Задача №2

Дюсенеев
Амир
М80-304Б-17
11.06.20

Пусть $\Phi(u,x) \triangleq x+u,\ x\in R^1,\ u\in R^1$, где X – случайная величина с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<-1, \\ (x+1)/2, & |x|\leqslant 1, \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Решить обратную задачу оптимизации вероятностного критерия $u_\alpha = \arg\min\limits_{u\in[0;1]} \varphi_\alpha(u),\ \alpha\in(0,1)$,

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : P_\varphi(u)\geqslant \alpha\},$$

где

$$P_\varphi(u) \triangleq P\{X : \Phi(u,X)\leqslant\varphi\}$$

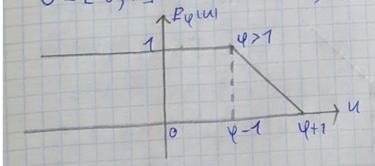
Решение: $\Phi(u,x)\triangleq x+u,\ x\in R^1,\ u\in R^1$

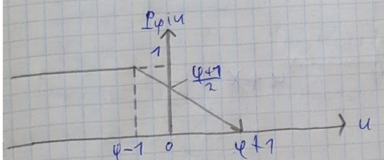
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<-1 \\ \frac{x+1}{2}, & |x|\leqslant 1, \\ 1, & x>1. \end{cases} \qquad P_\varphi(u) = \begin{cases} 1, & u\leqslant\varphi-1 \\ \frac{\varphi-u+1}{2}, & \varphi-1<u\leqslant\varphi+1 \\ 0, & \varphi+1<u \end{cases}$$

$\Phi_\alpha(u) = \min\{\varphi : P_\varphi(u)\geqslant\alpha\}$ при $\alpha\in(0,1) \Rightarrow$

$\Phi_\alpha(u) = 2\alpha-1+u$

$U=[0,1]$ – компактно, а $\Phi(u,x) = x+u$ непрерывно по u





Найдем решение обратной задачи

$u_\lambda \triangleq \arg\min\limits_{u\in[0,1]} \Phi_\lambda(u) = \arg\min\limits_{u\in[0,1]} (2\lambda-1+u)$

$u_\lambda = 0$ и $\Phi_\lambda(u_\lambda) = 2\lambda - 1$ при $\lambda \in (0, 1)$

Найдем решение прямой задачи при $\varphi = 2\lambda - 1$:

$u_\varphi = \arg\max\limits_{u\in[0,1]} P_\varphi(u)$

Т.к. $\varphi < 1$, то функция $P_\varphi(u)$ достигает своего максимума на $[0, 1]$ при $u_\varphi = 0$, и это решение единственно

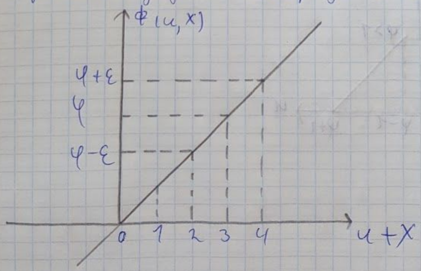
$\Rightarrow u_\varphi = u_\lambda$

Пусть $u = 0$, $\varphi = 3$, $\varepsilon = 1 \Rightarrow P\{\omega : |\Phi(u, X) - \varphi| < \varepsilon\} =$

$= P\{\omega : |X - 3| < 1\}$

Рассм. прямую задачу $u_\varphi \triangleq \arg\max\limits_{u\in[0,1]} P(u)$

Т.к. $\varphi > 1$, то все $u_\varphi \in [0, \varphi - 1]$ будут решениями прямой задачи, причем $P_\varphi(u_\varphi) = 1$. При $\lambda = 1$ обратная задача не определена



Задача 22

Пусть критерий $\Phi_0(u_1,u_2)=u_1$ и задано вероятностное ограничение.

$$P_0(u_1,u_2) \triangleq P\{X_1,X_2 : |X_1+X_2| \leq u_1-u_2, |X_1-X_2| \leq u_2\} \geq \alpha,$$

где X_1, X_2 – независимые случайные величины с нормальным распределением, $X_1 \sim N(0,1)$
$X_2 \sim N(0,1)$

Свести данную задачу к задаче квантильной оптимизации и решить её, учитывая, что $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$

Решение:

Задача с вероятностным ограничением.

$$\Phi_0(u_1,u_2) \to \min_{u_1,u_2 \in U}$$

$$P_\varphi(u_1,u_2) \triangleq P\{\Phi(u_1,u_2) \leq \varphi\} \geq \alpha, \ \alpha \in (0,1)$$

$$P_\varphi(u_1,u_2) = M[\chi_{S_\varphi(u_1,u_2)}(x)]$$

$$\chi_{S_\varphi(u)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in S_\varphi(u) \\ 0, & x \notin S_\varphi(u) \end{cases}$$

$$S_\varphi(u) \triangleq \{x : \Phi(u,x) \leq \varphi\}$$

$$P_\varphi(u) = P(S_\varphi(u))$$

функция вероятности.

$$P_\varphi(u_1,u_2) = P(S_\varphi(u_1,u_2))$$

$$\Phi_M(u_1,u_2) \triangleq M|\Phi(u_1,u_2,X)-\varphi|^2 \to \min$$