т. е. справедливы равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0) = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0) = 0. \qquad (14.68)$$

Доказательство. Установим справедливость первого равенства (14.68). Фиксируем у функции $u = f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_m)$ аргументы $x_2,\ x_3,\ \ldots\ ,\ x_m$ положив их равными соответсвующим координатам точки M_0, т. е. положив $x_2 = \mathring{x}_2,\ x_3 = \mathring{x}_3,\ \ldots,\ x_m = \mathring{x}_m$. При этом мы получим функцию $u = f\ (x_1,\ \mathring{x}_2,\ \ldots\ ,\ \mathring{x}_m)$ одной переменной x_1. Производная этой функции одной переменной в точке $x_1 = \mathring{x}_1$ совпадает с частной производной $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$.

Так как функция m переменных $u = f\ (M)$ имеет локальный экстремум в точке M_0, то указанная функция одной переменной $u = f\ (x_1,\ \mathring{x}_2,\ \ldots\ ,$ имеет локальный экстремум в точке $x_1 = \mathring{x}_1$, и поэтому (в силу результатов п. 2 § 7 гл. 8) производная этой функции одной переменной в точке $x_1 = \mathring{x}_1$, совпадающая с частной производной $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$, равна нулю.

Первое равенство (14.68) доказано. Остальные равенства (14.68) доказываются аналогично.

Подчеркнем, что равенства (14.68) (т. е. обращение в нуль в данной точке M_0 всех частных производных первого порядка) являются лишь необходимыми и не являются достаточными условиями локального экстремума функциии $u = f\ (M)$ в точке M_0.

Например, у функции двух переменных $u = xy$ обе частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ обращаются в нуль в точке $M_0\ (0, 0)$, но никакого экстремума в этой точке $M_0\ (0, 0)$ указанная функция не имеет, ибо эта функция $u = xy$ равна нулю в самой точке $M_0\ (0, 0)$, а в как угодно малой δ-окрестности этой точки принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Точки, в которых обращаются в нуль все частные производные первого порядка функции $u = f\ (M)$, называются точками возможного экстремума этой функции.

В каждой точке возможного экстремума у функции $u = f\ (M)$ может быть локальный экстремум, однако наличие этого экстремума можно установить лишь с помощью достаточных условий локального экстремума, выяснению которых будет посвящен следующий пункт.

Из доказанного выше утверждения вытекает и другая форма необходимых условий локального экстремума:

если функция $u = f\ (M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то дифференциал $du\ |_{M_0}$ этой функции в точке M_0 равен нулю тождественно относительно дифференциалов независимых переменных $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_m$.

В самом деле, поскольку

$$du\,|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1,\ +\frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)dx_2, + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m,$$

то из равенств (14.68) вытекает, что *при любых* $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_m$ справедливо равенство $du\,|_{M_0} = 0$.

2. Достаточные условия локального экстремума. При формулировке достаточных условий локального экстремума функции m переменных $u = f\ (M)$ важную роль будет играть второй диффереациал этой функции в обследуемой точке M_0.

В п. 2 § 5 этой главы мы убедились в том, что для случая, когда аргументы $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ два раза дифференцируемой функции $u = f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$ являются либо независимыми переменными, либо линейными функциями некоторых независимых переменных, второй дифференциал этой функции в данной точке M_0 представляет собой квадратичную форму относительно дифференциалов аргументов $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_m$ следующего вида:

$$d^2u\,|_{M_0} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}dx_i dx_k, \tag{14.69}$$

где

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M_0). \tag{14.70}$$

Для формулировки достаточных условий локального экстремума нам понадобится некоторые сведения из теории квадратичных форм, которые мы для удобства читателя приводим ниже *).

Квадратичная форма относительно переменных $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_m$

$$\Phi(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}h_i h_k \tag{14.71}$$

называется положительно определенной (отрицательно определенной), если для любых значений $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_m$, одновременно не равных нулю, эта форма принимает строго положительные (строго отрицательные) значения.

Квадратичная форма (14.71) называется знакоопределенной, если она является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной.

Квадратичная форма (14.71) называется знакопеременной, если она принимает как строго положительные, так и строго отрицательные значения.