МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)»

ОТЧЕТ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

по дисциплине «Системы массового обслуживания»

Студент: Дюсекеев А. Е.

Группа: М8О-101М-21

Руководитель: Борисов А. В.

Оценка: ___________________

Дата: _____________________

Москва 2022

Содержание

Постановка задачи

Пусть $X=\{X_t,\ t=0,1,2\ldots\}$ – однородная марковская цепь со множеством состояний $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ ($e_k - k -$ й единичный вектор $-$ столбец) и матрицей переходных вероятностей

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ sin^2(\frac{\pi n}{5}) & 0 & cos^2(\frac{\pi n}{5}) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ cos^2(\frac{\pi n}{10}) & 0 & sin^2(\frac{\pi n}{10}) & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Начальное распределение $\pi_0 = (\frac{1}{2}sin^2\left(\frac{\pi n}{6}\right),\frac{1}{2}cos^2\left(\frac{\pi n}{6}\right),\frac{1}{2}sin^2\left(\frac{\pi n}{12}\right),\frac{1}{2}cos^2\left(\frac{\pi n}{12}\right))^T$ (n – номер студента в группе).

Цепь доступна косвенному наблюдению

$$Y_t = CX_t + \sigma X_t V_t, \qquad t=1,2,3,\ldots, \qquad (2)$$

где $\{V_t\}$ – последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин,

$$C=(1,2,3,4), \qquad \sigma = (5,6,7,8).$$

1. С помощью метода производящих функций найти эволюцию распределения $\pi(t)$ в зависимости от момента времени t.
2. Выяснить, является ли марковская цепь X эргодической. Найти все стационарные распределения.
3. По наблюдениям (2) построить
   3.1. тривиальную оценку $\tilde{X}_t = M[X_t]$, ее ошибку $\tilde{\Delta}_t = \tilde{X}_t - X_t$ и безусловную ковариационную матрицу ошибки оценки $\tilde{k}_t = cov(\tilde{\Delta}_t,\tilde{\Delta}_t)$,
   3.2. наилучшую линейную оценку фильтрации $\bar{X}_t$, ее ошибку $\bar{\Delta}_t = \bar{X}_t - X_t$ и безусловную ковариационную матрицу ошибки оценки $\bar{k}_t = cov(\bar{\Delta}_t,\bar{\Delta}_t)$,
   3.3. наилучшую нелинейную оценку фильтрации $\hat{X}_t = M[X_t|Y_1,\ldots,Y_t]$ ее ошибку $\hat{\Delta}_t = \hat{X}_t - X_t$ и условную ковариационную матрицу ошибки оценки $\hat{k}_t = cov(\hat{\Delta}_t,\hat{\Delta}_t|Y_1,\ldots,Y_t)$.
4. Путем осреднения по пучку траекторий (1 000 000 реализаций) построить безусловную ковариационную матрицу ошибки оценки $\hat{\hat{k}}_t = cov(\hat{\Delta}_t,\hat{\Delta}_t)$.
5. Результаты оценивания состояний марковской цепи X_t и соответствующие ковариационные матрицы привести в виде таблиц и графиков.
6. Выполнить пункты 3-5 для $\sigma = (50,60,70,80)$ и $\sigma = (100,100,100,100)$.
7. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.

Теоретическая часть

Определение 1. Случайный процесс с дискретным временем, сечение которого является дискретной случайной величиной, называется цепью.

Определение 2. $X = (\{X_n\}, \{\mathcal{F}_n\})$ - стохастическая последовательность, если для любого натурального n X_n-F_n - измеримая случайная величина.

Определение 3. Стохастическая последовательность $X = (\{X_n\}, \{\mathcal{F}_n\})$, принимающая значения из конечного или счетного множества называется марковской цепью (МЦ), если $\forall n \geq m > 0$, $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - борелевское множество:

$$P\{X_n \in B | \mathcal{F}_m\} = P\{X_n \in B | X_m\}$$

В простейшем случае условное распределение последующего состояния МЦ зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний.

Будем рассматривать МЦ с дискретным временем с пространством состояний $E = \{e_1, \dots, e_k, \dots\}$.

Определение 4. Матрица $P(n)$, где $P_{i,j}^{(n)} = \mathrm{P}\left(X_n = e_i \mid X_{n-1} = e_j\right)$, называется матрицей переходных вероятностей на n-м шаге.

Определение 5. Вероятность $\pi_k(n) = P\{X_n = e_k\}$, $e_k \in E$, называется вероятностью состояния e_k в момент времени $n \geq 0$, а вектор $\pi(n) = \{\pi_0(n), \pi_1(n), \dots\}^T$ - распределением вероятностей состояний МЦ X в момент $n \geq 0$.

Известно, что при каждом $n \geq 1$ выполнено рекуррентное соотношение:

$$\pi(n) = P^T(n)\pi(n-1).$$

Определение 6. МЦ называется однородной, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага, то есть $P_{i,j}^{(n)} = P_{i,j}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Для таких цепей при определённых условиях выполняется следующее свойство: $\pi(n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_\infty$.

Определение 7. Распределение $\tilde{\pi}$ называется стационарным распределением, если выполняется следующее равенство:

$$\tilde{\pi} = P^T \tilde{\pi} \qquad \left(\sum_j \tilde{\pi}_j = 1,\ \tilde{\pi}_j > 0\right).$$

Определение 8. Марковская цепь называется эргодической, если $\exists \pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)}$, причем $\sum_j \pi_j = 1$, $\pi_j > 0$.

Для выяснения условий эргодичности однородной МЦ необходимо ввести классификацию ее возможных состояний.

Пусть $p_{i,j}^k = P\{X_k = e_j | X_0 = e_i\}$ - вероятность перехода за k шагов из состояния e_i в состояние e_j, пусть также $f_{ii}^{(k)} = P\{X_k = i, X_l \neq i \ \forall\, 1 \leq l \leq k-1 | X_0 = i\}$ обозначает вероятность первого возвращения за k шагов в состояние e_i.

Определение 9. Состояние $e_k \in E$ называется несущественным, если найдется $e_j \in E$, такое, что $p_{k,j}^{(m)} > 0$ для некоторого $m \geq 1$, но $p_{j,k}^{(n)} = 0$ для всех $n \geq 1$. В противном случае состояние e_k называется существенным.

Определение 10. Состояния $e_k, e_j \in E$ называются сообщающимися, если найдутся $m, n \geq 1$, такие, что $p_{k,j}^{(m)} > 0$ и $p_{j,k}^{(n)} > 0$.

Определение 11. Состояние $e_j \in E$ называется возвратным, если $f_{ii} = 1$ и невозвратным, если $f_{ii} < 1$, где $f_{ii} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)}$.

Определение 12. Пусть d_j — наибольший общий делитель чисел $\left\{n \geq 1: P_{jj}^{(n)} > 0\right\}$. Состояние e_j называется периодическим с периодом d_j, если $d_j > 1$. В противном случае состояние — апериодическое.

Определение 13. МЦ называется неразложимой, если все ее состояния – существенные и сообщающиеся. Иначе МЦ называется разложимой.

Определение 14. Неразложимая МЦ называется апериодической, если все её состояния — апериодические ($d = 1$).

<u>Теорема 1.</u> Для того чтобы конечная МЦ была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и апериодической.

Если для МЦ верно, что для любых $i, j = 0, 1, \ldots$ существуют независящие от i пределы

$$p_{i,j}^{(n)} \to p_j > 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где числа $\{p_j\}$ являются единственным решением системы уравнений:

$$p_j = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,j} p_k, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1,$$

то цепь называется эргодической, а распределение вероятностей $p = \{p_0, p_1, ...\}^T$ - стационарным распределением МЦ.

Определение 15. Производящая функция $\varphi(z)$ неслучайной последовательности $\{f_n\}$, $n \geq 0$— это формальный степенной ряд

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

Производящие функции дают возможность описывать большинство сложных последовательностей довольно просто, а иногда найти для них явные формулы.

f_n	$\varphi(z)$	f_n	$\varphi(z)$	f_n	$\varphi(z)$
1	$\frac{1}{1-z}$	α^n	$\frac{1}{1-\alpha z}$	n	$\frac{z}{(1-z)^2}$

Алгоритм метода производящих функций:

1. Найти $\left(I - \frac{1}{z} P^T\right)^{-1} \pi(0)$, где I - единичная матрица, соответствующей размерности, P - матрица переходных вероятностей, I - единичная матрица.
2. Найти обратное z - преобразование полученного вектора, т.е. обратное z - преобразование каждого элемента вектора для получения аналитического выражения для $\pi(n)$.

Фильтрация марковских цепей

Пусть дана линейная негауссовская система наблюдения:

$$\begin{cases} X_t = a(X_{t-1}, t, V_t, \theta) \\ Y_t = A(X_t, t, W_t, \theta) \end{cases}$$

X_t - вектор состояний системы (ненаблюдаемый) в момент времени t;

Y_t - вектор наблюдений;

V_t - шумы в уравнении состояний;

W_t - шумы в уравнении наблюдений;

θ – вектор параметров.

Задача фильтрации состоит в определении с.к.-оптимальной оценки $\hat{X}_t = \hat{X}(t, Y)$ процесса X_t по наблюдениям $Y = (y_1, \dots, y_t)$.

С.к. – оптимальной оценкой является условное математическое ожидание:

$$J(\hat{X}_t) = M\left[\left\|\hat{X}_t - X_t\right\|^2\right] \to \min_{\hat{X}_t \in \mathcal{X}}$$

Если $\mathcal{X}$ – множество всех функций $\hat{X}(t, Y) : M\left[\left\|\hat{X}\right\|^2\right] < \infty$, то оптимальная оценка $\hat{X}_t = M[X_t|Y]$. Более того, если $J(\hat{X}_t) = M\left[\left\|\hat{X}_t - X_t\right\|^2 |Y\right]$, то $\hat{X}_t = M[X_t|Y]$ - оптимальная оценка.

Тривиальная оценка представляется в виде: $M[X_t] = \pi(t)$.

Алгоритм метода оптимальной линейной фильтрации:

1. Начальные условия: $\hat{X}_0 = m_0^X = \pi(0)$, $\hat{K}_0 = \mathrm{cov}(X_0, X_0) = diag(\pi(0)) - \pi(0)\pi(0)^T$.
2. Наилучший прогноз: $\tilde{X}_t = P^T \hat{X}_{t-1}$, ковариация ошибки прогноза: $\tilde{K}_t = P^T \hat{K}_{t-1} P$.
3. Найти оценку фильтра Калмана и ковариацию ошибки оценки: $\hat{X}_t = \tilde{X}_t + \tilde{K}_t C(C^T \tilde{K}_t C + R_t^V)^{-1}(Y_t - C^T \tilde{X}_t)$, $\hat{K}_t = \tilde{K}_t - \tilde{K}_t C(C^T \tilde{K}_t C + R_t^V)^{-1} C^T \tilde{K}_t$, где $R_t^V = \sigma^T diag(\pi(t))\sigma$ - интенсивность дискретного белого шума.

Алгоритм метода оптимальной нелинейной фильтрации:

1. Начальные условия: $\hat{X}_0 = \pi(0)$.
2. Одношаговый прогноз: $\tilde{X}_t = P^T \hat{X}_{t-1}$.
3. Найти оптимальную оценку состояния МЦ по формуле:

$$\hat{x}_t^i = P\{X_t = e_i \mid Y_t\} = \frac{\dfrac{\tilde{x}_t^i}{\sigma_i}\varphi_V\left(\dfrac{Y_t - C_i}{\sigma_i}\right)}{\sum_{n=1}^{N}\dfrac{\tilde{x}_t^n}{\sigma_n}\varphi_V\left(\dfrac{Y_t - C_n}{\sigma_n}\right)}$$

где $\tilde{x}_t^i$ - компоненты вектора $\tilde{X}_t$.

Условная ковариация: $\hat{k}_t = \mathrm{cov}(\hat{\Delta}_t, \hat{\Delta}_t \mid Y_t) = diag(\hat{X}_t) - \hat{X}_t \hat{X}_t^T$.

Выполнение работы: **Задание 1**

Курсовая работа

Вариант 5

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin^2\left(\frac{\pi n}{5}\right) & 0 & \cos^2\left(\frac{\pi n}{5}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi n}{10}\right) & 0 & \sin^2\left(\frac{\pi n}{10}\right) & 0 \end{bmatrix}; \quad \pi_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sin^2\left(\frac{\pi n}{6}\right) \\ \cos^2\left(\frac{\pi n}{6}\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi n}{12}\right) \\ \cos^2\left(\frac{\pi n}{12}\right) \end{bmatrix}$$

Решение:

С помощью метода производящих функций найти эволюцию распределения $\pi(t)$ в зависимости от момента времени t

$$I - zP^T = \begin{bmatrix} 1 & -z\sin^2(\pi) & 0 & -z\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z\cos^2(\pi) & 1 & -z\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 0 & -z & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 1 & -z \\ 0 & 0 & -z & 1 \end{bmatrix} = T$$

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z & 1 & -z \\ 0 & -z & 1 \end{bmatrix} = (1-z)(1+z)$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} 1-z^2 & 0 & 0 & 0 \\ z-z^3 & 1-z^2 & 0 & 0 \\ z^2 & z & 1 & z \\ z^3 & z^2 & z & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I - zP^T)^{-1} = \frac{1}{1-z} A + \frac{1}{1+z} B =$$

$$= \frac{1}{1-z} A + \frac{1}{1-(-z)} B$$

$$\pi_0 = \left(\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right), \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right), \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right), \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

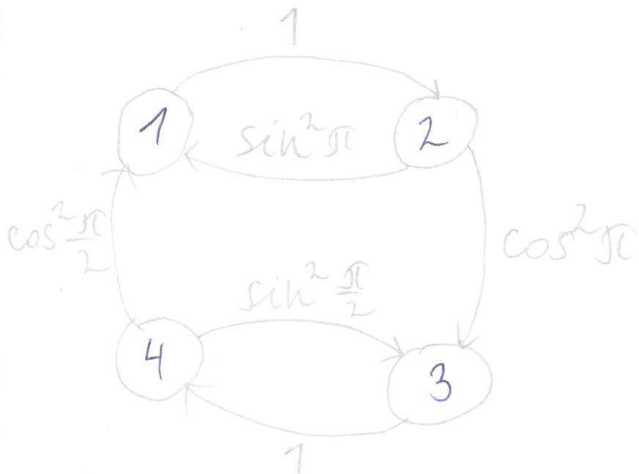
$$\boxed{\pi(t) = \frac{1}{2}\left[A + (-1)^t B\right] \cdot \pi(0)}$$

Уравнение эволюции

Задание 2

№2

Выяснить, является ли марковская цепь X эргодической. Найти все стационарные состояния



Чтобы цепь X являлась эргодической необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и апериодической. Рассмотрим неразложимость: т.к. в МЦ X из любого состояния S_i можно перейти в S_j за конечное число шагов, т.е. все состояния существенные и сообщающиеся, из чего следует что МЦ X <u>неразложима</u>.

Рассмотрим апериодичность: чтобы цепь была апериодической необходимо и достаточно, чтобы все её состояния были апериодическими, что в данном случае не выполняется (максимальный общий делитель всех длин путей возврата $= 2 \Rightarrow$ состояния периодичны с периодом 2

Из чего следует, что МЦ X <u>не является эргодической</u>

Найдем стационарные распределения:

Запишем систему уравнений, при условии нормировки

$$\begin{cases} \pi_1 = (\sin^2\pi)\cdot\pi_2 + (\cos^2\frac{\pi}{2})\cdot\pi_4 \\ \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_3 = (\cos^2\pi)\cdot\pi_2 + (\sin^2\frac{\pi}{2})\cdot\pi_4 \\ \pi_4 = \pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4 = 1 \end{cases}$$

Заменим в полученной системе одно из уравнений на условие нормировки:

$$\begin{cases} \pi_1 = (\sin^2\pi)\cdot\pi_2 + (\cos^2\frac{\pi}{2})\cdot\pi_4 \\ \pi_2 = \pi_1 \\ \pi_4 = \pi_3 \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0,5 \\ \pi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0,5 \\ \pi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -0,5 \\ \pi_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -0,5 \end{cases}$$

Искомое стационарное распределение $\rightarrow$

Задание 3

Для решения поставленной задачи была написана программа на языке Jupyter notebook. Были получены 3 вида оценок состояний марковской цепи. Они представлены на графиках. Каждому состоянию соответствует отдельный график, где черным цветом изображена реализация марковской цепи, красным цветом изображена тривиальная оценка, оранжевым цветом изображена линейная оценка и синим цветом изображена нелинейная оценка. Так, для $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$ были получены следующие результаты:

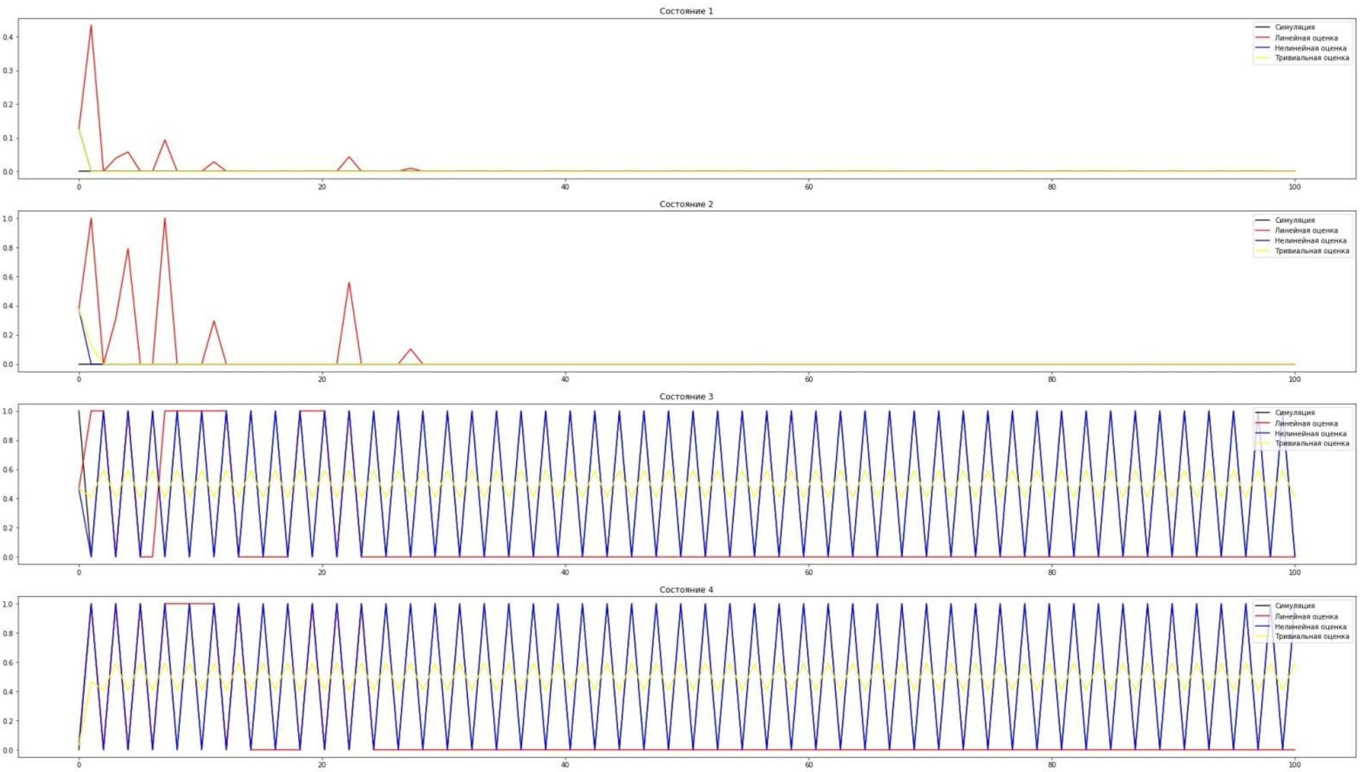


Рис. 1. Реализация МЦ и ее оценки при $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$

Для каждой из оценок были получены соответствующие ковариационные матрицы ошибок этих оценок:

0.219601	-0.100368	-0.067497	-0.051736
-0.100368	0.226482	-0.043815	-0.082299
-0.067497	-0.043815	0.167868	-0.056556
-0.051736	-0.082299	-0.056556	0.190591

Табл. 1. Безусловная ковариационная матрица ошибки тривиальной оценки при $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$

0.064373	-0.049721	0.046581	-0.035978
-0.049721	0.062239	-0.035978	0.045036
0.046581	-0.035978	0.033706	-0.026034
-0.035978	0.045036	-0.026034	0.032589

Табл. 2. Безусловная ковариационная матрица ошибки линейной оценки при $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$

0.010023	-0.005345	-0.000140	-0.004537
-0.005345	0.249219	-0.007299	-0.236574
-0.000140	-0.007299	0.013635	-0.006195
-0.004537	-0.236574	-0.006195	0.247307

Табл. 3. Условная ковариационная матрица ошибки нелинейной оценки при $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$

Для $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$ были получены следующие результаты:

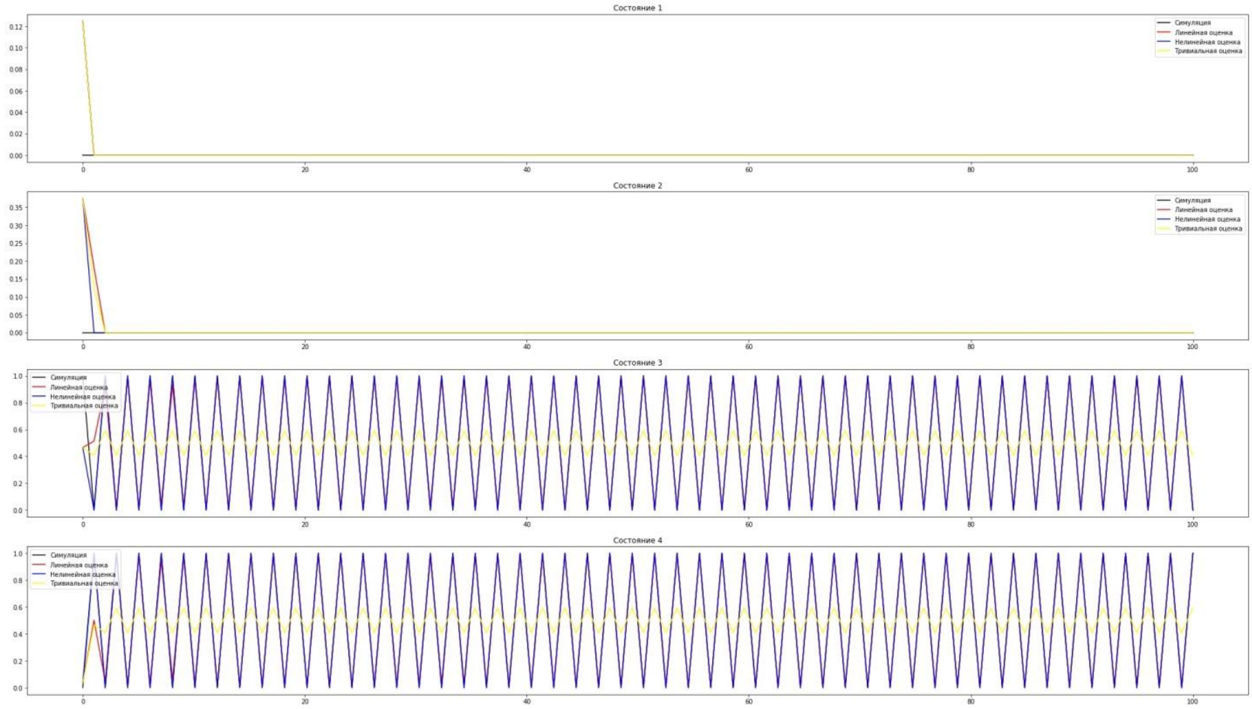


Рис. 2. Реализация МЦ и ее оценки при $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$

Для каждой из оценок были получены соответствующие ковариационные матрицы ошибок этих оценок:

0.219601	-0.100368	-0.067497	-0.051736
-0.100368	0.226482	-0.043815	-0.082299
-0.067497	-0.043815	0.167868	-0.056556
-0.051736	-0.082299	-0.056556	0.190591

Табл. 4. Безусловная ковариационная матрица ошибки тривиальной оценки при $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$

-1.374270	-1.206954	-0.994431	-0.873360
-1.206954	-0.757586	-0.873360	-0.548195
-0.994431	-0.873360	-0.719577	-0.631969
-0.873360	-0.548195	-0.631969	-0.396677

Табл. 5. Безусловная ковариационная матрица ошибки линейной оценки при $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$

0.018099	-0.011227	-0.000216	-0.006656
-0.011227	0.238147	-0.007128	-0.219792
-0.000216	-0.007128	0.011570	-0.004226
-0.006656	-0.219792	-0.004226	0.230674

Табл. 6. Условная ковариационная матрица ошибки нелинейной оценки при $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$

Для $\sigma = (100, 100, 100, 100)^T$ были получены следующие результаты:

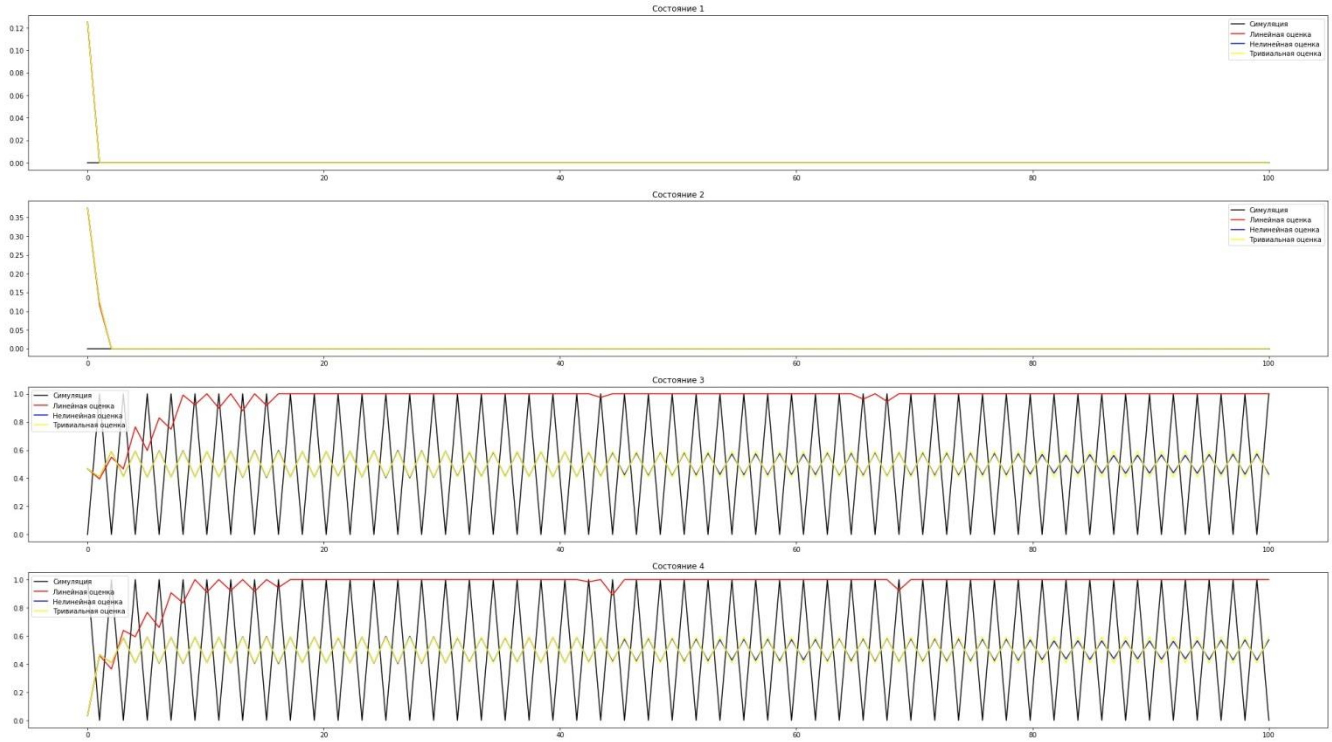


Рис. 3. Реализация МЦ и ее оценки при $\sigma = (100, 100, 100, 100)^T$

Для каждой из оценок были получены соответствующие ковариационные матрицы ошибок этих оценок:

0.219601	-0.100368	-0.067497	-0.051736
-0.100368	0.226482	-0.043815	-0.082299
-0.067497	-0.043815	0.167868	-0.056556
-0.051736	-0.082299	-0.056556	0.190591

Табл. 7. Безусловная ковариационная матрица ошибки тривиальной оценки при $\sigma = (100, 100, 100, 100)^T$

-0.656349	-0.660509	-0.474939	-0.477949
-0.660509	-0.340654	-0.477949	-0.246500
-0.474939	-0.477949	-0.343669	-0.345847
-0.477949	-0.246500	-0.345847	-0.178369

Табл. 8. Безусловная ковариационная матрица ошибки линейной оценки при $\sigma = (100, 100, 100, 100)^T$

Задание 4-7

Путем осреднения по пучку траекторий (50000 реализаций) была построена безусловная ковариационная матрица ошибки для каждой из оценок. Так, для $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$ были получены следующие результаты:

0.215378	-0.093479	-0.068108	-0.053792
-0.093479	0.216139	-0.053230	-0.069431
-0.068108	-0.053230	0.173313	-0.051975
-0.053792	-0.069431	-0.051975	0.175198

Табл. 9. Ковариационная матрица ошибки тривиальной оценки после осреднения при $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$

0.064373	-0.049721	0.046581	-0.035978
-0.049721	0.062239	-0.035978	0.045036
0.046581	-0.035978	0.033706	-0.026034
-0.035978	0.045036	-0.026034	0.032589

Табл. 9. Ковариационная матрица ошибки линейной оценки после осреднения при $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$

0.048280	-0.013381	-0.025488	-0.009411
-0.013381	0.186036	-0.009669	-0.162985
-0.025488	-0.009669	0.042742	-0.007585
-0.009411	-0.162985	-0.007585	0.179981

Табл. 11. Ковариационная матрица ошибки нелинейной оценки после осреднения при $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$

Таким образом, видим, что при $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$ наилучшие результаты показывает нелинейная оценка, хуже всех себя показывает тривиальная оценка.

Посмотрим, что будет при увеличении шума. Так, для $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$ были получены следующие результаты:

0.215258	-0.093324	-0.068094	-0.053840
-0.093324	0.216016	-0.053273	-0.069419
-0.068094	-0.053273	0.173406	-0.052039
-0.053840	-0.069419	-0.052039	0.175297

Табл. 10. Ковариационная матрица ошибки тривиальной оценки после осреднения при $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$

-1.374270	-1.206954	-0.994431	-0.873360
-1.206954	-0.757586	-0.873360	-0.548195
-0.994431	-0.873360	-0.719577	-0.631969
-0.873360	-0.548195	-0.631969	-0.396677

Табл. 113. Ковариационная матрица ошибки линейной оценки после осреднения при $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$

0.056146	-0.020208	-0.021699	-0.014239
-0.020208	0.202897	-0.014482	-0.168207
-0.021699	-0.014482	0.047189	-0.011008
-0.014239	-0.168207	-0.011008	0.193454

Табл. 124. Ковариационная матрица ошибки нелинейной оценки после осреднения при $\sigma = (50, 60, 70, 80)^T$

Видим, что в данном случае хуже всего уже линейная оценка.

Для $\sigma = (100, 100, 100, 100)^T$ были получены следующие результаты:

0.215308	-0.093367	-0.068136	-0.053804
-0.093367	0.216051	-0.053253	-0.069430
-0.068136	-0.053253	0.173439	-0.052050
-0.053804	-0.069430	-0.052050	0.175284

Табл. 15. Ковариационная матрица ошибки тривиальной оценки после осреднения при $\sigma = (100, 100, 100, 100)^T$

-0.656349	-0.660509	-0.474939	-0.477949
-0.660509	-0.340654	-0.477949	-0.246500
-0.474939	-0.477949	-0.343669	-0.345847
-0.477949	-0.246500	-0.345847	-0.178369

Табл. 136. Ковариационная матрица ошибки линейной оценки после осреднения при $\sigma = (100, 100, 100, 100)^T$

0.083473	-0.044854	-0.006166	-0.032453
-0.044854	0.249752	-0.032453	-0.172444
-0.006166	-0.032453	0.062106	-0.023487
-0.032453	-0.172444	-0.023487	0.228385

Табл. 17. Ковариационная матрица ошибки нелинейной оценки после осреднения при $\sigma = (100, 100, 100, 100)^T$

Видим, что в этом случае также хуже всего себя проявляет линейная оценка, хотя, судя по графикам, все они становятся близки к тривиальной оценке из-за большого количества шума.

Рассмотрим также пара показательных примеров. Так при $\sigma = (1, 10, 100, 1000)^T$, видим, что нелинейная оценка крайне близка к реализации МЦ:

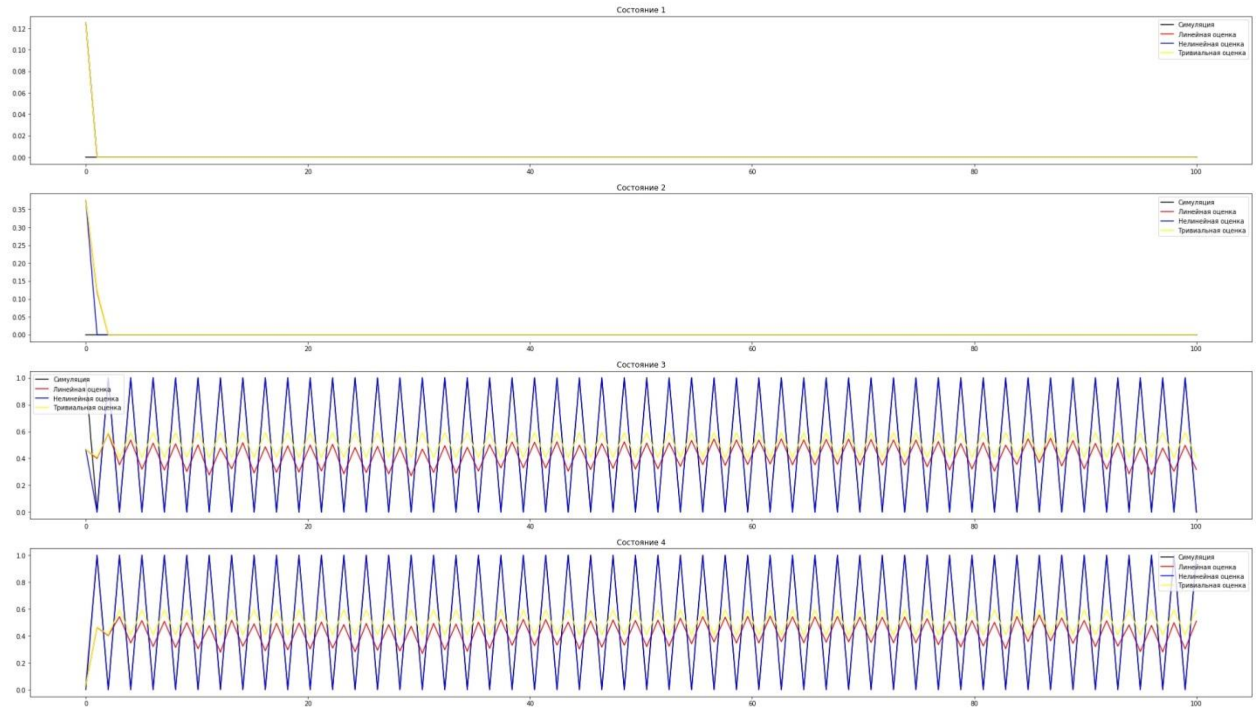


Рис. 4. Реализация МЦ и ее оценки при $\sigma = (1, 10, 100, 1000)^T$

Выводы

Таким образом, в данной курсовой работе были изучены основные свойства марковских цепей. Установлено, что заданная цепь не является эргодической (в силу того, что ее состояния периодичны с периодом = 2). С помощью метода производящих функций найдена эволюция распределения $\pi(t)$. Найдено стационарное распределение. Выяснено, что оно не достигается при заданном векторе начальных вероятностей. Чтобы оно достигалось необходимо, чтобы выполнялись условия равенства $\pi_1^0 = \pi_2^0, \pi_3^0 = \pi_4^0$ (в силу периодичности состояний).

По наблюдениям (2) были построены оценки (тривиальная, линейная и нелинейная). Наиболее точные результаты дала нелинейная оценка. Линейная оценка дала менее точные результаты, но ее преимуществом является относительная простота реализации и тот факт, что нахождение ковариационной матрицы (показатель ее качества) заложено в ее алгоритм (не нужно вычислять отдельно). Наиболее хорошим случаем из заданных оказался случай, при котором $\sigma = (5, 6, 7, 8)^T$ (шум невелик и каждая компонента отличается друг от друга). При увеличении шума, оценки показывают менее точные результаты, так как он заглушает полезный сигнал. Дополнительно были исследованы ситуации при которых шум был мал ($\sigma = (0.01, 0.01, 0.01, 0.01)^T$), либо его компоненты сильно отличались друг от друга ($\sigma = (1, 10, 100, 1000)^T$).