Программа экзамена по курсу функционального анализа (2019/2020 год)

1. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского.
2. Метрические пространства. Примеры: $\mathbb{R}^n_p$, l_p, $L_p(X,\mu)$, $p \in [0,\infty]$, $C[a,b]$, $C^k[a,b]$.
3. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Критерий замкнутости множества.
4. Сепарабельные метрические пространства. Примеры.
5. Полные метрические пространства. Примеры.
6. Теорема о вложенных шарах.
7. Теорема о пополнении метрического пространства (идея доказательства).
8. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Теорема Хаусдорфа об условиях предкомпактности.
9. Теорема Вейерштрасса о достижимости нижней грани непрерывного функционала на компакте.
10. Теорема Арцела (критерий предкомпактности в $C[a,b]$) (без доказательства).
11. Принцип сжимающих отображений.
12. Системы множеств: полукльцо, алгебра, σ-алгебра. Минимальное кольцо, порождённое системой множеств. Борелевская σ-алгебра.
13. Мера и её свойства.
14. Теорема о продолжении меры с полукольца на кольцо (идея доказательства).
15. Внешняя мера. Измеримые по Лебегу множества.
16. Мера Лебега-Стилтьеса.
17. Теорема об эививалентности σ-аддитивности и непрерывности меры.
18. Измеримые функции. Измеримость по Лебегу и по Борелю. Условия измеримости композиции функций.
19. Замкнутость класса измеримых функций относительно арифметических операций и предельного перехода.
20. Виды сходимости последовательностей измеримых функций и связь между ними.
21. Интеграл Лебега и его свойства.
22. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости (без доказательства).
23. Нормированные пространства. Примеры: $\mathbb{R}^n_p$, l_p, $L_p(X,\mu)$, $p \in [0,\infty]$, $C[a,b]$, $C^k[a,b]$.
24. Эквивалентность норм в конечномерных пространствах.

25. Понятия линейного подпространства, линейного многообразия, тотальной (полной) системы и базиса в нормированных пространствах.

26. Евклидовы пространства. Примеры.

27. Ортогонализация Грама–Шмидта.

28. Критерий существования скалярного произведения, согласованного с нормой пространства (идея доказательства).

29. Теорема о перпендикуляре.

30. Ряды Фурье. Минимальное свойства коэффициентов ряда Фурье.

31. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

32. Теорема о существовании базиса в сепарабельных евклидовых пространствах.

33. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

34. Норма линейного функционала в нормированном пространстве. Эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного функционала.

35. Теорема Хана–Банаха о продолжении линейного ограниченного функционала и следствия из неё.

36. Сопряжённое пространство. Норма линейного ограниченного функционала в пространстве $\mathbb{R}^n_p$, $p \in [1, \infty]$.

37. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве.

38. Теоремы Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в пространствах l_p, $L_p(X, \mu)$, $p \in [0, \infty]$, $C[a, b]$ (без доказательства).

39. Слабая и сильная сходимости в нормированных пространствах. Связь между ними.

40. Линейные операторы в нормированных пространствах. Норма линейного оператора.

41. Теорема о продолжении линейного ограниченного оператора, заданного на всюду плотном множестве в нормированном пространстве.

42. Принцип равномерной ограниченности.

43. Теорема об ограниченности слабо сходящейся последовательности.

44. Теорема Банаха–Штейнгауза.

45. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства).

46. Сопряжённый оператор.

47. Спектр оператора. Теорема о спектральном радиусе (без доказательства).

Основные типы задач

1. Сжимающие отображения. Доказательство существования неподвижной точки.
2. Вычисление меры множества.
3. Вычисление интеграла Лебега.
4. Вычисление нормы линейного ограниченного функционала.
5. Ортогонализация Грама–Шмидта и разложение элементов евклидова пространства в ряд Фурье.
6. Вычисление сильных и слабых пределов.
7. Вычисление нормы и спектра линейного оператора.

Список литературы

[1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Физматлит, 2006.

[2] Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Физматлит, 2002.

[3] Пугачев В. С. Лекции по функциональному анализу. — М.: МАИ, 1996.

[4] Богачев В. И. Основы теории меры. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2003.

[5] Дьяченко М. И., Ульянов П. Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.

[6] Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2004. (*Для «гурманов»*.)