Задача №24

Пусть $\Phi(u,x) \triangleq u+x, u \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le -1, \\ \frac{x+1}{4}, -1 < x < 0, \\ \frac{3+x}{4}, 0 \le x < 1, \\ 1, 1 \le x. \end{cases}$$

Решить обратную задачу оптимизации квантильного критерия

$$u_\alpha = \arg\min_{u \in [0,1]} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0,1).$$

Задача №17

Пусть целевая функция $\Phi_0(u) = u^2$ и имеется вероятностное ограничение

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : \left|\frac{X}{u}\right| \le \varphi\right\} \ge \alpha, \alpha \in (0,1).$$

Здесь X — случайная величина с нормальным распределением $X \sim \mathbf{N}(0,\sigma), u \in [1,2] \triangleq U$.

Задачу

$$u_0 = \arg\min_{u \in [1,2]} \Phi_0(u), P_\varphi(u) \ge \alpha,$$

свести к квантильной задаче безусловной оптимизации и решить её.

Задача №3

Пусть $\Phi(u,x) \triangleq x+u, x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, x > 0. \end{cases}$$

Решить прямую задачу оптимизации вероятностного критерия

$$u_\varphi = \arg\max_{u\in[0,1]} P_\varphi(u), \varphi \in \mathbb{R}^1,$$

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : u + X \leq \varphi\right\}.$$

Задача №1

Пусть $\Phi(u,x) \triangleq x+u, x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1, \\ \frac{x+1}{2}, |x| \leq 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Решить прямую задачу оптимизации вероятностного критерия

$$u_\varphi = \arg\max_{u\in[0,1]} P_\varphi(u), \varphi \in \mathbb{R}^1,$$

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : \Phi(u,X) \leq \varphi\right\}, \varphi \in \mathbb{R}^1.$$

Задача №35

Пусть критерий $\Phi_0(u_1, u_2) = u_1$ и задано вероятностное ограничение

$$P_0(u_1, u_2) = \mathbf{P}\left\{X_1, X_2 : |X_1 + X_2| \le u_1 - u_2, |X_1 - X_2| \le u_2\right\} \ge \alpha,$$

где X_1, X_2 — независимые случайные величины с нормальным распределением, $X_1 \sim \mathbf{N}(0,1)$, $X_2 \sim \mathbf{N}(0,1)$.

Свести данную задачу к задаче квантильной оптимизации и решить её, учитывая, что $u_1 \ge 0, u_2 \ge 0$.

Задача №20

Пусть имеется динамическая система

$$z_{i+1} = z_i + u_i + X_i, z_1 - \text{ задано},$$

где z_i, u_i, X_i — скаляры, X_i — случайные независимые между собой величины с нормальным распределением $X_i \sim \mathbf{N}(m_i, \sigma_i)$.

Решить задачу с вероятностным критерием в программных стратегиях

$$u_\varphi = \arg\max_{u \in \mathbb{R}^N} P_\varphi(u), \varphi \in (0, \infty),$$

где $P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : |z_{N+1}(u, X)| \le \varphi\right\}$,

$$u \triangleq \mathrm{col}(u_1, \dots, u_N), X \triangleq \mathrm{col}(X_1, \dots, X_N).$$

Задача №10

Пусть имеется задача с вероятностным ограничением

$$\Phi_0(u_1, u_2, u_3) \to \min_{u_1, u_2, u_3},$$

$$\mathbf{P}\left\{X : c_1 + u_1 + u_3 X_1 \geq 0, c_1 + u_1 + u_2 + u_3 X_2 \geq 0\right\} \geq \alpha,$$

где $\Phi_0(u_1, u_2, u_3) = c_0(u_1 + u_2) + c_3 u_3$.

Свести эту задачу условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации с квантильным критерием.

Задача №2

Пусть $\Phi(u, x) \triangleq x + u, x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1, \\ \frac{x+1}{2}, |x| \leq 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Решить обратную задачу оптимизации вероятностного критерия

$$u_\alpha = \arg \min_{u \in [0,1]} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0, 1),$$

где

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\left\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\right\},$$

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : \Phi(u, X) \leq \varphi\right\}.$$

Задача №22

Пусть критерий $\Phi_0(u_1, u_2) = u_1$ и задано вероятностное ограничение

$$P_0(u_1, u_2) \triangleq \mathbf{P}\left\{X_1, X_2 : |X_1 + X_2| \leq u_1 - u_2, |X_1 - X_2| \leq u_2\right\} \geq \alpha,$$

где X_1, X_2 — независимые случайные величины с нормальным распределением, $X_1 \sim \mathbf{N}(0,1)$, $X_2 \sim \mathbf{N}(0,1)$.

Свести данную задачу к задаче квантильной оптимизации и решить её, учитывая, что $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$.

Задача №19

Пусть имеется динамическая система

$$z_{i+1} = z_i + u_i + X_i, z_1 - \text{ задано},$$

где z_i, u_i, X_i — скаляры, X_i — случайные независимые между собой величины с нормальным распределением $X_i \sim \mathbf{N}(m_i, \sigma_i)$.

Решить среднеквадаритическую задачу в позиционных стратегиях

$$u_N = \arg\min_{u(\cdot)} \mathbf{M}[z_{N+1}(u(\cdot), x)]^2,$$

где $x \triangleq \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_N), u(\cdot) \triangleq \mathrm{col}(u_1(\cdot), \ldots, u_N(\cdot))$, $u_i(z_i)$ — позиционная стратегия.

Задача №18

Пусть имеется динамическая система

$$z_{i+1} = z_i + u_i + X_i, z_1 - \text{ задано},$$

Пусть целевая функция является функцией терминального состояния $\Phi(z_{N+1}) = z_{N+1}^2$. Здесь z_i, u_i, X_i — скаляры, X_i — случайные независимые между собой величины с нормальным распределением $X_i \sim \mathbf{N}(m_i, \sigma_i)$.

Решить среднеквадаритическую задачу в программных стратегиях

$$(u_1, \ldots, u_N) = \arg \min_{(u_1,\ldots,u_N)\in\mathbb{R}^N} \mathbf{M}[z_{N+1}^2(u_1, \ldots, u_N, X_1, \ldots, X_N)]^2.$$

Задача №14

Пусть целевая функция

$$\Phi(u, x_0, x_1) \triangleq [x_0 + u(1 + x_1)]^2,$$

где $u \in \mathbb{R}^1$, X_0, X_1 — независимые случайные величины с нормальным распределением $X_0 \sim \mathbf{N}(0, \sigma_0), X_1 \sim \mathbf{N}(0, \sigma_1)$.

Решить среднеквадратическую задачу управления в программных стратегиях

$$u_M = \arg \min_{u\in\mathbb{R}^1} \mathbf{M}[X_0 + u(1 + X_1)]^2.$$

Задача №16

Пусть целевая функция

$$\Phi_0(u) \triangleq u^2 \to \min_{u \in U}$$

и имеется вероятностное ограничение

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : \left|\frac{X}{u}\right| \le \varphi\right\} \ge \alpha, \alpha \in (0,1).$$

Здесь X — случайная величина с нормальным распределением $X \sim \mathbf{N}(0,\sigma), u \in [1,2] \triangleq U$.

Решить данную задачу с вероятностным критерием методом детерминированного эквивалента.

Задача №29

Пусть $u \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^1, X \sim \mathbf{R}(-1,1)$ и

$$\Phi(u,x) = \begin{cases} |x| + |u| - 1, |x| > 1, \\ |u|, |x| \le 1. \end{cases}$$

Решить обратную задачу оптимизации

$$u_\alpha = \arg \min_{u \in [-1,1]} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0,1).$$

Задача №15

Пусть целевая функция

$$\Phi(u, x_0, x_1) \triangleq [x_0 + u(1 + x_1)]^2,$$

где $u \in \mathbb{R}^1$, X_0, X_1 — независимые случайные величины с нормальным распределением $X_0 \sim \mathbf{N}(0, \sigma)$, $X_1 \sim \mathbf{N}(0, \sigma)$.

Решить вероятностную задачу оптимизации

$$u_\varphi = \arg\max_{u \in \mathbb{R}^1} P_\varphi(u),$$

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X_0, X_1 : [X_0 + u(1 + X_1)]^2 \leq \varphi\right\}.$$

Задача №8

Пусть $\Phi(u, x) \triangleq |x+u|, x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, x > 0. \end{cases}$$

Решить обратную задачу минимизации функции квантили

$$u_\alpha = \arg\min_{u \in \mathbb{R}^1} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0, 1),$$

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\left\{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\right\},$$
$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : |u + X| \leq \varphi\right\}.$$

Задача №4

Пусть $\Phi(u,x) \triangleq x+u, x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, x \le 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, x > 0. \end{cases}$$

Решить обратную задачу оптимизации квантильного критерия

$$u_\alpha = \arg\min_{u \in \mathbb{R}^1} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0,1),$$

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min \{\varphi : P_\varphi(u) \ge \alpha\},$$

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{X : u + X \le \varphi\}.$$

Задача №13

Пусть целевая функция

$$\Phi(u, x_0, x_1) \triangleq [x_0 + u(1 + x_1)]^2,$$

где $u \in \mathbb{R}^1$, x_0 и x_1 — неопределённые величины с областью неопределённости

$$S \triangleq \{x_0, x_1 : |x_0 x_1| \le c\},$$

где c заданный параметр.

Решить минимаксную задачу

$$u^S(\cdot) = \arg\min_{u(\cdot)} \max_{(x_0,x_1)\in S} [x_0 + u(x_0)(1 + x_1)]^2,$$

где управление $u(x_0)$ выбирается в зависимости от начального состояния системы x_0.

Задача №34

Пусть имеется задача с вероятностным ограничением

$$\Phi_0(u_1, u_2, u_3) \to \min_{u_1, u_2, u_3},$$

$$\mathbf{P}\left\{x : c_1 + u_1 + u_3 x_1 \geq 0, c_1 + u_1 + u_2 + u_3 x_2 \geq 0\right\} \geq \alpha,$$

где $\Phi_0(u_1, u_2, u_3) = c_0(u_1 + u_2) + c_3 u_3$.

Свести эту задачу условной оптимизации к задаче квантильной оптимизации.

Задача №26

Пусть $u \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^1, x \sim \mathbf{R}(-1, 1)$ и

$$\Phi(u, x) = \begin{cases} 1, |x + u| > 1, \\ 0, |x + u| \leq 1. \end{cases}$$

Решить обратную задачу оптимизации

$$u_\alpha = \arg\min_{u \in [0,1]} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0, 1).$$

Задача №28

Пусть $u \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^1$ и

$$\Phi(u,x) = \begin{cases} |x| + |u| - 1, |x| > 1, \\ |u|, |x| \le 1, \end{cases}$$

где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1, \\ \frac{x+1}{2}, |x| \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Решить прямую задачу оптимизации

$$u_\varphi = \arg \max_{u \in [-1,1]} P_\varphi(u), \varphi \in \mathbb{R}^1.$$

Задача №33

Пусть имеется задача с вероятностным ограничением

$$\Phi_0(u_1, u_2) \to \min_{u_1, u_2 \in [0,1]},$$

$$\mathbf{P}\left\{-\Phi_0 + 2u_1 + X_1 \le 0, u_1 + 2u_2 - X_2 \le 0\right\} \ge \alpha,$$

где X — случайный вектор с некоторой функцией распределения.

Свести её к задаче квантильной оптимизации.

Задача №21

Пусть имеется динамическая система

$$z_{i+1} = z_i + u_i + X_i, z_1 - \text{ задано},$$

где z_i, u_i, X_i — скаляры, X_i — случайные независимые между собой величины с нормальным распределением $X_i \sim \mathbf{N}(m_i, \sigma_i)$.

Решить вероятностную задачу в позиционных стратегиях

$$u_\varphi = \arg\max_{u(\cdot)} P_\varphi(u(\cdot)), \varphi \in (0, \infty),$$

где $P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : |z_{N+1}(u(\cdot), X)| \le \varphi\right\}$,

$$u(\cdot) \triangleq \mathrm{col}(u_1(\cdot), \dots, u_N(\cdot)), X \triangleq \mathrm{col}(X_1, \dots, X_N),$$

$u_i(z_i)$ — позиционная стратегия.

Задача №7

Пусть $\Phi(u, x) \triangleq x + u, x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, x \le 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, x > 0. \end{cases}$$

Решить прямую задачу оптимизации вероятностного критерия

$$u_\varphi = \arg\max_{u \in \mathbb{R}^1} P_\varphi(u), \varphi \in \mathbb{R}^1,$$

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : u + X \le \varphi\right\}.$$

Задача №30

Пусть $u \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^1, X \sim \mathbf{R}(-1, 1)$ и

$$\Phi(u, x) = \begin{cases} 1, |x + u| > 1 \\ 0, |x + u| \leq 1. \end{cases}$$

Решить прямую задачу оптимизации

$$u_\varphi = \arg \max_{u \in [-1,1]} P_\varphi(u), \varphi \in \mathbb{R}^1.$$

Задача №12

Пусть целевая функция

$$\Phi(u, x_0, x_1) \triangleq [x_0 + u(1 + x_1)]^2,$$

где $u \in \mathbb{R}^1$, x_0 и x_1 — неопределённые величины с областью неопределённости

$$S \triangleq \{x_0, x_1 : |x_0| \leq \Delta_0, |x_1| \leq \Delta_1\}.$$

Решить минимаксную задачу

$$u^S(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot)} \max_{(x_0,x_1) \in S} [x_0 + u(x_0)(1 + x_1)]^2,$$

где управление $u(x_0)$ выбирается в зависимости от начального состояния системы x_0.

Задача №36

Пусть критерий $\Phi_0(u) = u^2$ и имеется вероятностное ограничение

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : \left|\frac{X}{u}\right| \leq \varphi\right\} \geq \alpha, \alpha \in (0,1).$$

Здесь X — случайная величина с нормальным распределением $X \sim \mathbf{N}(0,\sigma), u \in [1,2], \varphi \in \mathbb{R}^1$.

Решить данную задачу методом детерминированного эквивалента.

Задача №31

Пусть $u \in \mathbb{R}^1, X \in \mathbb{R}^1, X \sim \mathbf{R}(-1,1)$ и

$$\Phi(u,x) = \begin{cases} 1, |x+u| > 1, \\ 0, |x+u| \leq 1. \end{cases}$$

Решить обратную задачу оптимизации

$$u_\alpha = \arg\min_{u \in [-1,1]} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0,1).$$

Задача №9

Пусть имеется задача с вероятностным ограничением

$$\Phi_0(u_1, u_2) \to \min_{u_1, u_2},$$

$$\mathbf{P}\left\{-\Phi_0 + 2u_1 + X_1 \leq 0, u_1 + 2u_2 - X_2 \leq 0\right\} \geq \alpha,$$

где X — случайный вектор с некоторой функцией распределения.

Свести эту задачу к задаче квантильной оптимизации.

Задача №11

Пусть целевая функция

$$\Phi(u, x_0, x_1) \triangleq [x_0 + u(1 + x_1)]^2,$$

где $u \in \mathbb{R}^1$, X_0, X_1 — независимые случайные величины с нормальным распределением $X_0 \sim \mathbf{N}(0, \sigma_0), X_1 \sim \mathbf{N}(0, \sigma_1)$.

Решить среднеквадратическую задачу

$$u_M(\cdot) = \arg\min_{u(\cdot)} \mathbf{M}[X_0 + u(1 + X_1)]^2,$$

где управление $u(x_0)$ выбирается в зависимости от начального состояния X_0.

Задача №25

Пусть $u \in \mathbb{R}^1, X \in \mathbb{R}^1, X \sim \mathbf{R}(-1, 1)$ и

$$\Phi(u, x) = \begin{cases} 1, |x + u| > 1, \\ 0, |x + u| \leq 1. \end{cases}$$

Решить прямую задачу оптимизации

$$u_\varphi = \arg \max_{u \in [0,1]} P_\varphi(u), \varphi \in \mathbb{R}^1.$$

Задача №23

Пусть $\Phi(u, x) \triangleq u + x, u \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq -1, \\ \frac{x+1}{4}, -1 < x < 0, \\ \frac{3+x}{4}, 0 \leq x < 1, \\ 1, 1 \leq x. \end{cases}$$

Решить прямую задачу оптимизации вероятностного критерия

$$u_\varphi = \arg \max_{u \in [0,1]} P_\varphi(u), \varphi \in \mathbb{R}^1,$$

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{X : u + X \leq \varphi\right\}.$$

Задача №27

Пусть $\Phi(u,x) \triangleq |u+x|, u \in \mathbb{R}^1, x \in \mathbb{R}^1$, где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq -1, \\ \frac{x+1}{4}, -1 < x < 0, \\ \frac{3+x}{4}, 0 \leq x < 1, \\ 1, 1 \leq x. \end{cases}$$

Решить прямую задачу оптимизации вероятностного критерия

$$u_\varphi = \arg\max_{u \in [-1,1]} P_\varphi(u), \varphi = 1.$$

Задача №5

Пусть

$$\Phi(u,x) = \begin{cases} |u+x|, |u+x| < 1, \\ 2, |u+x| \geq 1, \end{cases}$$

где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) \triangleq \begin{cases} 0, x \geq -1, \\ \frac{x+1}{4}, |x| < 1, \\ 1, x \geq 1. \end{cases}$$

Решить прямую задачу по оптимизации вероятностного критерия

$$u_\varphi = \arg\max_{u \in \mathbb{R}^1} P_\varphi(u), \varphi \in \mathbb{R}^1,$$

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\left\{x : \Phi(u,x) \leq \varphi\right\}.$$

Задача №6

Пусть

$$\Phi(u,x) = \begin{cases} |u+x|, |u+x| < 1, \\ 2, |u+x| \geq 1, \end{cases}$$

где X — случайная величина с функцией распределения

$$F(x) \triangleq \begin{cases} 0, x \geq -1, \\ \frac{x+1}{4}, |x| < 1, \\ 1, x \geq 1. \end{cases}$$

Решить обратную задачу по оптимизации квантильного критерия

$$u_\alpha = \arg \min_{u \in [0,1]} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0,1).$$

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min \left\{ \varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha \right\}, P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P} \left\{ X : \Phi(u,X) \leq \varphi \right\}.$$

Задача №32

Пусть $u \in \mathbb{R}^1, X \in \mathbb{R}^1, X \sim \mathbf{R}(-1,1)$ и

$$\Phi(u,x) = \begin{cases} 2, |x| < 1, \\ u, |x| \geq 1. \end{cases}$$

Решить обратную вероятностного критерия

$$u_\alpha = \arg \min_{u \in [0,1]} \varphi_\alpha(u), \alpha \in (0,1).$$