственно результаты $u(x,t)$ оформить графически.



Закон Гука в перемещениях: $X(x,t) = E S u_x$

α на левом и правом конце одинаковы

Спроецируем на ось x

$$[T_0 + X(x+\Delta x, t)] \cos\alpha \big|_{x+\Delta x} - [(T_0 + X(x,t)] \cos\alpha \big|_x =$$
$$= \Delta m\, u_{tt}(x,t)$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 0$$

$$[T_0 + E S u_x(x+\Delta x, t)] - [T_0 + E S u_x(x,t)] =$$
$$= \rho \Delta S u_{tt} + 1 \cdot E S_{\Delta x}$$

$$\frac{E}{\rho} \lim \frac{1}{\Delta x} [u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)] = u_{tt}(x,t)$$

$$a^2 = \frac{E}{\rho} \qquad u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

Спроектируем все силы на y

$$(T_0 + X(x+\Delta x, t)) \sin\alpha - (T_0 + X(x,t)) \sin\alpha + f(x,t)\rho S \Delta x =$$
$$= \rho\, \Delta x\, S\, u_{tt}(x,t)$$

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x$$

$$T_0 (u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)) + (E S (u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)) u_{xt}$$
$$+ f(x,t) \rho S \Delta x = \rho S \Delta x \, u_{tt} \;\Big|\cdot \frac{1}{\rho S \Delta x}, \; \Delta x \to 0$$

$$\frac{T_0}{\rho S} \lim_{\Delta x \to 0} (u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)) \frac{1}{\Delta x} + f(x,t) = u_{tt}$$

$$a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) = u_{tt}, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho S}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(x,0) = \varphi_1(x) = \sin x \\ u(0,t) = \mu_1(t) = e^{-t} \\ u(\ell,t) = \mu_2(t) = \sin t \end{cases}$$

$$u = w + V_1 + V_2$$

$$w_{tt} + V_{1tt} + V_{2tt} = a^2 w_{xx} + a^2 V_{1xx} + a^2 V_{2xx}$$

$$w(x,0) + V_1(x,0) + V_2(x,0) = \varphi(x)$$

$$w_t(x,0) + V_{1t}(x,0) + V_{2t}(x,0) = 0$$

$$w(0,t) + V_1(0,t) + V_2(0,t) = \mu_1(t)$$

$$w(\ell,t) + V_1(\ell,t) + V_2(\ell,t) = \mu_2(t)$$

$$\begin{cases} w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = \mu_1(t) \\ w(\ell,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$w = c_1 x + c_2$$

$$w(0,t) = c_2 = \mu_1(t)$$

$$w(\ell,t) = c_1 \ell + c_2 = \mu_2(t)$$

$$c_1 = \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{\ell}$$

$$w(x,t) = x \cdot \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{\ell} + \mu_1(t)$$

2) $$\begin{cases} v_{1tt} = a^2 v_{1xx} \\ v_1(x,0) = \varphi(x) - w(x,0) = \overline{\varphi}(x) \\ v_{1t}(x,0) = 0 - w_t(x,0) = \overline{\psi}(x) \\ v_1(0,t) = 0 \\ v_1(\ell,t) = 0 \end{cases}$$

$V_1(x,t) = X(x)\,T(t)$

$X T'' = a^2 X'' T$

$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$

$X'' + \lambda^2 X = 0$

$X(x) = c_1 \sin\lambda x + c_2 \cos\lambda x$

$x(0) = c_2 = 0$

$x(l) = c_1 \sin\lambda l = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\pi k}{l}$

$x_k(x) = c_k \sin\frac{\pi k}{l} x$

$T'' + a^2 \lambda_k^2 T = 0$

$T_k = A_k \sin\lambda_k a t + B_k \cos\lambda_k a t$

$V_1(x,t) = X(x)\,T(t)$

$V_1(x,t) = c_k \sin\frac{\pi k}{l} x \cdot (A_k \sin\lambda_k a t + B_k \cos\lambda_k a t)$

$V_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \sin\lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(\lambda_k a t) \sin(\lambda_k x)$

$V_1(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\frac{\pi k}{l} x = \overline{\varphi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{\pi k}{l} x$

$B_k = \varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \overline{\varphi}(\xi)\sin(\lambda_k \xi)\,d\xi$

$\overline{\varphi} = \sin x - w(x,0) = \sin x - (\mu_2(0) - \mu_1(0))\frac{x}{l} + \mu_1(0) =$

$= \sin x - (\sin 0 - e^0)\frac{x}{l} + e^0 = \sin x + \frac{x}{l} + 1$

$v_{1t}(0,x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \lambda_k a t \sin(\lambda_k x) = \overline{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin\lambda_k x$

$A_k = \psi_k \frac{l}{\pi k a} = \frac{l}{\pi k a}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l \overline{\psi}(\xi)\sin(\lambda_k \xi)\,d\xi$

$V_1(x,t) = \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k a}\sin\lambda_k x \sin\lambda_k \xi \sin\lambda_k a t \cdot \overline{\psi}(\xi)\,d\xi +$

$+ \int_0^l \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l}\sin\lambda_k x \sin\lambda_k \xi \cdot \cos\lambda_k a t\ \overline{\varphi}(\xi)\,d\xi =$

$= \int_0^l G(x,\xi,t)\,\overline{\psi}(\xi)\,d\xi + \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} G(x,\xi,t)\,\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi$

3) $\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} + 0 - w_{tt} \\ v_2(x,0) = v_{2t}(x,0) = 0 \\ v_2(0,t) = v_2(l,t) = 0 \end{cases}$

$v_2(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^l \sum^{\infty} \frac{2}{\pi k a} \sin\lambda_k x \sin\lambda_k \xi (\sin\lambda_k a(t-\tau))$
$\overline{F}^2(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau$

$u(x,t) = \frac{x}{l}(\sin t - e^{-t}) + e^{-t} + \int\limits_0^l G(x,\xi,t)\overline{\psi}(\xi)\,d\xi +$
$+ \int\limits_0^l \frac{\partial}{\partial t} G(x,\xi,t)\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$

$B_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \overline{\varphi}(\xi)\sin\lambda_k\xi\, d\xi = \frac{2}{l}\int\limits_0^l (\sin\xi + \frac{\xi}{l} + 1)$
$\sin\lambda_k\xi\, d\xi = \frac{2}{l}(\int\limits_0^l \sin\xi\sin\lambda_k\xi\, d\xi + \int\limits_0^l \frac{\xi}{l}\sin\lambda_k\xi\, d\xi +$
$+ \int\limits_0^l \sin\lambda_k\xi\, d\xi) = \frac{2}{l}(\int\limits_0^l \frac{1}{2}(\cos(1-\lambda_k)\xi - \cos(1+\lambda_k)\xi)\,d\xi +$
$+ \frac{1}{l}\int\limits_0^l \xi\sin\lambda_k\xi\, d\xi + \frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^l \sin\lambda_k\xi\, d\xi) =$
$= \frac{2}{l}(\frac{1}{2(1-\lambda_k)}\sin(1-\lambda_k)\xi\Big|_0^l - \frac{1}{2(1+\lambda_k)}\sin(1+\lambda_k)\xi\Big|_0^l -$
$- \frac{l}{\lambda_k}\cos\lambda_k l + \frac{1}{\lambda_k^2 l}\sin\lambda_k l + (-\frac{1}{\lambda_k}\cos\lambda_k l) + \frac{1}{\lambda_k}) =$
$= \frac{\sin((1-\lambda_k)l)}{l(1-\lambda_k)} - \frac{\sin((1+\lambda_k)l)}{l(1+\lambda_k)} - \frac{2}{\lambda_k}\cos\lambda_k l +$
$+ \frac{2}{\lambda_k^2 l^2}\sin\lambda_k l + (-\frac{2}{l\lambda_k}\cos\lambda_k l) + \frac{2}{l\lambda_k})$

$A_k = \frac{2}{\pi k a}\int\limits_0^l (-\frac{2x}{l} + 1)\sin\lambda_k\xi\, d\xi = \frac{2l}{\pi^2 k a}(-\frac{1}{l}($
$-\frac{\xi}{\lambda_k}\cos\lambda_k\xi\Big|_0^l + \frac{1}{\lambda_k^2}\sin\lambda_k\xi\Big|_0^l) - \frac{2}{l\lambda_k}\cos\lambda_k l +$
$+ \frac{2}{l\lambda_k}) = \frac{2\cancel{\pi k}}{\pi k a}(\frac{1}{\lambda_k}\cos\lambda_k l - \frac{1}{l\lambda_k^2}\sin\lambda_k l +$
$+ (-\frac{1}{\lambda_k}\cos\lambda_k l + \frac{1}{\lambda_k})$

Проверка:

$$\begin{cases} w_{xx} = 0 \\ w(0,t) = \mu_1(t) \\ w(l,t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$w(x,t) = x \cdot \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{l} + \mu_1(t)$$

$$w(0,t) = \mu_1(t)$$

$$w(l,t) = \mu_2(t)$$

$$\begin{cases} v_{1tt} = a^2 v_{1xx} \\ v_1(x,0) = \varphi(x) - w(x,0) = \overline{\varphi}(x) \\ v_{1t}(x,0) = 0 - w_t(x,0) = \overline{\psi}(x) \\ v_1(0,t) = 0 \\ v_1(l,t) = 0 \end{cases}$$

$$V_{1tt} = V_{1xx} - ?$$

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \cdot \frac{\pi k a}{l} \cdot \sin\frac{\pi k}{l} x.$$

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \cdot \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi k}{l} x$$

$$u_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos\frac{\pi k a t}{l} \cdot \sin\frac{\pi k}{l} x$$

$$u_{1t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\frac{\pi k a t}{l} \cdot \frac{\pi k a}{l} \sin\frac{\pi k}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(-\sin\frac{\pi k a t}{l}\right) \cdot \frac{\pi k a}{l} \sin\frac{\pi k}{l} x$$

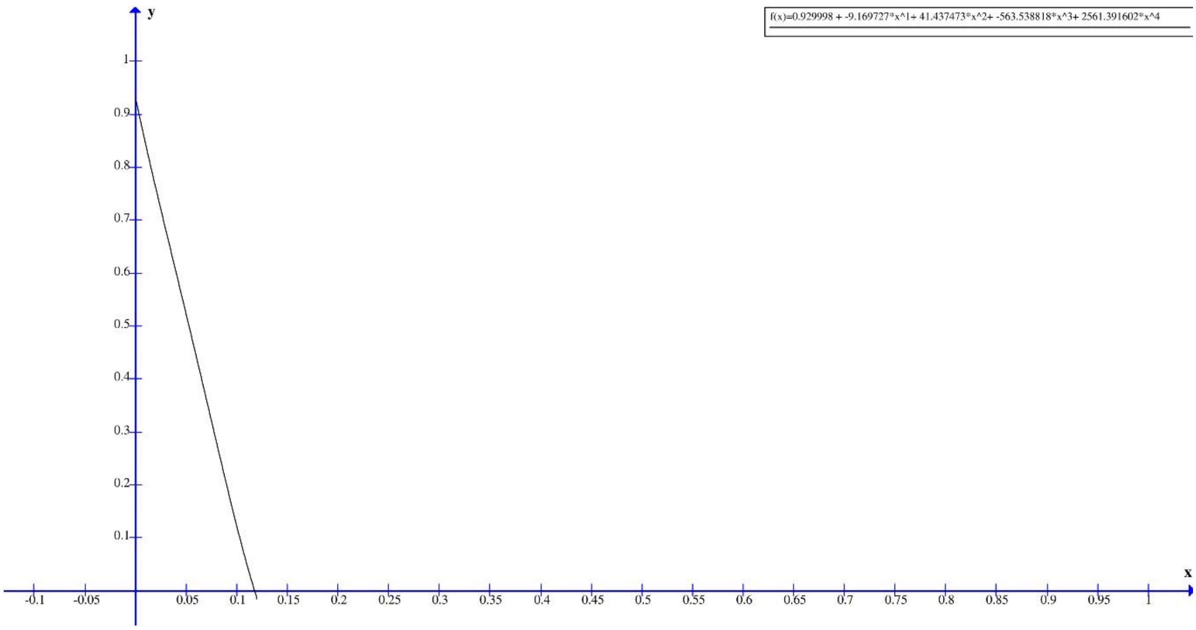
$$u_{1tt}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k - \sin\frac{\pi k a t}{l} \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi k}{l} x + \sum_{k=1}^{\infty} B_k - \cos\frac{\pi k a t}{l} \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 \sin\frac{\pi k}{l} x$$

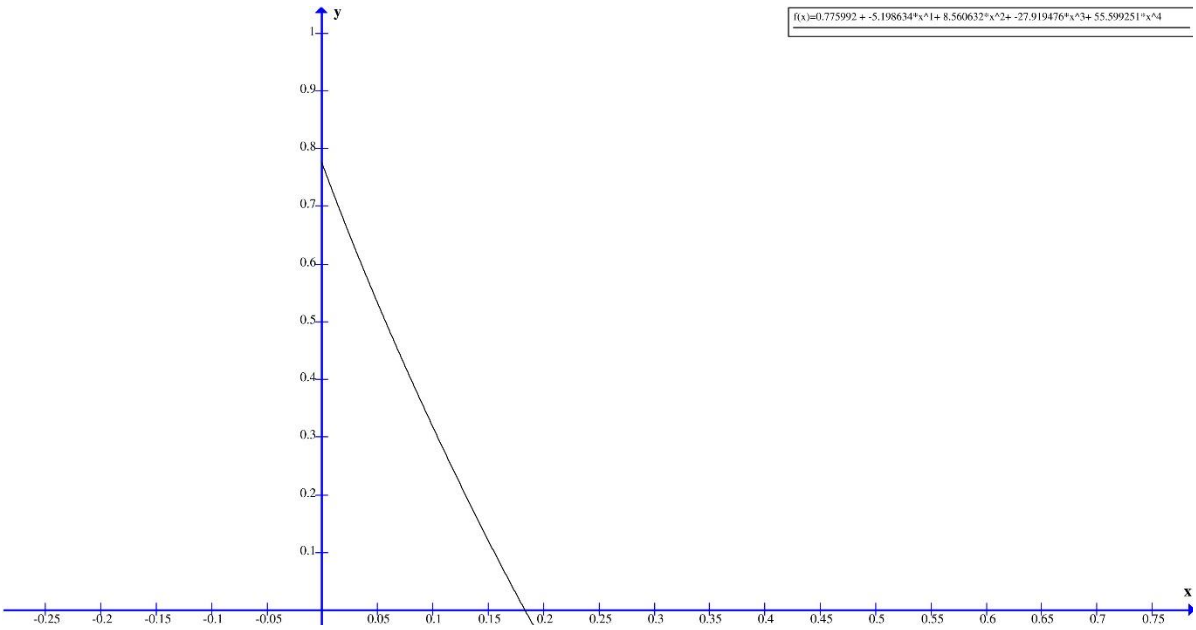
$$u_{1x}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \cos\frac{\pi k}{l} x \cdot \frac{\pi k}{l} + \sum B_k \cos\frac{\pi k a t}{l} \cos\frac{\pi k}{l} x \cdot \frac{\pi k}{l}$$

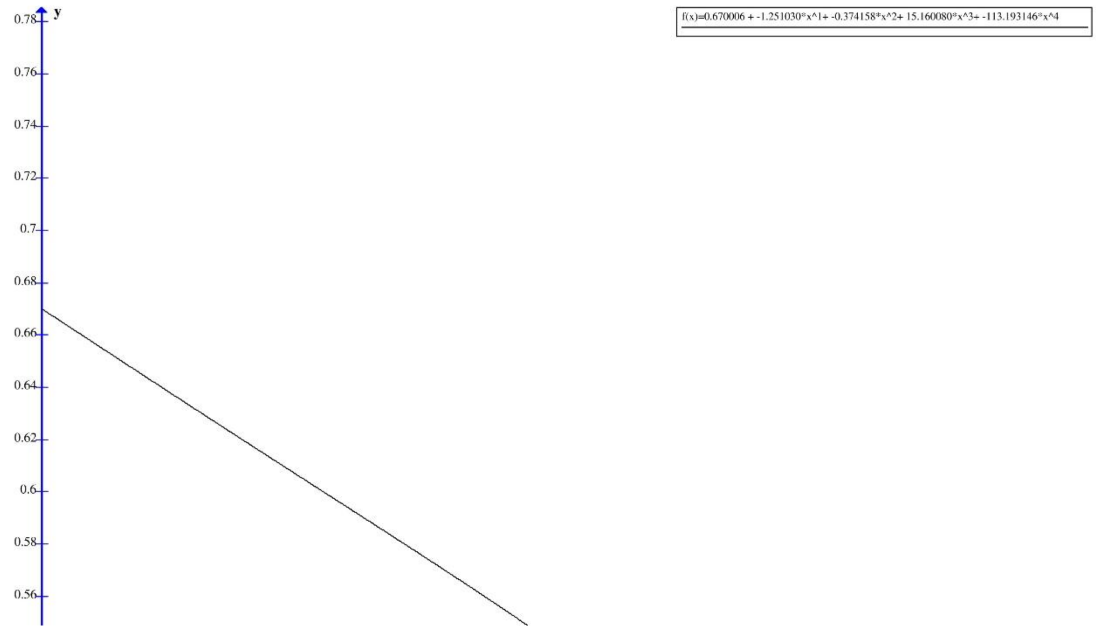
$$u_{1xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{\pi k a t}{l} \left(-\sin\frac{\pi k}{l} x\right) \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos\frac{\pi k a t}{l}$$

$$\left(-\sin\frac{\pi k}{l} x\right) \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$$

$$v_{1tt} = a^2 v_{1xx}$$


f(x)=0.929998 + -9.169727*x^1+ 41.437473*x^2+ -563.538818*x^3+ 2561.391602*x^4
y
x


f(x)=0.775992 + -5.198634*x^1+ 8.560632*x^2+ -27.919476*x^3+ 55.599251*x^4
y
x


y
0.78
0.76
0.74
0.72
0.7
0.68
0.66
0.64
0.62
0.6
0.58
0.56
f(x)=0.670006 + -1.251030*x^1+ -0.374158*x^2+ 15.160080*x^3+ -113.193146*x^4

3) Задачу Дирихле для уравнения Лапласа в кольцевом секторе $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $r \in [0,5; 1]$, когда на границах заданы условия $u(r_1 = 0,5; \varphi) = \sin(2\varphi)$; $u(r_2 = 1; \varphi) = 2\sin(2\varphi)$, а на радиальных границах заданы нулевые значения. Построить графики $u(r, 0)$, $u(r, \frac{\pi}{4})$, $u(r, \pi/2)$.

Введем полярные координаты, тогда задачу Дирихле можно записать так:

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = 0, \; r_1 < \rho < r_2, \; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ u(r_1, \varphi) = \sin(2\varphi) \\ u(r_2, \varphi) = 2\sin(2\varphi) \\ u(\rho, \varphi_1) = u(\rho, \varphi_2) = 0 \end{cases}$$

Применим метод Фурье.

$U(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$

$\Phi \rho^2 R'' + \Phi \rho R' + R\Phi'' = 0$, отсюда: $\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$

отсюда: $\lambda_n = \frac{\pi n}{\alpha}$, $R_n(\rho) = C_n \rho^{2n} + D_n \rho^{-2n}$; $\Phi_n(\varphi) = \sin \lambda_n \varphi$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} [C_n \rho^{2n} + D_n \rho^{-2n}] \sin \lambda_n \varphi$$

Найдем коэффициенты C_n, D_n:

$$U(r_1, \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n r_1^{2n} + D_n r_1^{-2n} = f_n^{I} =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \sin(2\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi \, d\varphi$$

$$u(r_2, \varphi) = \sum (C_n r_2^{2n} + D_n r_2^{-2n}) \sin \lambda_n \varphi = f_2(\varphi) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{II} \sin \frac{\pi n}{F} \varphi \Rightarrow C_n r_2^{+2n} + D_n r_2^{-2n} = f_n^{II} =$$

$$= \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} 2\sin(2\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi \, d\varphi$$

Получили систему:

$$\begin{cases} C_n r_1^{2n} + D_n r_1^{-2n} = I_1 \\ C_n r_2^{2n} + D_n r_2^{-2n} = I_2 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{1\cdot 2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\psi \sin \frac{\pi \cdot n \cdot 2}{\pi} \psi \, d\psi =$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\psi) \sin(2n\psi)\, d\psi = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\psi (1-n)\, d\psi -$$

$$- \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\psi (1+n)\, d\psi; \quad I_1' = \frac{4}{2\pi(2(1-n))} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\psi (1-n) \cdot$$

$$\cdot\, d\, 2\psi(1-n) = \frac{4}{2\pi(2(1-n))} \sin 2\psi (1-n) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$I_2' =$ аналогично $\Rightarrow I_1 = 0 \Rightarrow I_2 = 2 I_1 = 0$

Отсюда $C_n = D_n = 0$ (при $n > 1$)

при $n = 1$

$$\begin{cases} C_1 r_1^2 + D_1 \frac{1}{r_1^2} = I_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\psi \cdot \sin 2\psi \, d\psi \\ C_1 r_2^2 + D_1 \frac{1}{r_2^2} = I_2 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\psi \cdot \sin 2\psi \, d\psi \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\psi}{2} \, d\psi = \frac{4}{2\pi} \psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \sin 4\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow I_2 = 2$$

$$\begin{cases} \frac{C_1}{4} + 4 D_1 = 1 \\ C_1 + D_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow D_1 = \frac{2}{15}, \; C_1 = \frac{28}{15}$$

Итак: $u(\rho, \varphi) = \sin(2\varphi) \cdot \left[\frac{28}{15} \rho^2 + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{\rho^2} \right]$

Проверка:

$u(\rho, 0) = u(\rho, \frac{\pi}{2}) = \sin(0) \cdot \left[\frac{28}{15} \rho^2 + \frac{2}{15} \frac{1}{\rho^2} \right] = 0$

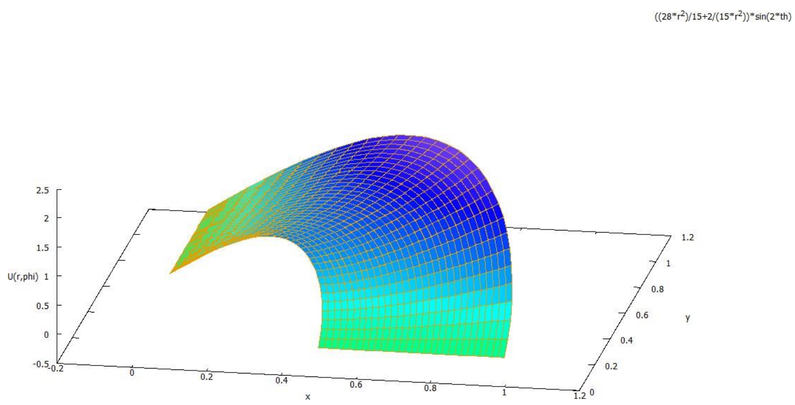
$u(0{,}5, \varphi) = \sin 2\varphi \cdot \left(\frac{28}{15} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{15} \cdot 4 \right) = \sin 2\varphi$

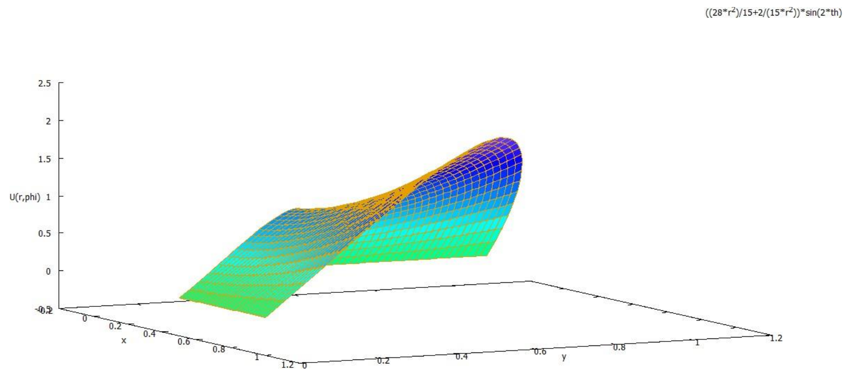
$u(1, \varphi) = \sin 2\varphi \cdot \left[\frac{28}{15} + \frac{2}{15} \right] = 2 \sin 2\varphi$

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\varphi\varphi} = \rho^2 \cdot \frac{56}{15} \sin 2\varphi + \rho^{-2} \frac{12}{15} \sin 2\varphi +$$

$$+ \rho \, \frac{56}{15} \rho \sin 2\varphi - \rho \cdot \frac{4}{15} \rho^{-3} \sin 2\varphi - 4 \sin 2\varphi \left[\frac{28}{15} \rho^2 + \frac{2}{15} \rho^{-2} \right] =$$

$= 0 \Rightarrow$ все условия выполняются


((28*r2)/15+2/(15*r2))*sin(2*th)
U(r,phi)
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
y


((28*r^2)/15+2/(15*r^2))*sin(2*th)
U(r,phi)
x
y