

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Часть 1. Элементы теории вероятностей	6
§ 1. Элементы комбинаторики	6
Задачи	9
§ 2. Определение вероятности	14
Задачи	17
§ 3. Условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса	30
Задачи	35
§ 4. Последовательность независимых испытаний	41
Задачи	43
§ 5. Случайные величины и функции распределения	50
Задачи	54
§ 6. Числовые характеристики случайной величины	64
Задачи	76
§ 7. Системы случайных величин	90
Задачи	93
§ 8. Закон больших чисел и центральная предельная теорема	109
Задачи	113
Часть 2. Элементы теории случайных процессов	123
§ 9. Исходные фундаментальные определения, понятия и результаты	123
Задачи	128
§ 10. Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайного процесса	134
Задачи	136
§ 11. Пуассоновский процесс	142
Задачи	143
§ 12. Виды сходимости в вероятностном пространстве и характеристики гладкости случайного процесса	155
Задачи	161
§ 13. Стационарные и нормальные процессы — два важнейших класса случайных процессов	168
Задачи	174
§ 14. Винеровский процесс	189
Задачи	200
§ 15. Интегрирование случайных процессов	207
Задачи	214

ВВЕДЕНИЕ

Пособие состоит из двух частей. В первой части излагаются элементы теории вероятностей: начальные понятия комбинаторики; определение вероятности; условные вероятности; теоремы сложения и умножения вероятностей; формулы полной вероятности и Байеса; схема независимых испытаний Бернулли и связанные с ней результаты; понятия случайной величины и функции распределения, их свойства; числовые характеристики случайной величины; дискретные и непрерывные распределения; понятия системы случайных величин и функции совместного распределения; закон больших чисел в формулировке Чебышёва и центральная предельная теорема в форме Ляпунова. Изложение разбито на восемь параграфов, каждый из которых заканчивается решением задач различной сложности, соответствующих изучаемой теме.

Во второй части пособия, которая может быть прочитана независимо от первой и требует несколько более серьезной — по сравнению с первой — математической подготовки читателя, рассматриваются вопросы, дающие начальное представление о теории случайных процессов, а именно: формулируются исходные фундаментальные определения и понятия теории; изучаются свойства двух важнейших классов случайных процессов — стационарных и нормальных; подробно рассматриваются пуассоновский и виннеровский процессы; определяются виды сходимости в вероятностном пространстве и соответствующие им характеристики гладкости случайных процессов; излагаются вопросы, связанные с интегрированием случайных процессов, в частности, определяется стохастический интеграл Ито. Изложение второй части разбито на семь параграфов, каждый из которых заканчивается решением задач. Задачи — как в первой, так и во второй части пособия — являются неотъемлемой частью основного текста, во многих случаях содержат важные дополнения к нему и способствуют его более глубокому пониманию и усвоению.

При написании учебного пособия и отборе предлагаемых примеров и задач автор опирался на две классические работы:

- *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984;

- Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. Изд. 8-е, испр. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2005.

Кроме того, использовались монография автора

- Семаков С.Л. Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. — М.: Наука, 2005⁽¹⁾,

и сборники формулировок задач, составителями которых являются коллеги автора по кафедре математических основ управления Московского физико-технического института:

- Основы теории вероятностей и стохастических процессов: Учебно-методическое пособие / Сост. А.А. Натаан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Е.В. Бурнаев, А.В. Гасников. — М.: МФТИ, 2006;
- Случайные процессы: Учебно-методическое пособие / Сост. А.А. Натаан, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Е.В. Бурнаев, А.В. Гасников. — М.: МФТИ, 2006.

Многие из представленных в пособии задач разбирались автором на семинарах со студентами Московского физико-технического института.

⁽¹⁾ В этой монографии (ее ядром являются оригинальные результаты автора, опубликованные в журналах «Теория вероятностей и ее применения», «Известия РАН. Теория и системы управления», «Автоматика и телемеханика», «Ученые записки ЦАГИ» и др.) излагается взгляд на теорию случайных процессов как инструмент математического моделирования. Известный специалист по математическому моделированию сложных систем, академик РАН А.А. Петров охарактеризовал монографию, в частности, так: «... изложенный материал дает образцовое представление о том, как надо применять методологию математического моделирования к решению сложных прикладных задач».

Часть 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Элементы комбинаторики

Рассмотрим строку из k элементов (x_1, x_2, \dots, x_k) . Будем считать, что элемент x_1 может быть выбран из некоторой совокупности различных элементов, общее число которых равно n_1 , т. е. элемент x_1 может быть выбран n_1 способами. Аналогично будем считать, что элемент x_2 (который также выбирается из определенной совокупности элементов) при ранее выбранном элементе x_1 может быть выбран n_2 способами, и т. д. Наконец, элемент x_k при ранее выбранных элементах x_1, x_2, \dots, x_{k-1} может быть выбран n_k способами. Поставим вопрос: сколько N различных строк (x_1, x_2, \dots, x_k) можно при этом составить? Строки (x_1, x_2, \dots, x_k) и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k)$ по определению различны, если хотя бы для одного i , где $i = 1, 2, \dots, k$, $x_i \neq \tilde{x}_i$. Покажем, что

$$N = n_1 n_2 \dots n_k.$$

Действительно, если $k = 2$, то утверждение очевидно: оно легко проверяется перебором. Пусть $k = 3$. Рассмотрим пару (x_1, x_2) как элемент нового типа. Существует $n_1 n_2$ таких пар и n_3 элементов x_3 . Каждая тройка (x_1, x_2, x_3) может рассматриваться как пара, состоящая из (x_1, x_2) и x_3 . Значит, число троек равно $n_1 n_2 n_3$. Доказательство утверждения для любого k получается по методу математической индукции.

Доказанное утверждение иногда называют *комбинаторным правилом произведения*.

Пример 1. Сколько способов разместить r шаров в n ящиках? Все шары и все ящики различны, в любом ящике может оказаться любое число шаров, в том числе нулевое.

Перенумеруем все шары и отдельно все ящики. Каждому размещению шаров по ящикам поставим в соответствие строку из r позиций, где в 1-й позиции стоит номер ящика, в котором оказал-

ся 1-й шар, во 2-й позиции — номер ящика, в котором оказался 2-й шар, ..., в r -й позиции — номер ящика, в котором оказался r -й шар. Тогда число размещений будет равно числу различных строк, которое, в свою очередь, по правилу произведения равно

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ сомножителей}} = n^r.$$

Определение 1. Число способов расположить n различных элементов в ряд называется *числом перестановок* из n элементов и обозначается P_n .

Покажем, что $P_n = n!$, где $n!$ есть, по определению, произведение всех натуральных чисел от 1 до n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$; при этом, по определению, $0! = 1$. Действительно, каждому расположению элементов в ряд соответствует строка из n позиций, где на первой позиции расположен элемент, занимающий первое положение в ряду, на второй позиции — элемент, занимающий второе положение в ряду, и т. д. Ясно, что соответствие взаимно однозначное, так что число способов расположить n элементов в ряд будет равно числу различных строк. На первую позицию в строке можно поставить любой из имеющихся n элементов; при заполненной первой позиции на вторую позицию можно поставить любой из оставшихся $(n - 1)$ элементов и т. д. В результате по правилу произведения получим, что число различных строк равно

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

что и требовалось доказать.

Определение 2. Числом *сочетаний* из n элементов по k элементам называется число способов выбрать k элементов из n элементов без учета порядка следования элементов в выборке. Это число, как правило, обозначается C_n^k .

В качестве примера найдем C_3^2 . Пусть для наглядности элементами, число которых $n = 3$, являются геометрические фигуры: квадрат, треугольник и круг. Тогда из этих трех фигур две фигуры ($k = 2$) можно выбрать следующим образом: квадрат и треугольник, квадрат и круг, треугольник и круг, т. е. числом способов, равным 3. Таким образом, $C_3^2 = 3$.

Покажем, что при произвольных n и k , $k \leq n$, число C_n^k может быть вычислено по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Выберем k элементов из n элементов и будем располагать их в строку в различном порядке. Получим $k!$ различных строк. Тогда общее количество различных строк из k позиций, которое можно составить из n элементов, равно $k!C_n^k$. С другой стороны, это количество строк можно найти по правилу произведения: на первую позицию можно поставить любой из n элементов, на вторую — любой из оставшихся $(n - 1)$ элементов, ..., на k -ю позицию — любой из оставшихся $(n - (k - 1))$ элементов. Следовательно,

$$k!C_n^k = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (k - 1)),$$

откуда

$$C_n^k = \frac{n(n - 1)(n - 2) \dots (n - (k - 1))}{k!},$$

или, домножая числитель и знаменатель дроби на $(n - k)!$, получаем

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Каждая кость домино помечается двумя числами. Сколько различных костей можно образовать, если использовать натуральные числа $1, 2, \dots, n$?

Поскольку числа на костях домино не упорядочены, то количество различных костей без учета дублей (дубль — кость домино, помеченная одинаковыми числами) — это количество способов выбрать два числа из n чисел без учета порядка выбираемых чисел, т. е. C_n^2 . А так как число дублей равно n , то с их учетом число различных костей домино равно $C_n^2 + n$. В частности, при $n = 6$ получим $C_6^2 + 6 = \frac{6!}{2!3!} + 6 = 21$.

Определение 3. Числом размещений из n элементов по k элементам называется число способов выбрать k элементов из n элементов с учетом порядка следования элементов в выборке. Это число обычно обозначается A_n^k .

В качестве примера найдем A_3^2 . Пусть, как и выше, элементами, число которых $n = 3$, являются геометрические фигуры: квадрат, треугольник и круг. Тогда из этих трех фигур две фигуры ($k = 2$) с учетом порядка можно выбрать следующим образом: квадрат и треугольник, треугольник и квадрат, квадрат и круг, круг и квадрат, треугольник и круг, круг и треугольник, т. е. числом способов, равным 6. Таким образом, $A_3^2 = 6$.

При произвольных n и k , $k \leq n$, число A_n^k может быть вычислено по формуле

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

которая следует из правила произведения. Отметим также, что $A_n^k = C_n^k P_k$.

Пример 3. Имеются 5 различных автомобилей. Сколько способов можно предложить, чтобы посадить двух человек в эти автомобили, если в каждый автомобиль можно посадить только одного человека?

Пусть I и II — упомянутые два человека. Человека I будем сажать в первый выбранный автомобиль, а человека II — во второй. Тогда различное число рассадок есть $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 20$ — число способов выбрать два автомобиля из пяти с учетом порядка выбираемых автомобилей.

Задачи

1. В азбуке Морзе буквы представляются последовательностями тире и точек с возможными повторениями. Сколько букв можно составить из пяти или менее символов?

Решение. Из одного символа можно составить 2 буквы, из k символов по правилу произведения можно составить 2^k букв. Следовательно, число букв, которые можно составить из пяти или менее символов, равно

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62.$$

2. Сколькими способами можно расположить в ряд m белых и k черных шаров?

Решение. а) Будем сначала предполагать, что все шары одного цвета неразличимы. Расположение полностью определится, если указать позиции, в которых будут находиться белые (черные) шары. Эти позиции можно выбрать C_{m+k}^m (C_{m+k}^k) способами. Следовательно, искомое число способов есть $C_{m+k}^m = C_{m+k}^k$.

б) Будем теперь считать, что шары одного цвета различимы; для этого их, например, можно перенумеровать. Число способов выбрать позиции расположения белых шаров равно C_{m+k}^m . В эти позиции белые шары можно расставить $m!$ способами, а в остав-

шиеся позиции черные шары можно расставить $k!$ способами. Значит, искомое возможное число расположений есть

$$C_{m+k}^m m! k! = (m+k)!.$$

Заметим, что в случае б), когда все шары различны, задача сводится к нахождению числа перестановок из $(m+k)$ различных элементов, так что полученный результат $(m+k)!$ становится очевидным.

3. Сколько существует различимых способов размещения r неразличимых предметов (например, одинаковых по цвету и размеру шаров) по n различимым ящикам?

Решение. Каждому размещению шаров поставим в соответствие цепочку цифр, состоящую из 0 и 1, следующим образом. Сначала пишем 0, затем число единиц, равное числу предметов в первом ящике, затем 0, затем число единиц, равное числу предметов во втором ящике, затем 0, и т. д. При этом общее число единиц будет равно r , а общее число нулей, которые играют роль разделителей, будет равно $n+1$. Например, последовательность

$$011001011100$$

соответствует размещению 6 предметов по 5 ящикам следующим образом: в первом ящике — два предмета, во втором — ни одного, в третьем — один, в четвертом — три, в пятом — ни одного. Первая и последние цифры — всегда нули, а промежуточные — либо нули, либо единицы. Размещение предметов однозначно определяется, если будет указано, какие из промежуточных позиций занимают единицы. Поскольку число промежуточных позиций равно $r+n-1$, а число единиц равно r , то число возможных вариантов будет равно C_{r+n-1}^r .

4. Сколько существует размещений в условиях задачи 3, при которых ни один ящик не остается пустым? Предполагается, что $r > n$.

Решение. Первый способ. Условие, что ни один из ящиков не оказался пустым, означает, что нет двух стоящих рядом нулей. Между r единицами имеются $(r-1)$ промежутков, в $(n-1)$ из которых помещено по одному нулю. Следовательно, имеется C_{r-1}^{n-1} вариантов выбора.

Второй способ. Положим сначала в каждый ящик ровно по одному предмету. А затем посчитаем, сколько способов распределить оставшиеся $(r-n)$ предметов по n ящикам. Это число

способов, как следует из решения задачи 3, равно $C_{(r-n)+n-1}^{r-n}$, что совпадает с C_{r-1}^{n-1} .

5. Найти число различных способов размещения r_1 неразличимых предметов одного вида и r_2 неразличимых предметов другого вида по n различимым ящикам.

Решение. Зафиксируем какой-либо способ размещения r_1 предметов одного вида и будем перебирать различные способы размещения r_2 предметов второго вида. Этих способов, как следует из решения задачи 3, будет $C_{r_2+n-1}^{r_2}$. Но способов размещения предметов первого вида будет $C_{r_1+n-1}^{r_1}$. Следовательно, искомое число способов равно

$$C_{r_2+n-1}^{r_2} \cdot C_{r_1+n-1}^{r_1}.$$

6. Сколько существует различных результатов бросания r неразличимых игральных костей?

Решение. Результат бросания r костей можно разбить на шесть подгрупп: в 1-ю подгруппу попадут r_1 костей, на которых выпали «1», во 2-ю — r_2 костей, на которых выпали «2», …, в 6-ю подгруппу — r_6 костей, на которых выпали «6». При этом $r_1 + r_2 + \dots + r_6 = r$. Поэтому результатов бросания r костей может быть столько, сколько способов распределить r неразличимых предметов по 6 различимым ящикам, т. е. (см. решение задачи 3) $C_{r+6-1}^r = C_{r+5}^r$.

7. Сколько существует различных результатов бросания r монет?

Решение. Результат бросания r монет можно разбить на две подгруппы: в первую попадут все монеты, на которых выпал герб, а во вторую — все монеты, на которых выпала решка. Поэтому результатов бросания r монет может быть столько, сколько способов распределить r неразличимых предметов по двум различимым ящикам, т. е. (см. решение задачи 3) $C_{r+2-1}^r = C_{r+1}^r = r + 1$.

8. Сколько чисел, заключенных между 1000 и 9999, содержат цифру 3?

Решение. *Первый способ.* Числа от 1000 до 9999 включительно — это все четырехзначные числа. Всего таких чисел 9000 штук. Действительно, каждому четырехзначному числу можно сопоставить строку из четырех позиций, где первую позицию занимает первая цифра числа, вторую — вторая и т. д. По правилу

произведения число различных строк (которое равно числу различных четырехзначных чисел) равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$, ибо в первую позицию можно вписать любую цифру от 1 до 9, а во вторую, третью и четвертую позиции — любую цифру от 0 до 9, так что первую позицию можно заполнить 9 способами, а вторую, третью и четвертую — 10 способами.

Рассуждая аналогично и используя правило произведения, находим число всех четырехзначных чисел, не содержащих цифру 3: оно равно $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$. Следовательно, число всех четырехзначных чисел, содержащих цифру 3, равно $N = 9000 - 5832 = 3168$.

Второй способ. Пусть N_1 — число всех четырехзначных чисел, содержащих в своей десятичной записи ровно одну цифру 3, N_2 — ровно две цифры 3, N_3 — ровно три цифры 3, N_4 — ровно четыре цифры 3. Тогда $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$, причем, очевидно, $N_4 = 1$.

Найдем N_1 . Сюда относятся все четырехзначные числа вида 3—–, где пустые позиции (прочерки) могут быть заняты любыми цифрами кроме цифры 3. Таких чисел, по правилу произведения, $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$. Кроме того, к N_1 относятся все четырехзначные числа видов –3—, —3–, ——3, где пустые позиции по-прежнему могут быть заняты любыми цифрами, за исключением цифры 3, причем если позиция первая, то она не может быть занята цифрой 0. По правилу произведения четырехзначных чисел вида –3— будет $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ штук, столько же будет чисел вида —3– и чисел вида ——3. Таким образом, $N_1 = 729 + 3 \cdot 648 = 2673$.

Аналогично найдем число N_2 . Сюда относятся все четырехзначные числа видов 33—, 3—3—, 3—3—, —33—, —3—3, ——33, где пустые позиции могут быть заняты любыми цифрами за исключением цифры 3, причем если позиция первая, то она не может быть занята цифрой 0. По правилу произведения чисел видов 33—, 3—3— и 3—3—3 будет по $9 \cdot 9 = 81$ штуке, а чисел видов —33—, —3—3 и ——33 будет по $8 \cdot 9 = 72$ штуке. Следовательно, $N_2 = 3 \cdot 81 + 3 \cdot 72 = 459$.

Осталось найти N_3 . Сюда относятся числа видов 333—, 33—3, 3—33 и —333. Чисел первых трех видов будет по 9 штук, а чисел вида —333 будет 8 штук. Значит, $N_3 = 3 \cdot 9 + 8 = 35$.

Таким образом,

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 2673 + 459 + 35 + 1 = 3168.$$

9. Сколькими способами можно рассадить n человек за круглым столом?

Решение. Перенумеруем все места. Пусть наблюдатель А знает нумерацию мест, а наблюдатель В — нет. Предполагается, что все места одинаковы, так что в задаче спрашивается, сколько различных рассадок может быть с точки зрения наблюдателя В. Обозначим это число через K . Если всех сидящих сдвинуть на одно место по кругу, то с точки зрения наблюдателя В способ рассадки людей не изменится. Поэтому n рассадкам с позиции наблюдателя А будет соответствовать одна и та же рассадка с позиции наблюдателя В. Но с позиции наблюдателя А число рассадок равно $n!$, так что $K \cdot n = n!$, откуда $K = (n - 1)!$.

10. Сколько различных делителей у числа $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, где p_1, p_2, \dots, p_k — различные простые числа?

Решение. Любой делитель имеет вид

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k},$$

где m_1, m_2, \dots, m_k — неотрицательные целые числа, такие, что $m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2, \dots, m_k \leq n_k$. Каждому делителю поставим в соответствие строчку (m_1, m_2, \dots, m_k) . Тогда число различных делителей будет равно числу различных строк указанного вида. В качестве m_1 может быть взято любое из чисел $0, 1, 2, \dots, n_1$, т. е. элемент m_1 может быть выбран $(n_1 + 1)$ способами. При выбранном элементе m_1 элемент m_2 может быть выбран $(n_2 + 1)$ способами, ..., при выбранных элементах m_1, m_2, \dots, m_{k-1} элемент m_k может быть выбран $(n_k + 1)$ способами. Следовательно, по правилу произведения число различных строк, а значит, и число различных делителей будет равно $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1)$.

§ 2. Определение вероятности

Рассмотрим практическую ситуацию, связанную со случайным экспериментом, т. е. с некоторым испытанием E , исход которого определяется случайным механизмом, воздействие которого заранее предсказать невозможно. Будем интересоваться каким-либо событием A , связанным с E в том смысле, что в результате E событие A может произойти, а может не произойти. Во многих жизненных ситуациях возникает необходимость попытаться предсказать степень возможности реализации события A в результате E . Эту степень возможности будем характеризовать числом $P\{A\}$ — вероятностью события A , которую определим следующим образом.

1. Рассмотрим сначала случай, когда при каждом испытании E возможны n несовместных и равновозможных исходов A_1, A_2, \dots, A_n и только они. Несовместность исходов означает, что никакие два исхода одновременно, т. е. в одном испытании, произойти не могут. В этой ситуации любое событие A , связанное с E , означает, что в результате E имел место один из исходов $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$. При этом каждое конкретное событие A будет определяться своим числом $m \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ и своим набором чисел $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Положим по определению

$$P\{A\} = \frac{m}{n}.$$

Особо отметим два частных случая события A . Первый — событие A происходит всегда при проведении E . В этом случае событие A будем называть *достоверным*. Ему соответствуют значение $m = n$ и вероятность $P\{A\} = 1$. Второй случай — событие A никогда не происходит при проведении E . В этом случае событие A будем называть *невозможным*. Ему соответствуют значение $m = 0$ и вероятность $P\{A\} = 0$. Достоверное событие принято обозначать символом Ω , невозможное — символом \emptyset . Кроме того, введем понятие противоположного события. Событие \bar{A} будем называть *противоположным* событию A , если оно состоит в том, что A не произошло.

Введенное выше определение вероятности называется *классическим*.

Пример 1. Пусть эксперимент E состоит в бросании на плоскость геометрически правильного кубика, изготовленного из однородного материала. Если пронумеровать грани цифрами от 1 до 6, то при бросании кубика могут произойти шесть равновозможных событий (и только они): A_1 — выпадение грани 1, A_2 — выпадение грани 2, ..., A_6 — выпадение грани 6. Пусть событие A означает, что выпала грань с четным номером, т. е. произошло какое-либо из событий A_2, A_4, A_6 . Следовательно, $m = 3$ ($i_1 = 2, i_2 = 4, i_3 = 6$) и $P\{A\} = m/n = 3/6 = 1/2$.

2. Распространим введенное выше определение на случай, когда с экспериментом E связано бесконечное число равновозможных исходов. Предположим, что каждому результату эксперимента E можно взаимно-однозначно сопоставить точку в некоторой области G (на прямой, на плоскости, в пространстве). При этом изучаемому событию A , связанному с E , будет соответствовать попадание точки в некоторое подмножество $g \subset G$. Если все точки области G равновозможны в смысле попадания в них в результате эксперимента, то вероятность попасть в какую-либо часть области G пропорциональна мере (длине, площади, объему) этой части и не зависит от ее расположения и формы. В этом случае, по определению,

$$P\{A\} = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}.$$

Такой подход к определению вероятности называется *геометрическим*.

Пример 2. Предположим, что два человека А и В договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 20 мин., после чего уходит. Чему равна вероятность встречи, если приход каждого в течение указанного часа может произойти с равной возможностью в любой момент, причем момент прихода одного лица не влияет на момент прихода другого?

Пусть x — момент прихода лица А, а y — момент прихода лица В; x и y будем отсчитывать в минутах от 12 ч. Тогда необходимое и достаточное условия встречи дает неравенство

$$|x - y| \leq 20,$$

а проведение эксперимента (приход двух людей к месту встречи) можно интерпретировать как вбрасывание точки в квадрат со стороной 60 (рис. 1): абсцисса x точки даст момент прихода человека А, ордината y — момент прихода человека В. Точки,

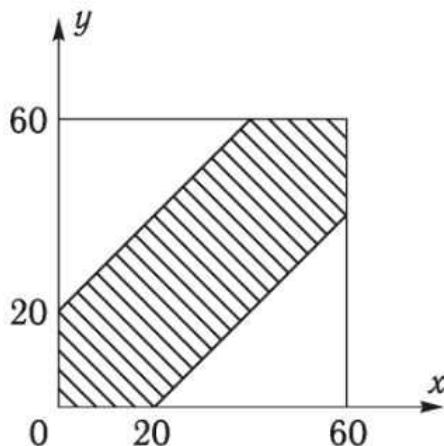


Рис. 1

благоприятствующие встрече, расположатся в заштрихованной области на рисунке. Искомая вероятность будет равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата, т. е.

$$\frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

3. Описанные выше подходы к определению вероятности применимы только в том случае, когда с экспериментом E можно связать множество *равновозможных* исходов, которые исчерпывают все результаты эксперимента. Этого недостатка лишен *аксиоматический* подход, предложенный А.Н. Колмогоровым.

Исходным пунктом аксиоматики Колмогорова является множество Ω , элементы которого называются *элементарными событиями*. Затем вводится в рассмотрение множество \mathcal{F} подмножеств элементарных событий. Элементы множества \mathcal{F} называются *событиями*, при этом под операциями над событиями понимаются операции над соответствующими множествами. В табл. 1 представлено соответствие между языком теории множеств и языком теории вероятностей.

Множество \mathcal{F} называется *алгеброй множеств* (на Ω), если выполняются следующие условия:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}, \emptyset \in \mathcal{F}$;
- 2) если $A \in \mathcal{F}$, то и $\bar{A} \in \mathcal{F}$;
- 3) если $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$, то $A \cup B \in \mathcal{F}$ и $A \cap B \in \mathcal{F}$;

если дополнительно к перечисленным выполняется еще условие:

- 4) из того, что $A_n \in \mathcal{F}$ для любого $n = 1, 2, \dots$, следует, что

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_n A_n \in \mathcal{F},$$

то множество \mathcal{F} называется *σ -алгеброй*.

Таблица 1

Обозначения	Термины	
	теории множеств	теории вероятностей
Ω	множество, пространство	пространство элементарных событий, достоверное событие
w	элемент множества	элементарное событие
A, B	подмножество A, B	случайное событие A, B
$A \cup B = A + B$	объединение множеств A и B	сумма событий A и B
$A \cap B = AB$	пересечение множеств A и B	произведение событий A и B
\bar{A}	дополнение множества A до Ω	событие, противоположное событию A
\emptyset	пустое множество	невозможное событие
$A \cap B = AB = \emptyset$	множества A и B не пересекаются	события A и B несовместны
$A = B$	множества A и B равны	события A и B равносильны

Аксиома 1. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $P\{A\}$, называемое его вероятностью.

Аксиома 2. $P\{\Omega\} = 1$.

Аксиома 3. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ попарно несовместны, то

$$P\{A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots + P\{A_n\} + \dots$$

Тройка объектов (Ω, \mathcal{F}, P) , где Ω — множество элементарных событий, \mathcal{F} — σ -алгебра подмножеств Ω (называемых событиями), $P\{A\}$ — вероятность, определенная на σ -алгебре \mathcal{F} , называется *вероятностным пространством*.

Задачи

- В урне находятся N одинаковых по размеру и внешнему виду шаров; среди них M белых и $(N - M)$ черных. Наудачу вынимают n шаров (без возвращения в урну). Чему равна вероятность того, что среди них окажется m белых?

Решение. Общее число равновероятных исходов равно C_N^n , из них число благоприятных $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$, так что искомая вероятность равна

$$\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

2. Какова вероятность при 24 бросаниях по две игральные кости получить хотя бы один раз две единицы?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что хотя бы один раз выпали две единицы при 24 бросаниях двух игральных костей. Тогда событие \bar{A} означает, что ни разу не выпали две единицы. Воспользуемся классическим определением вероятности, согласно которому $P\{\bar{A}\} = n/N$, где N — общее число равновозможных исходов, n — число благоприятных (т. е. приводящих к событию \bar{A}) исходов. Поскольку при одном бросании двух игральных костей возможны 36 равновероятных результатов, причем только один из них приводит к выпадению двух единиц, то по правилу произведения $N = 36^{24}$, а $n = (36 - 1)^{24} = 35^{24}$. Искомая вероятность

$$P\{A\} = 1 - P\{\bar{A}\} = 1 - \frac{n}{N} = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0,4914 \dots$$

3. Партия продукции состоит из 10 изделий, среди которых 2 изделия дефектные. Какое наименьшее число k изделий необходимо проверить, для того чтобы среди них с вероятностью не меньше 0,9 содержалось хотя бы одно дефектное?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что среди k выбранных было хотя бы одно дефектное изделие. Тогда событие \bar{A} означает, что все k выбранных изделий — нормальные (т. е. не имеющие дефектов). По классическому определению вероятности $P\{\bar{A}\} = n/N$, где $N = C_{10}^k$ — общее число равновозможных исходов, которое в данном случае равно числу способов выбрать k элементов из 10 элементов, а $n = C_8^k$ — число благоприятных (т. е. приводящих к событию $P\{\bar{A}\}$) исходов, которое в данном случае равно числу способов выбрать k изделий из $10 - 2 = 8$ нормальных изделий. Таким образом,

$$P\{A\} = 1 - P\{\bar{A}\} = 1 - \frac{C_8^k}{C_{10}^k}.$$

По условию $P\{A\} \geq 0,9$, т. е.

$$1 - \frac{C_8^k}{C_{10}^k} \geq 0,9,$$

откуда

$$k^2 - 19k + 81 \leq 0.$$

Целые положительные k , удовлетворяющие этому условию и ограничению $k \leq 10$, — это числа 7, 8, 9, 10. Значит, искомое $k = 7$.

4. Найти вероятность того, что из 50 студентов, присутствующих на лекции, хотя бы двое имеют одну и ту же дату рождения.

Решение. Будем считать, что в году 365 дней. Общее число N равновозможных вариантов распределения дней рождения в году может быть найдено по комбинаторному правилу произведения:

$$N = 365^{50}.$$

Пусть m — число вариантов, когда все родились в разные дни. По правилу произведения

$$m = 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - 49) = A_{365}^{50}.$$

По классическому определению вероятности искомая вероятность равна

$$\frac{N - m}{N} = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365 - 49}{365} = 0,970 \dots$$

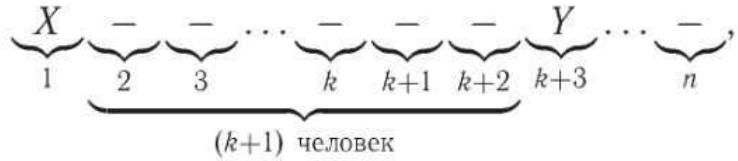
5. Группа из n человек разного роста случайным образом выстраивается в шеренгу. Найти вероятность того, что самый высокий и самый низкий окажутся рядом.

Решение. Общее число расстановок людей в шеренгу равно $n!$. Число благоприятных расстановок можно подсчитать, если пару «низкий—высокий» условно рассматривать за один объект. Тогда число благоприятных расстановок будет равно $(n - 1)! \cdot 2$, где коэффициент 2 учитывает то обстоятельство, что самый низкий и самый высокий, стоящие рядом, могут поменяться местами. Искомая вероятность равна

$$\frac{\{\text{число благоприятных расстановок}\}}{\{\text{общее число расстановок}\}} = \frac{2 \cdot (n - 1)!}{n!} = \frac{2}{n}.$$

6. Группа из n человек разного роста случайным образом выстраивается в шеренгу. Найти вероятность того, что между самым высоким и самым низким расположатся более k человек.

Решение. Общее число расстановок людей в шеренгу равно $n!$. Найдем число расстановок, когда между самым низким и самым высоким ровно $(k+1)$ человек. Обозначим это число через N_{k+1} . Тогда по схеме



где X и Y — самый низкий и самый высокий, нетрудно сообразить, что

$$N_{k+1} = 2 \cdot (n-2)! \cdot \underbrace{(n-(k+3)+1)}_{\text{число сдвигов}} = 2 \cdot (n-2)! \cdot (n-k-2).$$

Здесь $2 \cdot (n-(k+3)+1)$ — число способов зафиксировать двух определенных человек в шеренге из n человек так, чтобы между ними было ровно $(k+1)$ человек; $(n-2)!$ — число способов разместить оставшихся $(n-2)$ человек по $(n-2)$ свободным местам. Коэффициент 2 в формуле для N_{k+1} учитывает то обстоятельство, что X и Y можно поменять местами, не меняя при этом положения остальных людей.

Аналогично,

$$N_{k+2} = 2 \cdot (n-2)! \cdot (n-(k+4)+1) = 2 \cdot (n-2)! \cdot (n-k-3),$$

...

$$N_{n-3} = 2 \cdot (n-2)! \cdot (n-(n-3+2)+1) = 2 \cdot (n-2)! \cdot 2,$$

$$N_{n-2} = 2 \cdot (n-2)! \cdot (n-(n-2+2)+1) = 2 \cdot (n-2)! \cdot 1.$$

Следовательно, число расстановок m , когда между самым высоким и самым низким будет более k человек, равно

$$\begin{aligned} m &= N_{k+1} + N_{k+2} + \dots + N_{n-2} = \sum_{i=1}^{n-k-2} 2 \cdot (n-2)! \cdot i = \\ &= 2 \cdot (n-2)! \sum_{i=1}^{n-k-2} i = 2 \cdot (n-2)! \cdot \frac{1+n-k-2}{2} \cdot (n-k-2) = \\ &= (n-2)! (n-k-1)(n-k-2). \end{aligned}$$

В результате для искомой вероятности имеем по классическому определению

$$\frac{(n-2)! (n-k-1)(n-k-2)}{n!} = \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{n(n-1)}.$$

7. Из колоды, содержащей 52 карты, наугад берутся 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представлены все четыре масти?

Решение. Общее число равновозможных выборов равно C_{52}^6 . Найдем число благоприятных выборов. С этой целью перенумеруем масти: I, II, III, IV. Все благоприятные выборы можно разбить на 10 типов:

- тип 1 — I, II, III, IV, I, I;
- тип 2 — I, II, III, IV, I, II;
- тип 3 — I, II, III, IV, I, III;
- тип 4 — I, II, III, IV, I, IV;
- тип 5 — I, II, III, IV, II, II;
- тип 6 — I, II, III, IV, II, III;
- тип 7 — I, II, III, IV, II, IV;
- тип 8 — I, II, III, IV, III, III;
- тип 9 — I, II, III, IV, III, IV;
- тип 10 — I, II, III, IV, IV, IV.

Пусть N_i — количество различных выборов i -го типа, $i = 1, 2, \dots, 10$. Тогда

$$N_1 = N_5 = N_8 = N_{10} = C_{13}^3 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1,$$

$$N_2 = N_3 = N_4 = N_6 = N_7 = N_9 = C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1,$$

так что искомая вероятность равна

$$\frac{N_1 + N_2 + \dots + N_{10}}{C_{52}^6} = \frac{4C_{13}^3 C_{13}^1 C_{13}^1 C_{13}^1 + 6C_{13}^2 C_{13}^2 C_{13}^1 C_{13}^1}{C_{52}^6} = \frac{13^3 \cdot 38}{47 \cdot 49 \cdot 5 \cdot 17} = 0,426 \dots$$

8. Каждая из n палок одинаковой длины разламывается на две части — длинную и короткую — так, что все длинные (а значит, и все короткие) обломки одинаковы по своей длине. Полученные обломки, число которых составляет $2n$, случайным образом объединяют в пары, каждая из которых образует новую палку. Найти вероятность того, что: а) все обломки объединяются в первоначальном порядке, образуя исходные палки; б) все длинные обломки объединяются с короткими.

Решение. Найдем сначала общее число равновозможных исходов — число способов из $2n$ обломков составить n палок, когда любой из обломков можно соединить с любым. Число таких способов с учетом порядка появления палок равно

$$C_{2n}^2 \cdot C_{2n-2}^2 \cdot C_{2n-4}^2 \cdot \dots \cdot C_2^2 = \frac{(2n)!}{2^n},$$

а без учета порядка (т. е. если нас интересует только конечный набор образовавшихся палок без учета порядка, в котором они появлялись)

$$\frac{(2n)!/2^n}{n!} = \frac{(2n)!}{n!2^n}.$$

В случае а) благоприятный вариант (без учета порядка), очевидно, только один, так что в этом случае искомая вероятность равна

$$\frac{1}{(2n)!/(n!2^n)} = \frac{n!2^n}{(2n)!}.$$

В случае б) число благоприятных вариантов объединения с учетом порядка появления палок равно

$$(C_n^1 \cdot C_n^1) \cdot (C_{n-1}^1 \cdot C_{n-1}^1) \cdot (C_{n-2}^1 \cdot C_{n-2}^1) \dots (C_1^1 \cdot C_1^1) = (n!)^2.$$

Здесь $(C_n^1 \cdot C_n^1)$ — число способов выбрать «правильную» (длинный обломок + короткий обломок) первую пару, $(C_{n-1}^1 \cdot C_{n-1}^1)$ — число способов при выбранной «правильной» первой паре выбрать «правильную» вторую пару, $(C_{n-2}^1 \cdot C_{n-2}^1)$ — число способов при выбранных «правильных» первой и второй парах выбрать «правильную» третью пару, и т. д. Число благоприятных вариантов объединения без учета порядка равно

$$\frac{(n!)^2}{n!} = n!.$$

Последний результат можно получить и по-другому. Расположим все длинные обломки напротив коротких. Зафиксируем порядок следования длинных обломков, а короткие обломки будем представлять и затем состыковывать их с длинными, расположеными напротив. Тогда, очевидно, число различных вариантов объединения будет равно числу возможных перестановок коротких обломков, т. е. ровно $n!$.

Таким образом, по классическому определению вероятности искомая вероятность в случае б) равна

$$\frac{n!}{(2n)!/(n!2^n)} = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{(n+1)(n+2) \dots 2n}.$$

9. Стержень длиной l разрезан в двух случайно выбранных точках. Найти вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник.

Решение. Пусть x — длина первого отрезка, y — длина второго. Тогда длина третьего отрезка равна $l - (x + y)$. Ясно,

что должны быть выполнены условия: $x > 0$, $y > 0$, $x + y < l$, так что результат разрезания стержня можно интерпретировать как выбор произвольной точки из треугольника, изображенного на рис. 2: выбор точки M означает, что длина первого отрезка (под которым можно условиться понимать, например, левый обломок стержня) равна x , длина второго (под которым можно понимать правый обломок) равна y , а длина третьего (т. е. среднего обломка) равна $l - (x + y)$. Из полученных отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда длина любого из отрезков будет меньше суммы длин двух других, т. е. когда

$$\begin{cases} x < y + (l - x - y) \\ y < x + (l - x - y) \\ l - x - y < x + y \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < l/2 \\ y < l/2 \\ y > l/2 - x \end{cases}$$

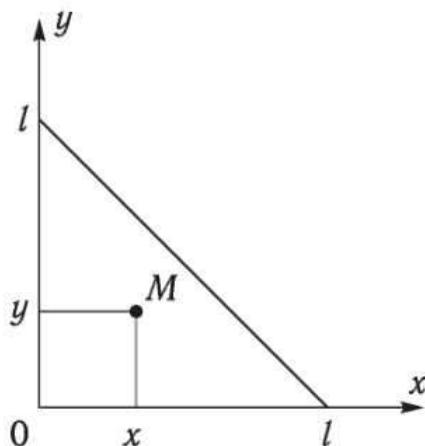


Рис. 2

Последняя система определяет треугольник, заштрихованный на рис. 3.

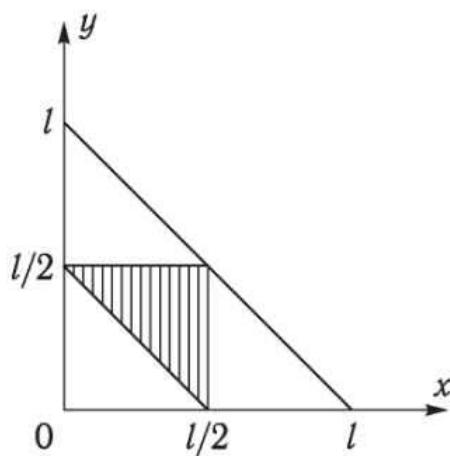


Рис. 3

Следовательно, в соответствии с геометрическим подходом к подсчету вероятности искомая вероятность P может быть вычислена как отношение площади $1/2 \cdot l/2 \cdot l/2$ заштрихованного треугольника к площади $1/2 \cdot l \cdot l$ большого треугольника:

$$P = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}}{\frac{1}{2} \cdot l \cdot l} = \frac{1}{4}.$$

10. В гардеробе все шляпы N посетителей оказались случайным образом перепутанными. Шляпы не имеют внешних отличительных признаков. Какова вероятность того, что хотя бы один посетитель получит свою шляпу?

Решение. Предварительно докажем следующую теорему о вероятности суммы n событий.

Теорема. Вероятность $P\{A_1 + \dots + A_n\}$ осуществления хотя бы одного из событий A_1, \dots, A_n равна

$$\begin{aligned} P\{A_1 + \dots + A_n\} &= \sum_{i_1=1}^n P\{A_{i_1}\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P\{A_{i_1}A_{i_2}\} + \\ &+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P\{A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq n} P\{A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}\} + \dots \\ &\dots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} P\{A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_n}\}. \end{aligned}$$

Условие $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < \dots \leq n$ означает, что в суммах каждая комбинация событий встречается ровно один раз; следовательно, сумма

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} P\{A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_m}\}, \quad m \leq n,$$

содержит C_n^m слагаемых, а последняя сумма

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} P\{A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_n}\}$$

сводится к единственному слагаемому

$$P\{A_1A_2 \dots A_n\},$$

которое является вероятностью одновременного осуществления всех n событий.

Ниже приведены утверждения теоремы для частных случаев $n = 2, 3, 4$. При $n = 2$:

$$P\{A_1 + A_2\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1 A_2\}.$$

При $n = 3$:

$$\begin{aligned} P\{A_1 + A_2 + A_3\} &= P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} - \\ &\quad - (P\{A_1 A_2\} + P\{A_1 A_3\} + P\{A_2 A_3\}) + P\{A_1 A_2 A_3\}. \end{aligned}$$

При $n = 4$:

$$\begin{aligned} P\{A_1 + A_2 + A_3 + A_4\} &= P\{A_1\} + P\{A_2\} + P\{A_3\} + P\{A_4\} - \\ &\quad - (P\{A_1 A_2\} + P\{A_1 A_3\} + P\{A_1 A_4\} + P\{A_2 A_3\} + P\{A_2 A_4\} + \\ &\quad + P\{A_3 A_4\}) + P\{A_1 A_2 A_3\} + P\{A_1 A_2 A_4\} + P\{A_1 A_3 A_4\} + \\ &\quad + P\{A_2 A_3 A_4\} - P\{A_1 A_2 A_3 A_4\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы проведем по методу математической индукции. При $n = 2$ утверждение теоремы очевидно. Пусть оно выполняется при $n = k$. Покажем, что тогда оно будет выполнятся и при $n = k + 1$. Обозначим $A = A_1 + A_2 + \dots + A_k$; $\tilde{A}_i = A_i A_{k+1}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{A_1 + A_2 + \dots + A_k + A_{k+1}\} &= \\ &= P\{A + A_{k+1}\} = P\{A\} + P\{A_{k+1}\} - P\{AA_{k+1}\} = \end{aligned}$$

{далее пользуемся легко проверяемым свойством операций над событиями: для любых событий B, C, D справедливо равенство $(B + C)D = BD + CD\}$

$$\begin{aligned} &= P\{A_1 + A_2 + \dots + A_k\} + P\{A_{k+1}\} - \\ &\quad - P\{A_1 A_{k+1} + A_2 A_{k+1} + \dots + A_k A_{k+1}\} = \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{k+1} P\{A_{i_1}\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2}\} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\} \right) - \\ &\quad - P\{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \dots + \tilde{A}_k\} = \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{k+1} P\{A_{i_1}\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2}\} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sum_{i_1=1}^k P\{\tilde{A}_{i_1}\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P\{\tilde{A}_{i_1} \tilde{A}_{i_2}\} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} P\{\tilde{A}_{i_1} \tilde{A}_{i_2} \tilde{A}_{i_3}\} + \dots \right. \\
& \quad \left. \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} P\{\tilde{A}_{i_1} \tilde{A}_{i_2} \dots \tilde{A}_{i_k}\} \right) = \\
& = \left(\sum_{i_1=1}^{k+1} P\{A_{i_1}\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2}\} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\} + \dots \right. \\
& \quad \left. \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\} \right) - \\
& \quad - \left(\sum_{i_1=1}^k P\{A_{i_1} A_{k+1}\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{k+1}\} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{k+1}\} + \dots \right. \\
& \quad \left. \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k} A_{k+1}\} \right) =
\end{aligned}$$

{перегруппировываем слагаемые}

$$\begin{aligned}
& = \sum_{i_1=1}^{k+1} P\{A_{i_1}\} - \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2}\} + \sum_{i_1=1}^k P\{A_{i_1} A_{k+1}\} \right) + \\
& \quad + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{k+1}\} \right) + \dots \\
& \quad \dots + \left((-1)^{k+1} P\{A_1 A_2 \dots A_k\} - \right. \\
& \quad \left. - (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{k-1}} A_{k+1}\} \right) - \\
& \quad - (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k} A_{k+1}\} = \\
& = \sum_{i_1=1}^{k+1} P\{A_{i_1}\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k+1} P\{A_{i_1} A_{i_2}\} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq k+1} P\{A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}\} + \\
& \quad + \dots + (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq k+1} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}\} + \\
& \quad + (-1)^{k+2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{k+1} \leq k+1} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{k+1}}\}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что утверждение теоремы выполняется при $n = k + 1$. Таким образом, теорема доказана методом математической индукции.

Вернемся теперь к решению задачи. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что i -й посетитель взял свою шляпу, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда по классической формуле подсчета вероятности

$$\begin{aligned} P\{A_i\} &= \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}, \quad P\{A_i A_j\} = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}, \\ P\{A_i A_j A_k\} &= \frac{(N-3)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)(N-2)}, \quad \dots, \\ P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}\} &= \frac{(N-m)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1) \dots (N-(m-1))}, \quad \dots, \\ P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{N-1}}\} &= \frac{1}{N!}, \quad P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_N}\} = \frac{1}{N!}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N P\{A_i\} &= \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{\text{число слагаемых } C_N^1 = N} = 1, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq N} P\{A_i A_j\} &= \underbrace{\frac{1}{N(N-1)} + \dots + \frac{1}{N(N-1)}}_{\text{число слагаемых } C_N^2 = \frac{N!}{(N-2)! 2!}} = \frac{1}{2!}, \\ \sum_{1 \leq i < j < k \leq N} P\{A_i A_j A_k\} &= \underbrace{\frac{(N-3)!}{N!} + \dots + \frac{(N-3)!}{N!}}_{\text{число слагаемых } C_N^3 = \frac{N!}{(N-3)! 3!}} = \frac{1}{3!}, \quad \dots, \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq N} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_m}\} &= \underbrace{\frac{(N-m)!}{N!} + \dots + \frac{(N-m)!}{N!}}_{\text{число слагаемых } C_N^m = \frac{N!}{(N-m)! m!}} = \frac{1}{m!}, \quad \dots, \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N-1} \leq N} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_{N-1}}\} &= \underbrace{\frac{1}{N!} + \frac{1}{N!} + \dots + \frac{1}{N!}}_{\text{число слагаемых } C_N^{N-1} = N} = \frac{1}{(N-1)!}, \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_N \leq N} P\{A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_N}\} &= P\{A_1 A_2 \dots A_N\} = \frac{1}{N!}. \end{aligned}$$

Следовательно, по доказанной теореме искомая вероятность того, что хотя бы один посетитель взял свою шляпу, равна

$$P\{A_1 + A_2 + \dots + A_N\} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{N+1} \frac{1}{N!}.$$

Заметим, что выражение $1 - P\{A_1 + A_2 + \dots + A_N\}$ представляет собой $(N+1)$ первых членов разложения функции e^x в ряд Маклорена при $x = -1$:

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots,$$

так что при больших N

$$P\{A_1 + A_2 + \dots + A_N\} \approx 1 - e^{-1} = 0,63212 \dots$$

Поскольку ряд для экспоненты сходится достаточно быстро, то искомая вероятность практически не зависит от N и близка к $2/3$.

11. Пусть 30 шаров размещаются по 8 ящикам так, что для каждого шара одинаково возможно попадание в любой ящик. Найти вероятность размещения, при котором будут 3 пустых ящика, 2 ящика с тремя шарами, 2 ящика с шестью шарами и 1 ящик с двенадцатью шарами.

Решение. Общее число N способов разместить 30 шаров по 8 ящикам можно найти по комбинаторному правилу произведения. Перенумеруем все шары и все ящики. Каждому размещению поставим в соответствие строку из 30 позиций, где в первой позиции будет стоять номер ящика, в котором оказался 1-й шар, во второй позиции — номер ящика, в котором оказался 2-й шар, ..., в тридцатой позиции — номер ящика, в котором оказался 30-й шар. Тогда число N будет равно числу различных строк. Первую позицию в строке можно заполнить 8-ю способами, вторую — при заполненной первой — тоже 8 способами, третью — при заполненных двух предыдущих — тоже 8 способами и т. д. Следовательно, по правилу произведения

$$N = \underbrace{8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8}_{30 \text{ раз}} = 8^{30}.$$

Найдем теперь число \tilde{N} благоприятных размещений. Для этого снова применим правило произведения. Каждому благоприятному размещению поставим в соответствие строку из 4 позиций, где первую позицию будет занимать объект из трех пустых ящиков, вторую позицию — объект из двух ящиков с тремя шарами,

третью позицию — объект из двух ящиков с шестью шарами и четвертую позицию — объект из одного ящика с двенадцатью шарами.

Первый объект можно выбрать C_8^3 способами; второй объект — после того, как был выбран первый — можно выбрать $C_5^2 \cdot C_{30}^6 \cdot C_6^3$ способами (здесь C_5^2 — число способов выбрать 2 ящика из пяти оставшихся; C_{30}^6 — число способов выбрать 6 шаров из тридцати оставшихся; C_6^3 — число способов разместить шесть выбранных шаров поровну между двумя выбранными ящиками); третий объект — после выбранных первого и второго — можно выбрать $C_3^2 \cdot C_{24}^{12} \cdot C_{12}^6$ способами (здесь C_3^2 — число способов выбрать 2 ящика из трех оставшихся; C_{24}^{12} — число способов выбрать 12 шаров из двадцати четырех оставшихся; C_{12}^6 — число способов разместить 12 выбранных шаров поровну между двумя выбранными ящиками), после чего четвертый объект может быть выбран $C_1^1 \cdot C_{12}^{12}$ способами, т. е. одним способом.

Значит, по правилу произведения

$$\tilde{N} = C_8^3 \cdot C_5^2 C_{30}^6 C_6^3 \cdot C_3^2 C_{24}^{12} C_{12}^6,$$

и искомая вероятность P по классическому определению будет равна

$$P = \frac{\tilde{N}}{N} = 10^{-8} \cdot 4,0269 \dots$$

§ 3. Условная вероятность, формулы полной вероятности и Байеса

Пусть события A и B связаны с одним и тем же экспериментом E , причем $P\{B\} > 0$. Тогда отношение $P\{AB\}/P\{B\}$ называется *условной вероятностью* события A при условии, что произошло событие B , и обозначается $P\{A | B\}$:

$$P\{A | B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}.$$

Можно предложить следующую мотивировку этого определения. Под условной вероятностью события A при условии B естественно понимать долю равновозможных и несовместных исходов, приведших к A , среди тех исходов, которые приводят к B . Пусть эксперимент E всегда приводит к одному из N равновозможных и несовместных исходов, при этом N_A из этих N исходов приводят к событию A , N_B — к событию B , N_{AB} — к событию AB . Тогда доля исходов, приведших к A , среди исходов, которые привели к B , есть

$$\frac{N_{AB}}{N_B},$$

а эту дробь можно представить как

$$\frac{N_{AB}/N}{N_B/N} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}}.$$

Событие A называется *независимым от B* , если $P\{A | B\} = P\{A\}$. В этом случае $P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}$, откуда при $P\{A\} > 0$ получаем $P\{B | A\} = P\{B\}$, т. е. B также независимо от A .

Из определения условной вероятности следует

$$P\{AB\} = P\{A | B\}P\{B\} = P\{B | A\}P\{A\},$$

т. е. вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло. Это правило иногда называют *теоремой умножения вероятностей*. Для независимых событий оно принимает вид

$$P\{AB\} = P\{A\}P\{B\}.$$

Пусть теперь событие A может осуществиться с одним и только одним из n несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n . Это условие, в частности, выполняется, если сумма несовместных событий $H_1 + H_2 + \dots + H_n$ есть достоверное событие (в этом случае говорят, что H_1, H_2, \dots, H_n образуют *полную группу событий*). Тогда

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n.$$

Отсюда в силу несовместности событий, суммируемых в правой части последнего равенства,

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^n P\{AH_i\}, \quad (1)$$

или, использовав теорему умножения, получаем

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^n P\{A | H_i\} P\{H_i\}.$$

Это равенство носит название *формулы полной вероятности*⁽¹⁾. Далее, по теореме умножения

$$P\{H_i A\} = P\{A | H_i\} P\{H_i\} = P\{H_i | A\} P\{A\},$$

откуда

$$P\{H_i | A\} = \frac{P\{A | H_i\} P\{H_i\}}{P\{A\}},$$

или, используя формулу полной вероятности, приходим к формуле

$$P\{H_i | A\} = \frac{P\{A | H_i\} P\{H_i\}}{\sum_{j=1}^n P\{A | H_j\} P\{H_j\}}.$$

Полученная формула называется *формулой Байеса*. Ее можно интерпретировать следующим образом. Пусть известно, что к событию A могут привести события H_1, H_2, \dots, H_n . Событие A произошло, но неизвестно, какое из событий H_1, H_2, \dots, H_n предшествовало этому. Если найдены условные вероятности $P\{H_i | A\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то естественно предположить, что скорее всего событию A предшествовало то из событий H_i , которому соответствует большая вероятность $P\{H_i | A\}$. При такой интерпретации

⁽¹⁾ Иногда формулой полной вероятности называют также формулу (1).

события H_i , $i = 1, 2, \dots, n$, называются *гипотезами* или причинами, объясняющими факт происхождения A , а сама формула Байеса называется *формулой вероятностей гипотез*.

Пример 1. На заводе, изготавливающем болты, на долю 1-й, 2-й и 3-й машин приходится соответственно 25, 35 и 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен на 1-й машине? на 2-й машине? на 3-й машине?

Решение. Введем в рассмотрение следующие события: H_i — случайно выбранный болт изготовлен на i -й машине, $i = 1, 2, 3$; A — случайно выбранный болт оказался дефектным. Тогда по условию

$$\begin{aligned} P\{H_1\} &= 0,25; & P\{H_2\} &= 0,35; & P\{H_3\} &= 0,4; \\ P\{A | H_1\} &= 0,05; & P\{A | H_2\} &= 0,04; & P\{A | H_3\} &= 0,02. \end{aligned}$$

Поскольку несовместные события H_1, H_2, H_3 образуют полную группу, то по формуле Байеса получаем искомые вероятности:

$$\begin{aligned} P\{H_1 | A\} &= \frac{P\{A | H_1\} P\{H_1\}}{\sum_{i=1}^3 P\{A | H_i\} P\{H_i\}} = \\ &= \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,05 \cdot 0,25 + 0,04 \cdot 0,35 + 0,02 \cdot 0,4} = \frac{25}{69}, \\ P\{H_2 | A\} &= \frac{P\{A | H_2\} P\{H_2\}}{\sum_{i=1}^3 P\{A | H_i\} P\{H_i\}} = \frac{28}{69}, \\ P\{H_3 | A\} &= \frac{P\{A | H_3\} P\{H_3\}}{\sum_{i=1}^3 P\{A | H_i\} P\{H_i\}} = \frac{16}{69}. \end{aligned}$$

Пример 2. Два игрока ведут некоторую игру, состоящую из отдельных партий, до полного разорения одного из них. Капитал первого равняется a руб., капитал второго b руб. Вероятность выигрыша каждой партии для первого игрока равна p , а для второго игрока равна q ; $p + q = 1$ (ничьи отсутствуют). В каждой партии выигрыш одного игрока (а значит, проигрыш другого) равен 1 руб. Под разорением игрока понимается момент, когда капитал игрока становится равным нулю. Найти вероятность разорения каждого из игроков, если результаты отдельных партий независимы.

Решение. Пусть P_n — вероятность разорения первого игрока, когда он имеет n руб. Тогда искомая вероятность для него есть P_a ; при этом $P_{a+b} = 0$ (если капитал первого игрока $a+b$, то капитал второго равен 0, и игра закончится, так что первый игрок никогда не разорится), $P_0 = 1$ (если капитал первого игрока 0, то факт его разорения свершился).

Пусть событие A — первый игрок разорился при исходном капитале n ; событие H — первый игрок выиграл очередную партию. Тогда по формуле полной вероятности

$$P\{A\} = P\{A | H\}P\{H\} + P\{A | \bar{H}\}P\{\bar{H}\}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} P\{A\} &= P_n, & P\{H\} &= p, & P\{\bar{H}\} &= q, & P\{A | H\} &= P_{n+1}, \\ && P\{A | \bar{H}\} &= P_{n-1}, \end{aligned}$$

то получаем

$$P_n = P_{n+1}p + P_{n-1}q.$$

Отсюда для любого $n = 1, 2, \dots, a+b-1$ имеем:

$$\begin{aligned} P_n(p+q) &= P_{n+1}p + P_{n-1}q, & q(P_n - P_{n-1}) &= p(P_{n+1} - P_n), \\ P_{n+1} - P_n &= \frac{q}{p}(P_n - P_{n-1}). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= \left(\frac{q}{p}\right)^2(P_{n-1} - P_{n-2}) = \left(\frac{q}{p}\right)^3(P_{n-2} - P_{n-3}) = \dots \\ &\dots = \left(\frac{q}{p}\right)^n(P_1 - P_0) = \left(\frac{q}{p}\right)^n(P_1 - 1), \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{k=0}^n (P_{k+1} - P_k) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{q}{p}\right)^k (P_1 - 1), \quad (2)$$

так что, считая пока $q \neq p$, получаем:

$$P_{n+1} - P_0 = (P_1 - 1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - 1}{\frac{q}{p} - 1},$$

или

$$P_{n+1} - 1 = (P_1 - 1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1} - 1}{\frac{q}{p} - 1}.$$

Положив здесь $n = a + b - 1$, получим:

$$0 - 1 = (P_1 - 1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}{\frac{q}{p} - 1}, \quad P_1 - 1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1},$$

тогда

$$P_n = \frac{1 - \frac{q}{p}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1}{\frac{q}{p} - 1} + 1 = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} + 1 = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}.$$

Отсюда вероятность разорения первого игрока

$$P_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}. \quad (3)$$

Для случая $p = q = 1/2$ вероятность разорения найдем, вновь обратившись к равенству (2), из которого получим

$$P_{n+1} - 1 = (n + 1)(P_1 - 1).$$

При $n = a + b - 1$ имеем

$$0 - 1 = (a + b)(P_1 - 1), \quad P_1 - 1 = -\frac{1}{a + b},$$

откуда

$$P_n = n(P_1 - 1) + 1 = 1 - \frac{n}{a + b};$$

в частности,

$$P_a = 1 - \frac{a}{a + b} = \frac{b}{a + b}.$$

Таким образом, если капитал a первого игрока значительно больше капитала b второго игрока, а игроки одинаково искусны ($p = q = 1/2$), то разорение первого игрока практически невозможно: $P_a = \frac{b}{a + b} \approx 0$ при $b \ll a$.

Обратимся теперь к анализу формулы (3). Если через Q_b обозначить вероятность разорения второго игрока при его начальном капитале b , то в силу симметрии задачи

$$Q_b = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}. \quad (4)$$

Предположим, что первый игрок играет лучше, чем второй, т. е. $p > q$. Тогда, например, при $b \gg a$ (условно считая $b \sim \infty$), получим из (3) и (4):

$$Q_b \sim 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a, \quad P_a \sim \left(\frac{q}{p}\right)^a,$$

т. е. умелый игрок даже с малым капиталом может иметь меньше шансов на разорение, чем игрок с большим капиталом, но менее умелый.

Задачи

1. Игровая кость бросается до тех пор, пока не выпадет единица. Известно, что при первом испытании единица не выпала. Найти вероятность того, что потребуется не менее трех бросаний, считая первое.

Решение. Пусть A_i — событие, заключающееся в том, что при i -м бросании единица не выпала. Тогда искомая вероятность есть

$$\begin{aligned} P\{A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + \dots + A_1 A_2 \dots A_k \bar{A}_{k+1} + \dots | A_1\} &= \\ &= \frac{P\{A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + \dots + A_1 A_2 \dots A_k \bar{A}_{k+1} + \dots\}}{P\{A_1\}} = \\ &= \frac{P\{A_1 A_2 \bar{A}_3\} + P\{A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4\} + \dots + P\{A_1 A_2 \dots A_k \bar{A}_{k+1}\} + \dots}{P\{A_1\}} = \\ &= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6} + \dots}{\frac{5}{6}} = \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

2. Пусть вероятность p_n того, что в семье ровно n детей, равна αp^n при $n \geq 1$, и $p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha p^k$. Предположим, что все комбинации полов n детей равновероятны. Найти вероятность того, что в семье ровно $k \geq 1$ мальчиков.

Решение. Комбинации полов n детей могут быть следующими: n девочек, один мальчик и $(n-1)$ девочек, \dots , $(n-1)$ мальчиков и одна девочка, n мальчиков, т. е. всего $(n+1)$ комбинаций. По условию для любого $k = 1, 2, \dots, n$

$$P\{\text{в семье } k \text{ мальчиков} \mid \text{в семье } n \text{ детей}\} = \frac{1}{n+1}.$$

Далее,

$$P\{\text{в семье } k \text{ мальчиков}\} =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} P\{\text{в семье } (k+m) \text{ детей, из которых } k \text{ мальчиков}\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (P\{\text{в семье } k \text{ мальчиков} \mid \text{в семье } (k+m) \text{ детей}\} \times \\ &\quad \times P\{\text{в семье } (k+m) \text{ детей}\}) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k+m+1} \alpha p^{k+m} = \frac{\alpha}{p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{k+m+1}}{k+m+1} = \frac{\alpha}{p} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^p x^{k+m} dx = \\ &= \frac{\alpha}{p} \int_0^p \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{k+m} \right) dx = \frac{\alpha}{p} \int_0^p \frac{x^k}{1-x} dx = -\frac{\alpha}{p} \int_0^p \frac{x^k}{x-1} dx = \\ &= -\frac{\alpha}{p} \int_0^p \left(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \\ &= -\frac{\alpha}{p} \left(\frac{x^k}{k} + \frac{x^{k-1}}{k-1} + \dots + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| \right) \Big|_{x=0}^{x=p} = \\ &= \frac{\alpha}{p} \left(-\ln(1-p) - \frac{p^k}{k} - \frac{p^{k-1}}{k-1} - \dots - \frac{p^2}{2} - p \right) = \\ &= \alpha \left(\frac{1}{p} \ln \frac{1}{1-p} - \sum_{m=1}^k \frac{p^{m-1}}{m} \right). \end{aligned}$$

3. Вероятность того, что в справочное бюро в течение одного часа обратятся k человек, равна $\lambda^k e^{-\lambda} / k!$ при некотором $\lambda > 0$. Для каждого человека вероятность отказа по ответу на его запрос равна p . Найти вероятность того, что в течение одного часа ровно s человек не получат ответа на свой запрос.

Решение. Введем в рассмотрение следующие события: H_m — в течение часа в справочное бюро обратились ровно m человек, $m = 0, 1, 2, \dots$; B_m — из числа обратившихся в справочное бюро в течение часа ровно m человек получили ответ на свой запрос, $m = 0, 1, 2, \dots$. Тогда искомая вероятность есть

$$\begin{aligned} P\{H_s B_0 + H_{s+1} B_1 + \dots + H_{s+m} B_m + \dots\} &= \sum_{m=0}^{\infty} P\{H_{s+m} B_m\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P\{B_m | H_{s+m}\} P\{H_{s+m}\} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{s+m}^m (1-p)^m p^s \frac{\lambda^{s+m} e^{-\lambda}}{(s+m)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s+m)!}{m! s!} (1-p)^m p^s \frac{\lambda^{s+m} e^{-\lambda}}{(s+m)!} = \frac{p^s \lambda^s e^{-\lambda}}{s!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

— разложение экспоненты в ряд Маклорена, то

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = e^{\lambda(1-p)},$$

так что искомая вероятность равна

$$\frac{p^s \lambda^s e^{-\lambda}}{s!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{p^s \lambda^s e^{-\lambda p}}{s!}.$$

Примечание. При вычислении вероятности $P\{B_m | H_{s+m}\}$ была использована формула Бернулли (см. ниже, § 4).

4. При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему 4-ю группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со 2-й или 3-й группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо 1-й группы; человеку с 1-й группой крови можно перелить только кровь 1-й группы. Среди населения $S_1 = 33,7\%$ имеют 1-ю, $S_2 = 37,5\%$ — 2-ю, $S_3 = 20,9\%$ — 3-ю и $S_4 = 7,9\%$ — 4-ю группу крови. Найти

вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

Решение. Пусть событие H_i , $i = 1, 2, 3, 4$, состоит в том, что у случайно взятого больного оказалась кровь i -й группы; событие A — случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора. По формуле полной вероятности

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^4 P\{A | H_i\} P\{H_i\}.$$

Здесь $P\{H_i\} = s_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, где $s_i = S_i / 100$. Далее, $P\{A | H_1\} = s_1$. Действительно, если больной имеет 1-ю группу крови, то ему можно будет перелить кровь, если случайно взятый донор будет иметь кровь 1-й группы, а вероятность этого равна s_1 . Аналогично,

$$P\{A | H_2\} = s_2 + s_1, \quad P\{A | H_3\} = s_3 + s_1, \quad P\{A | H_4\} = 1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P\{A\} &= s_1 s_1 + (s_2 + s_1) s_2 + (s_3 + s_1) s_3 + s_4 = \\ &= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_1(s_2 + s_3) + s_4 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_1(1 - s_1 - s_4) + s_4 = \\ &= s_2^2 + s_3^2 + s_1 + s_4(1 - s_1) = \\ &= 0,140625 + 0,043681 + 0,337 + 0,052377 = 0,573683. \end{aligned}$$

5. В условиях задачи 4 найти вероятность того, что переливание можно осуществить, если имеются два случайно выбранных донора.

Решение. Пусть A_1 — событие, заключающееся в том, что кровь можно перелить от первого донора, а A_2 — от второго. Ясно, что $P\{A_1\} = P\{A_2\} = 0,573683$ (см. задачу 4). Столь же ясно, что события A_1 и A_2 независимы, ибо выбор первого донора не меняет статистических свойств генеральной совокупности, из которой затем выбирается и второй донор. Следовательно, искомая вероятность

$$\begin{aligned} P\{A_1 + A_2\} &= P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1 A_2\} = \\ &= P\{A_1\} + P\{A_2\} - P\{A_1\} P\{A_2\} = \\ &= 1,147366 - 0,3291121 \dots = 0,8182539 \dots \end{aligned}$$

6. В стройотряде 70 % первокурсников и 30 % студентов второго курса. Среди первокурсников 10 % девушек, а среди студентов второго курса — 5 % девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

Решение. Пусть N — общее число студентов в стройотряде. Тогда среди них $0,7N$ первокурсников и $0,3N$ второкурсников. В свою очередь, девушек среди первокурсников $0,1 \cdot 0,7N$, а среди второкурсников $0,05 \cdot 0,3N$. Таким образом, в стройотряде всего $0,1 \cdot 0,7N + 0,05 \cdot 0,3N$ девушек, из которых $0,1 \cdot 0,7N$ первокурсниц. Следовательно, искомая вероятность равна

$$\frac{0,1 \cdot 0,7N}{0,1 \cdot 0,7N + 0,05 \cdot 0,3N} = \frac{0,07}{0,07 + 0,015} = \frac{14}{17}.$$

7. Отдел технического контроля (ОТК) проводит сортировку приборов, выпускаемых заводом. Каждый прибор независимо от остальных имеет дефект с вероятностью p . При проверке в ОТК наличие дефектов обнаруживается с вероятностью α , причем с вероятностью β исправный прибор при проверке забраковывается. Найти вероятность q_0 того, что незабракованный прибор имеет дефекты, и вероятность q_1 того, что забракованный прибор имеет дефекты.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что прибор имеет дефект, а событие B — в том, что ОТК не забраковал прибор. Тогда $q_0 = P\{A | B\}$, так что

$$q_0 = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} = \frac{P\{B | A\}P\{A\}}{P\{B | A\}P\{A\} + P\{B | \bar{A}\}P\{\bar{A}\}} = \frac{(1-\alpha)p}{(1-\alpha)p + (1-\beta)(1-p)}.$$

Далее, поскольку $q_1 = P\{A | \bar{B}\}$, то

$$q_1 = \frac{P\{A\bar{B}\}}{P\{\bar{B}\}} = \frac{P\{\bar{B} | A\}P\{A\}}{P\{\bar{B} | A\}P\{A\} + P\{\bar{B} | \bar{A}\}P\{\bar{A}\}} = \frac{\alpha p}{\alpha p + \beta(1-p)}.$$

8. Число отечественных автомобилей превышает число иномарок в 1,5 раза. При проведении технического обслуживания (ТО) непривычные ситуации с отечественными автомобилями возникают в 2 раза чаще, чем с иномарками. При проведении ТО с неким автомобилем возникла непривычная ситуация. Какова вероятность, что это отечественный автомобиль?

Решение. Пусть событие A — при проведении ТО автомобиля возникла непривычная ситуация; H_1 — ТО проводится для отечественного автомобиля, H_2 — ТО проводится для иномарки. Тогда искомая вероятность есть условная вероятность

$$P\{H_1 | A\} = \frac{P\{A | H_1\}P\{H_1\}}{P\{A | H_1\}P\{H_1\} + P\{A | H_2\}P\{H_2\}}.$$

Пусть m — число отечественных автомобилей, N — общее число автомобилей. Тогда

$$P\{H_1\} = \frac{m}{N}, \quad P\{H_2\} = \frac{N-m}{N}.$$

По условию $m = 1,5(N - m)$, откуда $P\{H_1\} = 1,5(1 - P\{H_1\})$, или $P\{H_1\} = 0,6$, так что $P\{H_2\} = 0,4$. Далее, по условию

$$\frac{P\{A | H_1\}}{P\{A | H_2\}} = 2.$$

Следовательно,

$$P\{H_1 | A\} = \frac{2 \cdot 0,6}{2 \cdot 0,6 + 0,4} = 0,75.$$

9. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1 - \beta$. Вероятность принять здорового человека за больного равна α . Известно, что доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ . Найти вероятность того, что признанный при обследовании больным человек на самом деле здоров.

Решение. Пусть событие H_1 — обследуемый человек здоров, H_2 — обследуемый человек болен, A — обследование показало, что человек болен. Тогда искомая вероятность есть условная вероятность

$$P\{H_1 | A\} = \frac{P\{A | H_1\}P\{H_1\}}{P\{A | H_1\}P\{H_1\} + P\{A | H_2\}P\{H_2\}} = \frac{\alpha \cdot (1 - \gamma)}{\alpha \cdot (1 - \gamma) + (1 - \beta) \cdot \gamma}.$$

10. В 1-й урне содержатся 10 шаров, из них 8 белых; во 2-й урне — 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров случайным образом выбрали один. Найти вероятность того, что выбран белый шар.

Решение. Пусть событие A — выбран белый шар, так что $P\{A\}$ — искомая вероятность. Пусть событие H_1 — из 1-й и 2-й урн выбраны белые шары, H_2 — из 1-й и 2-й урн выбраны не белые шары, H_3 — из одной урны выбран белый шар, а из другой — не белый. Тогда

$$P\{H_1\} = \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{20} = \frac{16}{100}, \quad P\{H_2\} = \frac{2}{10} \cdot \frac{16}{20} = \frac{16}{100},$$

$$P\{H_3\} = 1 - P\{H_1\} - P\{H_2\} = 1 - \frac{32}{100} = \frac{68}{100}.$$

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P\{A\} &= P\{A | H_1\}P\{H_1\} + P\{A | H_2\}P\{H_2\} + P\{A | H_3\}P\{H_3\} = \\ &= 1 \cdot \frac{16}{100} + 0 \cdot \frac{16}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{68}{100} = 0,5. \end{aligned}$$

§ 4. Последовательность независимых испытаний

Пусть некоторый эксперимент E повторяется n раз. Будем интересоваться определенным событием A , связанным с E . Пусть

$$P\{A\} = p, \quad P\{\bar{A}\} = 1 - p = q.$$

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что в серии из n испытаний событие A произошло ровно k раз, где k — любое целое неотрицательное число. Будем считать, что наступление или ненаступление события A в испытании происходит независимо от других испытаний серии. Тогда вероятность того, что событие A наступит в k определенных испытаниях, а в остальных $(n - k)$ испытаниях не наступит, равна $p^k q^{n-k}$. Значит, по теореме сложения вероятностей искомую вероятность $P_n(k)$ можно найти как произведение $p^k q^{n-k}$ на число различных способов сочетания k появлений события A и $(n - k)$ непоявлений среди n испытаний. Так как число таких способов есть C_n^k , то

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Полученная формула носит название *формулы Бернулли*, а описанная схема независимых испытаний — *схемы Бернулли*.

Введем в рассмотрение функцию

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Оказывается, что при больших n имеет место приближенное равенство

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$. Точный результат приводится ниже.

Теорема 1 (локальная теорема Муавра–Лапласа). *Если $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ и $|k - np|$ изменяется в интервале от 0 до K_n , где K_n — любая неотрицательная функция от n , такая, что $K_n^3/n^2 \rightarrow 0$, то равномерно по $|k - np|$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(k)}{\phi(x)/\sqrt{npq}} = 1,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n

$$1 - \varepsilon < \frac{P_n(k)}{\phi(x)/\sqrt{npq}} < 1 + \varepsilon.$$

Эту теорему иногда называют *локальной теоремой Муавра–Лапласа*.

Обозначим через $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ вероятность того, что в серии из n независимых испытаний Бернулли событие A появилось какое-либо число раз из промежутка $[k_1, k_2]$. Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} P_n(k).$$

Используя теорему 1, можно получить приближение для этой вероятности. А именно, имеет место следующая теорема *Муавра–Лапласа* (в отличие от теоремы 1 ее называют также *интегральной теоремой Муавра–Лапласа*).

Теорема 2 (интегральная теорема Муавра–Лапласа). Для фиксированных z_1 и z_2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(np + z_1\sqrt{npq} \leq k \leq np + z_2\sqrt{npq}) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

где

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Наконец, сформулируем еще один предельный результат, известный как *теорема Пуассона*.

Теорема 3 (теорема Пуассона). Если $p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$P_n(k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \rightarrow 0,$$

где $\lambda = np$.

Этот результат позволяет при больших n и малых p использовать приближенную формулу

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np},$$

называемую *приближением Пуассона*.

Задачи

- 1.** В семье 10 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными $1/2$, найти вероятность того, что в семье:
а) 5 мальчиков и 5 девочек; б) число мальчиков не менее 3 и не более 8.

Решение. Ясно, что для решения задачи можно привлечь схему Бернулли при $n = 10$, $p = 1/2$. Если под событием A (или успехом, по общепринятой для схемы Бернулли терминологии) понимать рождение мальчика, то

$$\begin{aligned} P\{\text{в семье 5 мальчиков и 5 девочек}\} &= P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \\ &= \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256}; \\ P\{\text{в семье мальчиков от 3 до 8}\} &= \sum_{k=3}^{k=8} P_{10}(k) = \\ &= \sum_{k=3}^{k=8} C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \frac{957}{1024}. \end{aligned}$$

- 2.** Найти наиболее вероятное число успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в одном испытании.

Решение. Речь идет о нахождении такого k в формуле Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

при заданных n и $p = 1 - q$, при котором вероятность $P_n(k)$ принимает наибольшее значение. С этой целью вычислим отношение

$$\begin{aligned} \frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} &= \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}} = \\ &= \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{p}{q} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P_n(k+1) > P_n(k) &\Leftrightarrow (n-k)p > (k+1)q \Leftrightarrow k < np - q; \\ P_n(k+1) = P_n(k) &\Leftrightarrow k = np - q; \\ P_n(k+1) < P_n(k) &\Leftrightarrow k > np - q. \end{aligned}$$

Это наблюдение показывает, что вероятность $P_n(k)$ с увеличением k сначала возрастает, затем достигает максимума и далее убывает. При этом если $np - q$ является целым числом, то максимальное значение вероятности $P_n(k)$ принимает для двух значений k : $np - q$ и $np - q + 1 = np + p$. Если же $np - q$ не является целым числом, то максимального значения вероятности $P_n(k)$ достигает при k , равном наименьшему целому числу, большему $np - q$. Суммируя все сказанное, можно написать

$$np - q \leq k_{\text{н.в.}} \leq np + p, \quad (1)$$

где $k_{\text{н.в.}}$ — значение k , при котором $P_n(k)$ принимает наибольшее значение; при этом если $np - q$ — целое, то условию (1) удовлетворяют сразу два целых значения $k_{\text{н.в.}}$, которые дают одинаковое значение $P_n(k)$, т. е. в этом случае получаем сразу два наиболее вероятных значения k : $k_{\text{н.в.}} = np - q$ и $k_{\text{н.в.}} = np + p$.

3. В институте обучаются 730 студентов. Вероятность того, что день рождения наудачу взятого студента приходится на определенный день года, равна $1/365$ для каждого из 365 дней. Найти наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 января.

Решение. Будем перебирать по очереди всех студентов, и если очередной студент родился 1 января, то это событие будем считать успехом. Тогда искомое число — это наиболее вероятное число $k_{\text{н.в.}}$ успехов в серии из $n = 730$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 1/365$ в одном испытании. Следовательно, можно воспользоваться результатами задачи 2:

$$\begin{aligned} np - q &\leq k_{\text{н.в.}} \leq np + p, \\ 2 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) &\leq k_{\text{н.в.}} \leq 2 + \frac{1}{365}, \end{aligned}$$

откуда $k_{\text{н.в.}} = 2$.

4. В условиях задачи 3 найти вероятность того, что найдутся по крайней мере три студента, родившихся 1 января.

Решение. Искомая вероятность

$$\begin{aligned} P_{730}(3 \leq k \leq 730) &= 1 - P_{730}(0 \leq k \leq 2) = \\ &= 1 - P_{730}(0) - P_{730}(1) - P_{730}(2). \end{aligned}$$

Используя приближение Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$, найдем

$$P_{730}(0) = e^{-2}, \quad P_{730}(1) = 2e^{-2}, \quad P_{730}(2) = 2e^{-2},$$

так что искомая вероятность равна

$$1 - 5e^{-2} \approx 0,32.$$

5. В условиях задачи 3 найти вероятность того, что найдутся по крайней мере три студента, родившихся в один день (все равно какой)?

Решение. Для решения этой задачи получим следующее обобщение формулы Бернулли. Пусть в каждом из n испытаний может произойти одно и только одно из k событий A_1, A_2, \dots, A_k , испытания независимы и в каждом из них событие A_k происходит с вероятностью p_k . Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях появятся m_1 событий A_1 , m_2 событий A_2 , ..., m_k событий A_k , равна

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k},$$

где $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Действительно, вероятность того, что в m_1 определенных испытаниях произошло событие A_1 , в m_2 определенных испытаниях — событие A_2 , ..., в m_k определенных испытаниях — событие A_k , равна $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$. При этом из n испытаний набор m_1 можно выбрать $C_n^{m_1}$ способами, из оставшихся $(n - m_1)$ испытаний набор m_2 можно выбрать $C_{n-m_1}^{m_2}$ способами, из оставшихся $(n - m_1 - m_2)$ испытаний набор m_3 можно выбрать числом $C_{n-m_1-m_2}^{m_3}$ способами, и т. д. Общее число вариантов, каждый из которых будет иметь вероятность $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$, по правилу произведения будет равно

$$\begin{aligned} & C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} C_{n-m_1-m_2}^{m_3} \dots C_{n-m_1-m_2-\dots-m_{k-2}}^{m_{k-1}} C_{n-m_1-m_2-\dots-m_{k-1}}^{m_k} = \\ & = \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!} \cdot \frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!} \cdot \frac{(n-m_1-m_2)!}{m_3!(n-m_1-m_2-m_3)!} \cdot \dots \\ & \quad \dots \cdot \frac{(n-m_1-\dots-m_{k-2})!}{m_{k-1}!(n-m_1-\dots-m_{k-2}-m_{k-1})!} \times \\ & \quad \times \frac{(n-m_1-\dots-m_{k-2}-m_{k-1})!}{m_k!0!} = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}, \end{aligned}$$

что и доказывает приведенную выше обобщенную формулу Бернулли.

Вернемся к решению задачи 5. Пусть B — событие, вероятность которого нужно определить. Тогда противоположное событие \bar{B} будет означать, что в каждый из 365 дней ровно у двух студентов день рождения. Пусть событие A_k , $k = 1, 2, \dots, 365$, состоит в том, что у случайно выбранного студента день рождения в k -й день. Тогда $p_k = P\{A_k\} = 1/365$ для любого $k = 1, 2, \dots, 365$. Вероятность $P\{\bar{B}\}$ есть вероятность того, что в серии из $n = 730$ испытаний (испытание — выбор очередного студента) каждое из событий A_k , $k = 1, 2, \dots, 365$, произойдет ровно два раза. Значит, по обобщенной формуле Бернулли

$$P\{\bar{B}\} = \frac{730!}{(2!)^{365}} \left[\left(\frac{1}{365} \right)^2 \right]^{365} = \frac{730!}{2^{365} \cdot 365^{730}}.$$

Используя известную приближенную формулу Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n},$$

получаем для $P\{\bar{B}\}$ следующее приближенное значение:

$$P\{\bar{B}\} \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 730} \cdot 730^{730} \cdot e^{-730}}{2^{365} \cdot 365^{730}} = \sqrt{2\pi} \sqrt{730} \left(\frac{2}{e} \right)^{365} \frac{1}{e^{365}}.$$

Ясно, что это ничтожно малое число. Следовательно, искомая вероятность $P\{B\} = 1 - P\{\bar{B}\}$ практически равна единице.

6. Предполагая все комбинации полов детей равновероятными, определить, какую долю семей с шестью детьми будут составлять семьи с тремя мальчиками и тремя девочками.

Решение. Рассматривая рождение ребенка как испытание (по терминологии схемы Бернулли), а рождение мальчика как успех, найдем вероятность того, что в семье с шестью детьми ровно три мальчика:

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{5}{16},$$

т. е. в среднем на каждые 16 семей с шестью детьми будет 5 семей, где мальчиков и девочек поровну.

7. Найти вероятность того, что среди 13 карт, наугад выбранных из колоды в 52 карты, имеются ровно две карты красной масти. Сравнить ее с соответствующей вероятностью для испытаний Бернулли (т. е. когда выбранная карта опять возвращается в колоду) с $p = 1/2$.

Решение. По классической формуле (т. е. как отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов) искомая вероятность равна

$$P = \frac{C_{26}^2 \cdot C_{26}^{11}}{C_{52}^{13}} = \frac{\frac{26!}{2!24!} \cdot \frac{26!}{11!15!}}{\frac{52!}{13!39!}} = \frac{5 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 19}{41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 49} = 0,00395\dots$$

Если же считать, что выбранная карта опять возвращается в колоду, то применима формула Бернулли с $p = 1/2$ и

$$P_{13}(2) = C_{13}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{13!}{2!11!} \cdot \frac{1}{2^{13}} = \frac{3 \cdot 13}{2^{12}} = 0,00952\dots$$

8. Какова вероятность того, что дни рождения шести человек приходятся ровно на два месяца, оставляя десять месяцев свободными? Предполагаются независимость и равновероятность всех месяцев.

Решение. Число способов выбрать два месяца из двенадцати равно

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!10!} = 66.$$

Обозначим через P вероятность того, что дни рождения шести человек приходятся ровно на два определенных месяца, оставляя десять месяцев свободными. Тогда, очевидно, искомая вероятность равна $66P$.

Найдем P . Пусть P_1 — вероятность того, что все дни рождения приходятся на 1-й месяц; P_2 — вероятность того, что все дни рождения приходятся на 2-й месяц; P_{12} — вероятность того, что все дни рождения покрываются указанными месяцами. Тогда

$$P_{12} = P + P_1 + P_2,$$

откуда

$$P = P_{12} - P_1 - P_2.$$

По формуле Бернулли

$$P_1 = P_2 = C_6^6 \left(\frac{1}{12}\right)^6 \left(\frac{11}{12}\right)^0 = \left(\frac{1}{12}\right)^6, \quad P_{12} = C_6^6 \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \left(\frac{1}{6}\right)^6.$$

Следовательно,

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^6 - 2\left(\frac{1}{12}\right)^6 = \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{2^5}\right) = \frac{31}{32} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6,$$

и искомая вероятность

$$66P = \frac{31 \cdot 66}{32 \cdot 6^6} = \frac{31 \cdot 11}{2^{10} \cdot 3^5} = 0,00137\dots$$

9. Книга в 250 страниц содержит 500 опечаток. Оценить вероятность того, что на заданной странице не менее трех опечаток.

Решение. Будем считать, что любая опечатка с одинаковой вероятностью может оказаться на любой из страниц. Тогда вероятность того, что i -я опечатка окажется на заданной странице, равна $p = 1/250$, $i = 1, 2, \dots, 500$. Обнаружение очередной опечатки по терминологии схемы Бернулли будем называть испытанием, а попадание этой опечатки на заданную страницу — успехом. Тогда число испытаний $n = 500$ и искомая вероятность

$$P_{500}(3 \leq k \leq 500) = 1 - P_{500}(0) - P_{500}(1) - P_{500}(2),$$

где по формуле Бернулли

$$\begin{aligned} P_{500}(0) &= C_{500}^0 p^0 (1-p)^{500}, & P_{500}(1) &= C_{500}^1 p^1 (1-p)^{499}, \\ P_{500}(2) &= C_{500}^2 p^2 (1-p)^{498}. \end{aligned}$$

Используя приближение Пуассона, найдем (обозначив $\lambda = np = 2$)

$$P_{500}(0) \approx \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-2} = 0,135\dots,$$

$$P_{500}(1) \approx \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 2e^{-2} = 0,270\dots,$$

$$P_{500}(2) \approx \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = 2e^{-2} = 0,270\dots,$$

так что искомая вероятность

$$P_{500}(3 \leq k \leq 500) \approx 1 - 0,135 - 0,270 - 0,270 = 0,325.$$

10. Некий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет использовать спичку, он выбирает наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда математик впервые вынет пустую коробку, в другой коробке окажется r спичек ($r = 0, 1, 2, \dots, N$; N — начальное число спичек в каждой из коробок).

Решение. Присвоим коробкам номера 1 и 2. Пусть событие A состоит в том, что 1-я коробка оказалась пустой, а во 2-й в этот момент было r спичек; событие B — 2-я коробка оказалась

пустой, а в 1-й в этот момент было r спичек. Тогда искомая вероятность равна

$$P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\}.$$

Из симметрии ясно, что $P\{A\} = P\{B\}$. Найдем, например, $P\{A\}$. Пользуясь терминологией схемы Бернулли, выбор коробки будем называть испытанием, причем под успехом (вероятность которого в данном случае равна $1/2$) будем понимать выбор 1-й коробки. Тогда

$$\begin{aligned} P\{A\} &= P \left\{ \begin{array}{l} \text{в серии из } n = N + (N - r) \text{ испытаний было} \\ \text{ровно } N \text{ успехов, причем } (n + 1)\text{-е испытание} \\ \text{тоже было успехом} \end{array} \right\} = \\ &= P \left\{ \begin{array}{l} (n + 1)\text{-е испытание} \\ \text{было успехом} \end{array} \right\} \times \\ &\quad \times P \left\{ \begin{array}{l} \text{в серии из } n = N + (N - r) \text{ испытаний} \\ \text{было ровно } N \text{ успехов} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot C_{2N-r}^N \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{1}{2}\right)^{N-r} = C_{2N-r}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомая вероятность равна

$$C_{2N-r}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r} = \frac{(2N - r)!}{N!(N - r)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r}.$$

§ 5. Случайные величины и функции распределения

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, связанное с экспериментом E (см. § 2). Пусть $X = X(\omega)$ — конечная вещественная функция, определенная для всех элементарных событий ω , составляющих множество $\Omega = \{\omega\}$. Говорят, что функция X измерима, и называют ее *случайной величиной*, если для любого действительного x множество всех ω , для которых $X(\omega) < x$, принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} .

Упрощенно случайную величину можно трактовать как некую количественную характеристику, связанную с экспериментом E , значение которой непредсказуемым (т. е. случайному) образом меняется от эксперимента к эксперименту. При этом измеримость означает, что для любого действительного числа x определена вероятность $P\{X < x\}$. Эта вероятность представляет собой неубывающую функцию $F(x) = P\{X < x\}$ вещественного переменного x , которая носит название *функции распределения* (ф.р.) случайной величины X . Можно показать, что $F(x)$ непрерывна слева, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Пусть x_1, x_2 — два произвольных действительных числа, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$. Тогда

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1), \quad (1)$$

т. е. вероятность попадания случайной величины в промежуток (точнее, в полуинтервал с открытым правым концом) равна разности значений функции распределения на концах промежутка. Действительно, так как

$$\{X < x_2\} = \{X < x_1\} + \{x_1 \leq X < x_2\},$$

и события $\{X < x_1\}$ и $\{x_1 \leq X < x_2\}$ несовместны, то по теореме сложения вероятностей

$$P\{X < x_2\} = P\{X < x_1\} + P\{x_1 \leq X < x_2\},$$

откуда и следует равенство (1). Это равенство широко используется в приложениях, когда для случайной величины с известной

функцией распределения требуется найти вероятность ее попадания в заданный промежуток.

Случайная величина X называется *дискретной*, если множество ее возможных значений конечно или счетно: x_1, x_2, \dots . В этом случае таблицу

Значение случайной величины	x_1	x_2	\dots
Вероятность	p_1	p_2	\dots

где $p_i = P\{X = x_i\}$, называют *законом распределения* случайной величины. При этом, очевидно,

$$P\{(X = x_1) + (X = x_2) + \dots\} = \sum_i p_i = 1.$$

Последнее равенство называется *условием нормировки*.

Приведем примеры дискретных распределений.

1. *Биномиальное распределение*. Пусть X — случайная величина, представляющая собой число успехов в серии n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании. Тогда соответствующий закон распределения называется биномиальным и характеризуется таблицей

0	1	2	\dots	k	\dots	n
$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2(1-p)^{n-2}$	\dots	$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$	\dots	p^n

где вероятность $P\{X = k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, вычисляется по формуле Бернулли (см. § 4):

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

2. *Геометрическое распределение*. Пусть X — случайная величина, представляющая собой число испытаний до первого успеха в серии независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании. Тогда таблица возможных значений случайной величины и их вероятностей имеет вид

1	2	3	\dots	k	\dots
p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$	\dots	$(1-p)^{k-1} p$	\dots

Распределение, определяемое этой таблицей, называется геометрическим.

3. *Распределение Пуассона.* Так называется распределение дискретной случайной величины, определяемое таблицей

0	1	2	...	k	...
$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$...

где $\lambda > 0$ — параметр распределения, а вероятности $P\{X = k\}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, вычисляются по формуле Пуассона (см. § 4)

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Как видно, биномиальное распределение — это распределение дискретной случайной величины с конечным числом возможных значений (или, как иногда говорят, с *конечным спектром*), характеризуемое при этом двумя параметрами: n и p . Геометрическое распределение и распределение Пуассона — распределения дискретной случайной величины с бесконечным (счетным) числом возможных значений (как говорят, с *бесконечным спектром*), характеризуемые одним параметром: параметром p в случае геометрического распределения и параметром λ в случае распределения Пуассона.

Наряду с дискретными случайными величинами будем рассматривать класс случайных величин, для которых существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любом x равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Случайные величины, обладающие этим свойством, называются *непрерывными*, а функция $f(x)$ называется *плотностью распределения* соответствующей случайной величины. Из определения $f(x)$ и свойств ранее введенной функции распределения $F(x)$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1; \quad (2)$$

при любых x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$)

$$P\{x_1 \leq X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (3)$$

Равенство (2) — аналог дискретного условия нормировки в непрерывном случае. Отметим также, что если $F(x)$ дифференцируема, то

$$F'(x) = f(x).$$

Если $f(x)$ ограничена в окрестности точки x_0 , то из равенства (3) легко выводится, что $P\{X = x_0\} = 0$, т. е. если непрерывная случайная величина имеет ограниченную плотность распределения, то вероятность принятия этой случайной величиной любого заранее заданного значения равна нулю. В частности, для таких случайных величин вероятность попадания в заданный промежуток вещественной оси не зависит от того, какой это промежуток — открытый или замкнутый. Отметим также, что если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0) \Delta x,$$

т. е. при малых Δx значение $f(x_0)$ приближенно равно вероятности, приходящейся на единицу длины рассматриваемого промежутка от x_0 до $x_0 + \Delta x$. Этим обстоятельством объясняется появление слова «плотность» в названии функции $f(x)$.

Приведем примеры непрерывных случайных величин.

1. Случайная величина, определяемая плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Здесь a, b — параметры распределения, $a < b$. Такое распределение называется *равномерным* на отрезке $[a, b]$. Название распределения оправдано тем, что вероятность попадания в любой промежуток $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ равна $\frac{x_2 - x_1}{b - a}$, т. е. определяется только длиной $x_2 - x_1$ промежутка $[x_1, x_2]$ и не зависит от его расположения на отрезке $[a, b]$. При этом вероятность попадания в любой промежуток, лежащий вне отрезка $[a, b]$, равна нулю.

Функция распределения случайной величины будет иметь вид

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

2. Случайная величина, определяемая плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \end{cases}$$

λ — параметр распределения, $\lambda > 0$. В этом случае говорят, что случайная величина распределена по *показательному* закону. Функция распределения такой случайной величины есть

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

3. Случайная величина, определяемая плотностью распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)},$$

где a, σ — параметры распределения, причем $\sigma > 0$. Такое распределение называется *нормальным*, или *гауссовским*. Соответствующая функция распределения имеет вид

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-a)^2/(2\sigma^2)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

— табулированная специальная функция, уже встречавшаяся в §4.

Задачи

1. Случайная величина X задана законом распределения

x_1	x_2	x_3	x_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины и построить ее график.

Решение. Исходя непосредственно из определения для $F(x)$, находим

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_1, \\ p_1 & \text{при } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2 & \text{при } x_2 < x \leq x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{при } x_3 < x \leq x_4, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 & \text{при } x > x_4. \end{cases}$$

В силу условия нормировки $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, так что $F(x) = 1$ при $x > x_4$. График изображен на рис. 4.

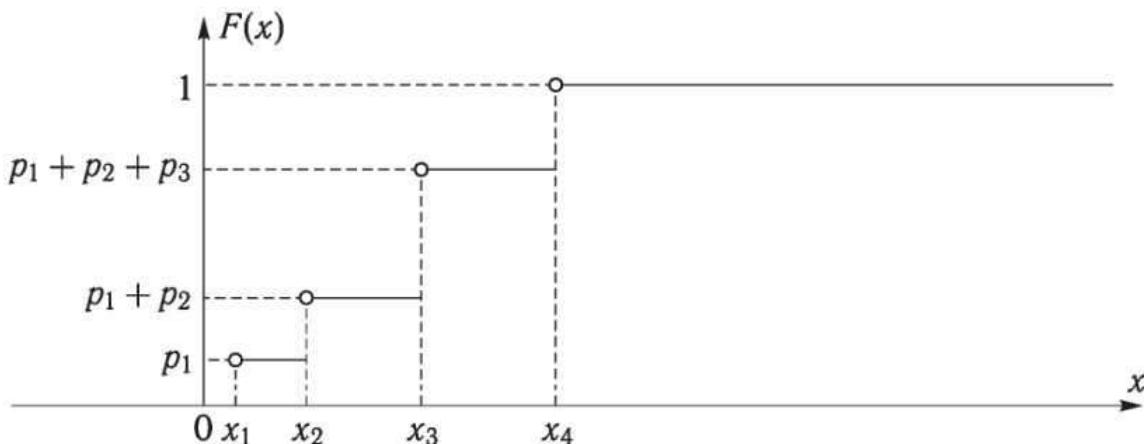


Рис. 4

Анализируя решение этой задачи, нетрудно сообразить, что функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция («лесенка»), скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, причем величины скачков равны вероятностям этих значений. При этом сумма всех скачков функции $F(x)$ равна 1. По мере увеличения числа возможных значений случайной величины и уменьшения интервалов между ними число скачков становится больше, а сами скачки — меньше; ступенчатая кривая становится более плавной.

2. Плотность распределения случайной величины X задана формулой:

$$f(t) = \begin{cases} Ct^{-3/2}, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Найти постоянную C и функцию распределения случайной величины X .

Решение. В силу условия нормировки должно выполняться соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1,$$

так что применительно к нашему случаю получаем

$$\int_1^{+\infty} Ct^{-3/2} dt = 1,$$

откуда

$$C = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^{-3/2}, & t \geq 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X будет равна

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > 1. \end{cases}$$

3. Пусть дана случайная величина $Y = 1/X$, где X — случайная величина, определенная в задаче 2. Найти плотность распределения $f_Y(t)$ величины Y и вероятность $P\{0.1 < Y < 0.2\}$.

Решение. Найдем сначала функцию распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y . Имеем

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\left\{\frac{1}{X} < y\right\}.$$

Из задачи 2 следует, что в промежуток $(-\infty, 1)$ случайная величина X попадает с нулевой вероятностью. Следовательно, случайная величина $1/X$ с нулевой вероятностью попадает в объединение промежутков $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Поэтому

$$P\left\{\frac{1}{X} < y\right\} = 0 \quad \text{при } y \leq 0, \quad P\left\{\frac{1}{X} < y\right\} = 1 \quad \text{при } y > 1.$$

При $0 < y \leq 1$

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{X} < y\right\} &= P\left\{X > \frac{1}{y}\right\} = 1 - P\left\{X < \frac{1}{y}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1/y}}\right) = \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Итак,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \sqrt{y}, & 0 < y \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y \leq 1, \\ 0, & y > 1. \end{cases}$$

При этом искомая вероятность

$$\begin{aligned} P\{0,1 < Y < 0,2\} &= \int_{0,1}^{0,2} f_Y(y) dy = F_Y(0,2) - F_Y(0,1) = \\ &= \sqrt{0,2} - \sqrt{0,1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

4. Построить графически и выразить аналитически функцию распределения случайной величины X , которая с вероятностями, равными $1/4$, принимает значения -1 и 1 и имеет постоянную плотность распределения в промежутке $(-1/2, 1/2)$.

Решение. Поскольку значения -1 и 1 принимаются с вероятностью $1/4$ каждое, то в промежуток $(-1/2, 1/2)$ случайная величина X попадает с вероятностью $1 - (1/4 + 1/4) = 1/2$. Если f — постоянная плотность распределения в промежутке $(-1/2, 1/2)$, то

$$\int_{-1/2}^{1/2} f dx = \frac{1}{2},$$

откуда $f = 1/2$. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины X . Тогда при $x \leq -1$

$$F(x) = P\{X < x\} = 0;$$

при $-1 < x \leq -1/2$

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4};$$

при $-1/2 < x < 1/2$

$$\begin{aligned} F(x) = P\{X < x\} &= P\left\{(X = -1) + \left(X \in \left(-\frac{1}{2}, x\right)\right)\right\} = \\ &= \frac{1}{4} + \int_{-1/2}^x f dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x; \end{aligned}$$

при $1/2 \leq x \leq 1$

$$F(x) = P\{X < x\} = P\left\{(X = -1) + \left(X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4};$$

при $x > 1$

$$F(x) = P\{X < x\} = 1.$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 5.

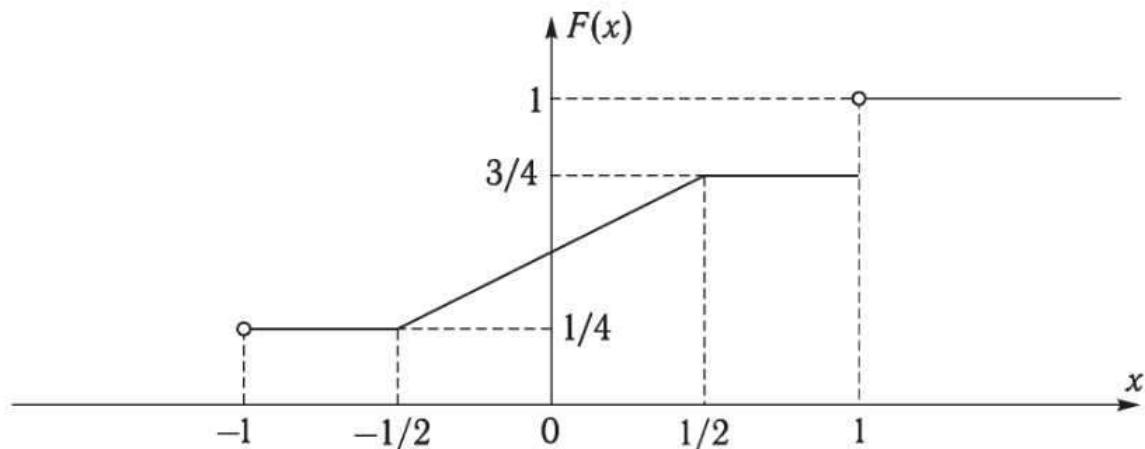


Рис. 5

5. Показать, что если случайная величина X имеет непрерывную строго возрастающую функцию распределения $F_X(x)$, то случайная величина $Y = F_X(X)$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Обозначим через $F_Y(y)$ функцию распределения случайной величины Y . Заметим, что область возможных значений случайной величины Y ограничена отрезком $[0, 1]$. Поэтому, очевидно,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Пусть теперь $y \in (0, 1]$. По определению

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{F_X(X) < y\}.$$

Поскольку $F_X(x)$ строго возрастает и непрерывна, то существует непрерывная обратная функция F_X^{-1} и неравенство $F_X(X) < y$ эквивалентно неравенству $X < F_X^{-1}(y)$. Следовательно,

$$P\{F_X(X) < y\} = P\{X < F_X^{-1}(y)\} = F_X(F_X^{-1}(y)) = y.$$

Таким образом,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ y, & 0 < y \leq 1; \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

А это и есть функция распределения случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$.

6. Рассмотрим последовательность однотипных событий, происходящих в случайные моменты времени. Например, это могут быть звонки, поступающие на телефонную станцию; неисправности, возникающие в процессе работы сложного технического устройства; дорожно-транспортные происшествия, происходящие в заданном регионе; и т. п. Обозначим через $K(t)$ случайную величину — число таких событий, происходящих в промежутке времени $(0, t]$. Говорят, что упомянутая последовательность событий образует *простейший пуассоновский поток* с интенсивностью λ , если случайная величина $K(t)$ при любом $t > 0$ имеет распределение Пуассона с параметром λt , т. е. если

$$P\{K(t) = m\} = \frac{(\lambda t)^m e^{-\lambda t}}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть сбои в работе компьютера образуют простейший пуассоновский поток с интенсивностью λ . Каждый сбой с вероятностью p приводит к ошибке независимо от других сбоев. Найти функцию распределения случайной величины Z — числа ошибок в единицу времени (т. е. при $t = 1$).

Решение. Пусть $F(Z)$ — искомая функция распределения. Поскольку Z может принимать только целые неотрицательные значения, то

$$F(Z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0; \\ F(-[-Z]), & z > 0 \end{cases}$$

(здесь $[z]$ означает целую часть числа z), т. е. достаточно находить значения $F(k)$, где $k = 1, 2, \dots$. Имеем

$$\begin{aligned} F(k) &= P\{Z < k\} = P\{(Z = 0) + (Z = 1) + \dots + (Z = k - 1)\} = \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} P\{Z = m\}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} P\{Z = m\} &= \sum_{l=0}^{\infty} P\left\{ \begin{array}{l} \text{произошли } (m+l) \text{ сбоев и из} \\ \text{них ровно } m \text{ привели к ошибке} \end{array} \right\} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P\left\{ \begin{array}{l} \text{ровно } m \text{ сбоев} \\ \text{привели к ошибке} \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{произошли} \\ (m+l) \text{ сбоев} \end{array} \right\} P\left\{ \begin{array}{l} \text{произошли} \\ (m+l) \text{ сбоев} \end{array} \right\} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} C_{m+l}^m p^m (1-p)^l \frac{\lambda^{m+l} e^{-\lambda}}{(m+l)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(m+l)!}{m! l!} p^m (1-p)^l \frac{\lambda^{m+l} e^{-\lambda}}{(m+l)!} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{p^m (1-p)^l \lambda^{m+l} e^{-\lambda}}{m! l!} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} p^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l (1-p)^l}{l!}. \end{aligned}$$

Заметив, что последняя сумма представляет разложение в ряд экспоненты $e^{\lambda(1-p)}$, получаем

$$P\{Z = m\} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} p^m e^{\lambda(1-p)} = \frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda p}}{m!}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{m=0}^{k-1} P\{Z = m\} = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda p}}{m!} = \\ &= e^{-\lambda p} \left(1 + \frac{\lambda p}{1!} + \frac{(\lambda p)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda p)^{k-1}}{(k-1)!} \right). \end{aligned}$$

7. Пусть случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$. Найти плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y = \alpha X + \beta$, где α, β — заданные постоянные, $\alpha \neq 0$.

Решение. Обозначим через $F(x)$ функцию распределения случайной величины X , а через $G(y)$ функцию распределения случайной величины Y . Тогда при $\alpha > 0$

$$G(y) = P\{Y < y\} = P\{\alpha X + \beta < y\} = P\left\{X < \frac{y - \beta}{\alpha}\right\} = F\left(\frac{y - \beta}{\alpha}\right),$$

так что

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dy}F\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right).$$

Если же $\alpha < 0$, то

$$\begin{aligned} G(y) &= P\{Y < y\} = P\{\alpha X + \beta < y\} = \\ &= P\left\{X > \frac{y-\beta}{\alpha}\right\} = 1 - P\left\{X < \frac{y-\beta}{\alpha}\right\} = 1 - F\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

и

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - F\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\right) = -\frac{1}{\alpha}f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right).$$

Таким образом, при любом значении $\alpha \neq 0$

$$g(y) = \frac{1}{|\alpha|}f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right).$$

8. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром α , т. е. ее функция распределения

$$F(x) = P\{X < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^2$.

Решение. Пусть $G(y)$ — функция распределения случайной величины Y . Тогда при $y > 0$

$$\begin{aligned} G(y) &= P\{Y < y\} = P\{X^2 < y\} = P\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\} = \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) = 1 - e^{-\alpha\sqrt{y}}, \end{aligned}$$

так что плотность распределения

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{\alpha e^{-\alpha\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}.$$

При $y \leq 0$, очевидно, $G(y) \equiv 0$ и $g(y) \equiv 0$, ибо случайная величина Y не принимает отрицательных значений.

9. Доказать, что любая функция распределения не может иметь более чем счетное число точек разрыва.

Решение. В силу монотонности и ограниченности функция распределения может иметь только разрывы 1-го рода, т. е. скачки на конечную положительную величину. Все скачки можно перечислить, если перенумеровать их в следующем порядке: сначала

все скачки, большие $1/2$ (такой скачок может быть только один, ибо сумма скачков не может превышать единицу), затем все скачки, большие $1/3$ (таких скачков не может быть больше двух), затем — большие $1/4$ (таких скачков — не более трех), и т. д. Таким образом, оказывается возможным установить взаимно однозначное соответствие между множеством скачков и множеством натуральных чисел, что и доказывает требуемое утверждение.

10. Функция $F(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве X* , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такое, что $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$, если только $|x_1 - x_2| < \delta$ и $x_1, x_2 \in X$. Пусть $F(x)$ является функцией распределения и пусть она непрерывна в каждой точке. Доказать, что она равномерно непрерывна на всей прямой $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу монотонности функции $F(x)$ и ее свойств $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ можно утверждать, что $\exists M > 0$, такое, что колебания функции $F(x)$ в промежутках $(-\infty, -M]$ и $[M, +\infty)$ не превышают значения $\varepsilon/2$:

$$\begin{aligned} \forall x', x'' \in (-\infty, -M] \quad |F(x') - F(x'')| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \forall x', x'' \in [M, +\infty) \quad |F(x') - F(x'')| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

По условию функция $F(x)$ непрерывна на $[-M, M]$. Значит (по известной теореме Кантора), она равномерно непрерывна на $[-M, M]$:

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x', x'' \in [-M, M] \quad |F(x') - F(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } |x' - x''| < \delta. \tag{5}$$

Возьмем теперь два любых значения x_1 и x_2 из интервала $(-\infty, +\infty)$. Покажем, что если $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon$. Если $x_1, x_2 \in (-\infty, -M]$ или $x_1, x_2 \in [-M, M]$ или $x_1, x_2 \in [M, +\infty)$, то требуемое установлено выше. Осталось рассмотреть две ситуации:

- 1) $x_1 \in (-\infty, -M]$, $x_2 \in (-M, M)$;
- 2) $x_1 \in (-M, M)$, $x_2 \in [M, +\infty)$.

В ситуации 1) имеем

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= |F(x_2) - F(-M) + F(-M) - F(x_1)| = \\ &= (F(x_2) - F(-M)) + (F(-M) - F(x_1)). \end{aligned}$$

Поскольку $-M \in (x_1, x_2)$, то $|x_2 - (-M)| < \delta$ и в силу (5)

$$F(x_2) - F(-M) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В то же время в силу (4)

$$F(-M) - F(x_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит,

$$|F(x_1) - F(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Аналогичными рассуждениями этот результат устанавливается и для ситуации 2). Утверждение доказано.

§ 6. Числовые характеристики случайной величины

1. Математическое ожидание. Рассмотрим дискретную случайную величину X с конечным спектром, закон распределения которой задан таблицей

x_1	x_2	\dots	x_k
p_1	p_2	\dots	p_k

.

Пусть проведены n экспериментов, в результате которых n_1 раз реализовалось значение x_1 , n_2 раз — значение x_2 , \dots , n_k раз — значение x_k , так что $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Среднее значение случайной величины X в данной серии из n экспериментов естественно определить как среднее арифметическое

$$\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n}. \quad (1)$$

Будем теперь безгранично удлинять серии экспериментов, что формально соответствует условию $n \rightarrow \infty$. Тогда в соответствии с классическим определением вероятности

$$\frac{n_1}{n} \rightarrow p_1, \quad \frac{n_2}{n} \rightarrow p_2, \quad \dots, \quad \frac{n_k}{n} \rightarrow p_k,$$

а выражение (1) стремится к сумме

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k. \quad (2)$$

Сумма (2) называется *математическим ожиданием* дискретной случайной величины X и обозначается MX или $M\{X\}$. Если X — дискретная случайная величина с бесконечным спектром, то ее математическим ожиданием называется сумма ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

если этот ряд сходится абсолютно. В противном случае говорят, что случайная величина X не имеет математического ожидания.

Пусть теперь X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$. Будем пока для определенности считать, что множество возможных значений X принадлежит отрезку $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на более мелкие промежутки точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Пусть $p_k = P\{x_{k-1} < X < x_k\} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx$, $k = 1, 2, \dots, n$. По теореме о среднем $\exists \tilde{x}_k \in (x_{k-1}, x_k)$, такая, что $p_k = f(\tilde{x}_k) \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Рассмотрим вспомогательную дискретную случайную величину \tilde{X} , определяемую законом распределения

\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\dots	\tilde{x}_n
p_1	p_2	\dots	p_n

Случайную величину \tilde{X} можно рассматривать как некоторую дискретную аппроксимацию непрерывной случайной величины X , причем эта аппроксимация тем точнее и полнее, чем больше n . Математическое ожидание случайной величины \tilde{X} равно

$$M\tilde{X} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i f(\tilde{x}_i) \Delta x_i.$$

При $n \rightarrow \infty$ сумма справа стремится к интегралу

$$\int_a^b x f(x) dx,$$

который естественно принять за определение математического ожидания случайной величины X .

Итак, для непрерывной случайной величины X по определению

$$MX = \int x f(x) dx,$$

где интеграл берется по всей области возможных значений случайной величины X . Если эта область неограничена, то интеграл понимается в несобственном смысле, причем предполагается, что интеграл сходится абсолютно. В противном случае говорят, что математическое ожидание не существует.

Можно показать, что математическое ожидание обладает следующими свойствами.

1) Математическое ожидание константы равно этой константе:

$$M\{C\} = C.$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M\{C \cdot X\} = C \cdot M\{X\}.$$

3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = M\{X_1\} + M\{X_2\} + \dots + M\{X_n\}.$$

4) Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M\{X_1 X_2 \dots X_n\} = M\{X_1\} M\{X_2\} \dots M\{X_n\}.$$

По определению, случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n называются *независимыми*, если для любой группы $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ этих величин независимы всякие k событий вида $\{X_{i_1} \in B_1\}, \{X_{i_2} \in B_2\}, \dots, \{X_{i_k} \in B_k\}$, где B_1, B_2, \dots, B_k — подмножества действительной оси.

5) Пусть X — дискретная случайная величина с законом распределения

x_1	x_2	\dots
p_1	p_2	\dots

Пусть $\phi(x)$ — некоторая функция, причем все возможные значения случайной величины X входят в область определения функции $\phi(x)$. Тогда для случайной величины $Y = \phi(X)$ математическое ожидание

$$MY = \sum_i p_i \phi(x_i).$$

6) Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то для случайной величины $Y = \phi(X)$ математическое ожидание

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) f(x) dx.$$

Рассмотрим ряд примеров на нахождение математического ожидания.

Пусть X — случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами n и p . Найдем MX . Для этого рассмотрим n вспомогательных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , которые определим следующим образом. Случайная величина X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, может принимать только два значения 0 и 1, а именно:

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{если в } i\text{-м эксперименте произошла неудача;} \\ 1, & \text{если в } i\text{-м эксперименте имел место успех.} \end{cases}$$

Тогда все X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, имеют один и тот же закон распределения:

	0	1
1 - p	p	

Значит, для любого $i = 1, 2, \dots, n$ имеем $MX = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$. Кроме того, очевидно,

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Следовательно,

$$MX = MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n = np.$$

Пусть теперь X — случайная величина, распределенная по геометрическому закону с параметром p . Тогда

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}, \quad (3)$$

где $q = 1 - p$. Чтобы найти сумму ряда (3), рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k.$$

Последний представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию с положительным знаменателем $q < 1$ и первым членом $b_1 = q$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по q , получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (4)$$

В выражении слева можно поменять местами порядок суммирования и дифференцирования:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1},$$

так что с учетом (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

В результате из (3) найдем

$$MX = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Найдем теперь математическое ожидание случайной величины X , распределенной по закону Пуассона с параметром λ . Имеем:

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Как известно,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

при любом x (разложение экспоненты в ряд Маклорена). Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots = e^{\lambda}$$

и

$$MX = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Перейдем к вычислению математических ожиданий непрерывных распределений, введенных в § 5. Если X распределена равномерно на отрезке $[a, b]$, то

$$MX = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

Если X имеет показательное распределение с параметром λ , то

$$MX = \int_0^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Наконец, если X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ , то

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Сделав в последнем интеграле замену $x - a = t$, получим

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t+a}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt + a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt$$

равен нулю как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt = 1,$$

поскольку последнее равенство выражает условие нормировки для нормальной плотности распределения с нулевым значением параметра a . С учетом этих обстоятельств из (5) получаем

$$MX = a.$$

2. Дисперсия. *Дисперсией* произвольной случайной величины X называется число

$$DX = M\{(X - MX)^2\}, \quad (6)$$

т. е. математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания MX . Если X — дискретная случайная величина с законом распределения

x_1	x_2	\dots
p_1	p_2	\dots

то по свойству 5) математического ожидания

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i.$$

Если же X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то по свойству 6) математического ожидания

$$DX = \int (x - MX)^2 f(x) dx,$$

где интеграл берется по всей области возможных значений случайной величины X .

Преобразуем правую часть равенства (6):

$$\begin{aligned} M\{(X - MX)^2\} &= M\{X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2\} = \\ &= M\{X^2\} - 2MX \cdot MX + (MX)^2 = M\{X^2\} - (MX)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой случайной величины X

$$DX = M\{X^2\} - (MX)^2 \tag{7}$$

— дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию ее квадрата минус квадрат ее математического ожидания.

Заметим, что в силу определения (6) $DX \geq 0$, так что из (7) получаем

$$M\{X^2\} \geq (MX)^2,$$

т. е. для любой случайной величины математическое ожидание квадрата не меньше квадрата математического ожидания.

Нетрудно установить следующие свойства дисперсии.

1) Прибавление константы к случайной величине не меняет ее дисперсии:

$$D\{Y + C\} = DY.$$

2) Постоянный множитель выносится из-под знака дисперсии в квадрате:

$$D\{C \cdot Y\} = C^2 DY.$$

3) Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n.$$

Докажем, например, свойство 3). Достаточно ограничиться случаем двух слагаемых. Имеем:

$$\begin{aligned} D\{X_1 + X_2\} &= M\{(X_1 + X_2) - M(X_1 + X_2)\}^2 = \\ &= M\{(X_1 - MX_1) + (X_2 - MX_2)\}^2 = \\ &= M\{(X_1 - MX_1)^2 + (X_2 - MX_2)^2 + 2(X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)\} = \\ &= M\{(X_1 - MX_1)^2\} + M\{(X_2 - MX_2)^2\} + \\ &\quad + 2M\{(X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)\} = \\ &= DX_1 + DX_2 + 2M\{(X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)\}. \end{aligned}$$

В силу независимости случайных величин X_1 и X_2

$$\begin{aligned} M\{(X_1 - MX_1)(X_2 - MX_2)\} &= \\ &= M\{X_1X_2 - X_1MX_2 - X_2MX_1 + MX_1MX_2\} = \\ &= MX_1MX_2 - MX_1MX_2 - MX_2MX_1 + MX_1MX_2 = 0, \end{aligned}$$

так что $D\{X_1 + X_2\} = DX_1 + DX_2$, ч. т. д.

Найдем дисперсии распределений, введенных в § 5. Пусть X — случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами n и p . Используем представление (см. выше)

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

где X_1, X_2, \dots, X_n — независимые дискретные случайные величины, каждая из которых может принимать только два значения: 0 с вероятностью $1 - p$ и 1 с вероятностью p . По свойству 3) имеем

$$DX = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n.$$

Поскольку

$$DX_1 = DX_2 = \dots = DX_n = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = p(1 - p),$$

то получаем

$$D = npq,$$

где $q = 1 - p$.

Пусть теперь X — случайная величина, распределенная по геометрическому закону с параметром p . Для нахождения DX

воспользуемся тождеством (7). Ранее установлено, что $MX = 1/p$. Далее,

$$MX^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}.$$

Как и при вычислении математического ожидания геометрического распределения, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q};$$

дифференцируем обе части по q и меняем порядок суммирования и дифференцирования слева:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2};$$

умножаем обе части на q :

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2};$$

снова дифференцируем обе части по q и меняем порядок суммирования и дифференцирования слева:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \left(\frac{q}{(1-q)^2} \right)' = \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Следовательно,

$$MX^2 = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}$$

и

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Пусть X — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ . Вычислим ее дисперсию, воспользовавшись тождеством (7). Для этого найдем

$$MX^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k}{k!}. \quad (8)$$

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda};$$

дифференцируем обе части по λ и меняем порядок дифференцирования и суммирования слева:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{k!} = e^{\lambda};$$

умножаем обе части на λ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} = \lambda e^{\lambda};$$

дифференцируем обе части по λ и меняем порядок дифференцирования и суммирования слева:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2\lambda^{k-1}}{k!} = \lambda e^{\lambda} + e^{\lambda},$$

откуда, умножая обе части на λ , имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2\lambda^k}{k!} = \lambda e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda},$$

так что, учитывая (8), получаем

$$MX^2 = e^{-\lambda}(\lambda e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda}) = \lambda + \lambda^2$$

и

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Заметим, что для распределения Пуассона $DX = MX$.

Обратимся теперь к непрерывным распределениям, рассмотренным в § 5. Если X — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$, то по определению

$$DX = \int (x - MX)^2 f(x) dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Для случайной величины X , распределенной по показательному закону с параметром λ ,

$$DX = \int (x - MX)^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Наконец, для случайной величины X , имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ ,

$$DX = \int (x - MX)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx;$$

сделаем замену переменной интегрирования:

$$\frac{x - a}{\sigma} = t, \quad x = \sigma t + a, \quad dx = \sigma dt;$$

тогда

$$\begin{aligned} DX &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t d(-e^{-t^2/2}) = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (-te^{-t^2/2}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1$$

— условие нормировки для плотности нормального распределения с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$, то получаем

$$DX = \sigma^2.$$

Таким образом, параметры a и σ в выражении для плотности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} \tag{9}$$

имеют следующий смысл: параметр a есть математическое ожидание, а σ^2 есть дисперсия соответствующей случайной величины X .

Наряду с дисперсией используется также понятие *среднеквадратичного отклонения* случайной величины, которое определяется как \sqrt{DX} — корень из дисперсии. Следовательно, σ в выражении (9) имеет смысл среднеквадратичного отклонения случайной величины X .

В заключение сведем в единую таблицу числовые характеристики изученных распределений (табл. 2).

Таблица 2

Распределение случайной величины X	MX	DX
Биномиальное: $P\{X = m\} = C_n^k p^m q^{n-m},$ $m = 0, 1, 2, \dots, n; q = 1 - p; n, p$ — параметры: $n \in N, p \in [0, 1]$	np	npq
Геометрическое: $P\{X = m\} = q^{m-1} p,$ $m = 1, 2, \dots, n; q = 1 - p; p$ — параметр, $p \in (0, 1]$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Пуассона: $P\{X = m\} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},$ $m = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0$ — параметр	λ	λ
Равномерное на отрезке: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$ a, b — параметры: $b > a$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Показательное: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \end{cases}$ $\lambda > 0$ — параметр	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальное: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)},$ $a, \sigma > 0$ — параметры	a	σ^2

Задачи

1. Правильный шестигранный кубик из однородного материала с пронумерованными гранями бросают до тех пор, пока не выпадут все грани. Найти математическое ожидание и дисперсию числа бросаний.

Решение. Пусть X — случайная величина — число бросаний к моменту выпадения всех граней. Заметим, что X можно представить в виде суммы:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6,$$

где:

$X_1 \equiv 1$ — неслучайная величина;

X_2 — случайная величина — число бросаний, отсчитываемое от второго бросания до момента t_2 (включительно) выпадения какой-либо грани, отличной от той, что выпала при первом бросании;

X_3 — случайная величина — число бросаний, отсчитываемое после момента t_2 до момента t_3 (включительно) выпадения какой-либо из 4 оставшихся граней, ни разу не выпадавших с начала эксперимента;

...

X_6 — случайная величина — число бросков, отсчитываемое после момента t_5 до момента t_6 (включительно) выпадения последней из 6 граней, ни разу не выпадавшей с начала эксперимента.

Ясно, что X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 — независимые случайные величины, распределенные по геометрическому закону, но с различными значениями параметра p : X_2 — со значением $p = 5/6$, X_3 — со значением $p = 4/6$, X_4 — со значением $p = 3/6$, X_5 — со значением $p = 2/6$, X_6 — со значением $p = 1/6$. Поэтому

$$\begin{aligned} MX &= MX_1 + MX_2 + MX_3 + MX_4 + MX_5 + MX_6 = \\ &= 1 + \frac{1}{5/6} + \frac{1}{4/6} + \frac{1}{3/6} + \frac{1}{2/6} + \frac{1}{1/6} = 14,7. \end{aligned}$$

Для дисперсии получаем

$$\begin{aligned} DX &= DX_1 + DX_2 + DX_3 + DX_4 + DX_5 + DX_6 = \\ &= 0 + \frac{1/6}{(5/6)^2} + \frac{2/6}{(4/6)^2} + \frac{3/6}{(3/6)^2} + \frac{4/6}{(2/6)^2} + \frac{5/6}{(1/6)^2} = 38,39. \end{aligned}$$

2. Человек, имеющий n ключей, хочет отпереть свою дверь, испытывая ключи независимо один от другого и в случайном порядке, причем неподошедшие ключи не исключаются из дальнейших испытаний. Известно, что только один из имеющихся ключей подходит к замку. Найти математическое ожидание и дисперсию числа испытаний.

Решение. Пусть X — число выполненных попыток до момента открывания двери включительно. Тогда, очевидно, случайная величина X распределена по геометрическому закону с параметром $p = 1/n$. Следовательно,

$$MX = \frac{1}{p} = n, \quad DX = \frac{1-p}{p^2} = n(n-1).$$

3. Решить задачу 2 при условии, что неподошедшие ключи исключаются из дальнейших испытаний.

Решение. Пусть по-прежнему X — случайная величина — число выполненных попыток до момента открывания двери включительно. Тогда возможные значения X есть $1, 2, \dots, n$. Найдем соответствующие вероятности. Ясно, что

$$P\{X = 1\} = \frac{1}{n}.$$

Далее, пусть событие A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, означает, что i -я попытка оказалась удачной, так что событие \bar{A}_i означает, что i -я попытка оказалась неудачной. Тогда

$$P\{X = 2\} = P\{\bar{A}_1 A_2\} = P\{A_2 | \bar{A}_1\} P\{\bar{A}_1\} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n};$$

$$\begin{aligned} P\{X = 3\} &= P\{\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3\} = P\{A_3 | \bar{A}_2 \bar{A}_1\} P\{\bar{A}_2 | \bar{A}_1\} P\{\bar{A}_1\} = \\ &= \frac{1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, получим

$$P\{X = 4\} = P\{X = 5\} = \dots = P\{X = n\} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$MX = \sum_{k=1}^n k P\{X = k\} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{n+1}{2},$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

— известная числовая сумма, то получаем:

$$DX = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

4. Брошены две игральные кости. Найти математическое ожидание суммы выпавших очков, если известно, что выпали разные грани.

Решение. В этой задаче речь идет о вычислении условного математического ожидания дискретной случайной величины. Это понятие вводится следующим естественным образом. Если дискретная случайная величина X принимает значения x_1, x_2, \dots , то *условным математическим ожиданием* случайной величины X при условии, что произошло событие A , называется число

$$M\{X | A\} = \sum_i x_i P\{X = x_i | A\},$$

если ряд справа сходится абсолютно (в случае случайной величины с конечным спектром вместо ряда будет конечная сумма и вопрос о сходимости отпадает).

Пусть H_1, H_2, \dots, H_n — полная группа событий. Тогда по формуле полной вероятности

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^n P\{X = x_i | H_j\} P\{H_j\}.$$

Рассмотрим

$$MX = \sum_i x_i P\{X = x_i\}.$$

Подставив вместо вероятности $P\{X = x_i\}$ ее разложение по формуле полной вероятности, найдем

$$\begin{aligned} MX &= \sum_i x_i \sum_{j=1}^n P\{X = x_i | H_j\} P\{H_j\} = \\ &= \sum_i \sum_{j=1}^n x_i P\{X = x_i | H_j\} P\{H_j\} = \sum_{j=1}^n \sum_i x_i P\{X = x_i | H_j\} P\{H_j\} = \\ &= \sum_{j=1}^n P\{H_j\} \sum_i x_i P\{X = x_i | H_j\} = \sum_{j=1}^n M\{X | H_j\} P\{H_j\}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любой полной группы событий H_1, H_2, \dots, H_n

$$MX = \sum_{j=1}^n M\{X | H_j\} P\{H_j\}$$

— получили аналог формулы полной вероятности для математических ожиданий.

Вернемся к решению задачи 4. Пусть X_1 — число очков, выпавшее на одной кости, X_2 — на другой. Пусть событие A означает, что выпали разные грани. Тогда

$$M\{X_1 + X_2\} = M\{X_1 + X_2 | A\} P\{A\} + M\{X_1 + X_2 | \bar{A}\} P\{\bar{A}\}.$$

Искомое математическое ожидание есть $M\{X_1 + X_2 | A\}$. Очевидно,

$$\begin{aligned} P\{\bar{A}\} &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, & P\{A\} &= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \\ MX_1 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}, \\ MX_2 &= MX_1 = \frac{7}{2}, & M\{X_1 + X_2\} &= 7. \end{aligned}$$

Далее,

$$M\{X_1 + X_2 | \bar{A}\} = 2 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{6} = 7.$$

Следовательно,

$$7 = M\{X_1 + X_2 | A\} \cdot \frac{5}{6} + 7 \cdot \frac{1}{6},$$

откуда

$$M\{X_1 + X_2 | A\} = 7.$$

5. Пусть X — случайная величина, такая, что $P\{0 < X < 1\} = 1$. Доказать справедливость неравенства $DX < MX$.

Решение. Поскольку $DX = MX^2 - (MX)^2$, то неравенство $DX < MX$ эквивалентно неравенству

$$MX^2 - (MX)^2 < MX$$

или

$$MX^2 < MX + (MX)^2.$$

Если X — дискретная случайная величина, то

$$MX^2 = \sum_i x_i^2 P\{X = x_i\} < \sum_i x_i P\{X = x_i\} = MX,$$

ибо $0 < x_i < 1$. Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то в силу условия $P\{0 < X < 1\} = 1$ плотность $f(x)$ равна нулю вне промежутка $(0, 1)$, так что интегралы при вычислении математических ожиданий берутся по промежутку от 0 до 1:

$$MX^2 = \int_0^1 x^2 f(x) dx < \int_0^1 x f(x) dx = MX.$$

Итак, доказано неравенство $MX^2 < MX$, а значит, и $MX^2 < MX + +(MX)^2$.

6. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 . Случайная величина Y не зависит от случайных величин X_1, X_2, \dots и принимает натуральные значения, причем $MY = b$, $DY = d$. Пусть

$$Z = \sum_{i=1}^Y X_i.$$

Найти MZ и DZ .

Решение. Для решения этой задачи введем понятие характеристической функции. *Характеристической функцией* произвольной случайной величины W называется функция действительного переменного

$$f_W(t) = M\{e^{itW}\}, \quad (10)$$

где i — мнимая единица: $i^2 = -1$. Известно, что если $M\{|W|^k\} < \infty$ для некоторого натурального k , то

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} f_W(t) \right|_{t=0} = i^k M\{W^k\}.$$

Этот результат получается непосредственно из (10) последовательным дифференцированием обеих частей равенства и использованием свойства перестановочности операций взятия математического ожидания и дифференцирования.

Вернемся к решению задачи. Найдем условную характеристическую функцию $f_Z(t | k)$ случайной величины Z при условии $Y = k$:

$$\begin{aligned} f_Z(t | k) &= M\{e^{itZ} | Y = k\} = M\{e^{it(X_1+X_2+\dots+X_k)}\} = \\ &= M\{e^{itX_1}\} M\{e^{itX_2}\} \dots M\{e^{itX_k}\} = (f_X(t))^k, \end{aligned}$$

где $f_X(t)$ — характеристическая функция случайной величины X_j для любого $j = 1, 2, \dots$. Для безусловной характеристической функции $f_Z(t)$ имеем

$$f_Z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_Z(t|k) P\{Y=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} (f_X(t))^k p_k,$$

где $p_k = P\{Y=k\}$.

Найдем математическое ожидание. Имеем

$$\begin{aligned} iMZ &= \frac{df_Z(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} k(f_X(t))^{k-1} \frac{df_X(t)}{dt} p_k \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kp_k \frac{df_X(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{df_X(t)}{dt} \Big|_{t=0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = iMX \cdot MY, \end{aligned}$$

откуда

$$MZ = MX \cdot MY = mb.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся тождеством $DZ = MZ^2 - (MZ)^2$. С этой целью найдем MZ^2 :

$$\begin{aligned} i^2 MZ^2 &= \frac{d^2 f_Z(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kp_k \left[(k-1)(f_X(t))^{k-2} \left(\frac{df_X(t)}{dt} \right)^2 + (f_X(t))^{k-1} \frac{d^2 f_X(t)}{dt^2} \right] \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kp_k \left[(k-1) \left(\frac{df_X(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right)^2 + \frac{d^2 f_X(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kp_k ((k-1)(iMX)^2 + i^2 MX^2) = \\ &= i^2 MX^2 \sum_{k=1}^{\infty} kp_k + (iMX)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)kp_k. \end{aligned}$$

Поскольку $MX = m$, $MX^2 = DX + (MX)^2 = \sigma^2 + m^2$, то получаем

$$MZ^2 = (\sigma^2 + m^2) \sum_{k=1}^{\infty} kp_k + m^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)kp_k.$$

Далее, $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = MY = b$. Осталось найти сумму $\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)kp_k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)kp_k &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \\ &= MY^2 - MY = DY + (MY)^2 - MY = d + b^2 - b. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$MZ^2 = (\sigma^2 + m^2)b + m^2(d + b^2 - b) = \sigma^2b + m^2d + m^2b^2,$$

так что

$$DZ = MZ^2 - (MZ)^2 = \sigma^2b + m^2d.$$

7. Пусть число N падающих на единицу поверхности тела за время τ , имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda\tau$, где λ — постоянная, называемая *интенсивностью* потока частиц. Каждая частица независимо от других сообщает телу энергию ε , равномерно распределенную на отрезке $[0, c]$. Найти математическое ожидание и дисперсию энергии, получаемой единицей поверхности тела за время τ .

Решение. Энергию, получаемую единицей поверхности тела за время τ , можно представить случайной величиной

$$Z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N,$$

где случайная величина N — число частиц, упавших на единицу поверхности за время τ , ε_i — случайная величина — энергия, переданная i -й упавшей частицей, $i = 1, 2, \dots, N$. Поскольку ε_i равномерно распределена на $[0, c]$, то

$$M\varepsilon_i = \frac{c}{2}, \quad D\varepsilon_i = \frac{c^2}{12}.$$

Поскольку случайная величина N распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda\tau$, то

$$MN = DN = \lambda\tau.$$

Наконец, в силу того, что случайные величины $N, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ независимы, можно воспользоваться результатом решения задачи 6 и написать:

$$MZ = M\varepsilon_i \cdot MN = \frac{c}{2}\lambda\tau,$$

$$DZ = D\varepsilon_i \cdot MN + (M\varepsilon_i)^2 \cdot DN = \frac{c^2}{12}\lambda\tau + \frac{c^2}{4}\lambda\tau = \frac{c^2\lambda\tau}{3}.$$

8. Рассмотрим испытания Бернулли с переменной вероятностью успеха. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — независимые случайные величины, такие, что X_k принимает значения 1 или 0 с вероятностя-

ми соответственно p_k и $q_k = 1 - p_k$. Тогда, очевидно, $MX_k = p_k$, $DX_k = q_k p_k$. Положим

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Случайную величину S_n можно рассматривать как число успехов в серии испытаний Бернулли с вероятностью успеха p_k в k -м испытании, $k = 1, 2, \dots, n$. Имеем

$$MS_n = \sum_{k=1}^n p_k, \quad DS_n = \sum_{k=1}^n q_k p_k.$$

Величину $p = (p_1 + p_2 + \dots + p_n)/n$ естественно назвать *средней вероятностью успеха*. Как изменится дисперсия DS_n при переходе к обычной схеме Бернулли, когда p — вероятность успеха в каждом испытании — постоянная величина?

Решение. Перепишем результат для DS_n в виде

$$DS_n = \sum_{k=1}^n (1 - p_k)p_k = \sum_{k=1}^n p_k - \sum_{k=1}^n p_k^2 = np - \sum_{k=1}^n p_k^2. \quad (11)$$

Из всех комбинаций p_k , $k = 1, 2, \dots, n$, таких, что $\sum_{k=1}^n p_k = np$, сумма $\sum_{k=1}^n p_k^2$ имеет наименьшее значение, когда все p_k равны.

Действительно, рассмотрим задачу на условный экстремум:

$$\sum_{k=1}^n p_k^2 \rightarrow \min \quad \text{при условии} \quad \sum_{k=1}^n p_k = np.$$

Вводя функцию Лагранжа

$$L = \sum_{k=1}^n p_k^2 + \lambda \left(\sum_{k=1}^n p_k - np \right)$$

и записав необходимое условие условного экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial p_k} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \end{cases}$$

найдем

$$\begin{cases} 2p_1 + \lambda = 0, \\ \dots \\ 2p_k + \lambda = 0, \\ \sum_{k=1}^n p_k - np = 0, \end{cases}$$

откуда

$$p_1 = p_2 = \dots = p_k = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n} = p.$$

То, что это точка минимума, следует теперь из условия (обозначим $\Delta p_k = p_k - p$)

$$\sum_{k=1}^n (p + \Delta p_k)^2 - \sum_{k=1}^n p^2 > 0,$$

ибо левая часть неравенства преобразуется к виду

$$\sum_{k=1}^n 2p\Delta p_k + \sum_{k=1}^n (\Delta p_k)^2 = 2p \sum_{k=1}^n \Delta p_k + \sum_{k=1}^n (\Delta p_k)^2 = \sum_{k=1}^n (\Delta p_k)^2.$$

Здесь учтено, что $\sum_{k=1}^n \Delta p_k = 0$, поскольку $\sum_{k=1}^n p_k = \text{const.}$

Вернемся к равенству (11). Получается, что если средняя вероятность успеха p остается постоянной, то дисперсия случайной величины S_n достигает максимума при $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$. Таким образом, получен неожиданный результат: изменение значений p_k , или их неодинаковость, уменьшает величину случайных флуктуаций, которая характеризуется дисперсией. Например, чи-слло пожаров в городе за год можно рассматривать как случайную величину; при фиксированном среднем значении вероятности пожара строений дисперсия числа пожаров максимальна, если вероятности пожара для всех строений одинаковы.

9. Деревья в лесу растут в случайных точках, которые образуют пуассоновское поле с плотностью λ (среднее число деревьев на единицу площади), так что вероятность того, что участок леса площадью S содержит ровно m деревьев, равна $(\lambda S)^m e^{-\lambda S} / m!$, $m = 1, 2, \dots$. Выберем произвольную точку O в этом лесу. Пусть случайная величина R — расстояние между точкой O и ближайшим к нему деревом. Найти математическое ожидание MR и дисперсию DR .

Решение. Найдем функцию распределения $F(r)$ случайной величины R . Для этого проведем вокруг точки O окружность радиуса r . Для того чтобы расстояние R от этой точки до ближайшего к ней дерева было меньше r , надо, чтобы в круг попало хотя бы одно дерево. Пусть событие A означает, что в круг радиуса r с центром в т. O попало хотя бы одно дерево. Тогда

$$F(r) = P\{R < r\} = P\{A\} = 1 - P\{\bar{A}\} = 1 - e^{-\pi r^2 \lambda}.$$

Следовательно, плотность распределения $f(r)$ случайной величины R

$$f(r) = \frac{dF(r)}{dr} = \begin{cases} 2\pi\lambda r e^{-\pi\lambda r^2}, & r > 0; \\ 0, & r \leq 0. \end{cases}$$

Поэтому математическое ожидание

$$\begin{aligned} MR &= \int_0^{+\infty} r f(r) dr = \int_0^{+\infty} 2\pi\lambda r^2 e^{-\pi\lambda r^2} dr = \\ &= \int_0^{+\infty} r d(e^{-\pi\lambda r^2}) = (-re^{-\pi\lambda r^2})|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\pi\lambda r^2} dr = \int_0^{+\infty} e^{-\pi\lambda r^2} dr. \end{aligned}$$

Для вычисления последнего интеграла введем новую переменную интегрирования $t = r\sqrt{2\pi\lambda}$. Тогда

$$MR = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}.$$

Вычислим теперь дисперсию:

$$DR = MR^2 - (MR)^2 = \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr - \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^2 = \int_0^{+\infty} 2\pi\lambda r^3 e^{-\pi\lambda r^2} dr - \frac{1}{4\lambda}.$$

Вводя новую переменную интегрирования $u = r^2$, получим

$$\begin{aligned} DR &= \int_0^{+\infty} \pi\lambda u e^{-\pi\lambda u} du - \frac{1}{4\lambda} = \int_0^{+\infty} u d(-e^{-\pi\lambda u}) - \frac{1}{4\lambda} = \\ &= (-ue^{-\pi\lambda u})|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\pi\lambda u} du - \frac{1}{4\lambda} = \\ &= -\frac{1}{\pi\lambda} e^{-\pi\lambda u}|_0^{+\infty} - \frac{1}{4\lambda} = \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{1}{4\lambda} = \frac{4-\pi}{4\pi\lambda}. \end{aligned}$$

10. Некоторая урна содержит шары с номерами от 1 до N . Пусть X — наибольший номер, полученный при n извлечениях, если производится случайный выбор с возвращением. Найти MX .

Решение. Пусть случайная величина X_i — номер вынутого шара при i -м извлечении, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$X = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

По определению

$$MX = \sum_{k=1}^N k P\{X = k\}.$$

Найдем $P\{X = k\}$. Для этого рассмотрим вероятность

$$\begin{aligned} P\{X \leq k\} &= P\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} \leq k\} = \\ &= P\{X_1 \leq k, X_2 \leq k, \dots, X_n \leq k\}^{(1)}. \end{aligned}$$

В силу независимости случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n последняя вероятность равна произведению

$$P\{X_1 \leq k\} P\{X_2 \leq k\} \dots P\{X_n \leq k\} = \left(\frac{k}{N}\right)^n,$$

так что

$$P\{X \leq k\} = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Аналогично

$$P\{X \leq k - 1\} = \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$

Теперь заметим, что поскольку X может принимать только натуральные значения, то

$$P\{X \leq k\} = P\{X \leq k - 1\} + P\{X = k\},$$

откуда

$$P\{X = k\} = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$

⁽¹⁾ Перечислением событий через запятую обозначается их произведение.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 MX &= \sum_{k=1}^N k P\{X = k\} = \sum_{k=1}^N \frac{k^{n+1} - k(k-1)^n}{N^n} = \\
 &= \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N (k^{n+1} - ((k-1)+1)(k-1)^n) = \\
 &= \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^N (k^{n+1} - (k-1)^{n+1} - (k-1)^n) = \\
 &= \frac{1}{N^n} \left(\sum_{k=1}^N (k^{n+1} - (k-1)^{n+1}) - \sum_{k=1}^N (k-1)^n \right) = \\
 &= \frac{1}{N^n} \left(N^{n+1} - \sum_{k=1}^N (k-1)^n \right).
 \end{aligned}$$

При больших N последняя сумма приближенно равна площади области, лежащей ниже кривой $y = x^n$ и ограниченной прямыми $x = 0$ и $x = N$, т. е. величине

$$\int_0^N x^n dx = \frac{N^{n+1}}{n+1}.$$

Поэтому при больших N

$$MX \approx \frac{1}{N^n} \left(N^{n+1} - \frac{N^{n+1}}{n+1} \right) = \frac{n}{n+1} N.$$

Если в городе имеется $N = 1000$ машин и производится случайная выборка объемом $n = 10$, то математическое ожидание максимального наблюденного регистрационного номера приближенно равно 910. В прикладной статистике наблюденный максимум выборки используется для оценки неизвестного истинного значения N .

11. Пусть случайная величина Y имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $MY = a$ и дисперсией $DY = \sigma^2$. Рассмотрим случайную величину $X = e^Y$, так что $Y = \ln X$. В этом случае говорят, что случайная величина X имеет *логарифмически нормальное* (логнормальное) распределение. Требуется найти функцию распределения, плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Решение. По определению, функция распределения $F_X(x)$ случайной величины X есть

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{e^Y < x\}.$$

При $x \leq 0$ эта вероятность равна нулю. Считая далее $x > 0$, имеем:

$$P\{e^Y < x\} = P\{Y < \ln x\} = \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-a)^2/(2\sigma^2)} dt.$$

Переходя к новой переменной интегрирования $z = (t - a)/\sigma$, последний интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{(\ln x - a)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz + \int_0^{(\ln x - a)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

— табулированная функция Лапласа. Таким образом,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\ln x - a}{\sigma}\right), & x > 0; \end{cases}$$

Для плотности распределения $f_X(x)$ случайной величины X получим

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - a)^2/(2\sigma^2)}, & x > 0. \end{cases}$$

Найдем теперь математическое ожидание MX :

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\ln x - a)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Переходя в последнем интеграле к новой переменной интегрирования $u = (\ln x - a)/\sigma$, получим

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} e^{\sigma u + a} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u^2 - 2\sigma u + \sigma^2)/2 + \sigma^2/2 + a} du = \\ &= e^{\sigma^2/2 + a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u - \sigma)^2/2} du = e^{\sigma^2/2 + a}. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления для дисперсии

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f_X(x) dx$$

дают следующий результат:

$$DX = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

§ 7. Системы случайных величин

Совокупность n случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) , рассматриваемых совместно, называется *системой n случайных величин*. Функцией распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы n случайных величин называется вероятность совместного выполнения системы n неравенств $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$, т. е.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n\}.$$

Остановимся более подробно на случае $n = 2$, а систему (X_1, X_2) будем обозначать (X, Y) . *Функция распределения системы (X, Y) есть*

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}.$$

Она обладает следующими свойствами:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0;$$

кроме того, для любого значения y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0;$$

для любого значения x

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0;$$

2) если $F_X(x)$ — функция распределения случайной величины X , а $F_Y(y)$ — функция распределения случайной величины Y , то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_Y(y), \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = F_X(x);$$

при этом

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1;$$

- 3) $F(x, y)$ — неубывающая функция переменных x и y ;
4) для независимых случайных величин X и Y

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Если существует функция $f(x, y)$, такая, что функция распределения $F(x, y)$ представима в виде

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) du dv,$$

то функция $f(x, y)$ называется *плотностью (совместного) распределения системы (X, Y)* . Она обладает следующими свойствами:

- 1) $f(x, y) \geq 0$;
- 2) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в какую-либо область G на плоскости равна

$$\iint_G f(x, y) dx dy;$$

- 3) если функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (\tilde{x}, \tilde{y}) , то вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник

$$\tilde{x} \leq x < \tilde{x} + \Delta x, \quad \tilde{y} \leq y < \tilde{y} + \Delta y$$

с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $f(\tilde{x}, \tilde{y}) \Delta x \Delta y$;

- 4) если $f_X(x)$ — плотность распределения случайной величины X , а $f_Y(y)$ — плотность распределения случайной величины Y , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = f_X(x), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = f_Y(y);$$

- 5) для независимых случайных величин X, Y

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y);$$

- 6) в точках непрерывности функции $f(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Следующим важным понятием, характеризующим свойства системы случайных величин, является понятие корреляционного момента, или ковариации двух случайных величин. *Корреляционным моментом K_{XY} , или ковариацией $\text{cov}(X, Y)$ двух случайных величин X и Y* называется число

$$\text{cov}(X, Y) = M\{(X - MX)(Y - MY)\}.$$

Правую часть этого равенства можно преобразовать к виду $M\{XY\} - M\{X\}M\{Y\}$. Случайные величины, удовлетворяющие условию

$$\text{cov}(X, Y) = 0,$$

называются *некоррелированными*. Этому условию, в частности, удовлетворяют независимые случайные величины. Отметим, что обратное неверно: из некоррелированности случайных величин, вообще говоря, не следует их независимость.

Нетрудно показать, что

$$D\{X \pm Y\} = DX + DY \pm 2 \text{cov}(X, Y). \quad (1)$$

В частности, для независимых случайных величин $D\{X \pm Y\} = DX + DY$.

Обобщением результата (1) является следующий. Если X_1, X_2, \dots, X_n — произвольная система случайных величин, каждая из которых имеет конечную дисперсию, то

$$D\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = \sum_{i=1}^n DX_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(X_i, Y_j).$$

В частности, если все дисперсии DX и ковариации $\text{cov}(X_i, Y_j)$ одинаковы: $DX_i = d$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$; $\text{cov}(X_i, X_j) = K$ для любых $i \neq j$, то

$$D\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = nd + n(n-1)K. \quad (2)$$

Наряду с понятием ковариации используется понятие коэффициента корреляции. *Коэффициентом корреляции* r_{xy} случайных величин X и Y называется безразмерная величина

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y},$$

где $\sigma_x = \sqrt{DX}$, $\sigma_y = \sqrt{DY}$. Для любых двух случайных величин $|r_{xy}| \leq 1$. Если случайные величины X, Y связаны линейной зависимостью вида $Y = \alpha X + \beta$, где $\alpha \neq 0$, β — фиксированные постоянные, то их коэффициент корреляции равен 1 при $\alpha > 0$ и -1 при $\alpha < 0$. Для независимых случайных величин X, Y выполняется $r_{xy} = 0$.

Отметим также полезные свойства ковариации, непосредственно следующие из ее определения:

- 1) $\text{cov}(\alpha X, Y) = \text{cov}(X, \alpha Y) = \alpha \text{cov}(X, Y)$, где $\alpha = \text{const}$;
- 2) $\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$;
- 3) $\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z)$.

Приведем теперь примеры двумерных распределений.

Пример 1. Двумерная случайная величина (X, Y) называется *равномерно распределенной* в области G , если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \notin G; \\ 1/S_G, & \text{если } (x, y) \in G. \end{cases}$$

Здесь S_G — площадь области G .

Пример 2. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет *невырожденное нормальное распределение*, если ее плотность распределения представима в виде:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)^2}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_y^2}\right)\right\}, \end{aligned}$$

где $a, b, \sigma_x, \sigma_y, r$ — параметры, причем $\sigma_x > 0, \sigma_y > 0, |r| < 1$. При этом параметры $a, b, \sigma_x, \sigma_y, r$ имеют следующий вероятностный смысл: a, b — математические ожидания случайных величин X, Y ; $a = MX, b = MY$; σ_x, σ_y — среднеквадратичные отклонения случайных величин X, Y ; $\sigma_x = \sqrt{DX}, \sigma_y = \sqrt{DY}$; r — коэффициент корреляции случайных величин X и Y : $r = \text{cov}(X, Y)/(\sigma_x\sigma_y)$.

Задачи

1. В группе из 15 человек 5 имеют доход 1, другие 5 имеют доход 2, а оставшиеся 5 человек имеют доход 3. Из данной группы случайно отбирают двух человек. Найти ковариацию их доходов.

Решение. Пусть случайная величина X_1 — доход первого выбранного человека, а случайная величина X_2 — доход второго выбранного человека. Тогда искомая ковариация есть

$$\text{cov}(X_1, X_2) = M\{X_1X_2\} - M\{X_1\}M\{X_2\}.$$

Найдем законы распределения случайных величин X_1, X_2 и $Y = X_1X_2$. Закон распределения случайной величины X_1 очевиден:

X_1	1	2	3
P	1/3	1/3	1/3

Найдем закон распределения для X_2 . Возможные значения для X_2 — это по-прежнему числа 1, 2, 3. Соответствующие вероятности найдем по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P\{X_2 = 1\} &= P\{X_2 = 1 | X_1 = 1\} P\{X_1 = 1\} + \\ &+ P\{X_2 = 1 | X_1 = 2\} P\{X_1 = 2\} + P\{X_2 = 1 | X_1 = 3\} P\{X_1 = 3\} = \\ &= \frac{4}{14} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

где в качестве полной группы событий выступают события $X_1 = 1$, $X_1 = 2$, $X_1 = 3$. Аналогично устанавливается, что

$$P\{X_2 = 2\} = \frac{1}{3}, \quad P\{X_2 = 3\} = \frac{1}{3},$$

т. е. закон распределения случайной величины X_2 совпадает с законом распределения случайной величины X_1 :

X_2	1	2	3
P	1/3	1/3	1/3

.

Этот результат можно объяснить так. Для наблюдателя, не знающего, какой человек был выбран первым, а какой — вторым, оба выбранных человека и соответствующие им случайные величины X_1 и X_2 равнозначны и, следовательно, последние должны иметь одинаковые распределения.

Найдем теперь закон распределения случайной величины $Y = X_1 X_2$. Ее возможные значения: 1, 2, 3, 4, 6, 9. Найдем соответствующие вероятности. Имеем:

$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &= P\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \\ &= P\{X_2 = 1 | X_1 = 1\} P\{X_1 = 1\} = \frac{4}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{21}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$P\{Y = 4\} = \frac{2}{21}, \quad P\{Y = 9\} = \frac{2}{21}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} P\{Y = 2\} &= P\{X_1 = 1, X_2 = 2\} + P\{X_1 = 2, X_2 = 1\} = \\ &= P\{X_2 = 2 | X_1 = 1\} P\{X_1 = 1\} + P\{X_2 = 1 | X_1 = 2\} P\{X_1 = 2\} = \\ &= \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{14} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$P\{Y = 3\} = \frac{5}{21}, \quad P\{Y = 6\} = \frac{5}{21}.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины $Y = X_1 X_2$ имеет следующий вид:

Y	1	2	3	4	6	9
P	$2/21$	$5/21$	$5/21$	$2/21$	$5/21$	$2/21$

Найдем теперь математические ожидания:

$$MX_1 = MX_2 = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2,$$

$$M\{X_1 X_2\} = 1 \cdot \frac{2}{21} + 2 \cdot \frac{5}{21} + 3 \cdot \frac{5}{21} + 4 \cdot \frac{2}{21} + 6 \cdot \frac{5}{21} + 9 \cdot \frac{2}{21} = \frac{83}{21}.$$

Следовательно,

$$\text{cov}(X_1, X_2) = M\{X_1 X_2\} - M\{X_1\} M\{X_2\} = \frac{83}{21} - 2 \cdot 2 = -\frac{1}{21}.$$

2. В условиях задачи 1 из данной группы людей случайно отбираются 5 человек. Найти дисперсию суммарного дохода отобранных людей.

Решение. Пусть X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 — доходы отобранных людей. Случайные величины X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 имеют одинаковое распределение (см. решение предыдущей задачи), определяемое таблицей

X_i	1	2	3
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

здесь $i = 1, 2, 3, 4, 5$, причем $\text{cov}(X_i, X_j) = -\frac{1}{21}$ при любых $i \neq j$. Поскольку

$$DX_i = MX_i^2 - (MX_i)^2 = \frac{2}{3},$$

то по формуле (2) получаем

$$D\{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5\} = 5 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{21}\right) = \frac{50}{21}.$$

3. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие плотности распределения $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Образуется двумерная случайная величина (X_1, X_2) , где $X_1 = \min\{X, Y\}$, $X_2 = \max\{X, Y\}$. Найти плотность совместного распределения системы (X_1, X_2) .

Решение. Обозначим $F(x) = P\{X < x\}$, $G(x) = P\{Y < x\}$. Тогда $f(x) = F'(x)$, $g(x) = G'(x)$. Для функции $\tilde{F}(x_1, x_2)$ распределения системы (X_1, X_2) имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x_1, x_2) &= P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\} = \\ &= P\{\min\{X, Y\} < x_1, \max\{X, Y\} < x_2\} = \\ &= P\{(X < x_1) + (Y < x_1))(X < x_2)(Y < x_2)\} = \\ &= P\{(X < x_1)(X < x_2)(Y < x_2) + (Y < x_1)(X < x_2)(Y < x_2)\} = \\ &= P\{(X < \min\{x_1, x_2\})(Y < x_2) + (Y < \min\{x_1, x_2\})(X < x_2)\} = \\ &\quad = F(\min\{x_1, x_2\})G(x_2) + G(\min\{x_1, x_2\})F(x_2) - \\ &\quad - P\{X < \min\{x_1, x_2\}, Y < \min\{x_1, x_2\}, Y < x_2, X < x_2\} = \\ &\quad = F(\min\{x_1, x_2\})G(x_2) + G(\min\{x_1, x_2\})F(x_2) - \\ &\quad - P\{X < \min\{x_1, x_2\}, Y < \min\{x_1, x_2\}\} = \\ &= \begin{cases} F(x_1)G(x_2) + G(x_1)F(x_2) - F(x_1)G(x_1) & \text{при } x_1 \leq x_2; \\ F(x_2)G(x_2) + G(x_2)F(x_2) - F(x_2)G(x_2) = F(x_2)G(x_2) & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases}\end{aligned}$$

Отсюда для плотности $\tilde{f}(x_1, x_2)$ совместного распределения системы (X_1, X_2) получим

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 \tilde{F}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \begin{cases} f(x_1)g(x_2) + g(x_1)f(x_2) & \text{при } x_1 \leq x_2; \\ 0 & \text{при } x_1 > x_2. \end{cases}$$

4. Пусть X и Y — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметрами λ_x и λ_y соответственно. Доказать, что случайная величина $Z = X + Y$ имеет распределение Пуассона. Выявить вид условного распределения случайной величины X при фиксированном значении случайной величины $X + Y$.

Решение. По условию

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda_x^k}{k!} e^{-\lambda_x}, \quad P\{Y = k\} = \frac{\lambda_y^k}{k!} e^{-\lambda_y},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. Найдем вероятность

$$\begin{aligned}
 P\{X + Y = m\} &= P\{X = 0, Y = m\} + P\{X = 1, Y = m - 1\} + \dots \\
 &\quad \dots + P\{X = m - 1, Y = 1\} + P\{X = m, Y = 0\} = \\
 &= \sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda_x^k}{k!} e^{-\lambda_x} \cdot \frac{\lambda_y^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_y} \right) = e^{-(\lambda_x + \lambda_y)} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_x^k \lambda_y^{m-k}}{k!(m-k)!} = \\
 &= e^{-(\lambda_x + \lambda_y)} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \lambda_x^k \lambda_y^{m-k} = \\
 &= e^{-(\lambda_x + \lambda_y)} \frac{1}{m!} (\lambda_x + \lambda_y)^m = \frac{(\lambda_x + \lambda_y)^m}{m!} e^{-(\lambda_x + \lambda_y)},
 \end{aligned}$$

т. е. случайная величина $X + Y$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda_x + \lambda_y$.

Найдем теперь условную вероятность

$$\begin{aligned}
 P\{X = k | X + Y = m\} &= \frac{P\{X = k, X + Y = m\}}{P\{X + Y = m\}} = \\
 &= \frac{P\{X = k, Y = m - k\}}{P\{X + Y = m\}} = \frac{\frac{\lambda_x^k}{k!} e^{-\lambda_x} \cdot \frac{\lambda_y^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_y}}{\frac{(\lambda_x + \lambda_y)^m}{m!} e^{-(\lambda_x + \lambda_y)}} = \\
 &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{\lambda_x^k \lambda_y^{m-k}}{(\lambda_x + \lambda_y)^m} = C_m^k \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_x + \lambda_y} \right)^k \left(\frac{\lambda_y}{\lambda_x + \lambda_y} \right)^{m-k},
 \end{aligned}$$

т. е. условное распределение случайной величины X при фиксированном значении случайной величины $X + Y = m$ есть биномиальное распределение с параметрами m и $p = \lambda_y / (\lambda_x + \lambda_y)$.

5. Пусть X — центрированная (т. е. имеющая нулевое математическое ожидание) нормально распределенная случайная величина. Найти коэффициент корреляции случайных величин X и $Y = X^n$, где n — натуральное.

Решение. По определению

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Далее,

$$\text{cov}(X, Y) = M\{XY\} - M\{X\}M\{Y\}.$$

Поскольку по условию $M\{X\} = 0$, то

$$\text{cov}(X, Y) = M\{XY\} = M\{X^{n+1}\}.$$

Так как

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)}$$

— плотность распределения случайной величины X , то

$$M\{X^{n+1}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} x^{n+1} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)} dx.$$

Если $n = 2k$, то подынтегральная функция нечетна и $M\{X^{n+1}\} = 0$.
Пусть $n = 2k - 1$. Тогда

$$M\{X^{n+1}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} x^{2k} e^{-x^2/(2\sigma_x^2)} dx,$$

откуда, переходя к новой переменной интегрирования $t = x/\sigma_x$, получаем

$$\begin{aligned} M\{X^{n+1}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_x^{2k} t^{2k} e^{-t^2/2} dt = \\ &= \frac{\sigma_x^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k-1} d(-e^{-t^2/2}) dt = \\ &= \frac{\sigma_x^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -t^{2k-1} e^{-t^2/2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} (2k-1)t^{2k-2} e^{-t^2/2} dt \right\} = \\ &= \frac{\sigma_x^{2k}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (2k-1)t^{2k-2} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Если обозначить

$$I_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{2k} e^{-t^2/2} dt,$$

то

$$I_{2k} = (2k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{2k-2} e^{-t^2/2} dt = (2k-1)I_{2k-2},$$

т. е.

$$\begin{aligned} I_{2k} &= (2k-1)I_{2k-2} = (2k-1)(2k-3)I_{2k-4} = \dots \\ &\dots = (2k-1)(2k-3)\dots(2k-(2k-1))I_0 = \\ &= (2k-1)!! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = (2k-1)!!.. \end{aligned}$$

Таким образом, при $n = 2k - 1$

$$M\{X^{n+1}\} = M\{X^{2k}\} = \sigma_x^{2k}(2k-1)!!.. \quad (3)$$

Далее,

$$\sigma_y^2 = D\{Y\} = D\{X^n\} = M\{X^{2n}\} - (M\{X^n\})^2.$$

При $n = 2k - 1$ имеем $\sigma_y^2 = M\{X^{4k-2}\}$, откуда по аналогии с результатом (3)

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^{4k-2}(4k-3)!!., \quad \text{или} \quad \sigma_y = \sigma_x^{2k-1}\sqrt{(4k-3)!!.}$$

Значит, при $n = 2k - 1$ (т. е. при нечетном n)

$$r_{xy} = \frac{\sigma_x^{2k}(2k-1)!!.}{\sigma_x \sigma_x^{2k-1} \sqrt{(4k-3)!!.}} = \frac{(2k-1)!!.}{\sqrt{(4k-3)!!.}}$$

В частности, если $n = 1$, то $r_{xy} = 1$; если $n = 3$, то $r_{xy} = \frac{3}{\sqrt{15}}$;
если $n = 5$, то $r_{xy} = \frac{\sqrt{15}}{3\sqrt{7}}$. Если же $n = 2k$ (т. е. если n четно), то $r_{xy} = 0$.

6. Доказать, что коэффициент корреляции случайных величин по модулю не превосходит единицы.

Решение. Пусть r — коэффициент корреляции случайных величин X и Y . Поскольку

$$D\{X + Y\} = DX + DY + 2r\sqrt{DX}\sqrt{DY},$$

то

$$\frac{D\{X + Y\}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{DY}} + \frac{\sqrt{DY}}{\sqrt{DX}} + 2r.$$

Пусть $t = \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{DY}}$. Тогда

$$\forall t > 0 \quad t + \frac{1}{t} + 2r \geq 0,$$

откуда

$$r \geq -\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad \forall t > 0.$$

Из последнего условия следует, что $r \geq -1$, ибо $\min_{t>0} \left(t + \frac{1}{t} \right) = 2$.

Аналогично,

$$D\{X - Y\} = DX + DY - 2r\sqrt{DX}\sqrt{DY},$$

$$\frac{D\{X - Y\}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{DY}} + \frac{\sqrt{DY}}{\sqrt{DX}} - 2r.$$

Если $t = \frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{DY}}$, то

$$\forall t > 0 \quad t + \frac{1}{t} - 2r \geq 0,$$

откуда

$$r \leq \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad \forall t > 0.$$

Из последнего условия следует, что $r \leq 1$. Таким образом, $|r| \leq 1$.

7. Пусть X и Y — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезках $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ соответственно. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Решим сначала следующую общую задачу: найти плотность распределения $f_Z(z)$ случайной величины $Z = X + Y$, если случайные величины X и Y независимы и имеют плотности распределений $f_X(x)$ и $f_Y(y)$ соответственно. Рассмотрим приближение непрерывной случайной величины X дискретной случайной величиной \tilde{X} подобно тому, как это было сделано в § 6 при выводе формулы для математического ожидания непрерывной случайной величины. Для функции распределения случайной величины Z можем написать

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{X+Y < z\} \approx P\{\tilde{X}+Y < z\} = \sum_i P\{\tilde{X} = x_i, Y < z-x_i\} = \\ &= \sum_i P\{\tilde{X} = x_i\} P\{Y < z-x_i\} = \sum_i f_X(x_i) \Delta x_i F_Y(z-x_i). \end{aligned}$$

В пределе при уменьшении шага дискретизации последняя сумма будет стремиться к интегралу

$$\int_a^b f_X(x) F_Y(z-x) dx,$$

где (a, b) — промежуток изменения случайной величины X . Если X может принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$, то интеграл будет несобственным и в общем случае

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) F_Y(z - x) dx,$$

откуда, дифференцируя обе части равенства по z , получаем

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx.$$

Следовательно, в нашем случае равномерных распределений для X и Y имеем:

$$f_Z(z) = \int_{a_1}^{b_1} \frac{f_Y(z - x)}{b_1 - a_1} dx, \quad (4)$$

где

$$f_Y(z - x) = \begin{cases} \frac{1}{b_2 - a_2} & \text{при } a_2 \leq z - x \leq b_2, \\ 0 & \text{при } z - x \notin [a_2, b_2]. \end{cases}$$

Вычислим интеграл (4). Условие $a_2 \leq z - x \leq b_2$ эквивалентно условию

$$z - b_2 \leq x \leq z - a_2.$$

В зависимости от различных значений переменной z (которая при вычислении интеграла (4) выступает в роли параметра) результат вычисления (4) будет следующим.

При



т. е. при $z - a_2 \leq a_1$, или $z \leq a_1 + a_2$, будет $f_Z(z) = 0$.

При



т. е. при одновременном выполнении условий

$$a_1 \leq z - a_2 \leq b_1, \quad z - b_2 \leq a_1,$$

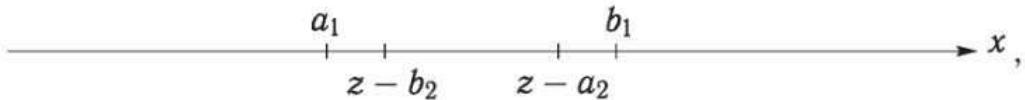
или

$$a_1 + a_2 \leq z \leq a_2 + b_1, \quad z \leq a_1 + b_2$$

(положим для определенности $b_1 - a_1 \geq b_2 - a_2$, тогда и для z получаем условие $a_1 + a_2 \leq z \leq a_1 + b_2$), будет

$$f_Z(z) = \int_{a_1}^{z-a_2} \frac{1}{b_1 - a_1} \cdot \frac{1}{b_2 - a_2} dx = \frac{z - a_1 - a_2}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}.$$

При



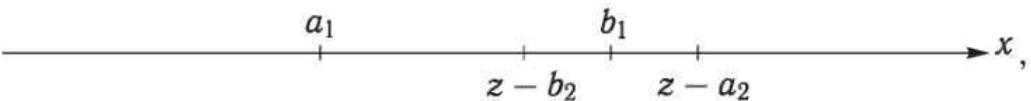
т. е. при одновременном выполнении условий

$$z - a_2 \leq b_1, \quad z - b_2 \geq a_1,$$

или $a_1 + b_2 \leq z \leq a_2 + b_1$, для функции $f_Z(z)$ получим

$$f_Z(z) = \int_{z-b_2}^{z-a_2} \frac{1}{b_1 - a_1} \cdot \frac{1}{b_2 - a_2} dx = \frac{1}{b_1 - a_1}.$$

При



т. е. при одновременном выполнении условий

$$z - a_2 \geq b_1, \quad z - b_2 \leq b_1,$$

или $a_2 + b_1 \leq z \leq b_1 + b_2$ (условие $z - b_2 \geq a_1$ при этом выполняется автоматически), для функции $f_Z(z)$ получим

$$f_Z(z) = \int_{z-b_2}^{b_1} \frac{1}{b_1 - a_1} \cdot \frac{1}{b_2 - a_2} dx = \frac{b_1 + b_2 - z}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}.$$

Наконец, при



т. е. при $z - b_2 \geq b_1$, или $z \geq b_1 + b_2$, будет $f_Z(z) = 0$.

Таким образом,

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq a_1 + a_2, \\ \frac{z - a_1 - a_2}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} & \text{при } a_1 + a_2 \leq z \leq a_1 + b_2, \\ \frac{1}{b_1 - a_1} & \text{при } a_1 + b_2 \leq z \leq a_2 + b_1, \\ \frac{b_1 + b_2 - z}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} & \text{при } a_2 + b_1 \leq z \leq b_1 + b_2, \\ 0 & \text{при } z \geq b_1 + b_2. \end{cases}$$

График функции $f_Z(z)$ будет иметь следующий вид (рис. 6).

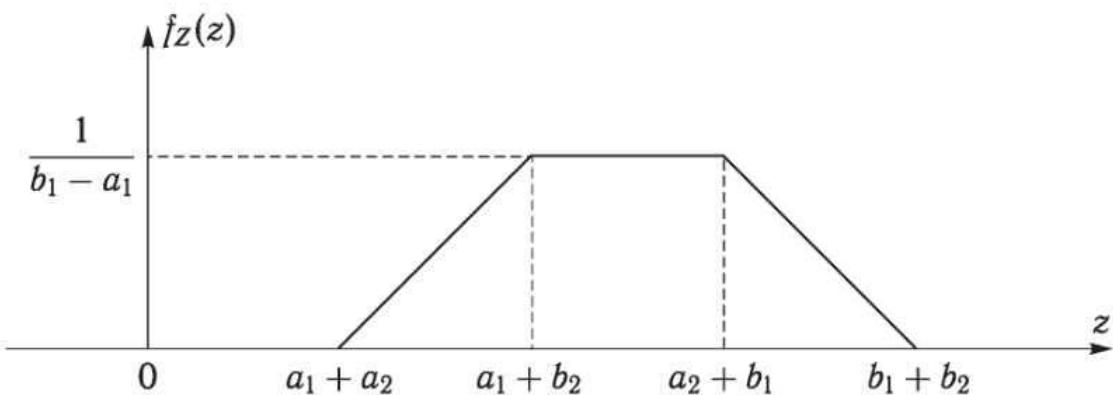


Рис. 6

8. Плотность совместного распределения системы (X, Y) имеет вид

$$f(x, y) = \begin{cases} A(x + y) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найти $P\{X + Y \geq 1\}$, MX , DX и r_{xy} .

Решение. Найдем сначала константу A из условия нормировки:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = A \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y) dx = \\ &= A \int_0^1 \left(\left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_{x=0}^{x=1} \right) dy = A \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy = A \left(\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = A, \end{aligned}$$

т. е. $A = 1$. Далее (см. рис. 7),

$$\begin{aligned} P\{X + Y \geq 1\} &= \iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 (x + y) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=1-x}^{y=1} \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

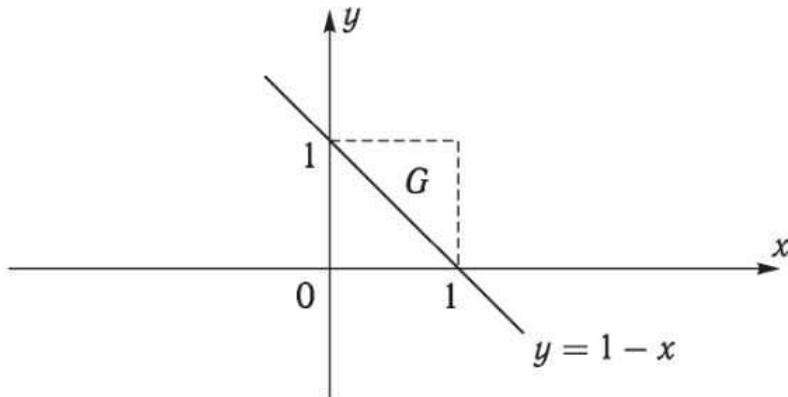


Рис. 7

Чтобы найти MX и DX , найдем сначала плотность $f_X(x)$ распределения случайной величины X :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 (x + y) dy = x + \frac{1}{2} & \text{при } x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} MX &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{7}{12}, \\ DX &= MX^2 - (MX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - (MX)^2 = \\ &= \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx - \left(\frac{7}{12} \right)^2 = \frac{11}{144}. \end{aligned}$$

Из симметрии задачи следует, что $MY = MX$, $DY = DX$.

Найдем теперь $r_{xy} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$. Поскольку

$$\text{cov}(X, Y) = M\{XY\} - M\{X\}M\{Y\},$$

то нужно найти

$$\begin{aligned} M\{XY\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 xy(x + y) dy = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12} \right)^2 = -\frac{1}{144}, \quad r_{xy} = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}} \sqrt{\frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}.$$

9. Система случайных величин X, Y распределена по нормальному закону с плотностью

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi \sqrt{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}y^2 - xy - x - 13y - \frac{25}{2} \right\}.$$

Найти математические ожидания m_x, m_y , среднеквадратичные отклонения σ_x, σ_y и коэффициент корреляции r .

Решение. Плотность двумерного нормального распределения имеет вид

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$A = \frac{1}{2(1-r^2)\sigma_x^2}, \quad B = \frac{1}{2(1-r^2)\sigma_y^2}, \quad C = \frac{r}{(1-r^2)\sigma_x\sigma_y}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}y^2 - xy - x - 13y - \frac{25}{2} &= \\ &= -A(x-m_x)^2 - B(y-m_y)^2 + C(x-m_x)(y-m_y), \end{aligned}$$

откуда методом неопределенных коэффициентов (т. е. приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и y и при xy слева и справа) получим:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{7}{2}, \quad C = -1, \\ \begin{cases} 2Am_x - Cm_y = -1, \\ 2Bm_y - Cm_x = -13, \\ -Am_x^2 - Bm_y^2 + Cm_x m_y = -\frac{25}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая последнюю систему, найдем $m_x = 1$ и $m_y = -2$.

Далее,

$$\frac{A}{B} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{7}, \quad \text{откуда} \quad \sigma_x = \sqrt{7}\sigma_y.$$

Решая теперь систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1-r^2)\sigma_y^2} = \frac{7}{2}, \\ \frac{r}{(1-r^2)\sigma_x\sigma_y} = -1, \\ \sigma_x = \sqrt{7}\sigma_y, \end{cases}$$

получим:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{7}{6}}, \quad \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad r = -\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

В заключение проверим совпадение коэффициента перед экспонентой:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{7}{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{1-\frac{1}{7}}} = \frac{1}{2\pi\frac{\sqrt{7}}{6}\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{6}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}}.$$

10. Найти плотность распределения случайной величины

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2},$$

если X_1 и X_2 — независимые и равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$ случайные величины.

Решение. Найдем сначала функцию распределения $F(y)$ случайной величины Y . Ясно, что $P\{0 < Y < 1\} = 1$ и

$$F(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \geq 1; \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим значения $y \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(y) = P\{Y < y\} &= P\left\{\frac{X_1}{X_1 + X_2} < y\right\} = P\{X_1 < y(X_1 + X_2)\} = \\ &= P\{X_1(1 - y) < yX_2\} = P\left\{X_2 > \frac{1-y}{y}X_1\right\}. \end{aligned}$$

Пусть $f(x_1, x_2)$ — плотность совместного распределения системы X_1, X_2 . Тогда, как следует из условия,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 1]; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть сначала $y \in (0, 1/2]$. Тогда $(1 - y)/y$ изменяется от $+\infty$ до 1 и (см. рис. 8)

$$\begin{aligned} P\left\{X_2 > \frac{1-y}{y}X_1\right\} &= \iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^{y/(1-y)} dx_1 \int_{x_1(1-y)/y}^1 f(x_1, x_2) dx_2 = \int_0^{y/(1-y)} \left(1 - \frac{1-y}{y}x_1\right) dx_1 = \\ &= \left(x_1 - \frac{1-y}{y} \cdot \frac{x_1^2}{2}\right) \Big|_{x_1=0}^{x_1=y/(1-y)} = \frac{y}{2(1-y)}. \end{aligned}$$

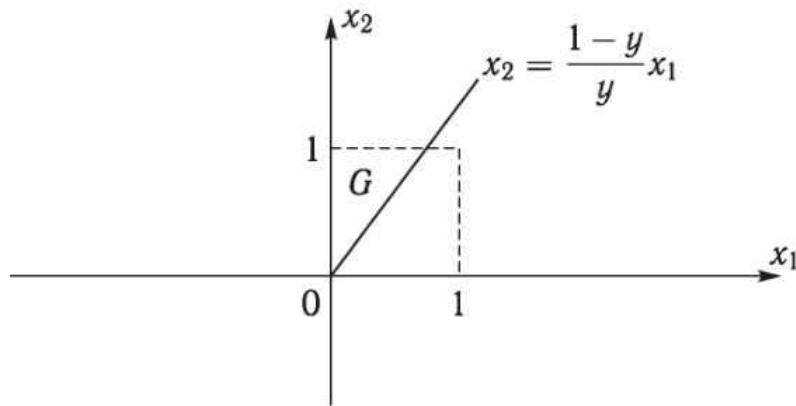


Рис. 8

Пусть теперь $y \in [1/2, 1]$. Тогда $(1-y)/y$ изменяется в пределах от 1 до 0 и (см. рис. 9)

$$\begin{aligned} P\left\{X_2 > \frac{1-y}{y} X_1\right\} &= \iint_G f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_{\frac{1-y}{y}x_1}^1 f(x_1, x_2) dx_2 = \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1-y}{y} x_1\right) dx_1 = \left(x_1 - \frac{1-y}{y} \cdot \frac{x_1^2}{2}\right) \Big|_{x_1=0}^{x_1=1} = 1 - \frac{1-y}{2y} = \frac{3y-1}{2y}. \end{aligned}$$

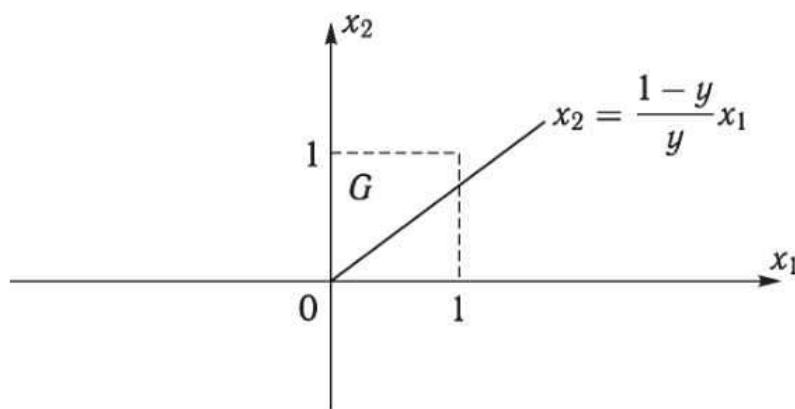


Рис. 9

Таким образом,

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0; \\ \frac{y}{2(1-y)} & \text{при } 0 < y \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{(3y-1)}{2y} & \text{при } \frac{1}{2} \leq y < 1; \\ 1 & \text{при } y \geq 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(y) = F'(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0; \\ \frac{1}{2(1-y)^2} & \text{при } 0 < y \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{1}{2y^2} & \text{при } \frac{1}{2} \leq y < 1; \\ 0 & \text{при } y \geq 1. \end{cases}$$

§ 8. Закон больших чисел и центральная предельная теорема

Пусть Y — произвольная случайная величина, такая, что существует математическое ожидание $M\{|Y|^k\}$, где $k > 0$. Тогда для любого фиксированного числа $\varepsilon > 0$ имеет место *неравенство Чебышёва*:

$$P\{|Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{|Y|^k\}}{\varepsilon^k}. \quad (1)$$

Покажем справедливость этого неравенства для случая, когда Y — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(y)$. В этом случае

$$\begin{aligned} M\{|Y|^k\} &= \int_{-\infty}^{\infty} |y|^k f(y) dy \geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} |y|^k f(y) dy + \int_{\varepsilon}^{\infty} |y|^k f(y) dy \geq \\ &\geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varepsilon^k f(y) dy + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^k f(y) dy = \\ &= \varepsilon^k \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(y) dy + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(y) dy \right) = \varepsilon^k P\{|Y| \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

откуда и следует нужное неравенство.

Рассмотрим теперь один частный случай неравенства (1), а именно: применим его к случайной величине $Y = X - m_x$, где X — некоторая случайная величина, $m_x = MX$ — ее математическое ожидание, причем положим $k = 2$. Получим:

$$P\{|X - m_x| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

откуда

$$P\{|X - m_x| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2},$$

где DX — дисперсия случайной величины X . Пусть теперь $\varepsilon = 3\sigma_x$, где $\sigma_x = \sqrt{DX}$ — среднеквадратичное отклонение случайной величины X . Тогда

$$P\{|X - m_x| < 3\sigma_x\} \geq 1 - \frac{DX}{(3\sigma_x)^2} = \frac{8}{9},$$

или

$$P\{m_x - 3\sigma_x < X < m_x + 3\sigma_x\} \geq \frac{8}{9},$$

т. е. вероятность того, что значение случайной величины отличается от ее математического ожидания менее, чем на три среднеквадратичных отклонения, не меньше $8/9$.

Следует отметить, что для многих распределений случайных величин эта вероятность значительно ближе к единице, чем $8/9$. Например, для нормального распределения она равна $0,997\dots$. Поэтому на практике в таких случаях диапазон возможных значений изучаемой случайной величины X ограничивают интервалом $(m_x - 3\sigma_x, m_x + 3\sigma_x)$, называя это упрощение *правилом трех сигм*.

Теорема 1 (теорема Чебышёва). *Пусть имеется бесконечная последовательность X_1, X_2, \dots независимых случайных величин, таких, что*

$$MX_1 = MX_2 = \dots = m; \quad DX_1 \leq c, \quad DX_2 \leq c, \quad \dots,$$

где $c > 0$ и m — постоянные. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство. Применим неравенство Чебышёва (1) к случайной величине

$$S_n - M\{S_n\}, \quad \text{где} \quad S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

Согласно этому неравенству при $k = 2$ имеем

$$P\{|S_n - M\{S_n\}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\{S_n\}}{\varepsilon^2},$$

откуда

$$P\{|S_n - M\{S_n\}| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D\{S_n\}}{\varepsilon^2}.$$

Но

$$M\{S_n\} = m, \quad D\{S_n\} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\{X_i\} \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n},$$

так что

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2},$$

откуда переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получаем требуемый результат.

Отметим, что теорема Чебышёва оправдывает рекомендуемый в практической деятельности способ получения более точных результатов измерений: одна и та же величина измеряется много-кратно, и в качестве ее значения берется среднее арифметическое полученных результатов измерений.

Непосредственным следствием теоремы Чебышёва является

Теорема 2 (теорема Бернулли). *Пусть k — число успехов в серии из n независимых испытаний Бернулли, p — вероятность успеха в одном испытании. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \left| \frac{k}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Доказательство следует из теоремы Чебышёва, если заметить, что

$$k = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

где случайная величина X_i — число наступлений успехов в i -м испытании. Ясно, что все X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, имеют одинаковое распределение, определяемое таблицей

X_i	1	0
P	p	$1-p$

При этом $MX_i = p$, $DX_i = p(1-p)$, так что все условия теоремы Чебышёва применительно к последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots выполняются.

Теорему Бернулли можно интерпретировать как факт, подтверждающий непротиворечивость строгого аксиоматического подхода к определению вероятности (см. § 2) по отношению к экспериментальному статистическому подходу, согласно которому вероятность $P\{A\}$ события A определяется как предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n},$$

где n — общее число испытаний, $k(n)$ — число испытаний, приведших к событию A .

Теорема 3 (центральная предельная теорема в форме Ляпунова). *Пусть последовательность X_1, X_2, \dots независимых случайных величин удовлетворяет условию Ляпунова*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n h_i}{\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^{3/2}} = 0,$$

где $d_i = D\{X_i\}$, $h_i = M\{|X_i - MX_i|^3\}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\alpha \leq \tilde{X}_n \leq \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

где

$$\tilde{X}_n = \frac{X'_n - M\{X'\}}{\sqrt{D\{X'_n\}}}, \quad X'_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Другими словами, центрированная и нормированная сумма $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ при $n \rightarrow \infty$ ведет себя как нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Не приводя доказательства теоремы 3, покажем, что условие этой теоремы выполняется, в частности, в том случае, когда случайные величины X_i , $i = 1, 2, \dots$, имеют один и тот же закон распределения. При этом $h_i = h$, $d_i = d$ для любого $i = 1, 2, \dots$, и

$$\frac{\sum_{i=1}^n h_i}{(\sum_{i=1}^n d_i)^{3/2}} = \frac{nh}{(nd)^{3/2}} = \frac{h}{d^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В заключение, в качестве одного из приложений теоремы 3, покажем, как из нее может быть получена уже упоминавшаяся в курсе (см. § 4) интегральная теорема Муавра–Лапласа.

Пусть k — число успехов в серии из n независимых испытаний в схеме Бернулли, p — вероятность успеха в одном испытании. Тогда

$$k = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

где X_1, X_2, \dots, X_n — независимые случайные величины, имеющие одинаковый закон распределения

X_i	1	0
P	p	q

,

где $q = 1 - p$. Поскольку $M\{k\} = np$, $D\{k\} = npq$, то по теореме 3 при больших n

$$P\left\{\alpha \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \beta\right\} \approx \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx. \quad (2)$$

Далее, неравенство

$$\alpha \leq \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \leq \beta$$

эквивалентно неравенству

$$k_1 \leq k \leq k_2,$$

где

$$k_1 = np + \alpha \sqrt{npq}, \quad k_2 = np + \beta \sqrt{npq}.$$

Поэтому из (2) получаем

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \int_{(k_1-np)/\sqrt{npq}}^{(k_2-np)/\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

или

$$P\{k_1 \leq k \leq k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа.

Задачи

1. Проводится серия из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом испытании. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что число X успехов будет заключено в пределах от k_1 до k_2 , где $(k_1 + k_2)/2 = MX$.

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышёва в форме

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

В нашем случае $MX = np$, $DX = npq$. Обозначим $\varepsilon = k_2 - MX = MX - k_1$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{k_1 < X < k_2\} &= P\{MX - \varepsilon < X < MX + \varepsilon\} = \\ &= P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{npq}{((k_2 - k_1)/2)^2}, \end{aligned}$$

т. е.

$$P\{k_1 < X < k_2\} \geq 1 - \frac{4npq}{(k_2 - k_1)^2}.$$

Рассмотрим примеры.

а) $p = 1/2$, $n = 100$, $k_1 = 40$, $k_2 = 60$:

$$P\{40 < X < 60\} \geq 1 - \frac{4 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{(60 - 40)^2} = \frac{3}{4};$$

б) $p = 1/4$, $n = 800$, $k_1 = 150$, $k_2 = 250$:

$$P\{150 < X < 250\} \geq 1 - \frac{4 \cdot 800 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{(250 - 150)^2} = \frac{47}{50}.$$

2. Доказать, что если случайная величина X такова, что $M\{e^{aX}\}$ существует ($a > 0$ — постоянная), то для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{e^{aX}\}}{e^{a\varepsilon}}.$$

Решение. Проведем доказательство для случая непрерывной случайной величины, имеющей плотность распределения $f(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} M\{e^{aX}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} f(x) dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{ax} f(x) dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{a\varepsilon} f(x) dx = \\ &= e^{a\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx = e^{a\varepsilon} P\{X \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

т. е.

$$M\{e^{aX}\} \geq e^{a\varepsilon} P\{X \geq \varepsilon\},$$

откуда и следует требуемое неравенство.

3. Пусть $\phi(x) > 0$ — неубывающая функция. Доказать, что если существует $M\{\phi(|X - MX|)\}$, то

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{\phi(|X - MX|)\}}{\phi(\varepsilon)}.$$

Решение. Проведем доказательство для случая непрерывной случайной величины, имеющей плотность $f(x)$. Имеем

$$M\{\phi(|X - MX|)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(|x - MX|) f(x) dx =$$

{переходим к новой переменной интегрирования $t = x - MX$ }

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(|t|) f(t + MX) dt \geq \\
&\geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi(|t|) f(t + MX) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \phi(|t|) f(t + MX) dt \geq
\end{aligned}$$

{пользуемся неубывающим характером функции $\phi(x) > 0$ }

$$\geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \phi(\varepsilon) f(t + MX) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \phi(\varepsilon) f(t + MX) dt =$$

{переходим к переменной интегрирования $x = t + MX$ }

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{MX - \varepsilon} \phi(\varepsilon) f(x) dx + \int_{MX + \varepsilon}^{+\infty} \phi(\varepsilon) f(x) dx = \\
&= \phi(\varepsilon) \left(\int_{-\infty}^{MX - \varepsilon} f(x) dx + \int_{MX + \varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right) =
\end{aligned}$$

$$= \phi(\varepsilon) (P\{X \leq MX - \varepsilon\} + P\{X \geq MX + \varepsilon\}) = \phi(\varepsilon) P\{|X - MX| \geq \varepsilon\},$$

т. е. установлено, что

$$M\{\phi(|X - MX|)\} \geq \phi(\varepsilon) P\{|X - MX| \geq \varepsilon\},$$

откуда и следует нужное неравенство.

4. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ задана следующим законом распределения:

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$1/2^n$	$1 - 1/2^{n-1}$	$1/2^n$

Здесь $\alpha > 0$ — постоянная. Выяснить, применима ли к данной последовательности теорема Чебышёва.

Решение. Заметим сначала, что $MX_n = 0$ для любого $n = 1, 2, \dots$. Теорема Чебышёва будет применима, если найдется постоянная C , такая, что $DX_n \leq C$ для любого $n = 1, 2, \dots$. Имеем

$$DX_n = MX_n^2 - (MX_n)^2 = MX_n^2 = \frac{n^2}{2^{n-1}} \alpha^2.$$

Исследуем выражение $n^2/2^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. С этой целью рассмотрим функцию $f(x) = x^2/2^{x-1}$, $x \geq 1$. Эта функция непрерывна в $[1, +\infty)$ и имеет конечный предел на $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Следовательно, она ограничена в $[1, +\infty)$, т. е. существует постоянная B , такая, что для любого $x \in [1, +\infty)$ будет $f(x) \leq B$. Поэтому

$$DX_n = \frac{n^2}{2^{n-1}} \alpha^2 \leq B \alpha^2 \quad \text{для любого } n = 1, 2, \dots,$$

так что за постоянную C можно принять произведение $B \alpha^2$. Таким образом, теорема Чебышёва применима.

5. Пользуясь центральной предельной теоремой, оценить, сколько необходимо произвести бросаний «правильной» игральной кости, для того чтобы с вероятностью не менее $3/4$ сумма выпавших очков превысила 780.

Решение. Пусть случайная величина X_i — число очков, выпавшее при i -м бросании игральной кости, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда закон распределения для X_i дается таблицей

X_i	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

так что $MX_i = \frac{7}{2}$, $DX_i = \frac{35}{12}$,

$$M\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = MX_1 + MX_2 + \dots + MX_n = n \cdot \frac{7}{2},$$

а в силу независимости случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n

$$D\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = DX_1 + DX_2 + \dots + DX_n = n \cdot \frac{35}{12}.$$

В соответствии с центральной предельной теоремой при больших n

$$P\left\{\frac{X_1 + \dots + X_n - M\{X_1 + \dots + X_n\}}{\sqrt{D\{X_1 + \dots + X_n\}}} > A\right\} \approx \int_A^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt,$$

или

$$P\left\{X_1 + \dots + X_n > A \sqrt{\frac{35}{12}n} + \frac{7}{2}n\right\} \approx \int_A^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

Искомые значения n найдутся из условий

$$\begin{cases} A \sqrt{\frac{35}{12}n} + \frac{7}{2}n = 780, \\ \int\limits_A^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

При граничном значении

$$\frac{3}{4} = \int\limits_A^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

по таблицам функции Лапласа находим $A = -0,675$, после чего, решая уравнение

$$-0,675 \sqrt{\frac{35}{12}n} + \frac{7}{2}n = 780,$$

определяем n (округляя до ближайшего целого справа): $n = 228$.

6. Найти пределы, в которых с вероятностью, большей 0,99, будет находиться суммарное число выпавших очков при 1000-кратном бросании «правильной» игральной кости.

Решение. Первый способ. Решим сначала задачу с помощью неравенства Чебышёва. Пусть случайная величина X_i — число очков, выпавшее при i -м бросании игральной кости, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда (см. решение задачи 5)

$$MX_i = \frac{7}{2}, \quad DX_i = \frac{35}{12},$$

$$M\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = \frac{7}{2}n, \quad D\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\} = \frac{35}{12}n.$$

Обозначим $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. По неравенству Чебышёва

$$P\{|S_n - MS_n| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DS_n}{\varepsilon^2}.$$

Пусть $1 - \frac{DS_n}{\varepsilon^2} = 0,99$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{DS_n}}{0,1} = \frac{\sqrt{\frac{35}{12} \cdot 1000}}{0,1} = 540,06 \dots$$

Поскольку $MS_n = \frac{7}{2} \cdot 1000 = 3500$, то получаем

$$P\{3500 - 540 < S_n < 3500 + 540\} \geq 0,99.$$

Второй способ. Решим теперь задачу, опираясь на центральную предельную теорему. Согласно этой теореме при больших n

$$P\left\{\left|\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\right| < \varepsilon\right\} \approx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 2\Phi(\varepsilon),$$

где $\Phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа. При $2\Phi(\varepsilon) = 0,99$

получаем: $\varepsilon = 2,58$,

$$\sqrt{DS_n} \cdot \varepsilon = \sqrt{\frac{35}{12} \cdot 1000} \cdot 2,58 = 139,33 \dots,$$

в результате чего имеем

$$P\{3500 - 140 < S_n < 3500 + 140\} \geq 0,99.$$

Как видно, центральная предельная теорема дает существенно более узкий интервал для S_n , т. е. позволяет решить задачу гораздо точнее.

7. Книга объемом 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице имеется не менее трех опечаток. При решении задачи использовать:
а) пуассоновское приближение, б) нормальное приближение,
в) формулу Бернулли.

Решение. Можно предложить следующую интерпретацию обнаружения опечаток. Зафиксируем случайно выбранную страницу и будем «вбрасывать» опечатки одну за другой в книгу, т. е. будет проводится серия из $n = 50$ независимых испытаний Бернулли, где под успехом будет пониматься попадание вбрасываемой опечатки на заранее выбранную страницу. Ясно, что вероятность успеха p в каждом испытании равна $p = 1/500$. Пусть X — число успехов в этих n испытаниях. Тогда искомая вероятность

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\}.$$

По формуле Пуассона

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np,$$

получим

$$P\{X \geq 3\} = 1 - e^{-0,1} \left(\frac{0,1^0}{0!} + \frac{0,1^1}{1!} + \frac{0,1^2}{2!} \right) = 0,000155 \dots$$

Воспользуемся теперь нормальным приближением, т. е. центральной предельной теоремой. В данном случае она представляет собой интегральную теорему Муавра–Лапласа, согласно которой имеем:

$$\begin{aligned} P\{X \geq 3\} &= P\{3 \leq X \leq 50\} = \Phi\left(\frac{50 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{3 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{49,9}{0,3}\right) - \Phi\left(\frac{2,9}{0,3}\right) < 10^{-10}. \end{aligned}$$

В заключение, используя формулу Бернулли

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

получим точный результат:

$$\begin{aligned} P\{X \geq 3\} &= 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\} = \\ &= 1 - C_{50}^0 \left(\frac{1}{500}\right)^0 \left(\frac{499}{500}\right)^{50} - C_{50}^1 \left(\frac{1}{500}\right)^1 \left(\frac{499}{500}\right)^{49} - \\ &\quad - C_{50}^2 \left(\frac{1}{500}\right)^2 \left(\frac{499}{500}\right)^{48} = \\ &= 1 - \left(\frac{499}{500}\right)^{48} \left(\left(\frac{499}{500}\right)^2 + 0,1 \cdot \frac{499}{500} + \frac{50 \cdot 49}{2} \left(\frac{1}{500}\right)^2 \right) = \\ &= 0,000146 \dots . \end{aligned}$$

8. В тесто для выпечки булок с изюмом замешано n изюмин. Всего из данного теста выпечено k булок. Оценить вероятность того, что в случайно выбранной булке число изюмин находится в пределах от a до b .

Решение. Будем считать, что каждая изюмина с одинаковой вероятностью может оказаться в любом фрагменте теста независимо от того, куда попали остальные изюмины. Тогда случайная величина X — число изюмин, попавших в случайно выбранную булку, может быть описана биномиальным распределением с параметрами n (число испытаний) и $1/k$ (вероятность успеха в одном испытании):

$$P\{X = m\} = C_n^m \left(\frac{1}{k}\right)^m \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-m},$$

где $m = 1, 2, \dots, n$. Поэтому

$$P\{a \leq X \leq b\} = \sum_{m=a}^b C_n^m \left(\frac{1}{k}\right)^m \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-m}.$$

Поскольку $MX = \frac{n}{k}$, $DX = \frac{n(k-1)}{k^2}$, $\sigma_x = \frac{\sqrt{n(k-1)}}{k}$, то при больших n интегральная теорема Муавра–Лапласа дает следующее приближение для искомой вероятности:

$$\begin{aligned} P\{a \leq X \leq b\} &\approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{b - MX}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - MX}{\sigma_x}\right) = \Phi\left(\frac{bk - n}{\sqrt{n(k-1)}}\right) - \Phi\left(\frac{ak - n}{\sqrt{n(k-1)}}\right), \end{aligned}$$

где $\Phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа.

9. В поселке N жителей, каждый из которых в среднем n раз в месяц ездит в город, выбирая дни поездки независимо от остальных жителей. Поезд из поселка в город идет один раз в сутки. Какова должна быть вместимость поезда, для того чтобы он переполнился с вероятностью, не превышающей заданного числа β ?

Решение. Примем для простоты, что в месяце 30 дней. Если житель поселка в среднем n раз в месяц ездит в город, то вероятность того, что в случайно выбранный день этот житель поедет в город, равна $n/30$. Случайная величина X — число жителей поселка, отправившихся в город в один и тот же день, описывается биномиальным распределением с параметрами N (число испытаний) и $n/30$ (вероятность успеха в одном испытании):

$$P\{X = m\} = C_N^m \left(\frac{n}{30}\right)^m \left(1 - \frac{n}{30}\right)^{N-m},$$

где $m = 1, 2, \dots, N$. Тогда N^* — искомая вместимость поезда — определится из условия

$$P\{X > N^*\} \leq \beta,$$

или

$$\begin{aligned} 1 - P\{0 \leq X \leq N^*\} &\leq \beta, \\ P\{0 \leq X \leq N^*\} &\geq 1 - \beta. \end{aligned}$$

Минимальное N^* , удовлетворяющее этому условию, определится из равенства

$$P\{0 \leq X \leq N^*\} = 1 - \beta.$$

Если поселок большой и N велико, то вероятность в левой части можно оценить по интегральной теореме Муавра–Лапласа. Поскольку

$$MX = \frac{nN}{30}, \quad DX = \frac{nN}{30} \left(1 - \frac{n}{30}\right) = \frac{n(30-n)N}{30^2},$$

$$\sigma_x = \sqrt{DX} = \frac{\sqrt{n(30-n)N}}{30},$$

то

$$P\{0 \leq X \leq N^*\} \approx \Phi\left(\frac{N^* - MX}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{0 - MX}{\sigma_x}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{nN}{\sqrt{n(30-n)N}}\right) - \Phi\left(\frac{30N^* - nN}{\sqrt{n(30-n)N}}\right),$$

где $\Phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа. Так как $\frac{nN}{\sqrt{n(30-n)N}} \gg 1$, то $\Phi\left(\frac{nN}{\sqrt{n(30-n)N}}\right) = \frac{1}{2}$ и

$$\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{30N^* - nN}{\sqrt{n(30-n)N}}\right) = 1 - \beta,$$

или

$$\Phi\left(\frac{nN - 30N^*}{\sqrt{n(30-n)N}}\right) = \frac{1}{2} - \beta.$$

Полученное равенство при заданных параметрах n, N и β по таблицам значений функции Лапласа позволяет определить число N^* .

10. Необходимо сложить миллион чисел, округленных с точностью до пятого десятичного знака. В предположении, что ошибки округления всех чисел взаимно независимы и имеют равномерное распределение в соответствующем интервале, найти пределы, в которых с вероятностью 0,95 находится суммарная ошибка округления.

Решение. Пусть X_i — ошибка округления i -го числа. Тогда суммарная ошибка округления

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

где $n = 10^6$. По условию случайные величины X_i независимы и имеют одинаковое распределение — равномерное распределение на отрезке $[-5 \cdot 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-6}]$, так что

$$MX_i = 0, \quad DX_i = \frac{10^{-10}}{12}, \quad MX = 0, \quad DX = \frac{10^{-4}}{12}, \quad \sigma_x = \frac{10^{-2}}{2\sqrt{3}}.$$

В соответствии с центральной предельной теоремой

$$P\left\{\alpha \leq \frac{X - MX}{\sigma_x} \leq \beta\right\} \approx \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt,$$

откуда

$$P\left\{-\delta \leq \frac{X}{10^{-2}/2\sqrt{3}} \leq \delta\right\} \approx 2\Phi(\delta),$$

где $\Phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа. Если $2\Phi(\delta) = 0,95$,

то по таблицам значений функции Лапласа находим $\delta = 1,96$. Таким образом,

$$P\left\{-\frac{10^{-2}}{2\sqrt{3}} \cdot 1,96 \leq X \leq \frac{10^{-2}}{2\sqrt{3}} \cdot 1,96\right\} = 0,95,$$

или

$$P\{-0,0057 \leq X \leq 0,0057\} = 0,95.$$

Часть 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 9. Исходные фундаментальные определения, понятия и результаты

1. Рассмотрим случайный эксперимент E , не интересуясь его конкретным видом. Событие A , связанное с E , будем называть *наблюдаемым*, если в результате E всегда можно однозначно сказать, произошло A или нет. Событие, происходящее всякий раз при проведении эксперимента, будем называть *достоверным событием* и обозначать Ω ; событие, которое никогда не происходит при проведении эксперимента E , будем называть *невозможным событием* и обозначать \emptyset . События Ω и \emptyset считаются наблюдаемыми. Пусть A и B — некоторые наблюдаемые события, связанные с проведением эксперимента E . Определим:

- 1) *дополнительное событие* к A , обозначаемое \bar{A} и состоящее в том, что A не происходит;
- 2) *сумму*, или *объединение* A и B , обозначаемую $A + B$ или $A \cup B$ и состоящую в том, что происходит по крайней мере одно из событий A или B ;
- 3) *произведение*, или *пересечение* A и B , обозначаемое AB или $A \cap B$ и состоящее в том, что происходят оба события A и B .

Будем считать, что события \bar{A} , $A+B$ и AB , как A и B , наблюдаемы. Тогда семейство всех наблюдаемых событий, связанных с E , образует поле событий \mathcal{F}_0 , т. е. класс событий, включающий достоверное событие Ω и замкнутый относительно трех только что определенных операций (замкнутость, по определению, означает, что если $A, B \in \mathcal{F}_0$, то $\bar{A}, \bar{B}, A + B, AB \in \mathcal{F}_0$). Непосредственно из определения следует, что события, принадлежащие полю \mathcal{F}_0 , удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} A + A &= AA = A, & A + B &= B + A, & (A + B) + C &= A + (B + C), \\ AB &= BA, & (AB)C &= A(BC), & A(B + C) &= AB + AC, & A + \bar{A} &= \Omega, \\ A\bar{A} &= \emptyset, & A + \Omega &= \Omega, & A\Omega &= A, & A + \emptyset &= A, & A\emptyset &= \emptyset. \end{aligned}$$

Пусть теперь A', B', \dots являются множествами точек ω произвольного пространства Ω' . В элементарной теории множеств определяются множества $\bar{A}', \bar{B}', A' + B', A'B'$. Из этих определений (которые предполагаются читателю известными) легко следует, что все приведенные выше соотношения для событий остаются справедливыми и тогда, когда A, B, \dots обозначают множества. Аналогично полем множеств в Ω' называется семейство множеств, включающее все пространство Ω' и замкнутое относительно операций $\bar{A}', A' + B', A'B'$.

Оказывается, имеет место следующий результат: для любого поля \mathcal{F}_0 событий, удовлетворяющих перечисленным выше соотношениям, можно найти некоторое пространство Ω' точек ω и такое поле \mathcal{F}'_0 ω -множеств, что между событиями A в \mathcal{F}_0 и множествами A' в \mathcal{F}'_0 будет существовать взаимно однозначное соответствие, причем если событие A соответствует множеству A' , событие B — множеству B' , то событие \bar{A} будет соответствовать множеству \bar{A}' , событие $A + B$ — множеству $A' + B'$, событие AB — множеству $A'B'$. При этом точки ω будут соответствовать некоторым элементарным событиям, которые могут или не могут наблюдаться в отдельности (т. е. могут входить, а могут не входить в \mathcal{F}_0 по отдельности), а достоверному и невозможному событиям будут соответствовать все пространство Ω' и пустое множество, для обозначения которого так же, как и для обозначения невозможного события, используется символ \emptyset .

Сформулированный результат позволяет для анализа полей событий использовать аппарат теории множеств. В дальнейшем штрихи будут опускаться, и для событий и ω -множеств будут употребляться одни и те же обозначения $\mathcal{F}_0, A, B, \dots$. Множество в \mathcal{F}_0 будет называться наблюдаемым событием, или ω -множеством, Ω будет рассматриваться как достоверное событие, или как все пространство, и т. д.

Предположим теперь, что каждому событию A поля наблюдаемых событий \mathcal{F}_0 , отвечающему случайному эксперименту E , поставлено в соответствие определенное число $P_0\{A\}$, называемое вероятностью события A . Считаем, что $P_0\{A\}$ есть некоторая функция, определенная для всех событий или множеств $A \in \mathcal{F}_0$, удовлетворяющая соотношениям

$$0 \leq P_0\{A\} \leq 1, \quad P_0\{\emptyset\} = 0, \quad P_0\{\Omega\} = 1$$

и обладающая свойством конечной аддитивности: если $A = A_1 + \dots + A_n$, где $A_i \in \mathcal{F}_0$, $i = 1, \dots, n$ (а значит, и $A \in \mathcal{F}_0$), $A_j A_k = \emptyset$ для $j \neq k$, то

$$P_0\{A\} = P_0\{A_1\} + \dots + P_0\{A_n\}.$$

Утверждение о существовании функции $P_0\{A\}$ с описанными свойствами принимается как аксиома, т. е. как утверждение, не требующее доказательства.

Пусть теперь A_1, A_2, \dots — произвольная счетная бесконечная последовательность множеств из \mathcal{F}_0 . Множества вида $A_1 + A_2 + \dots$ и $A_1 A_2 \dots$, т. е. являющиеся счетными бесконечными объединениями и пересечениями множеств из \mathcal{F}_0 , могут (в отличие от конечных объединений и пересечений), вообще говоря, не являться элементами поля \mathcal{F}_0 , т. е. могут быть ненаблюдаемыми событиями. Поле ω -множеств будем называть *борелевским полем* или σ -*полем*, если оно содержит все счетные (конечные или бесконечные) объединения и пересечения своих множеств; при этом множества из σ -поля называются *борелевскими*. Оказывается, для любого поля \mathcal{F}_0 наблюдаемых событий всегда существует минимальное σ -поле, содержащее \mathcal{F}_0 . Это минимальное σ -поле будем обозначать \mathcal{F} ; оно, в отличие от \mathcal{F}_0 , может содержать и ненаблюдаемые события.

Один из основных результатов состоит в том, что существует единственное продолжение функции $P_0\{A\}$, определенной для всех $A \in \mathcal{F}_0$, до функции $P\{A\}$, определенной для всех множеств A из минимального σ -поля \mathcal{F} , содержащего \mathcal{F}_0 : если $A \in \mathcal{F}_0$, то $P\{A\} = P_0\{A\}$; функция $P\{A\}$ обладает всеми свойствами функции $P_0\{A\}$, т. е., в частности, $0 \leq P\{A\} \leq 1$ для любого $A \in \mathcal{F}$ и если $A = A_1 + A_2 + \dots$, где все $A_i \in \mathcal{F}$ и $A_i A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $P\{A\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots$. Функцию $P\{A\}$ называют *вероятностной мерой*, определенной на \mathcal{F} , или просто *вероятностью*.

Отметим, что рассмотрение поля \mathcal{F} вместо поля \mathcal{F}_0 и продолжение вероятностной меры с \mathcal{F}_0 на \mathcal{F} есть некоторая математическая идеализация, потому, например, что вероятность становится определенной и для ненаблюдаемых событий. Оказывается, этот шаг оправдан тем, что с помощью такой идеализации многие результаты для наблюдаемых событий можно получить с затратой значительно меньших усилий.

Пространство Ω точек ω , σ -поле \mathcal{F} множеств из Ω и вероятностная мера $P\{A\}$, определенная для множеств A из \mathcal{F} , обра-

зуют *вероятностное пространство*, которое будет обозначаться (Ω, \mathcal{F}, P) . Множества из \mathcal{F} называются *измеримыми*.

2. Пусть $X = X(\omega)$ — конечная действительная функция, определенная для всех ω из вероятностного пространства. Говорят, что функция X *измерима*, и называют ее *случайной величиной*, если для любого действительного x множество всех точек ω , для которых $X(\omega) < x$, принадлежит σ -полю \mathcal{F} . Две случайные величины X и Y называются *эквивалентными*, если множество (входящее в \mathcal{F}) точек ω , таких, что $X(\omega) = Y(\omega)$, имеет вероятностную меру 1.

Если $X = X(\omega)$ — случайная величина, то вероятность $F(x) \equiv P\{X < x\}$ представляет собой неубывающую функцию вещественного переменного x , непрерывную слева и стремящуюся к 0 при $x \rightarrow -\infty$ и к 1 при $x \rightarrow +\infty$. Функция $F(x)$ называется *функцией распределения* (ф. р.) случайной величины X . Если при этом существует функция $f(x)$, такая, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

то $f(x)$ называется *плотностью распределения* случайной величины X . Для системы случайных величин X_1, \dots, X_n *функция совместного распределения* этих случайных величин определяется как

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\},$$

а *плотность совместного распределения* этих случайных величин (если она существует) — как функция $f(x_1, \dots, x_n)$, такая, что

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots, dt_n.$$

Введем теперь понятие *случайного процесса*. Пусть состояние какой-либо системы определяется некоторой количественной характеристикой, значение которой $X(t)$ в каждый фиксированный момент t не является однозначно определенным, как в случае детерминированных систем, а зависит от случайных факторов, которые влияли на систему до момента t . Будем рассматривать $X(t)$ в каждый фиксированный момент как случайную величину, определенную на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . При изменении t в рассматриваемом промежутке времени получа-

ется семейство случайных величин $X(t)$, зависящих от параметра t . Заметим, что в общем случае t — это необязательно время: t может быть любым параметром (например, пространственной координатой), изменяющимся на произвольном множестве T .

Математическое определение случайного процесса формулируется следующим образом. Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — некоторое вероятностное пространство и T — множество значений параметра. *Случайным процессом* называется конечная вещественная функция $X(t, \omega)$, которая при каждом фиксированном $t \in T$ является измеримой функцией от $\omega \in \Omega$, т. е. случайной величиной. Для обозначения случайного процесса, как правило, используется краткая форма записи: $X(t)$ или X_t вместо $X(t, \omega)$.

Пусть $X(t)$ — случайный процесс. При каждом фиксированном $t = t_1$ случайная величина $X(t_1) = X(t_1, \omega)$ имеет определенную функцию распределения, которую обозначим $F(x_1, t_1) = P\{X(t_1) < x_1\}$. Пусть t_1, \dots, t_n — произвольное конечное множество значений t . Соответствующие случайные величины $X(t_1), \dots, X(t_n)$ имеют функцию совместного распределения

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = P\{X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n\}.$$

Семейство всех таких совместных распределений для $n = 1, 2, \dots$ и всех возможных значений t_j называется *семейством конечномерных распределений* процесса $X(t)$. Как выяснится из дальнейшего, многие свойства случайного процесса определяются свойствами его конечномерных распределений.

Два случайных процесса $X(t)$ и $Y(t)$ называются *эквивалентными*, если при каждом фиксированном t из множества значений параметра t $X(t)$ и $Y(t)$ являются эквивалентными случайными величинами, т. е. при каждом фиксированном t $P\{X(t) = Y(t)\} = 1$. Семейства конечномерных распределений у эквивалентных процессов совпадают.

Из определения случайного процесса следует, что $X(t, \omega)$ для каждого фиксированного элементарного события ω становится функцией от t для всех $t \in T$. Иначе говоря, каждому ω или каждому возможному исходу случайного эксперимента соответствует некоторая однозначно определенная функция от t . Эта функция $x(t)$, определяемая фиксированным ω , описывает эволюцию меняющейся системы в случае, когда элементарное событие ω явилось результатом рассматриваемого случайного эксперимента. Каждая такая функция $x(t)$ называется *реализацией*, или *траекторией*, или *выборочной функцией* процесса $X(t)$.

Иногда для обозначения как случайного процесса, так и его реализации будет использоваться один и тот же символ. Например, ξ_t может обозначать как случайный процесс, так и его реализацию.

Задачи

1. Доказать, что конечномерные распределения эквивалентных случайных процессов совпадают.

Решение. Пусть ξ_t и η_t — два эквивалентных случайных процесса, т. е. $P\{\xi_t = \eta_t\} = 1$ при любом фиксированном t . Обозначим

$$\begin{aligned} F_\xi(x_1, t_1; x_2, t_2) &= P\{\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2\}, \\ F_\eta(x_1, t_1; x_2, t_2) &= P\{\eta_{t_1} < x_1, \eta_{t_2} < x_2\}. \end{aligned}$$

Докажем, что функции $F_\xi(x_1, t_1; x_2, t_2)$ и $F_\eta(x_1, t_1; x_2, t_2)$ тождественно совпадают.

Имеем

$$\begin{aligned} F_\xi(x_1, t_1; x_2, t_2) &= P\left\{\begin{array}{l} \xi_{t_1} < x_1 \\ \xi_{t_2} < x_2 \end{array}\right\} = \\ &= P\left\{\left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} < x_1 \\ \xi_{t_2} < x_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} = \eta_{t_1} \\ \xi_{t_2} = \eta_{t_2} \end{array}\right)\right\} + P\left\{\left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} < x_1 \\ \xi_{t_2} < x_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} \neq \eta_{t_1} \\ \xi_{t_2} = \eta_{t_2} \end{array}\right)\right\} + \\ &\quad + P\left\{\left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} < x_1 \\ \xi_{t_2} < x_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} = \eta_{t_1} \\ \xi_{t_2} \neq \eta_{t_2} \end{array}\right)\right\} + P\left\{\left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} < x_1 \\ \xi_{t_2} < x_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} \neq \eta_{t_1} \\ \xi_{t_2} \neq \eta_{t_2} \end{array}\right)\right\}, \end{aligned}$$

ибо события во вторых круглых скобках внутри каждого слагаемого составляют полную группу событий. При этом, поскольку $P\{\xi_t \neq \eta_t\} = 0$ для любого фиксированного t , последние три слагаемых равны нулю. Далее,

$$P\left\{\left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} < x_1 \\ \xi_{t_2} < x_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} = \eta_{t_1} \\ \xi_{t_2} = \eta_{t_2} \end{array}\right)\right\} = P\left\{\left(\begin{array}{l} \eta_{t_1} < x_1 \\ \eta_{t_2} < x_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} = \eta_{t_1} \\ \xi_{t_2} = \eta_{t_2} \end{array}\right)\right\},$$

так что

$$F_\xi(x_1, t_1; x_2, t_2) = P\left\{\left(\begin{array}{l} \eta_{t_1} < x_1 \\ \eta_{t_2} < x_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{l} \xi_{t_1} = \eta_{t_1} \\ \xi_{t_2} = \eta_{t_2} \end{array}\right)\right\}.$$

Легко убедиться в справедливости следующих очевидных утверждений.

Лемма 1. Для любых событий A и B , таких, что $P\{A\} = P\{B\} = 1$, будет также $P\{A + B\} = P\{AB\} = 1$.

Лемма 2. Если для события B имеет место $P\{B\} = 1$, то для любого события A будет $P\{AB\} = P\{A\}$.

Из лемм 1, 2 следует, что

$$P \left\{ \begin{pmatrix} \eta_{t_1} < x_1 \\ \eta_{t_2} < x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{t_1} = \eta_{t_1} \\ \xi_{t_2} = \eta_{t_2} \end{pmatrix} \right\} = P \left\{ \begin{pmatrix} \eta_{t_1} < x_1 \\ \eta_{t_2} < x_2 \end{pmatrix} \right\} = F_\eta(x_1, t_1; x_2, t_2),$$

что и означает совпадение двумерных функций распределения процессов ξ_t и η_t . Равенство n -мерных функций распределения при $n = 3, 4, \dots$ доказывается аналогично.

2. Пусть случайный процесс $X(t)$ задан семейством конечно-мерных распределений

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad \forall t_1, t_2, \dots, t_n.$$

Найти вероятность

$$\begin{aligned} p^* \equiv P \{ & (a_1 \leq X(t_1) < a_2) \cap [(b_1 \leq X(t_2) < b_2) \cup (b'_1 \leq X(t_2) \leq b'_2)] \cap \\ & \cap [(X(t_3) \geq c_2) \cup (X(t_3) < c_1)] \}, \end{aligned}$$

где $a_1, a_2, b_1, b'_1, b_2, b'_2, c_1, c_2$ — заданные числа.

Решение. Положим для краткости

$$U = X(t_1), \quad V = X(t_2), \quad Z = X(t_3),$$

а через $F_{\text{III}}(u, v, z)$ обозначим функцию совместного распределения случайных величин U, V, Z . По условию задачи эта функция известна. Пусть для определенности $b_1 < b_2 < b'_1 < b'_2, c_1 < c_2$. Тогда искомая вероятность

$$\begin{aligned} p^* &= P \left\{ \left[\begin{pmatrix} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \leq U < a_2 \\ b'_1 \leq V < b'_2 \end{pmatrix} \right] \times \right. \\ &\quad \times \left. \left[(Z \geq c_2) + (Z < c_1) \right] \right\} = \\ &= P \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \\ Z \geq c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \\ Z < c_1 \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} a_1 \leq U < a_2 \\ b'_1 \leq V < b'_2 \\ Z \geq c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \leq U < a_2 \\ b'_1 \leq V < b'_2 \\ Z < c_1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку все события в круглых скобках не пересекаются (т. е. несовместны), то

$$\begin{aligned} p^* = P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \\ Z \geq c_2 \end{array} \right\} + P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \\ Z < c_1 \end{array} \right\} + \\ + P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b'_1 \leq V < b'_2 \\ Z \geq c_2 \end{array} \right\} + P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b'_1 \leq V < b'_2 \\ Z < c_1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Относительно 1-го и 3-го слагаемых заметим:

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \\ Z \geq c_2 \end{array} \right\} &= P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \end{array} \right\} - P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \\ Z < c_2 \end{array} \right\}, \\ P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b'_1 \leq V < b'_2 \\ Z \geq c_2 \end{array} \right\} &= P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b'_1 \leq V < b'_2 \end{array} \right\} - P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b'_1 \leq V < b'_2 \\ Z < c_2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение

$$F_{II}(u, v) = \lim_{z \rightarrow +\infty} F_{III}(u, v, z)$$

— функцию совместного распределения случайных величин U и V .

Найдем $P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \end{array} \right\}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} U < a_2 \\ V < b_2 \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} U < a_1 \\ V < b_1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} U < a_1 \\ b_1 \leq V < b_2 \end{array} \right\} + \\ &\quad + \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ V < b_1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U < a_1 \\ V < b_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} U < a_1 \\ V < b_1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} U < a_1 \\ b_1 \leq V < b_2 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U < a_2 \\ V < b_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} U < a_1 \\ V < b_1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ V < b_1 \end{array} \right\}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} F_{II}(a_2, b_2) &= F_{II}(a_1, b_1) + [F_{II}(a_1, b_2) - F_{II}(a_1, b_1)] + \\ &\quad + [F_{II}(a_2, b_1) - F_{II}(a_1, b_1)] + P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

так что

$$P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \end{array} \right\} = F_{\text{II}}(a_2, b_2) + F_{\text{II}}(a_1, b_1) - F_{\text{II}}(a_1, b_2) - F_{\text{II}}(a_2, b_1).$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq U < a_2 \\ b_1 \leq V < b_2 \\ Z < c_2 \end{array} \right\} &= F_{\text{III}}(a_2, b_2, c_2) + F_{\text{III}}(a_1, b_1, c_2) - \\ &\quad - F_{\text{III}}(a_1, b_2, c_2) - F_{\text{III}}(a_2, b_1, c_2). \end{aligned}$$

Теперь можно выписать ответ:

$$\begin{aligned} p^* = & [F_{\text{II}}(a_2, b_2) - F_{\text{III}}(a_2, b_2, c_2)] + [F_{\text{II}}(a_1, b_1) - F_{\text{III}}(a_1, b_1, c_2)] - \\ & - [F_{\text{II}}(a_1, b_2) - F_{\text{III}}(a_1, b_2, c_2)] - [F_{\text{II}}(a_2, b_1) - F_{\text{III}}(a_2, b_1, c_2)] + \\ & + F_{\text{III}}(a_2, b_2, c_1) + F_{\text{III}}(a_1, b_1, c_1) - F_{\text{III}}(a_1, b_2, c_1) - F_{\text{III}}(a_2, b_1, c_1) + \\ & + \left\{ \begin{array}{l} \text{такая же группа слагаемых, где вместо } b_1 \text{ и } b_2 \\ \text{фигурируют значения } b'_1 \text{ и } b'_2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

3. Пусть эксперимент E заключается во вбрасывании случайной точки в отрезок $[0, 1]$. Элементарное событие ω можно отождествлять с числом из отрезка $[0, 1]$, которое также будет обозначаться ω . При этом множество элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$ отождествляется со всем отрезком $[0, 1]$. Будем предполагать, что все точки равновозможны, так что ω равномерно распределена на $[0, 1]$. Пусть на соответствующем вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) определен случайный процесс $\xi_t(\omega)$, $t \in [0, 1]$, следующим образом:

$$\xi_t(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq \omega, \\ 0 & \text{при } t > \omega. \end{cases}$$

Нужно найти: а) вид реализаций процесса $\xi_t(\omega)$; б) одномерные распределения процесса $\xi_t(\omega)$; в) двумерные распределения процесса $\xi_t(\omega)$.

Решение. Реализация процесса ξ_t изображена на рис. 10. Она представляет собой ступеньку единичной высоты со случайными длинами (ω и $1 - \omega$) горизонтальных площадок. Опираясь на определение, найдем функцию одномерного распределения:

$$\begin{aligned} F(x, t) &= P\{\xi_t < x\} = P\{\omega : \xi_t(\omega) < x\} = \\ &= \begin{cases} \text{при } x > 1: & 1 \text{ для всех } t, \\ \text{при } x \leq 0: & 0 \text{ для всех } t, \\ \text{при } x \in (0, 1]: & P\{\omega < t\} = t. \end{cases} \end{aligned}$$

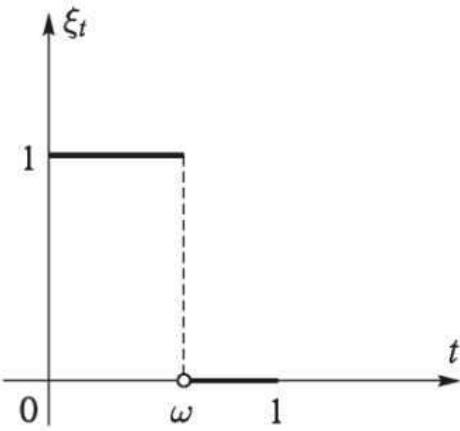


Рис. 10

Найдем теперь функцию двумерного распределения процесса ξ_t :

$$\begin{aligned} F(x_1, t_1; x_2, t_2) &= P\{\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2\} = \\ &= P\{\omega : \xi_{t_1}(\omega) < x_1, \xi_{t_2}(\omega) < x_2\} = \\ &= \begin{cases} \text{при } x_1 > 1, x_2 > 1: & 1 \text{ для всех } t_1, t_2; \\ \text{при } x_1 \leq 0 \text{ или } x_2 \leq 0: & 0 \text{ для всех } t_1, t_2; \\ \text{при } x_1 > 1, x_2 \in (0; 1]: & P\{\omega < t_2\} = t_2 \text{ для всех } t_1; \\ \text{при } x_2 > 1, x_1 \in (0; 1]: & P\{\omega < t_1\} = t_1 \text{ для всех } t_2; \\ \text{при } x_2 \in (0; 1], x_1 \in (0; 1]: & P\{\omega < \min(t_1, t_2)\} = \min(t_1, t_2). \end{cases} \end{aligned}$$

4. Пусть η — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $\xi_t = \eta + t$.

Решение. Найдем одномерную функцию распределения:

$$F_\xi(x, t) = P\{\xi_t < x\} = P\{\eta + t < x\} = P\{\eta < x - t\} = F(x - t).$$

Найдем двумерную функцию распределения:

$$\begin{aligned} F_\xi(x_1, t_1; x_2, t_2) &= P\{\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2\} = \\ &= P\{\eta + t_1 < x_1, \eta + t_2 < x_2\} = P\{\eta < x_1 - t_1, \eta < x_2 - t_2\} = \\ &= P\{\eta < \min_{i=1,2}(x_i - t_i)\} = F\left(\min_{i=1,2}(x_i - t_i)\right). \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, получим n -мерную функцию распределения:

$$\begin{aligned} F_\xi(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= P\{\xi_{t_1} < x_1, \xi_{t_2} < x_2, \dots, \xi_{t_n} < x_n\} = \\ &= F\left(\min_{i=1,2,\dots,n}(x_i - t_i)\right). \end{aligned}$$

5. Пусть ξ_t — случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) . Пусть A — некоторое множество

в пространстве реализаций этого процесса. Множество A будем называть *борелевским*, если

$$\{\omega: \xi_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Пусть $c = \text{const}$. Рассмотрим множество

$$A = \{\xi_t: \sup_{t \in [0,1]} \xi_t \leq c\},$$

т. е. множество A состоит из реализаций ξ_t , удовлетворяющих условию $\sup_{t \in [0,1]} \xi_t \leq c$. Доказать, что множество A не является борелевским.

Решение. Для доказательства воспользуемся следующим известным результатом: для любого борелевского множества A вероятность $P\{\xi_t \in A\}$ однозначно определяется семейством конечномерных распределений процесса ξ_t ; в частности, для процессов с одинаковым семейством конечномерных распределений, каковыми являются, например, эквивалентные процессы, указанная вероятность одна и та же.

Пусть (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство, где $\Omega = \{\omega\} = [0, 1]$, ω равномерно распределена на $[0, 1]$. Определим случайные процессы $\xi_t(\omega)$, $t \in [0, 1]$, и $\eta_t(\omega)$, $t \in [0, 1]$, следующим образом:

$$\xi_t(\omega) \equiv 0, \quad \eta_t(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \omega, \\ 1 & \text{при } t = \omega. \end{cases}$$

Реализация процесса $\eta_t(\omega)$ изображена на рис. 11.

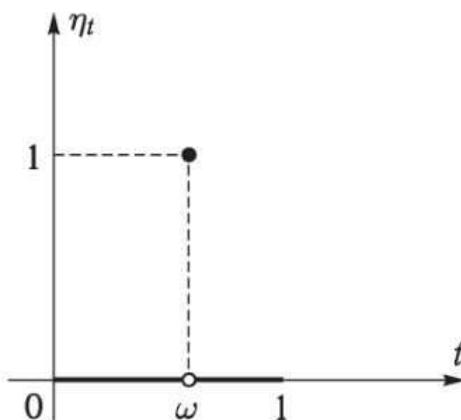


Рис. 11

Процессы ξ_t и η_t эквивалентны, и поэтому семейства конечномерных распределений у них совпадают. В то же время ясно, что

$$P\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \xi_t \leq \frac{1}{2} \right\} = 1, \quad P\left\{ \sup_{t \in [0,1]} \eta_t \leq \frac{1}{2} \right\} = 0.$$

Следовательно, A не является борелевским множеством.

§ 10. Математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция случайного процесса

Пусть $X = X(\omega)$ — определенная на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) дискретная случайная величина, возможные значения которой даются конечным или счетным рядом чисел x_1, x_2, \dots . Пусть множество $A_i \in \mathcal{F}$ образуют те и только те ω , для которых $X(\omega) = x_i$. Тогда если ряд $\sum_i x_i P\{A_i\}$ сходится абсолютно, то его сумма называется математическим ожиданием случайной величины X и обозначается $M\{X\}$:

$$M\{X\} = \sum_i x_i P\{A_i\}.$$

Если X — непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x)$, то по определению

$$M\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

в предположении, что интеграл сходится абсолютно. В случае расходимости интеграла (или ряда, если X — дискретная случайная величина) говорят, что соответствующая случайная величина не имеет математического ожидания.

Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ определяется формулой

$$m(t) = M\{X(t)\}.$$

В правой части этого равенства стоит математическое ожидание случайной величины $X(t)$, которую удобно интерпретировать как сечение случайного процесса, отвечающее данному значению аргумента t . По смыслу этого определения функция $m(t)$ есть некоторая неслучайная средняя функция, около которой разбросаны конкретные реализации случайного процесса.

Дисперсия случайного процесса есть, по определению, неслучайная функция

$$D(t) = M\{(X(t) - m(t))^2\},$$

которая при каждом t характеризует разброс возможных реализаций $x(t)$ относительно среднего значения $m(t)$. При каждом фиксированном t значение $D(t)$ дает дисперсию случайной величины $X(t)$ — сечения случайного процесса, соответствующего значению аргумента t .

Случайные величины X_1, \dots, X_n называются *независимыми*, если

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n)$$

или (если $f(x_1, \dots, x_n)$ существует)

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n);$$

здесь $F_i(x_i)$ — функция распределения, а $f_i(x_i)$ — плотность распределения случайной величины X_i , $i = 1, \dots, n$. Для того чтобы в какой-то мере охарактеризовать степень зависимости между различными сечениями, т. е. между случайными величинами $X(t_1)$ и $X(t_2)$, определяют неслучайную функцию двух переменных

$$K(t_1, t_2) = M\{(X(t_1) - m(t_1))(X(t_2) - m(t_2))\},$$

называемую *корреляционной функцией* случайного процесса $X(t)$. Если ввести в рассмотрение центрированный случайный процесс

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m(t),$$

то для $K(t_1, t_2)$ получим

$$K(t_1, t_2) = M\{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\}.$$

Заметим, что $K(t, t) = D(t)$, т. е. знание корреляционной функции случайного процесса означает, в частности, и знание дисперсии.

Если $D(t) \neq 0$, то наряду с $K(t_1, t_2)$ рассматривают нормированную корреляционную функцию

$$k(t_1, t_2) = \frac{K(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)},$$

где $\sigma(t_1) = \sqrt{D(t_1)}$, $\sigma(t_2) = \sqrt{D(t_2)}$ — так называемые *среднеквадратичные отклонения*. Удобство от введения $k(t_1, t_2)$ состоит в том, что $k(t_1, t_2)$ есть безразмерная величина. Кроме того, можно показать, что $|k(t_1, t_2)| \leq 1$ при любых значениях t_1 и t_2 .

Используя тот факт, что для независимых случайных величин Y и Z выполняется $M\{YZ\} = M\{Y\}M\{Z\}$, нетрудно показать,

что $k(t_1, t_2) = 0$, если $X(t_1)$ и $X(t_2)$ независимы. Обратное неверно: из условия $k(t_1, t_2) = 0$, вообще говоря, не следует независимость сечений $X(t_1)$ и $X(t_2)$.

Задачи

1. Пусть $X(t)$ — случайный процесс вида

$$X(t) = U \cos \theta t + V \sin \theta t,$$

где $\theta > 0$ — постоянное число, а U и V — две независимые случайные величины с равными нулю математическими ожиданиями и одной той же дисперсией D . Найти математическое ожидание $m(t)$ и корреляционную функцию $K(t_1, t_2)$ процесса.

Решение. При каждом значении t имеем

$$m(t) = \cos \theta t M\{U\} + \sin \theta t M\{V\} = 0,$$

так что

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M\{(U \cos \theta t_1 + V \sin \theta t_1)(U \cos \theta t_2 + V \sin \theta t_2)\} = \\ &= \cos \theta t_1 \cos \theta t_2 M\{U^2\} + \sin \theta t_1 \sin \theta t_2 M\{V^2\} + \\ &\quad + (\cos \theta t_1 \sin \theta t_2 + \sin \theta t_1 \cos \theta t_2) M\{UV\}. \end{aligned}$$

В силу независимости U и V

$$M\{UV\} = M\{U\} \cdot M\{V\} = 0,$$

следовательно,

$$K(t_1, t_2) = D \cos \theta t_1 \cos \theta t_2 + D \sin \theta t_1 \sin \theta t_2 = D \cos \theta(t_1 - t_2).$$

2. Усложним задачу 1, считая случайными не только величины U и V , но и частоту θ , а именно: рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = U \cos \Theta t + V \sin \Theta t,$$

где U, V, Θ — независимые случайные величины, причем $M\{U\} = M\{V\} = 0$, $D = M\{U^2\} = M\{V^2\}$, а случайная величина Θ характеризуется плотностью вероятности $f(\theta)$. Как и выше, требуется найти математическое ожидание $m(t)$ и корреляционную функцию $K(t_1, t_2)$ процесса.

Решение. Найдем

$$m(t) = M\{U \cos \Theta t\} + M\{V \sin \Theta t\}.$$

Учитывая независимость U от Θ , а также V от Θ , будем иметь

$$m(t) = M\{U\}M\{\cos \Theta t\} + M\{V\}M\{\sin \Theta t\} = 0.$$

Чтобы упростить вычисление $K(t_1, t_2)$, заметим, что согласно задаче 1 условная корреляционная функция для $X(t)$ при данном значении θ частоты Θ будет

$$K(t_1, t_2) = M\{X(t_1)X(t_2) | \Theta = \theta\} = D \cos \theta(t_1 - t_2).$$

Для нахождения корреляционной функции $K(t_1, t_2)$ следует умножить это выражение на элемент вероятности $f(\theta) d\theta$ и проинтегрировать по всем возможным значениям частоты θ ⁽¹⁾. Таким образом,

$$K(t_1, t_2) = D \int_0^\infty f(\theta) \cos \theta(t_1 - t_2) d\theta.$$

Рассмотрим конкретный случай, когда

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{2\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + \theta^2} & \text{при } \theta \geq 0, \\ 0 & \text{при } \theta < 0, \end{cases}$$

где λ — некоторое положительное число (условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta = 1$ выполняется при любом положительном λ). Тогда

$$K(t_1, t_2) = \frac{2D\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \theta(t_1 - t_2)}{\lambda^2 + \theta^2} d\theta = D \exp\{-\lambda|t_1 - t_2|\}^{(2)}.$$

Из полученного выражения для корреляционной функции видно, что $K(t_1, t_2)$ убывает по мере возрастания $|t_1 - t_2|$, причем это убывание тем значительнее, чем больше коэффициент λ . Данное обстоятельство можно объяснить так. График функции $f(\theta)$ имеет

⁽¹⁾ Предлагаемое упрощение для вычисления $K(t_1, t_2)$, конечно, нуждается в обосновании. Опуская здесь доказательство, отметим лишь, что оно следует из свойств 2) и 3) математического ожидания и из формулы полной вероятности.

⁽²⁾ Этот интеграл можно вычислить методами ТФКП с помощью теоремы о вычетах (см., например: Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1982).

пик $2/(\pi\lambda)$ при $\theta = 0$. С ростом λ этот пик становится все меньше и график как бы «выравнивается». Это означает, что диапазон практически возможных частот становится все шире, а сам процесс $X(t)$ — все «случайнее» (предсказать его поведение становится все труднее). Вследствие этого зависимость между сечениями с ростом λ должна уменьшаться.

3. Пусть λ — постоянное положительное число, а t_1, t_2, \dots — случайная последовательность точек на оси t , такая, что:

1) вероятность $P_n(T)$ того, что в интервал времени длительностью T попадет ровно n точек, $n = 0, 1, 2, \dots$, равна

$$P_n(T) = \frac{(\lambda T)^n}{n!} \exp\{-\lambda T\}$$

и не зависит от положения этого интервала на временной оси;

2) числа точек, попавших в непересекающиеся интервалы времени, являются независимыми случайными величинами.

В этом случае говорят, что последовательность точек t_1, t_2, \dots образует *пуассоновский* поток с постоянной плотностью λ . Рассмотрим случайный процесс $X(t)$, все реализации которого представляют ступенчатые функции следующего вида:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < t < t_1, \\ x_1 & \text{при } t_1 \leq t < t_2, \\ x_2 & \text{при } t_2 \leq t < t_3, \\ x_3 & \text{при } t_3 \leq t < t_4, \\ \dots, \end{cases}$$

где значения x_1, x_2, x_3, \dots являются реализацией последовательности независимых случайных величин X_1, X_2, X_3, \dots с математическими ожиданиями, равными нулю, и одинаковой дисперсией D . Требуется найти корреляционную функцию процесса $X(t)$.

Решение. Ясно, что $m(t) \equiv 0$, так как $M\{X_1\} = M\{X_2\} = M\{X_3\} = \dots = 0$. Подсчитаем корреляционную функцию $K(t, t')$:

$$\begin{aligned} K(t, t') &= M\{X(t)X(t')\} = \\ &= M\{X(t)X(t')|A\}P\{A\} + M\{X(t)X(t')|B\}P\{B\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где событие A означает, что в интервал (t, t') попадает хотя бы одна из точек t_1, t_2, t_3, \dots , а событие B — что в интервал (t, t') не попадает ни одна из точек t_1, t_2, t_3, \dots . В силу независимости слу-

чайных величин X_1, X_2, X_3, \dots имеем $M\{X_i X_j\} = M\{X_i\} M\{X_j\} = 0$ при $i \neq j$, так что

$$M\{X(t) X(t') | A\} = 0.$$

При условии B величина $X(t)$ совпадает с величиной $X(t')$ и, следовательно,

$$M\{X(t) X(t') | B\} = M\{X^2(t)\} = D.$$

Поскольку вероятность $P\{B\}$ есть $P_n(T)$ при $n = 0$ и $T = |t - t'|$, то получаем

$$K(t, t') = D \exp\{-\lambda|t - t'|\}.$$

Как видно, в двух последних задачах получилась одна и та же корреляционная функция. Между тем реализации случайного процесса имеют в этих задачах совершенно различный характер: в задаче 2 это — синусоиды, в задаче 3 — ступенчатые функции. Таким образом, одна и та же корреляционная функция может соответствовать случайным процессам, имеющим различный характер реализаций.

4. Случайный процесс $X(t)$ определяется следующим образом. На оси времени задан пуассоновский поток событий с плотностью λ . При наступлении каждого события процесс $X(t)$ скачком меняет свое значение, принимая независимо от предыстории процесса случайное значение V и сохраняя его до момента наступления следующего события. Случайная величина V имеет математическое ожидание m_V и дисперсию D_V . Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса $X(t)$.

Решение. Любое сечение случайного процесса $X(t)$ есть случайная величина V . Поэтому

$$M\{X(t)\} = M\{V\} = m_V, \quad D\{X(t)\} = D\{V\} = D_V.$$

Пусть $t' > t$, $\tau = t' - t$. Пусть событие A означает, что между точками t и t' появилось хотя бы одно событие пуассоновского потока, тогда $B = \bar{A}$ означает, что не появилось ни одного события. Имеем для корреляционной функции:

$$\begin{aligned} K(t, t') &= M\{\dot{X}(t) \dot{X}(t') | A\} P\{A\} + M\{\dot{X}(t) \dot{X}(t') | B\} P\{B\} = \\ &= 0 \cdot P\{A\} + M\{\dot{X}(t) \dot{X}(t')\} \cdot e^{-\lambda\tau} = D_V e^{-\lambda(t-t')}. \end{aligned}$$

При произвольном соотношении моментов t и t'

$$K(t, t') = D_V e^{-\lambda|t-t'|}.$$

5. Случайный входной сигнал $X(t)$ преобразуется с помощью реле в случайный выходной сигнал $Y(t)$ по формуле

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } X(t) > 0, \\ 0 & \text{при } X(t) = 0, \\ -1 & \text{при } X(t) < 0. \end{cases}$$

Входной сигнал представляет собой случайный процесс $X(t)$, который определяется следующим образом. На оси времени задан пуассоновский поток событий с плотностью λ . При наступлении каждого события процесс $X(t)$ скачком меняет свое значение, принимая независимо от предыстории процесса случайное значение V и сохраняя его до момента наступления следующего события. Случайная величина V имеет плотность распределения $f(v)$. Найти закон распределения сечения случайного процесса $Y(t)$, а также его математическое ожидание m_Y , дисперсию D_Y и корреляционную функцию $K_Y(t_1, t_2)$.

Решение. При любом t случайная величина $Y(t)$ с ненулевой вероятностью принимает лишь два значения: значение 1 с вероятностью $p = \int\limits_0^{+\infty} f(v) dv$ и значение -1 с вероятностью $\tilde{p} = \int\limits_{-\infty}^0 f(v) dv = 1 - p$. Следовательно, математическое ожидание

$$m_Y = M\{Y(t)\} = 1 \cdot p + (-1) \cdot \tilde{p} = p - \tilde{p},$$

а дисперсия

$$D_Y = D\{Y(t)\} = (1 - (p - \tilde{p}))^2 p + (-1 - (p - \tilde{p}))^2 \tilde{p} = 4p\tilde{p}.$$

Пусть событие A означает, что между моментами t_1 и t_2 произошло хотя бы одно событие пуассоновского потока, тогда $B = \bar{A}$ означает, что не произошло ни одного события. Имеем для корреляционной функции:

$$K_Y(t, t') = M\{\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2) | A\} P\{A\} + M\{\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2) | B\} P\{B\}.$$

Если имело место событие A , то $Y(t_1)$ и $Y(t_2)$ представляют собой независимые (хотя и одинаково распределенные) случайные величины, в силу чего $M\{\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2) | A\} = 0$. Если же произошло событие B , то $Y(t_1)$ и $Y(t_2)$ представляют собой одну и ту

же случайную величину, так что $M\{\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2) | B\} = D_Y = 4p\tilde{p}$. С учетом этого получаем

$$K_Y(t_1, t_2) = 0 \cdot P\{A\} + D_Y \cdot P\{B\} = D_Y \cdot e^{-\lambda|t_1-t_2|} = 4p\tilde{p}e^{-\lambda|t_1-t_2|}.$$

6. Случайный процесс $X(t)$ определяется следующим образом. На оси времени задан пуассоновский поток событий с плотностью λ . При наступлении каждого события процесс $X(t)$ попеременно скачком принимает значения 1 и -1 . Найти корреляционную функцию процесса $K(t_1, t_2)$.

Решение. Очевидно, при любом t имеем $M\{X(t)\} = (-1) \times 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 0$ и

$$K(t_1, t_2) = M\{\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2)\} = M\{X(t_1) X(t_2)\}.$$

Случайная величина $X(t_1) X(t_2)$ может принимать лишь два значения: значение -1 с вероятностью

$$\begin{aligned} P\{X(t_1) X(t_2) = -1\} &= \\ &= P\left\{ \begin{array}{l} \text{между } t_1 \text{ и } t_2 \text{ произошло нечетное} \\ \text{число событий пуассоновского потока} \end{array} \right\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m+1}}{(2m+1)!} e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}}{2} = \frac{1 - e^{-2\lambda\tau}}{2}, \end{aligned}$$

где $\tau = |t_1 - t_2|$, и значение 1 с вероятностью

$$\begin{aligned} P\{X(t_1) X(t_2) = 1\} &= P\left\{ \begin{array}{l} \text{между } t_1 \text{ и } t_2 \text{ произошло четное} \\ \text{число событий пуассоновского потока} \end{array} \right\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2m}}{(2m)!} e^{-\lambda\tau} = e^{-\lambda\tau} \frac{e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}}{2} = \frac{1 + e^{-2\lambda\tau}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K(t_1, t_2) = (-1) \cdot \frac{1 - e^{-2\lambda\tau}}{2} + 1 \cdot \frac{1 + e^{-2\lambda\tau}}{2} = e^{-2\lambda\tau} = e^{-2\lambda|t_1-t_2|}.$$

§ 11. Пуассоновский процесс

Рассмотрим процесс $K(t)$, выражающий число событий, которые произошли в случайные моменты времени в интервале $[0, t)$. Предположим, что этот процесс удовлетворяет следующим трем условиям.

1. *Стационарность*: вероятность $P_{t,t+\tau}(k)$ наступления ровно k событий в интервале времени $[t, t + \tau)$ не зависит от t :

$$\forall \tau, t \in [0, +\infty) \quad P_{t,t+\tau}(k) = P_\tau(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е. вероятность $P_{t,t+\tau}(k)$ при каждом k зависит только от длины τ интервала времени $[t, t + \tau)$ и не зависит от положения этого интервала на временной оси, которое характеризуется моментом t .

2. *Отсутствие последействия*: вероятность $P_{t,t+\tau}(k)$ наступления k событий в течение промежутка $[t, t + \tau)$ не зависит от того, сколько раз и как появлялись события ранее. Это предположение означает, что условная вероятность появления k событий за промежуток времени $[t, t + \tau)$ при любом предположении о наступлении событий до момента t совпадает с безусловной вероятностью. В частности, отсутствие последействия означает, что для любого конечного набора непересекающихся полуинтервалов времени $[t_1, t_1 + \tau_1), \dots, [t_n, t_n + \tau_n)$ числа K_1, \dots, K_n событий в них — независимые в совокупности случайные величины.

3. *Одинарность*: вероятность появления более одного события в интервале времени длительности t есть величина более высокого порядка малости по сравнению с t при $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P\{K(t) > 1\}}{t} = 0.$$

Случайный процесс $K(t)$, удовлетворяющий перечисленным условиям стационарности, отсутствия последействия и одинарности, называется *пуассоновским*, а последовательность событий, счетчиком которых выступает $K(t)$, называется *пуассоновским потоком событий*.

Можно показать, что условия 1, 2, 3 влекут за собой равенство

$$P\{K(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и данное здесь определение пуассоновского потока эквивалентно определению, данному в § 10 при формулировке задачи 3. Следовательно, $K(t)$ при любом t есть дискретная случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λt . При этом λ называется *интенсивностью* пуассоновского процесса. Поскольку математическое ожидание $M\{K(t)\} = \lambda t$, то параметр λ можно интерпретировать как среднее число событий пуассоновского потока в единицу времени.

Задачи

1. Пусть $K(t)$ — пуассоновский процесс. Для произвольной последовательности моментов $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ и произвольной последовательности целых неотрицательных чисел $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ найти вероятность

$$P\{K(t_1) = k_1, K(t_2) = k_2, \dots, K(t_n) = k_n\}.$$

Решение. Наряду с обозначением $K(t)$ будем использовать следующее: $K(t', t'')$ — число событий в интервале $[t', t'')$. Пусть сначала $n = 2$. Используя свойства пуассоновского процесса, можем написать

$$\begin{aligned} P\{K(t_1) = k_1, K(t_2) = k_2\} &= P\{K(t_1) = k_1, K(t_1, t_2) = k_2 - k_1\} = \\ &= P\{K(t_1) = k_1\} \cdot P\{K(t_1, t_2) = k_2 - k_1\} = \\ &= P\{K(t_1) = k_1\} \cdot P\{K(t_2 - t_1) = k_2 - k_1\} = \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, в общем случае получим

$$\begin{aligned} P\{K(t_1) = k_1, K(t_2) = k_2, \dots, K(t_n) = k_n\} &= \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \cdot \frac{(\lambda(t_3 - t_2))^{k_3 - k_2}}{(k_3 - k_2)!} e^{-\lambda(t_3 - t_2)} \dots \\ &\quad \dots \cdot \frac{(\lambda(t_{n-1} - t_{n-2}))^{k_{n-1} - k_{n-2}}}{(k_{n-1} - k_{n-2})!} e^{-\lambda(t_{n-1} - t_{n-2})} \times \\ &\quad \times \frac{(\lambda(t_n - t_{n-1}))^{k_n - k_{n-1}}}{(k_n - k_{n-1})!} e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})} = \\ &= \frac{\lambda^{k_n} e^{-\lambda t_n} t_1^{k_1} (t_2 - t_1)^{k_2 - k_1} \dots (t_n - t_{n-1})^{k_n - k_{n-1}}}{k_1! (k_2 - k_1)! \dots (k_n - k_{n-1})!}. \end{aligned}$$

2. Пусть $K(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ , а $\tilde{K}(t)$ — процесс, полученный из $K(t)$ удалением каждого события

потока (независимо от других) с вероятностью p . Найти интенсивность такого «просеянного» пуассоновского процесса $\tilde{K}(t)$.

Решение. Введем следующую полную группу событий: H_0 — ни одно из событий исходного пуассоновского потока не было удалено к моменту t ; H_1 — к моменту t было удалено ровно одно событие; \dots ; H_m — к моменту t были удалены ровно m событий; \dots . Тогда

$$\begin{aligned} P\{\tilde{K}(t) = k\} &= P\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \{K(t) = k+m\}\{H_m\}\right\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P\{K(t) = k+m, H_m\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} P\{H_m \mid K(t) = k+m\} \cdot P\{K(t) = k+m\} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} C_{k+m}^m p^m (1-p)^k \cdot \frac{(\lambda t)^{k+m}}{(k+m)!} e^{-\lambda t} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{m!k!} p^m (1-p)^k \cdot \frac{(\lambda t)^{k+m}}{(k+m)!} e^{-\lambda t} = \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} (1-p)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^m (\lambda t)^m}{m!} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} (1-p)^k e^{\lambda t p} = \\ &= \frac{(\lambda(1-p)t)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)t}, \end{aligned}$$

т. е. $\tilde{K}(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(1-p)$.

3. Найти корреляционную функцию $K_{\text{ps}}(t_1, t_2)$ пуассоновского процесса $K(t)$ с интенсивностью λ .

Решение. Пусть для определенности $t_2 \geq t_1$. Имеем

$$\begin{aligned} K_{\text{ps}}(t_1, t_2) &= M\{(K(t_1) - \lambda t_1)(K(t_2) - \lambda t_2)\} = \\ &= M\{K(t_1)K(t_2)\} - \lambda t_2 \cdot M\{K(t_1)\} - \lambda t_1 \cdot M\{K(t_2)\} + \lambda^2 t_1 t_2 = \\ &= M\{K(t_1)(K(t_2) - K(t_1) + K(t_1))\} - \lambda t_2 \cdot \lambda t_1 - \lambda t_1 \cdot \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 = \\ &= M\{K(t_1)(K(t_2) - K(t_1))\} + M\{(K(t_1))^2\} - \lambda^2 t_1 t_2. \quad (1) \end{aligned}$$

По определению пуассоновского процесса случайные величины $K(t_1)$ и $K(t_2) - K(t_1)$ независимы, так что

$$\begin{aligned} M\{K(t_1)(K(t_2) - K(t_1))\} &= M\{K(t_1)\} M\{(K(t_2) - K(t_1))\} = \\ &= \lambda t_1 \cdot (\lambda t_2 - \lambda t_1) = \lambda^2 t_1 t_2 - \lambda^2 t_1^2; \end{aligned}$$

кроме того,

$$M\{(K(t_1))^2\} = D\{K(t_1)\} + (M\{K(t_1)\})^2 = \lambda t_1 + (\lambda t_1)^2.$$

Подставляя это в (1), находим

$$K_{\text{ps}}(t_1, t_2) = \lambda t_1.$$

Аналогично при $t_2 \leq t_1$ получим

$$K_{\text{ps}}(t_1, t_2) = \lambda t_2,$$

так что при произвольном соотношении моментов t_1 и t_2 можем написать

$$K_{\text{ps}}(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2).$$

Заметим, что, используя понятие центрированного случайного процесса, этот результат можно получить быстрее. Например, при $t_2 \geq t_1$ имеем

$$\begin{aligned} K_{\text{ps}}(t_1, t_2) &= M\{\overset{\circ}{K}(t_1)\overset{\circ}{K}(t_2)\} = M\{\overset{\circ}{K}(t_1)(\overset{\circ}{K}(t_2) - \overset{\circ}{K}(t_1) + \overset{\circ}{K}(t_1))\} = \\ &= M\{\overset{\circ}{K}(t_1) \cdot (\overset{\circ}{K}(t_2) - \overset{\circ}{K}(t_1))\} + M\{\overset{\circ}{K}(t_1)\}^2 = \\ &= M\{\overset{\circ}{K}(t_1)\} \cdot M\{\overset{\circ}{K}(t_2) - \overset{\circ}{K}(t_1)\} + D\{\overset{\circ}{K}(t_1)\} = 0 \cdot 0 + \lambda t_1 = \lambda t_1. \end{aligned}$$

4. Предположим, что на некотором шоссе поток автомобилей можно считать пуассоновским с интенсивностью λ , т. е. λ — среднее число машин, проезжающих мимо неподвижного наблюдателя в единицу времени (пусть в секунду). Найти вероятность того, что пройдет более N с, пока мимо наблюдателя проедут n автомобилей.

Решение. Пусть случайная величина T_1 — интервал времени, прошедший от момента начала наблюдения до момента проезда 1-го автомобиля мимо наблюдателя; T_2 — время от момента проезда 1-го автомобиля мимо наблюдателя до момента проезда 2-го автомобиля и т. д. Тогда искомая вероятность есть

$$P\{T_1 + T_2 + \dots + T_n > N\}.$$

Найдем функцию распределения $F(t)$ случайной величины $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. Имеем

$$\begin{aligned} F(t) &= P\{T_1 + T_2 + \dots + T_n < t\} = \\ &= P\{\text{в промежутке } [0, t] \text{ произошло число событий } \geq n\} = \\ &= 1 - P\{\text{в промежутке } [0, t] \text{ произошло число событий } < n\} = \\ &= 1 - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Плотность распределения случайной величины T есть

$$\begin{aligned} f(t) = F'(t) &= - \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{m(\lambda t)^{m-1}}{m!} \lambda e^{-\lambda t} - \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} \lambda \right) = \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^m}{m!} - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} \right) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомая вероятность есть

$$P\{T > N\} = \int_N^{+\infty} f(t) dt = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_N^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt.$$

Последний интеграл легко вычисляется последовательным интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_N^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} dt &= \frac{N^{n-1} e^{-\lambda N}}{\lambda} + \frac{n-1}{\lambda} \int_N^{+\infty} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt = \\ &= \frac{N^{n-1} e^{-\lambda N}}{\lambda} + \frac{(n-1)N^{n-2} e^{-\lambda N}}{\lambda^2} + \frac{(n-1)(n-2)}{\lambda^2} \int_N^{+\infty} t^{n-3} e^{-\lambda t} dt = \\ &= \frac{N^{n-1} e^{-\lambda N}}{\lambda} + \frac{(n-1)N^{n-2} e^{-\lambda N}}{\lambda^2} + \frac{(n-1)(n-2)N^{n-3} e^{-\lambda N}}{\lambda^3} + \dots \\ &\dots + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(n-2))N^{n-(n-2+1)} e^{-\lambda N}}{\lambda^{n-1}} + \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))}{\lambda^{n-1}} \int_N^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \\ &= e^{-\lambda N} \left(\frac{N^{n-1}}{\lambda} + \frac{(n-1)N^{n-2}}{\lambda^2} + \frac{(n-1)(n-2)N^{n-3}}{\lambda^3} + \dots \right. \\ &\left. \dots + \frac{(n-1)(n-2)\dots2 \cdot N}{\lambda^{n-1}} + \frac{(n-1)(n-2)\dots1}{\lambda^n} \right) = \\ &= e^{-\lambda N} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{\lambda^{n-k}} \frac{(n-1)!}{k!} = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda N)^k}{k!} e^{-\lambda N}, \end{aligned}$$

так что окончательно

$$P\{T > N\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda N)^k}{k!} e^{-\lambda N}.$$

Заметим теперь, что этот результат можно было получить и значительно быстрее. Действительно,

$$\begin{aligned} P\{T > N\} &= P\{T_1 + T_2 + \dots + T_n > N\} = \\ &= P\{\text{в промежутке } [0, N) \text{ произошло не более } (n-1) \text{ событий}\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda N)^k}{k!} e^{-\lambda N}. \end{aligned}$$

5. Пусть $K(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ . Определить

$$P\{K(3) \geq 2 \text{ и } 7 \leq K(8) < 9\}.$$

Решение. Первый способ. Имеем

$$\begin{aligned} P\{K(3) \geq 2; 7 \leq K(8) < 9\} &= \\ &= P\{K(3) \geq 2; K(8) = 7\} + P\{K(3) \geq 2; K(8) = 8\} = \\ &= \sum_{m=2}^7 P\{K(3) = m\} P\{K(5) = 7 - m\} + \\ &\quad + \sum_{m=2}^8 P\{K(3) = m\} P\{K(5) = 8 - m\} = \\ &= \sum_{m=2}^7 P\{K(3) = m\} (P\{K(5) = 7 - m\} + P\{K(5) = 8 - m\}) + \\ &\quad + P\{K(3) = 8\} P\{K(5) = 0\} = \\ &= \sum_{m=2}^7 \frac{(3\lambda)^m}{m!} e^{-3\lambda} \left(\frac{(5\lambda)^{7-m}}{(7-m)!} e^{-5\lambda} + \frac{(5\lambda)^{8-m}}{(8-m)!} e^{-5\lambda} \right) + \frac{(3\lambda)^8}{8!} e^{-3\lambda} e^{-5\lambda} = \\ &= e^{-8\lambda} \sum_{m=2}^7 \frac{(3\lambda)^m}{m!} \frac{(5\lambda)^{7-m}}{(7-m)!} \left(1 + \frac{5\lambda}{8-m} \right) + e^{-8\lambda} \frac{3^8 \lambda^8}{8!} = \\ &= e^{-8\lambda} \lambda^7 \sum_{m=2}^7 \frac{3^m 5^{7-m}}{m! (7-m)!} \left(1 + \frac{5\lambda}{8-m} \right) + e^{-8\lambda} \frac{3^8 \lambda^8}{8!} = \\ &= e^{-8\lambda} \lambda^7 \sum_{m=2}^7 \frac{3^m 5^{7-m} (8-m+5\lambda)}{m! (8-m)!} + e^{-8\lambda} \frac{3^8 \lambda^8}{8!}. \end{aligned}$$

Второй способ. Пусть $F(x, y)$ — функция распределения двумерной случайной величины (X, Y) : $F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$;

$F_Y(y)$ — функция распределения случайной величины Y : $F_Y(y) = P\{Y < y\}$. Выразим вероятность $P\{X \geq x_1; y_1 \leq Y < y_2\}$ через функции $F(x, y)$ и $F_Y(y)$. Имеем

$$\begin{aligned} P\{X \geq x_1; y_1 \leq Y < y_2\} &= P\{X \geq x_1; Y < y_2\} - P\{X \geq x_1; Y < y_1\}, \\ P\{X \geq x_1; Y < y_2\} &= P\{Y < y_2\} - P\{X < x_1; Y < y_2\}, \\ P\{X \geq x_1; Y < y_1\} &= P\{Y < y_1\} - P\{X < x_1; Y < y_1\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P\{X \geq x_1; y_1 \leq Y < y_2\} &= P\{Y < y_2\} - P\{X < x_1; Y < y_2\} - \\ &\quad - (P\{Y < y_1\} - P\{X < x_1; Y < y_1\}) = \\ &= F_Y(y_2) - F_Y(y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Пусть теперь $X = K(3)$, $Y = K(8)$. Тогда

$$F(k_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{k_2-1} \sum_{n_1=0}^{k_1-1} P\{K(3) = n_1, K(8) = n_2\},$$

где по свойствам пуассоновского процесса

$$\begin{aligned} \text{при } n_2 \geq n_1: \quad P\{K(3) = n_1, K(8) = n_2\} &= \frac{(3\lambda)^{n_1}}{n_1!} \frac{(5\lambda)^{n_2-n_1}}{(n_2-n_1)!} e^{-8\lambda}, \\ \text{при } n_2 < n_1: \quad P\{K(3) = n_1, K(8) = n_2\} &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P\{K(3) \geq 2; 7 \leq K(8) < 9\} &= \sum_{n=0}^8 \frac{(8\lambda)^n}{n!} e^{-8\lambda} - \sum_{n=0}^6 \frac{(8\lambda)^n}{n!} e^{-8\lambda} - \\ &\quad - \sum_{n_2=0}^8 \sum_{n_1=0}^1 P\{K(3) = n_1, K(8) = n_2\} + \\ &\quad + \sum_{n_2=0}^6 \sum_{n_1=0}^1 P\{K(3) = n_1, K(8) = n_2\} = \\ &= \sum_{n=7}^8 \frac{(8\lambda)^n}{n!} e^{-8\lambda} - \sum_{n_2=7}^8 \sum_{n_1=0}^1 P\{K(3) = n_1, K(8) = n_2\} = \\ &= \sum_{n=7}^8 \frac{(8\lambda)^n}{n!} e^{-8\lambda} - \sum_{n_2=7}^8 \sum_{n_1=0}^1 \frac{(3\lambda)^{n_1}}{n_1!} \frac{(5\lambda)^{n_2-n_1}}{(n_2-n_1)!} e^{-8\lambda}. \end{aligned}$$

6. Пусть для некоторого потока событий промежутки времени между последовательными событиями представляют собой независимые случайные величины, одинаково распределенные по показательному закону с параметром λ . Пусть случайный процесс $K(t)$ — число событий, произошедших за промежуток времени длительностью t . Показать, что $P\{K(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$.

Решение. Пусть случайная величина X_1 — промежуток времени от момента начала наблюдения до первого события, X_2 — промежуток времени от первого события до второго и т. д. По условию задачи X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $\lambda e^{-\lambda x}$. Искомая вероятность есть

$$P\{K(t) = n\} = P\{X_1 + \dots + X_n < t; X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} > t\}.$$

Найдем плотность распределения случайной величины $U_n = X_1 + \dots + X_n$. Для этого воспользуемся следующим известным результатом (который уже использовался при решении задачи 7 из § 7; там же приводилась идея его доказательства).

Теорема (о свертке). *Если случайная величина X имеет плотность $f_1(x)$, а случайная величина Y — плотность $f_2(x)$, и X, Y независимы, то случайная величина $Z = X + Y$ имеет плотность*

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(z - x) dx.$$

Пользуясь этой теоремой, найдем плотность распределения $\phi_{U_2}(z)$ случайной величины $U_2 = X_1 + X_2$:

$$\begin{aligned} \phi_{U_2}(z) &= \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} dx = \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad (z \geq 0). \end{aligned}$$

Теперь можно найти плотность распределения $\phi_{U_3}(z)$ случайной величины $U_3 = U_2 + X_3$:

$$\phi_{U_3}(z) = \int_0^z \lambda^2 z e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^3 e^{-\lambda z} \int_0^z x dx = \frac{\lambda^3 z^2}{2} e^{-\lambda z} \quad (z \geq 0).$$

По индукции получаем плотность распределения $\phi_{U_n}(z)$ случайной величины $U_n = U_{n-1} + X_n$:

$$\phi_{U_n}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} & \text{при } z \geq 0, \\ \phi_{U_n}(z) = 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Искомая вероятность есть

$$P\{U_n < t, U_n + X_{n+1} > t\},$$

где X_{n+1} — случайная величина с плотностью $\lambda e^{-\lambda x}$ и независимая с U_n . Чтобы найти эту вероятность, научимся находить вероятность

$$P\{X < x, X + Y > z\},$$

где X — случайная величина с плотностью $f_X(x)$, Y — независимая с X случайная величина с функцией распределения $F_Y(y)$. Покажем, что

$$P\{X < x, X + Y > z\} = \int_{-\infty}^x f_X(t)(1 - F_Y(z - t)) dt.$$

Будем сначала считать, что X — дискретная случайная величина. Тогда

$$\begin{aligned} P\{X < x, X + Y > z\} &= \sum_{i: x_i < x} P\{X = x_i, X + Y > z\} = \\ &= \sum_{i: x_i < x} P\{X = x_i, Y > z - x_i\} = \sum_{i: x_i < x} P\{X = x_i\} P\{Y > z - x_i\} = \\ &= \sum_{i: x_i < x} P\{X = x_i\}(1 - P\{Y < z - x_i\}) = \\ &= \sum_{i: x_i < x} P\{X = x_i\}(1 - F_Y(z - x_i)). \end{aligned}$$

Если теперь считать, что X — непрерывная случайная величина с плотностью $f_X(x)$, то последняя сумма трансформируется в интеграл

$$\int_{-\infty}^x f_X(v)(1 - F_Y(z - v)) dv,$$

что и требовалось показать. Следовательно,

$$P\{U_n < t, U_n + X_{n+1} > t\} = \int_{-\infty}^t \phi_{U_n}(x)(1 - F_{X_{n+1}}(t - x)) dx,$$

где $F_{X_{n+1}}(v) = 1 - e^{-\lambda v}$ — функция распределения случайной величины X_{n+1} . В результате получаем

$$\begin{aligned} P\{U_n < t, U_n + X_{n+1} > t\} &= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} (1 - (1 - e^{-\lambda(t-x)})) dx = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t x^{n-1} dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

7. Предположим, что расстояния между автомобилями, движущимися в одном направлении по некоторому шоссе, распределены экспоненциально со средним значением 50 м. Какова вероятность того, что на отрезке шоссе длиной в 1 км находятся от 20 до 30 автомобилей?

Решение. Пусть случайная величина X_1 — расстояние от некоторой предварительно выбранной точки шоссе до первого автомобиля, X_2 — расстояние от первого автомобиля до второго и т. д. Пусть случайный процесс $K(s)$ — число автомобилей на участке шоссе длиной s . Тогда вероятность того, что на участке длиной s окажутся ровно n автомобилей, есть

$$P\{K(s) = n\} = P\{X_1 + \dots + X_n < s, X_1 + \dots + X_n + X_{n+1} > s\}.$$

По условию X_1, X_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ , где $MX_i = 1/\lambda = 50$ м. Поэтому, учитывая результаты решения задачи 6, можем утверждать, что

$$P\{K(s) = n\} = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}.$$

Требуемая вероятность

$$P\{k_1 \leq K(s) \leq k_2\} = \sum_{n=k_1}^{k_2} P\{K(s) = n\}.$$

При $\lambda = 1/50$, $s = 1000$, $k_1 = 20$, $k_2 = 30$ получаем

$$\sum_{n=20}^{30} \frac{20^n}{n!} e^{-20}.$$

8 (сложный пуассоновский процесс). Пусть $K(t)$ — пуассоновский процесс, но каждое j -е событие обладает индивидуальным весом V_j . Пусть V_j — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(v)$, не зависящей от времени. Предполагается также, что V_j , $j = 1, 2, \dots$, и процесс $K(t)$ независимы. Сложный пуассоновский процесс определяется равенством

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{K(t)} V_j,$$

т. е. является суммой случайного числа $K(t)$ случайных величин V_j . В качестве примера сложного пуассоновского процесса можно привести случайный процесс суммарного объема сделок, совершенных на бирже к моменту t . В этом случае $K(t)$ представляет собой число сделок, совершенных к моменту t , а V_j — объем j -й сделки.

Требуется найти математическое ожидание $m(t) = MQ(t)$ и корреляционную функцию $K(t_1, t_2) = M\{(Q(t_1) - m(t_1))(Q(t_2) - m(t_2))\}$ процесса $Q(t)$.

Решение. Для решения задачи воспользуемся аппаратом характеристических функций. Напомним, что характеристической функцией случайной величины X называется функция

$$\varphi_X(s) = M\{e^{isX}\},$$

где s — действительная переменная, i — мнимая единица: $i^2 = -1$. Исходя из этого определения, непосредственным дифференцированием нетрудно проверить, что между характеристической функцией $\varphi_X(s)$ случайной величины X и ее начальными моментами $M\{X^n\}$ имеет место следующая связь:

$$M\{X^n\} = i^{-n} \left(\frac{d^n \varphi_X(s)}{ds^n} \right) \Big|_{s=0}.$$

В частности,

$$M\{X\} = -i \left(\frac{d \varphi_X(s)}{ds} \right) \Big|_{s=0}, \quad M\{X^2\} = - \left(\frac{d^2 \varphi_X(s)}{ds^2} \right) \Big|_{s=0}.$$

Найдем характеристическую функцию случайной величины $Q(t)$ при произвольном фиксированном t . Имеем

$$\varphi_{Q(t)}(s) = M\{e^{isQ(t)}\} = \sum_{k=0}^{+\infty} M\{e^{isQ(t)} | K(t) = k\} P\{K(t) = k\}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} M\{e^{isQ(t)} \mid K(t) = k\} &= M\{e^{is\sum_{j=1}^k V_j}\} = M\{e^{isV_1} e^{isV_2} \dots e^{isV_k}\} = \\ &= M\{e^{isV_1}\} M\{e^{isV_2}\} \dots M\{e^{isV_k}\} = (\varphi_V(s))^k, \end{aligned}$$

где $\varphi_V(s)$ — характеристическая функция любой из случайных величин V_j , $j = 1, 2, \dots$ (ибо они одинаково распределены), то получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{Q(t)}(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (\varphi_V(s))^k P\{K(t) = k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} (\varphi_V(s))^k \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\varphi_V(s) \cdot \lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\varphi_V(s) \cdot \lambda t} = e^{-\lambda t(1-\varphi_V(s))}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M\{Q(t)\} &= -i \left(\frac{d\varphi_{Q(t)}(s)}{ds} \right) \Big|_{s=0} = \\ &= -i \cdot e^{-\lambda t(1-\varphi_V(s))} \Big|_{s=0} (-\lambda t)(-1) \left(\frac{d\varphi_V(s)}{ds} \right) \Big|_{s=0} = -i \cdot \lambda t \left(\frac{d\varphi_V(s)}{ds} \right) \Big|_{s=0}, \end{aligned}$$

где учтено, что $\varphi_V(0) = 1$. Учитывая теперь, что $MV = -i \left(\frac{d\varphi_V(s)}{ds} \right) \Big|_{s=0}$, получаем для математического ожидания $M\{Q(t)\}$ следующий результат:

$$m(t) = M\{Q(t)\} = \lambda t \cdot MV.$$

Этот результат был отчасти предсказуем: математическое ожидание суммы случайного числа одинаково распределенных независимых случайных слагаемых равно произведению математического ожидания каждого слагаемого, т. е. MV , на математическое ожидание числа слагаемых, т. е. λt .

Перейдем теперь к вычислению корреляционной функции. Пусть для определенности $t_2 \geq t_1$. Имеем

$$\begin{aligned} K(t_1, t_2) &= M\{Q(t_1)Q(t_2)\} - m(t_1)m(t_2) = \\ &= M\{Q(t_1)(Q(t_2) - Q(t_1) + Q(t_1))\} - \lambda^2 t_1 t_2 (MV)^2 = \\ &= M\{Q(t_1)\}M\{Q(t_2) - Q(t_1)\} + M\{Q^2(t_1)\} - \lambda^2 t_1 t_2 (MV)^2 = \\ &= \lambda t_1 MV(\lambda t_2 - \lambda t_1)MV + M\{Q^2(t_1)\} - \lambda^2 t_1 t_2 (MV)^2 = \\ &= -(\lambda t_1)^2 (MV)^2 + M\{Q^2(t_1)\}. \end{aligned}$$

Для нахождения $M\{Q^2(t_1)\}$ воспользуемся аппаратом характеристических функций:

$$\begin{aligned} M\{Q^2(t_1)\} &= -\left(\frac{d^2\varphi_{Q(t_1)}(s)}{ds^2}\right) \Big|_{s=0} = (-1)\left(\frac{d^2}{ds^2}\left\{e^{-\lambda t_1(1-\varphi_V(s))}\right\}\right) \Big|_{s=0} = \\ &= (-1)\left(\frac{d}{ds}\left\{e^{-\lambda t_1(1-\varphi_V(s))}(-\lambda t_1)(-1)\frac{d\varphi_V(s)}{ds}\right\}\right) \Big|_{s=0} = \\ &= (-1)\lambda t_1\left\{e^{-\lambda t_1(1-\varphi_V(s))}\lambda t_1\left(\frac{d\varphi_V(s)}{ds}\right)^2 + e^{-\lambda t_1(1-\varphi_V(s))}\frac{d^2\varphi_V(s)}{ds^2}\right\} \Big|_{s=0} = \\ &= (-1)\lambda t_1\left\{\lambda t_1\left(\frac{d\varphi_V(s)}{ds}\right)^2 + \frac{d^2\varphi_V(s)}{ds^2}\right\} \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

Учитывая теперь, что

$$MV = -i\left(\frac{d\varphi_V(s)}{ds}\right) \Big|_{s=0}, \quad \text{откуда} \quad \left(\frac{d\varphi_V(s)}{ds}\right)^2 \Big|_{s=0} = -(MV)^2,$$

и

$$M\{V^2\} = -\left(\frac{d^2\varphi_V(s)}{ds^2}\right) \Big|_{s=0}, \quad \text{откуда} \quad \left(\frac{d^2\varphi_V(s)}{ds^2}\right) \Big|_{s=0} = -M\{V^2\},$$

и продолжая предыдущую цепочку равенств для $M\{Q^2(t_1)\}$, получим

$$\begin{aligned} M\{Q^2(t_1)\} &= -\lambda t_1(\lambda t_1(-1)(MV)^2 - M\{V^2\}) = \\ &= (\lambda t_1)^2(MV)^2 + \lambda t_1 M\{V^2\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$K(t_1, t_2) = \lambda t_1 \cdot M\{V^2\}.$$

Аналогично, при $t_1 \geq t_2$ будет $K(t_1, t_2) = \lambda t_2 \cdot M\{V^2\}$. Таким образом, при произвольном соотношении моментов t_1 и t_2 можем написать

$$K(t_1, t_2) = \lambda \cdot \min(t_1, t_2) \cdot M\{V^2\}.$$

В частности, для дисперсии $D\{Q(t)\}$ получим

$$D\{Q(t)\} = K(t, t) = \lambda t \cdot M\{V^2\}.$$

Заметим, что, казалось бы, прогнозируемый результат — дисперсия суммы случайного числа одинаково распределенных независимых случайных слагаемых равна произведению математического ожидания числа слагаемых, т. е. λt , на дисперсию каждого слагаемого, т. е. $DV = M\{V^2\} - (MV)^2$, — оказался здесь ошибочным.

§ 12. Виды сходимости в вероятностном пространстве и характеристики гладкости случайного процесса

В отличие от обычной теории функций действительного переменного, в теории случайных процессов рассматриваются не один, а несколько видов сходимости и соответственно различные определения, связанные с понятием предела, в частности, определения непрерывности и дифференцируемости.

Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве; X — еще одна случайная величина, определенная на этом же пространстве. Вводятся следующие определения трех основных типов сходимости последовательности X_n к пределу X при $n \rightarrow \infty$.

1. *Сходимость с вероятностью 1* (другие названия: сходимость почти всюду, сходимость почти наверное). Последовательность случайных величин X_n , $n = 1, 2, \dots$, сходится к случайной величине X с вероятностью 1, если

$$P\{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

Более подробно: каждому элементарному событию ω соответствует некоторая числовая последовательность $x_1 = X_1(\omega), x_2 = X_2(\omega), \dots$ и число $x = X(\omega)$; требуется, чтобы вероятностная мера множества, состоящего из тех ω , для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, равнялась 1.

Короче это требование записывают так: $P\{X_n \rightarrow X\} = 1$, а для обозначения самого факта сходимости с вероятностью 1 пишут $X_n \xrightarrow{\text{п.в.}} X$, или $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ (сокращения п.в. или п.н. означают соответственно почти всюду или почти наверное).

2. *Сходимость в среднеквадратичном*. Последовательность случайных величин X_n , $n = 1, 2, \dots$, сходится к случайной величине X в среднеквадратичном, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{(X_n - X)^2\} = 0.$$

Такую сходимость обозначают $X_n \xrightarrow{\text{ср.кв.}} X$.

3. Сходимость по вероятности. Последовательность случайных величин X_n , $n = 1, 2, \dots$, сходится к случайной величине X по вероятности, если для любого заданного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0, \quad \text{где } \delta_n = P\{|X_n - X| > \varepsilon\}.$$

Этот тип сходимости записывается так: $X_n \xrightarrow{P} X$.

Общее свойство, присущее всем трем определениям, можно сформулировать так: при достаточно больших n случайная величина X_n и предельная случайная величина X близки в определенном вероятностном смысле.

Покажем, что сходимость по вероятности является самым слабым видом сходимости, т. е. как сходимость в среднеквадратичном, так и сходимость с вероятностью 1 влечут за собой сходимость по вероятности. Первое из этих утверждений следует из неравенства Чебышёва (см. § 8): если при каком-либо $k > 0$ для случайной величины Y существует $M\{|Y|^k\}$, то для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$P\{|Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{|Y|^k\}}{\varepsilon^k}.$$

Взяв здесь $k = 2$ и положив $Y = X_n - X$, получим

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{(X_n - X)^2\}}{\varepsilon^2}.$$

Следовательно, если $M\{(X_n - X)^2\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и $P\{|X_n - X| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. из сходимости в среднеквадратичном следует сходимость по вероятности.

Докажем теперь, что сходимость с вероятностью 1 также влечет за собой сходимость по вероятности. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и введем в рассмотрение событие

$$A_\varepsilon = \{\omega: \exists N = N(\omega) \quad \forall n \geq N \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}.$$

Если имеет место сходимость последовательности случайных величин X_n , $n = 1, 2, \dots$, к случайной величине X с вероятностью 1, то $P\{A_\varepsilon\} = 1$. Противоположное событию $\overline{A_\varepsilon}$ событие есть

$$\overline{A_\varepsilon} = \{\omega: \forall N \quad \exists n \geq N \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\};$$

для него $P\{\overline{A_\varepsilon}\} = 0$. Введем событие

$$B_{\varepsilon, N} = \{\omega: \exists n \geq N \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Тогда

$$\overline{A_\varepsilon} = B_{\varepsilon,1} B_{\varepsilon,2} B_{\varepsilon,3} \dots = \prod_{k=1}^{\infty} B_{\varepsilon,k},$$

причем

$$B_{\varepsilon,1} \supset B_{\varepsilon,2} \supset \dots \supset B_{\varepsilon,k} \supset B_{\varepsilon,k+1} \supset \dots$$

В этой ситуации, очевидно, имеет место представление

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon,1} &= \overline{A_\varepsilon} + B_{\varepsilon,1} \overline{B_{\varepsilon,2}} + B_{\varepsilon,2} \overline{B_{\varepsilon,3}} + \dots + B_{\varepsilon,k} \overline{B_{\varepsilon,k+1}} + \dots = \\ &= \overline{A_\varepsilon} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{\varepsilon,k} \overline{B_{\varepsilon,k+1}}. \end{aligned}$$

Поскольку любые два слагаемых в правой части этого равенства являются событиями несовместными, то

$$P\{B_{\varepsilon,1}\} = P\{\overline{A_\varepsilon}\} + \sum_{k=1}^{\infty} P\{B_{\varepsilon,k} \overline{B_{\varepsilon,k+1}}\}.$$

Обозначим $S_N = \sum_{k=1}^{N-1} P\{B_{\varepsilon,k} \overline{B_{\varepsilon,k+1}}\}$; тогда

$$P\{B_{\varepsilon,1}\} = P\{\overline{A_\varepsilon}\} + \lim_{N \rightarrow \infty} S_N.$$

В силу свойства вложенности событий $B_{\varepsilon,k}$ имеем

$$\begin{aligned} P\{B_{\varepsilon,k} \overline{B_{\varepsilon,k+1}}\} &= P\{B_{\varepsilon,k}\} - P\{B_{\varepsilon,k+1}\} \quad \text{для любого } k = 1, 2, \dots; \\ \text{поэтому } S_N &= P\{B_{\varepsilon,1}\} - P\{B_{\varepsilon,N}\} \text{ и} \end{aligned}$$

$$P\{B_{\varepsilon,1}\} = P\{\overline{A_\varepsilon}\} + (P\{B_{\varepsilon,1}\} - \lim_{N \rightarrow \infty} P\{B_{\varepsilon,N}\}),$$

откуда следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{B_{\varepsilon,N}\} = P\{\overline{A_\varepsilon}\} = 0.$$

Введем теперь в рассмотрение событие

$$C_{\varepsilon,N} = \{\omega: |X_N(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}.$$

Тогда $C_{\varepsilon,N} \subset B_{\varepsilon,N}$, так что

$$0 \leq P\{C_{\varepsilon,N}\} \leq P\{B_{\varepsilon,N}\}.$$

Переходя в последнем двойном неравенстве к пределу при $N \rightarrow \infty$, получим $\lim_{N \rightarrow \infty} P\{C_{\varepsilon,N}\} = \lim_{N \rightarrow \infty} P\{|X_N - X| \geq \varepsilon\} = 0$, что и требовалось доказать.

Итак, сходимость с вероятностью 1, как и сходимость в среднеквадратичном, влечет за собой сходимость по вероятности.

Помимо трех выше введенных типов сходимости (с вероятностью 1, в среднеквадратичном, по вероятности) рассматривается еще один тип сходимости — сходимость по распределению.

4. Сходимость по распределению. Этот тип сходимости определяется следующим образом: последовательность случайных величин Y_n , $n = 1, 2, \dots$, сходится к случайной величине Y по распределению, если последовательность функций распределения $F_{Y_n}(x)$ сходится к функции распределения $F_Y(x)$ во всех точках x , где $F_Y(x)$ непрерывна.

Докажем, что из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению: если для любого $\varepsilon > 0$ $P\{|Y_n - Y| > \varepsilon\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $F_{Y_n}(x) \rightarrow F_Y(x)$ при $n \rightarrow \infty$, если только $F_Y(x)$ непрерывна в точке x . По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P\{Y_n < x\} &= P\{(Y_n < x) \cap (Y < x + \varepsilon)\} + \\ &+ P\{(Y_n < x) \cap (Y \geq x + \varepsilon)\} \leq P\{Y < x + \varepsilon\} + P\{|Y_n - Y| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} P\{Y < x - \varepsilon\} &= P\{(Y < x - \varepsilon) \cap (Y_n < x)\} + \\ &+ P\{(Y < x - \varepsilon) \cap (Y_n \geq x)\} \leq P\{Y_n < x\} + P\{|Y_n - Y| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Отсюда, вводя обозначение $\delta_n(\varepsilon) = P\{|Y_n - Y| > \varepsilon\}$ и объединяя два последних неравенства в одно двойное, получим

$$F_Y(x - \varepsilon) - \delta_n(\varepsilon) \leq F_{Y_n}(x) \leq F_Y(x + \varepsilon) + \delta_n(\varepsilon). \quad (1)$$

Возьмем любое сколь угодно малое $\Delta > 0$. По непрерывности $F_Y(x)$ в точке x можно указать такое ε , что $F_Y(x + \varepsilon)$ и $F_Y(x - \varepsilon)$ будут отличаться меньше, чем на $\Delta/2$. Далее, существует натуральное N , такое, что для любого $n \geq N$ будет $\delta_n(\varepsilon) < \Delta/4$. Поэтому, в силу (1), для любого $n_1 \geq N$ и любого $n_2 \geq N$

$$|F_{Y_{n_1}}(x) - F_{Y_{n_2}}(x)| < \Delta,$$

и по критерию Коши существования предела последовательности существует предел $\lim F_{Y_n}(x)$ при $n \rightarrow \infty$. При этом из (1) следует, что этот предел равен $F_Y(x)$, что и требовалось доказать.

Различные определения сходимости в вероятностном пространстве приводят к различному пониманию непрерывности и дифференцируемости случайного процесса. В соответствии с определениями сходимости непрерывность и дифференцируемость слу-

чайного процесса можно понимать: а) в смысле сходимости с вероятностью 1, б) в смысле среднеквадратичной сходимости, в) в смысле сходимости по вероятности, г) в смысле сходимости по распределению. Приведем, например, определения непрерывности и дифференцируемости в среднеквадратичном (ср.кв.).

Если случайный процесс $X(t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M\{(X(t) - X(t_0))^2\} = 0,$$

то говорят, что $X(t)$ *непрерывен в ср.кв. в точке* $t = t_0$. Если это условие выполняется во всех точках некоторого промежутка (a, b) , то процесс называется *непрерывным в ср.кв. в промежутке* (a, b) .

Если случайный процесс $X(t)$ и случайная величина Y удовлетворяют условию

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M\left\{\left(\frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0} - Y\right)^2\right\} = 0,$$

то процесс $X(t)$ называется *дифференцируемым в ср.кв. в точке* t_0 , случайная величина Y — *производной в ср.кв. процесса* $X(t)$ в точке t_0 ; при этом для Y используют также обозначение $X'(t_0)$.

Пусть $K(t, u)$ — корреляционная функция процесса $X(t)$. Найдем достаточное условие непрерывности в ср.кв. процесса $X(t)$ в терминах его корреляционной функции. Имеем

$$\begin{aligned} M\{(X(t_0 + h) - X(t_0))^2\} &= M\{X(t_0 + h)X(t_0 + h)\} - \\ &\quad - 2M\{X(t_0 + h)X(t_0)\} + M\{X(t_0)X(t_0)\}. \end{aligned}$$

Пусть $m(t) = M\{X(t)\}$. Легко проверить, что при любых t' и t''

$$K(t', t'') = M\{X(t')X(t'')\} - m(t')m(t'');$$

поэтому

$$\begin{aligned} M\{(X(t_0 + h) - X(t_0))^2\} &= K(t_0 + h, t_0 + h) + m(t_0 + h)m(t_0 + h) - \\ &\quad - 2K(t_0 + h, t_0) - 2m(t_0 + h)m(t_0) + K(t_0, t_0) + m(t_0)m(t_0). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если функция $m(t)$ непрерывна в точке t_0 , а $K(t, u)$ непрерывна в точке $t = u = t_0$, то процесс $X(t)$ непрерывен в ср.кв. в точке t_0 . Можно показать, что это условие является также необходимым: из непрерывности в ср.кв. процесса $X(t)$ в точке t_0 следуют непрерывность математического ожидания $m(t)$ в точке t_0 и непрерывность корреляционной функции $K(t, u)$ в точке $t = u = t_0$.

Отметим, что непрерывность в ср.кв. процесса $X(t)$ в (a, b) не влечет за собой непрерывности с вероятностью 1. Например, выборочные функции процесса, рассмотренного в задаче 3 из § 10, являются ступенчатыми с вероятностью 1 и, следовательно, разрывны. Тем не менее этот процесс непрерывен в ср.кв. в любой точке, поскольку его математическое ожидание $m(t) \equiv 0$ и корреляционная функция $K(t, u) = D \exp\{-\lambda|t - u|\}$ непрерывны.

Необходимое и достаточное условия дифференцируемости в ср.кв. процесса $X(t)$ в точке t_0 также можно выразить в терминах математического ожидания $m(t)$ и корреляционной функции $K(t, u)$. Таким условием, как можно показать, является су-

ществование производных $\frac{dm(t)}{dt}$ в точке t_0 и $\frac{\partial K^2(t, u)}{\partial t \partial u}$ в точке $t = u = t_0$. При этом, как и в случае непрерывности в ср.кв., существование производной в ср.кв. еще не означает, что выборочные функции процесса дифференцируемы в обычном смысле.

Наконец, сформулируем без доказательства еще один результат, которым будем пользоваться в дальнейшем. Пусть случайный процесс $X(t)$ имеет математическое ожидание $m(t)$ и корреляционную функцию $K(t_1, t_2)$. Если процесс $X(t)$ дифференцируем в ср.кв. и его производная в ср.кв. равна $X'(t)$, то формулы

$$m_1(t) = \frac{dm(t)}{dt} \quad \text{и} \quad K_1(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

определяют *математическое ожидание* $m_1(t)$ и *корреляционную функцию* $K_1(t_1, t_2)$ процесса $X'(t)$. Формально этот результат можно получить, если изменить последовательность выполнения операций математического ожидания и дифференцируемости в ср.кв.:

$$\begin{aligned} m_1(t) &= M\{X'(t)\} = M\left\{ \frac{d}{dt} X(t) \right\} = \frac{d}{dt} M\{X(t)\} = \frac{dm(t)}{dt}, \\ K_1(t_1, t_2) &= M\{(X'(t_1) - m_1(t_1))(X'(t_2) - m_1(t_2))\} = \\ &= M\left\{ \frac{d}{dt}(X(t) - m(t)) \Big|_{t=t_1} \frac{d}{dt}(X(t) - m(t)) \Big|_{t=t_2} \right\} = \\ &= M\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} (X(t_1) - m(t_1))(X(t_2) - m(t_2)) \right\} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} M\{(X(t_1) - m(t_1))(X(t_2) - m(t_2))\} = \frac{\partial^2 K(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \end{aligned}$$

Если интересоваться взаимной корреляционной функцией процессов $X(t)$ и $X'(t)$, которая по определению есть

$$K_{01}(t_1, t_2) = M\{(X(t_1) - m(t_1))(X'(t_2) - m_1(t_2))\},$$

то аналогичные преобразования приводят к результату

$$K_{01}(t_1, t_2) = \frac{\partial K(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

Этот результат также справедлив и может быть доказан математически строго.

Задачи

1. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность случайных величин, $F_1(x), F_2(x), \dots$ — их функции распределения. Предположим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$$

в каждой точке непрерывности функции $G(x)$. Показать, что этого условия недостаточно для того, чтобы утверждать факт сходимости случайных величин X_1, X_2, \dots по распределению.

Решение. Пусть случайная величина X_n имеет функцию распределения

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -n, \\ \frac{1}{2} & \text{при } -n < x \leq n, \\ 1 & \text{при } x > n, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, \dots$. Тогда, очевидно, для любого x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{1}{2}.$$

Тем не менее функция

$$G(x) \equiv \frac{1}{2}$$

не является функцией распределения, так что не выполняется определение сходимости случайных величин X_1, X_2, \dots по распределению.

2. Пусть эксперимент состоит во вбрасывании точки на единичную окружность, причем все точки попадания равновероятны (т. е. равномерно распределены на окружности). Зафиксируем на

окружности какую-либо точку O и будем отсчитывать от нее длину дуги. Пусть ω — элементарный исход, соответствующий попаданию в конкретную точку C_ω окружности. Условие $\omega \in [\alpha, \beta]$ будем понимать как попадание точки C_ω на дугу AB , где длина дуги OA равна α , а длина дуги OB равна β . Пусть r_n — некоторая заданная числовая последовательность, $n = 1, 2, \dots$. Определим последовательность случайных величин $X_n = X_n(\omega)$ следующим образом:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{если } \omega \in \left[r_n, r_n + \frac{1}{n}\right]; \\ 1, & \text{если } \omega \notin \left[r_n, r_n + \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Требуется исследовать сходимость последовательности случайных величин X_n . Рассмотреть два случая задания последовательности r_n :

$$1) r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}; \quad 2) r_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Решение. В качестве предельной случайной величины рассмотрим $X \equiv 1$. Исследуем сходимость по вероятности. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = P\left\{\omega \in \left[r_n, r_n + \frac{1}{n}\right]\right\} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

так что сходимость по вероятности есть. Исследуем сходимость в среднеквадратичном:

$$\begin{aligned} M\{(X_n - X)^2\} &= 1^2 \cdot P\{|X_n - X| = 1\} = \\ &= P\left\{\omega \in \left[r_n, r_n + \frac{1}{n}\right]\right\} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что сходимость в среднеквадратичном тоже имеет место.

Покажем теперь, что в случае 1) сходимости с вероятностью 1 нет. Для этого зафиксируем любое $\omega = \omega_{\text{fix}}$ и покажем, что числовая последовательность

$$x_1 = X_1(\omega_{\text{fix}}), \quad x_2 = X_2(\omega_{\text{fix}}), \quad \dots$$

не будет сходиться к 1. Действительно, в силу расходимости гармонического ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ при любом сколь угодно большом N найдется $n^* > N$, такое, что $\omega_{\text{fix}} \in \left[r_{n^*}, r_{n^*} + \frac{1}{n^*}\right]$ и $x_{n^*} = 2$.

В случае 2) при $C_{\omega_{\text{fix}}} \neq \tilde{C}$, где длина дуги $O\tilde{C}$ равна сумме ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, для всех достаточно больших n будет выполняться условие $\omega_{\text{fix}} \notin \left[r_n, r_n + \frac{1}{n}\right]$ и, как следствие, $x_n = 1$. А поскольку $P\{C_{\omega} = \tilde{C}\} = 0$, то

$$P\{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 1\} = 1,$$

что и означает факт сходимости с вероятностью 1 последовательности случайных величин X_1, X_2, \dots .

3. Пусть случайная величина X_n , $n = 1, 2, \dots$, имеет плотность распределения

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1+n^2x^2} \quad (\text{распределение Коши}).$$

Требуется исследовать последовательность X_1, X_2, \dots на сходимость в среднеквадратичном и по вероятности.

Решение. Поскольку при $n \rightarrow \infty$ плотность распределения $f_n(x)$ становится похожей на дельта-функцию, то в качестве предельной случайной величины естественно рассмотреть $X \equiv 0$. Исследуем на сходимость по вероятности. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} &= P\{|X_n| > \varepsilon\} = 1 - P\{|X_n| \leq \varepsilon\} = \\ &= 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x) dx = 1 - \frac{2n}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{1+n^2x^2} = 1 - \frac{2n}{\pi} \int_0^{n\varepsilon} \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{n} = \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \arctg n\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т. е. сходимость по вероятности есть.

Исследуем на сходимость в среднеквадратичном. Имеем

$$M\{(X_n - X)^2\} = M\{X_n^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{nx^2}{\pi(1+n^2x^2)} dx.$$

Поскольку последний интеграл расходится при любом n , то сходимости в среднеквадратичном нет.

4. Привести пример последовательности случайных величин, которая сходится по распределению, но расходится по вероятности.

Решение. Пусть X_n , $n = 1, 2, \dots$, есть последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$; X — элемент этой же последовательности. Очевидно, что сходимость по распределению есть. Исследуем на сходимость по вероятности. Пусть, для определенности, $\varepsilon = 0,01$. Имеем

$$\begin{aligned} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} &\geq P\left\{X_n \in \left[0; \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right], X \in \left[\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}; 1\right]\right\} = \\ &= P\left\{X_n \in \left[0; \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right]\right\} \cdot P\left\{X \in \left[\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}; 1\right]\right\} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}, \end{aligned}$$

т. е. эта вероятность не стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, так что сходимости по вероятности нет.

5. Доказать, что пуассоновский процесс дифференцируем по вероятности в каждой точке и его производная (по вероятности) равна нулю.

Решение. Пусть $K(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ . Зафиксируем любое сколь угодно малое $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{K(t+h) - K(t)}{h} - 0\right| > \varepsilon\right\} &= 1 - P\left\{\frac{K(t+h) - K(t)}{h} \leq \varepsilon\right\} = \\ &= 1 - P\left\{\frac{K(h)}{h} \leq \varepsilon\right\} = 1 - P\{K(h) \leq h \cdot \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Поскольку при достаточно малых h число $h\varepsilon$ будет меньше 1, то последнее выражение равно

$$1 - P\{K(h) = 0\} = 1 - \frac{(\lambda h)^0 e^{-\lambda h}}{0!} = 1 - e^{-\lambda h},$$

откуда в силу того, что $1 - e^{-\lambda h} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, следует, что производная пуассоновского процесса по вероятности в каждой точке существует и ее значение равно 0.

6. Пусть случайный процесс $X(t)$ устроен следующим образом: любой набор его сечений есть совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с известной плотностью распределения $f(x)$. Будет ли случайный процесс $X(t)$: а) непрерывным в среднеквадратичном; б) непрерывным по вероятности?

Решение. Сначала исследуем $X(t)$ на непрерывность в среднеквадратичном. Для этого воспользуемся необходимым и доста-

точным условием непрерывности в среднеквадратичном. Имеем для корреляционной функции $K_X(t_1, t_2)$ процесса $X(t)$

$$K_X(t_1, t_2) \equiv M\{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\} = \begin{cases} 0, & \text{если } t_1 \neq t_2; \\ D\{X(t)\}, & \text{если } t_1 = t_2 = t. \end{cases}$$

Таким образом, если

$$D\{X(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t))^2 f(x) dx > 0, \quad \text{где } m_X(t) = M\{X(t)\},$$

то процесс $X(t)$ не является непрерывным в ср. кв. в точке t , поскольку функция $K_X(t_1, t_2)$ разрывна в точке $t_1 = t_2 = t$.

Исследуем теперь $X(t)$ на непрерывность по вероятности. По определению, непрерывность по вероятности означает, что для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{|X(t + \varepsilon) - X(t)| \geq \delta\} = 0.$$

Зафиксируем t и найдем $P\{|X(t + \varepsilon) - X(t)| \geq \delta\}$ для $\varepsilon \neq 0$. По условию случайные величины $X(t + \varepsilon)$ и $X(t)$ независимы. Разность $X(t + \varepsilon) - X(t)$ можно рассматривать как сумму независимых случайных величин $X(t + \varepsilon)$ и $-X(t)$. Покажем, что плотность распределения случайной величины $-X(t)$ есть $f(-x)$. Действительно, пусть $Y = -X$; $F_Y(x)$ и $f_Y(x)$ — функция и плотность распределения случайной величины Y ; $F(x)$ и $f(x)$ — функция и плотность распределения случайной величины X . Тогда

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\{Y < x\} = P\{-X < x\} = P\{X > -x\} = \\ &= 1 - P\{X < -x\} = 1 - F(-x), \end{aligned}$$

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{d}{dx} (1 - F(-x)) = f(-x),$$

что и требовалось показать. Следовательно, по теореме о свертке (см. решение задачи 6 из § 11) плотность распределения случайной величины $X(t + \varepsilon) - X(t)$ есть

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u - x) du.$$

Поэтому для любого $\varepsilon \neq 0$

$$P\{|X(t + \varepsilon) - X(t)| \geq \delta\} = 1 - \int_{-\delta}^{\delta} g(x) dx.$$

Следовательно, условие

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P\{|X(t + \varepsilon) - X(t)| \geq \delta\} = 0$$

не выполняется, так что непрерывности по вероятности нет.

7. Пусть случайный процесс $X(t)$ определен на $T = [0, 1]$ следующим образом:

$$X(t) = \begin{cases} V_1, & \text{если } t < r; \\ V_2, & \text{если } t \geq r, \end{cases}$$

где r — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 1]$, V_1 и V_2 — нормально распределенные случайные величины с одинаковыми математическими ожиданиями m и равными дисперсиями $D > 0$. Случайные величины r, V_1, V_2 независимы в совокупности. Доказать, что $X(t)$ непрерывен в ср. кв., хотя все его реализаций разрывны с вероятностью 1.

Решение. Найдем математическое ожидание $m_X(t) = M\{X(t)\}$. С этой целью введем два события, образующие полную группу:

$$H_1 = \{t < r\} \quad \text{и} \quad H_2 = \{t \geq r\}.$$

Тогда $P\{H_1\} = 1 - t$, $P\{H_2\} = t$. По формуле полного математического ожидания найдем

$$\begin{aligned} m_X(t) &= M\{X(t) | H_1\}P\{H_1\} + M\{X(t) | H_2\}P\{H_2\} = \\ &= M\{V_1\}(1 - t) + M\{V_2\}t = m \cdot (1 - t) + m \cdot t = m, \end{aligned}$$

т. е. $m_X(t)$ — непрерывная функция.

Найдем теперь корреляционную функцию $K_X(t_1, t_2)$. Пусть сначала для определенности $t_1 < t_2$. Введем следующие три события, образующие полную группу:

$$\tilde{H}_1 = \{r < t_1\}, \quad \tilde{H}_2 = \{t_1 \leq r < t_2\}, \quad \tilde{H}_3 = \{t_2 \leq r\}.$$

По формуле полного математического ожидания найдем

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M\{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\} = M\{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2) | \tilde{H}_1\} \cdot P\{\tilde{H}_1\} + \\ &\quad + M\{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2) | \tilde{H}_2\} \cdot P\{\tilde{H}_2\} + M\{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2) | \tilde{H}_3\} \cdot P\{\tilde{H}_3\} = \\ &= M\{\overset{\circ}{V}_2 \cdot \overset{\circ}{V}_2\} \cdot t_1 + M\{\overset{\circ}{V}_1 \cdot \overset{\circ}{V}_2\} \cdot (t_2 - t_1) + M\{\overset{\circ}{V}_1 \cdot \overset{\circ}{V}_1\} \cdot (1 - t_2) = \\ &= D \cdot t_1 + 0 \cdot (t_2 - t_1) + D \cdot (1 - t_2) = D \cdot (1 - (t_2 - t_1)). \end{aligned}$$

Аналогично, при $t_1 > t_2$ получим

$$K_X(t_1, t_2) = D \cdot (1 - (t_1 - t_2)),$$

так что при произвольном соотношении моментов t_1 и t_2 будем иметь

$$K_X(t_1, t_2) = D \cdot (1 - |t_1 - t_2|).$$

Поскольку

$$\lim_{t_1 \rightarrow t, t_2 \rightarrow t} K_X(t_1, t_2) = K_X(t, t) = D,$$

то можно утверждать непрерывность в ср. кв. процесса $X(t)$ (формулировку соответствующего критерия см. в теоретической части настоящего параграфа).

Что касается разрывности с вероятностью 1 реализаций процесса $X(t)$, то она очевидна. Действительно, непрерывность реализации означает, что случайные величины V_1 и V_2 совпали. Но вероятность этого равна нулю:

$$P\{V_1 = V_2\} = P\{V_1 - V_2 = 0\} = 0,$$

ибо вероятность того, что непрерывная случайная величина $V_1 - V_2$ принимает заранее заданное значение (в данном случае нулевое), равна нулю.

§ 13. Стационарные и нормальные процессы — два важнейших класса случайных процессов

Во многих приложениях приходится изучать функции, определяемые случайными факторами и ведущие себя более или менее одинаково на протяжении периода наблюдения. Рассматривая эти функции $x(t)$ как реализации случайного процесса $X(t)$, естественно поставить вопрос об определении некоторого свойства процесса, которое бы как-то характеризовало эту стационарность, т. е. одинаковость поведения во времени. Такое свойство определяется как свойство *инвариантности* всех конечномерных распределений процесса относительно сдвигов времени t : для любой конечной последовательности точек t_1, \dots, t_n совместное n -мерное распределение случайных величин

$$X(t_1 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)$$

не зависит от τ . Процесс, обладающий этим свойством, называется *стационарным*.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ — плотность совместного распределения случайных величин $X(t_1), \dots, X(t_n)$, а $f(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau)$ — плотность совместного распределения случайных величин $X(t_1 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)$ (предполагаем, что плотности существуют). Тогда для стационарного процесса $X(t)$ при любом τ

$$f(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

В частности, при $n = 1$

$$f(x_1; t_1) = f(x_1; 0),$$

т. е. случайная величина $X(t_1)$ при любом t_1 подчиняется одному и тому же закону распределения. Следовательно,

$$m(t) = M\{X(t)\} = M\{X(0)\} = \text{const}$$

— математическое ожидание случайного процесса (если, конечно, оно существует) не зависит от t и является постоянной величиной. Далее, при $n = 2$

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = f(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1),$$

т. е. закон распределения системы случайных величин $X(t_1), X(t_2)$ зависит только от разности моментов времени $t_2 - t_1$. Следовательно, все остальные характеристики системы $X(t_1), X(t_2)$, в том числе корреляционная функция $K(t_1, t_2)$, не зависят отдельно от t_1 и t_2 , а полностью определяются (если, конечно, существуют) разностью $t_2 - t_1$: $K(t_1, t_2) = K(\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Стационарный случайный процесс называют также *строго стационарным*, или *стационарным в узком смысле*. В приложениях часто вводится понятие стационарности в широком смысле: случайный процесс называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Так, например, все процессы, рассмотренные в задачах к § 10, являются стационарными в широком смысле. Как было показано выше, из стационарности в узком смысле следует (при условии конечности первого и второго моментов распределений) стационарность в широком смысле. Обратное, вообще говоря, неверно.

Заметим, что функция $K(\tau)$ является четной. Действительно, если $K(t_1, t_2) = K(t_1 - t_2) = K(\tau)$, то $K(t_2, t_1) = K(t_2 - t_1) = K(-\tau)$. А так как, очевидно, $K(t_1, t_2) = K(t_2, t_1)$, то $K(\tau) = K(-\tau)$. Таким образом, для стационарного процесса можно писать $K(t_1, t_2) = K(\tau)$, где $\tau = |t_2 - t_1|$.

Применимельно к стационарному процессу указанные в § 12 условия непрерывности и дифференцируемости в ср.кв. упрощаются: для непрерывности в ср.кв. необходимо и достаточно непрерывности функции $K(\tau)$ при $\tau = 0$, а для дифференцируемости в ср.кв. — существования второй производной $K''(0)$. Так, например, процесс, рассмотренный в задаче 1 из § 10 и имеющий корреляционную функцию $K(\tau) = D \cos \theta \tau$, непрерывен и дифференцируем в ср.кв., а процессы в задачах 2 и 3 из § 10 с корреляционной функцией $K(\tau) = D \exp\{-\lambda|\tau|\}$ непрерывны в ср.кв., но не дифференцируемы в ср.кв.

Стационарные случайные процессы встречаются на практике довольно часто. Такими процессами можно моделировать, например: случайные шумы в радиоприборах; колебания напряжения в осветительной сети; качку корабля, совершающего равномерное движение по прямой; колебания высоты самолета в крейсерском горизонтальном полете. Как правило, стационарным случайнym процессом описывается изменение фазовых координат любой стохастической системы, функционирующей в установившемся режиме.

Другой важнейший класс случайных процессов образуют нормальные, или гауссовские случайные процессы. Случайный процесс $X(t)$ называется *нормальным (гауссовским)*, если при любом n и любых t_1, t_2, \dots, t_n из области изменения аргумента t плотность совместного распределения случайных величин $X_i = X(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, является нормальной (гауссовой), т. е. определяется формулой⁽¹⁾

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n D^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{i,j=1}^n D_{ij} \frac{(x_i - m_i)(x_j - m_j)}{\sigma_i \sigma_j} \right\},$$

где $m_i = M\{X_i\}$ — математическое ожидание случайной величины X_i , $\sigma_i^2 = M\{(X_i - m_i)^2\} = M\{\overset{\circ}{X}_i^2\}$ — дисперсия случайной величины X_i ; D — определитель n -го порядка, составленный из коэффициентов корреляции $\rho_{ij} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} M\{(X_i - m_i)(X_j - m_j)\} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} M\{\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j\}$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad (\rho_{ij} = \rho_{ji}, \rho_{ii} = 1);$$

D_{ij} — алгебраическое дополнение элемента ρ_{ij} определителя D .

Если ввести в рассмотрение корреляционную матрицу

$$K = M\{\overset{\circ}{\mathbf{X}}(\overset{\circ}{\mathbf{X}})^T\}, \quad \text{где } \overset{\circ}{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}_1 \\ \vdots \\ \overset{\circ}{X}_n \end{pmatrix},$$

то выражение для плотности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно записать в более запоминающемся виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|K|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\overset{\circ}{\mathbf{X}})^T K^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{X}} \right\},$$

где через $|K|$ обозначен определитель матрицы K .

⁽¹⁾ Данная формула описывает невырожденный случай, когда $D \neq 0$; общее определение совместного нормального распределения системы случайных величин, включающее и вырожденный случай $D = 0$, рассматривается ниже.

В частных случаях при $n = 1$ и при $n = 2$ из этой формулы получаем одномерную и двумерную плотности вероятности нормального процесса соответственно:

$$f(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

и

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

где $\rho = \rho_{12} = \rho_{21} = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}M\{(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)\}$ — коэффициент корреляции.

Выше было дано определение n -мерного нормального распределения в так называемом невырожденном случае, когда определитель $|K|$ корреляционной матрицы K отличен от нуля: $|K| \neq 0$. Общее определение n -мерного нормального распределения, включающее и вырожденный случай, можно сформулировать следующим образом. Будем говорить, что вектор X размерности m имеет *нормальное распределение*, если существует невырожденный нормальный вектор Y размерности $k \leq m$, такой, что компоненты вектора X являются линейными комбинациями компонент вектора Y . Если $|K_X| = 0$, то говорят, что вектор X *вырожден* в пространстве m измерений.

Рассмотрим следующий пример двумерного вырожденного распределения. Пусть X_1 и X_2 — нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей

$$K_X = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

так что $|K_X| = 0$ и распределение системы (X_1, X_2) является вырожденным. Покажем, что если $|K_X| = 0$, то можно подобрать постоянные c_1 и c_2 так, что

$$c_1X_1 + c_2X_2 \equiv 0.$$

Это будет означать, что случайная точка с координатами (X_1, X_2) все время ложится на прямую с уравнением $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, и, следовательно, распределение системы (X_1, X_2) вырождено, если его рассматривать как двумерное распределение.

Обозначим

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы произведение $\mathbf{c}^T \mathbf{X} = c_1 X_1 + c_2 X_2$ равнялось нулю:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{X} = 0.$$

Тогда

$$0 = M\{\mathbf{c}^T \mathbf{X} \cdot (\mathbf{c}^T \mathbf{X})^T\} = \mathbf{c}^T M\{\mathbf{X} \mathbf{X}^T\} \mathbf{c} = \mathbf{c}^T K_X \mathbf{c},$$

т. е.

$$(c_1 \ c_2) \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда

$$(c_1 + 2c_2)^2 = 0, \quad \text{или} \quad c_1 = -2c_2,$$

и в качестве \mathbf{c} можно взять

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, условие $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ принимает вид $x_2 = 2x_1$ и распределение случайного вектора \mathbf{X} сосредоточено на прямой $x_2 = 2x_1$.

Наряду с системой координат Ox_1x_2 введем в рассмотрение систему координат Oy_1y_2 , направив ось y_1 вдоль прямой $x_2 = 2x_1$, а ось y_2 — перпендикулярно этой прямой, как показано на рис. 12. Положение случайной точки на плоскости можно характеризовать как системой случайных величин (X_1, X_2) , так и системой (Y_1, Y_2) . Ясно, что в силу выбора системы Oy_1y_2 будет $Y_2 \equiv 0$. Найдем характеристики случайной величины Y_1 .

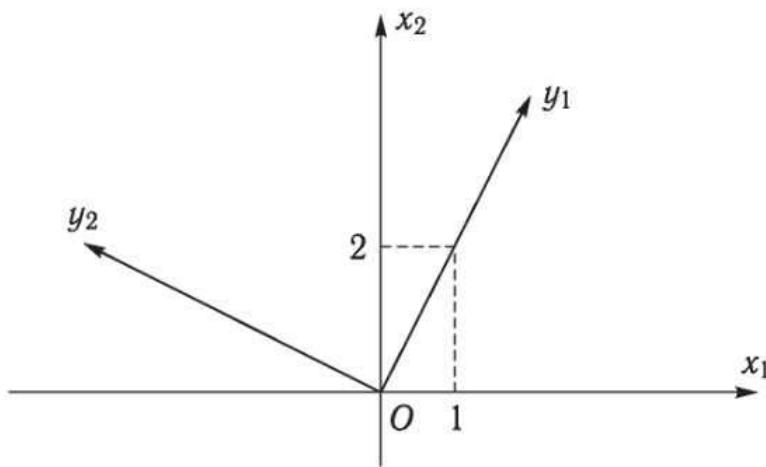


Рис. 12

Пусть $\mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{x_2}$ — координатные орты системы Ox_1x_2 , а $\mathbf{e}_{y_1}, \mathbf{e}_{y_2}$ — координатные орты системы Oy_1y_2 . Тогда

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{y_1} = \mathbf{e}_{x_1} \frac{1}{\sqrt{5}} + \mathbf{e}_{x_2} \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \mathbf{e}_{y_2} = \mathbf{e}_{x_1} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) + \mathbf{e}_{x_2} \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

откуда

$$(\mathbf{e}_{y_1} \ \mathbf{e}_{y_2}) = (\mathbf{e}_{x_1} \ \mathbf{e}_{x_2}) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Поэтому из равенства

$$(\mathbf{e}_{y_1} \ \mathbf{e}_{y_2}) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_{x_1} \ \mathbf{e}_{x_2}) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

следует

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} X_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} X_2.$$

Введем матрицу $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Тогда

$$Y_1 = B\mathbf{X}.$$

Для математического ожидания получим

$$M\{Y_1\} = B \cdot M\{\mathbf{X}\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

а для дисперсии

$$\begin{aligned} D\{Y_1\} &= M\{Y_1 Y_1^T\} = M\{B \mathbf{X} \mathbf{X}^T B^T\} = B \cdot M\{\mathbf{X} \mathbf{X}^T\} \cdot B^T = \\ &= BK_X B^T = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Задачи

1. Доказать, что для нормального случайного процесса понятия стационарности в узком и в широком смыслах совпадают.

Решение. По определению, нормальный случайный процесс — процесс, у которого любой набор сечений дает нормальный случайный вектор. Из стационарности в узком смысле, как было показано выше, всегда следует — при условии конечности вторых моментов — стационарность в широком смысле. Покажем, что для нормальных процессов справедливо и обратное.

Пусть $X(t)$ — стационарный в широком смысле нормальный случайный процесс. Покажем, что распределения векторов

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} X(t_1 + \theta) \\ \vdots \\ X(t_n + \theta) \end{pmatrix}$$

совпадают для любого натурального n и любых t_1, \dots, t_n, θ . Это совпадение и будет означать стационарность процесса $X(t)$ в узком смысле.

Распределение гауссовского случайного вектора полностью определяется вектором математических ожиданий компонент и корреляционной матрицей. Так как процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле, то для первого вектора имеем

$$M\{X(t_1)\} = \dots = M\{X(t_n)\} = m_X = M\{X(t)\} = \text{const},$$

а для элемента $k_{ij} = M\{\overset{\circ}{X}(t_i) \overset{\circ}{X}(t_j)\}$ его корреляционной матрицы

$$k_{ij} = K_X(t_i, t_j) = K_X(t_j - t_i),$$

где $K_X(u, v) = M\{\overset{\circ}{X}(u) \overset{\circ}{X}(v)\}$ — корреляционная функция процесса $X(t)$. Для второго вектора:

$$M\{X(t_1 + \theta)\} = \dots = M\{X(t_n + \theta)\} = m_X,$$

$$k_{ij} = M\{\overset{\circ}{X}(t_i + \theta) \overset{\circ}{X}(t_j + \theta)\} =$$

$$= K_X(t_i + \theta, t_j + \theta) = K_X((t_j + \theta) - (t_i + \theta)) = K_X(t_j - t_i)$$

— получаем те же самые результаты для моментов первого и второго порядков. Следовательно, имеет место совпадение распределений.

2. Доказать, что производная в ср. кв. — при условии ее существования — стационарного в широком смысле случайного процесса есть стационарный в широком смысле случайный процесс.

Решение. У стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$ математическое ожидание $m_X(t) = \text{const}$ и корреляционная функция $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2 - t_1)$. Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию производной $X'(t)$:

$$m_{X'}(t) = \frac{dm_X(t)}{dt} = 0,$$

$$K_{X'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K_X(t_2 - t_1)}{\partial t_1 \partial t_2} = -\left. \frac{d^2 K_X(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=t_2-t_1},$$

откуда и следует, что $X'(t)$ есть стационарный в широком смысле случайный процесс.

3. Пусть случайные величины X_1 и X_2 (каждая по отдельности) имеют нормальные распределения. Следует ли отсюда, что совместное распределение случайных величин X_1 и X_2 будет нормальным?

Решение. Нет, не следует. Приведем пример. Пусть плотность совместного распределения $f(x_1, x_2)$ случайных величин X_1 и X_2 имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)/(2\sigma^2)} & \text{при } x_1 x_2 \geq 0; \\ 0 & \text{при } x_1 x_2 < 0. \end{cases}$$

Проверим выполнение условия нормировки:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{2}{\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)/(2\sigma^2)} dx_1 dx_2 = \frac{2}{\pi\sigma^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-x_1^2/(2\sigma^2)} dx_1 \right)^2 = \\ &= \frac{2}{\pi\sigma^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2} \sigma dt \right)^2 = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt \right)^2 = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

— условие нормировки выполняется.

Найдем плотность распределения $f(x_1)$ случайной величины X_1 :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 = \\ &= \begin{cases} e^{-x_1^2/(2\sigma^2)} \frac{1}{\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} e^{-x_2^2/(2\sigma^2)} dx_2 & \text{при } x_1 \geq 0 \\ e^{-x_1^2/(2\sigma^2)} \frac{1}{\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^0 e^{-x_2^2/(2\sigma^2)} dx_2 & \text{при } x_1 < 0 \end{cases} = \\ &= e^{-x_1^2/(2\sigma^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2\sigma^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x_1^2/(2\sigma^2)}. \end{aligned}$$

Аналогично, для плотности распределения $f(x_2)$ случайной величины X_2 получим

$$f(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x_2^2/(2\sigma^2)}.$$

Как видно, плотности $f(x_1)$ и $f(x_2)$ оказались нормальными, тогда как совместная плотность $f(x_1, x_2)$ не является нормальной.

4. Рассмотрим пример из области банковской деятельности. Пусть время поступления вкладов в банк описывается пуассонским процессом с плотностью λ , так что среднее число вкладов, поступающих в единицу времени, равно λ . Пусть продолжительность срока вклада имеет функцию распределения $F(x)$. Значение процента по вкладам обозначим r и будем использовать модель с непрерывным временем, так что капитал G после t единиц времени станет (по формуле непрерывных процентов) равным $G \exp\{rt\}$. Пусть для простоты все вносимые вклады имеют один и тот же размер g . Требуется найти математическое ожидание $M\{X(t)\}$ суммарного капитала $X(t)$ к моменту t , а также выяснить поведение $M\{X(t)\}$ при $t \rightarrow \infty$.

Решение. Найдем суммарный капитал к моменту t , считая, что в начальный момент $t_0 = 0$ этот капитал равнялся нулю. С этой целью рассмотрим произвольное разбиение интервала (t_0, t) промежуточными моментами s_i :

$$t_0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{i-1} < s_i < \dots < s_{n-1} < s_n = t;$$

пусть n достаточно велико, а все $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ достаточно малы. Средний вклад, внесенный за промежуток времени $[s_{i-1}, s_i]$,

равен $g\lambda\Delta s_i$. К моменту t этот вклад будет больше, чем $g\lambda\Delta s_i \times \exp\{r(t - s_i)\}$, и меньше, чем $g\lambda\Delta s_i \exp\{r(t - s_{i-1})\}$; по непрерывности найдется такая точка $\xi_i \in (s_{i-1}, s_i)$, что этот вклад будет равен $g\lambda\Delta s_i \exp\{r(t - \xi_i)\}$. Пусть случайная величина X_i — тот капитал, который к моменту t остался на счете от вклада $g\lambda\Delta s_i \exp\{r(t - \xi_i)\}$, внесенного в интервал времени $[s_{i-1}, s_i]$. Тогда если $X(t)$ — суммарный капитал на счете к моменту t , то

$$X(t) = \sum_{i=1}^n X_i, \quad M\{X(t)\} = \sum_{i=1}^n M\{X_i\}.$$

Для вычисления $M\{X_i\}$ при малых Δs_i приближенно можно считать, что весь вклад $g\lambda\Delta s_i \exp\{r(t - \xi_i)\}$ вносится в момент ξ_i , так что X_i принимает значение $g\lambda\Delta s_i \exp\{r(t - \xi_i)\}$ с вероятностью p_i и значение 0 с вероятностью $1 - p_i$, где p_i — вероятность того, что продолжительность τ_i вклада, внесенного в момент ξ_i , составляет не менее $(t - \xi_i)$ единиц времени:

$$p_i = P\{\tau_i \geq t - \xi_i\} = 1 - P\{\tau_i < t - \xi_i\} = 1 - F(t - \xi_i).$$

Таким образом,

$$M\{X_i\} \approx g\lambda\Delta s_i \exp\{r(t - \xi_i)\}(1 - F(t - \xi_i))$$

и

$$M\{X(t)\} \approx \sum_{i=1}^n g\lambda\Delta s_i \exp\{r(t - \xi_i)\}(1 - F(t - \xi_i)),$$

причем приближенное равенство тем точнее, чем меньше все Δs_i . Точный результат получается в пределе при $\max_i \Delta s_i \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ и дается определенным интегралом

$$M\{X(t)\} = \lambda g \int_0^t \exp\{r(t - s)\}(1 - F(t - s))ds.$$

С целью найти $\lim M\{X(t)\}$ при $t \rightarrow \infty$ преобразуем этот интеграл, сделав замену переменной интегрирования $u = t - s$:

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp\{r(t - s)\}(1 - F(t - s))ds &= - \int_t^0 \exp\{ru\}(1 - F(u))du = \\ &= \int_0^t \exp\{ru\}(1 - F(u))du. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M\{X(t)\} = \lambda g \int_0^{\infty} \exp\{ru\}(1 - F(u)) du,$$

если интеграл сходится. Полученный результат реально означает следующее: если подождать некоторое характерное время T , то изменение функции $m(t) \equiv M\{X(t)\}$ практически прекратится и можно будет считать, что $m(t) = \text{const}$. Пусть, например, продолжительность срока вклада распределена по показательному закону:

$$F(u) = 1 - \exp\{-\mu u\}, \quad \mu > 0.$$

Тогда

$$\lambda g \int_0^{\infty} \exp\{ru\}(1 - F(u)) du = \lambda g \int_0^{\infty} \exp\{(r - \mu)u\} du.$$

Интеграл сходится, если $\mu > r$, или $\frac{1}{\mu} < \frac{1}{r}$, т. е. средняя продолжительность вклада (именно такой смысл имеет величина $\frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} u F'(u) du$) должна быть меньше значения $\frac{1}{r}$. В этом случае

$$\lambda g \int_0^{\infty} \exp\{(r - \mu)u\} du = \frac{\lambda g}{\mu - r},$$

$$\lambda g \int_0^T \exp\{(r - \mu)u\} du = \frac{\lambda g}{\mu - r} (1 - \exp\{-(\mu - r)T\}).$$

Эти величины отличаются менее, чем на один процент, если $\exp\{-(\mu - r)T\} < 0,01$, или $T > \frac{1}{\mu - r} \ln 100$.

5. Закон распределения двумерного нормального вектора $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ описывается следующей плотностью распределения вероятностей:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\pi \sqrt{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}y^2 - xy - x - 13y - \frac{25}{2} \right\}.$$

Найти: а) математическое ожидание и корреляционную матрицу этого вектора, б) плотность распределения вероятностей случайной величины $Z = X - 2Y$.

Решение. Плотность двумерного нормального распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right\}.$$

Обозначим:

$$A = \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_x^2}, \quad B = \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}, \quad C = \frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_x\sigma_y}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}y^2 - xy - x - 13y - \frac{25}{2} = \\ = -A(x-m_x)^2 - B(y-m_y)^2 + C(x-m_x)(y-m_y) = \\ = -A(x^2 - 2m_x x + m_x^2) - B(y^2 - 2m_y y + m_y^2) + \\ + C(xy - m_y x - m_x y + m_x m_y). \end{aligned}$$

Значения A, B, C, m_x, m_y находим методом неопределенных коэффициентов, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменных x и y слева и справа, в результате чего получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{7}{2}, \quad C = -1, \\ 2Am_x - Cm_y = -1, \\ 2Bm_y - Cm_x = -13, \\ -Am_x^2 - Bm_y^2 + Cm_x m_y = -\frac{25}{2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{7}{2}, \quad C = -1, \quad m_x = 1, \quad m_y = -2.$$

Далее,

$$\frac{A}{B} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{1}{7}, \quad \text{откуда} \quad \sigma_x = \sqrt{7}\sigma_y.$$

Решая теперь систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2} = \frac{7}{2}, \\ \frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma_x\sigma_y} = -1, \\ \sigma_x = \sqrt{7}\sigma_y, \end{cases}$$

получаем:

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{7}{6}}, \quad \rho = -\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Проверим совпадение коэффициента перед экспонентой:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{7}{6}}\sqrt{\frac{1}{6}}\sqrt{1-\frac{1}{7}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}}.$$

Корреляционная матрица

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/6 & -1/6 \\ -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Далее

$$\begin{aligned} MZ &= MX - 2MY = m_x - 2m_y = 1 - 2 \cdot (-2) = 5, \\ DZ &= DX + D\{2Y\} - 2\text{cov}(X, 2Y) = \sigma_x^2 + 4\sigma_y^2 - 4 \cdot \sigma_x\sigma_y\rho = \\ &= \frac{7}{6} + \frac{4}{6} - 4 \cdot \sqrt{\frac{7}{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, Z как линейная комбинация нормально распределенных случайных величин есть нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $MZ = 5$ и дисперсией $DZ = 5/2$. Следовательно, ее плотность распределения имеет вид

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{5}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(z-5)^2}{\frac{5}{2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \exp\left\{-\frac{(z-5)^2}{5}\right\}.$$

6. Пусть стационарный в широком смысле нормальный случайный процесс $X(t)$ имеет нулевое математическое ожидание $m_X(t) = M\{X(t)\} \equiv 0$ и корреляционную функцию $K_X(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\beta^2 \tau^2/2}$. Найти совместную плотность вероятности $f_{XY}(x, t; y, t)$ сечения случайного процесса $X(t)$ и его производной в ср.кв. $Y(t) = X'(t)$ в один и тот же момент времени t .

Решение. Примем без доказательства, что производная нормального случайного процесса в случае ее существования есть также нормальный случайный процесс. Этот результат является частным случаем общего результата, состоящего в том, что любое линейное преобразование нормального случайного процесса сохраняет свойство нормальности. Поэтому $Y(t)$ — нормальный случайный процесс с математическим ожиданием

$$m_Y(t) = M\{Y(t)\} = \frac{d}{dt}M\{X(t)\} \equiv 0$$

и корреляционной функцией (см. задачу 3)

$$K_Y(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}K_X(\tau) = \sigma_x^2\beta^2 e^{-\beta^2\tau^2/2}(1 + \tau^2).$$

Взаимная корреляционная функция процессов $X(t)$ и $Y(t)$ есть (см. § 12)

$$K_{XY}(t_1, t_2) = M\{(X(t_1) - m_X(t_1))(Y(t_2) - m_Y(t_2))\} = \frac{\partial}{\partial t_2}K_X(t_1, t_2),$$

а с учетом стационарности

$$K_{XY}(\tau) = K_X'(\tau) = -\sigma_x^2\beta^2\tau e^{-\beta^2\tau^2/2}.$$

Значит, ковариация случайных величин $X(t)$ и $Y(t)$

$$\text{cov}(X(t), Y(t)) = K_{XY}(\tau)|_{\tau=0} = 0.$$

А поскольку для нормальных случайных величин некоррелированность означает и независимость, то $X(t)$ и $Y(t)$ суть независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями

$$D\{X(t)\} = K_X(\tau)|_{\tau=0} = \sigma_x^2, \quad D\{Y(t)\} = K_Y(\tau)|_{\tau=0} = \sigma_x^2\beta^2.$$

Наконец, плотность совместного распределения независимых случайных величин $X(t)$ и $Y(t)$ равна произведению их одномерных плотностей, т. е.

$$f_{XY}(x, t; y, t) = f_X(x, t) \cdot f_Y(y, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2\beta} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_x^2\beta^2}\right)\right\},$$

где

$$f_X(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad \text{и} \quad f_Y(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2\beta}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_x^2\beta^2}\right\}$$

— соответствующие одномерные плотности: плотность распределения случайной величины $X(t)$ и плотность распределения случайной величины $Y(t)$.

7. Исследовать на стационарность в широком смысле, вычислив математическое ожидание и корреляционную функцию следующего приращения пуассоновского процесса:

$$N(t) = \frac{K(t + \varepsilon) - K(t)}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ — заданная величина, $K(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ .

Решение. Для математического ожидания имеем

$$M\{N(t)\} = \frac{1}{\varepsilon}(M\{K(t + \varepsilon)\} - M\{K(t)\}) = \frac{1}{\varepsilon}(\lambda \cdot (t + \varepsilon) - \lambda t) = \lambda.$$

Корреляционная функция

$$\begin{aligned} K_N(t_1, t_2) &= M\{N(t_1)N(t_2)\} - M\{N(t_1)\}M\{N(t_2)\} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}M\{(K(t_1 + \varepsilon) - K(t_1))(K(t_2 + \varepsilon) - K(t_2))\} - \lambda^2. \end{aligned}$$

Займемся вычислением математического ожидания в правой части последнего равенства. Будем для определенности считать, что $t_2 \geq t_1$. Тогда при $t_2 - t_1 > \varepsilon$ случайные величины $K(t_1 + \varepsilon) - K(t_1)$ и $K(t_2 + \varepsilon) - K(t_2)$ независимы и

$$\begin{aligned} M\{(K(t_1 + \varepsilon) - K(t_1))(K(t_2 + \varepsilon) - K(t_2))\} &= \\ &= M\{K(t_1 + \varepsilon) - K(t_1)\} \cdot M\{K(t_2 + \varepsilon) - K(t_2)\} = \lambda\varepsilon \cdot \lambda\varepsilon = \lambda^2\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Пусть теперь $0 \leq t_2 - t_1 \leq \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} M\{(K(t_1 + \varepsilon) - K(t_1))(K(t_2 + \varepsilon) - K(t_2))\} &= \\ &= M\{K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2) + K(t_2) - K(t_1)\} \times \\ &\quad \times (K(t_2 + \varepsilon) - K(t_1 + \varepsilon) + K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2))\} = \\ &= M\{(K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2))(K(t_2 + \varepsilon) - K(t_1 + \varepsilon))\} + \\ &\quad + M\{(K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2))(K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2))\} + \\ &\quad + M\{(K(t_2) - K(t_1))(K(t_2 + \varepsilon) - K(t_1 + \varepsilon))\} + \\ &\quad + M\{(K(t_2) - K(t_1))(K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2))\} = \\ &= \lambda \cdot (t_1 + \varepsilon - t_2) \cdot \lambda \cdot (t_2 - t_1) + M\{K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2)\}^2 + \\ &\quad + \lambda \cdot (t_2 - t_1) \cdot \lambda \cdot (t_2 + \varepsilon - t_1 - \varepsilon) + \lambda \cdot (t_2 - t_1) \cdot \lambda \cdot (t_1 + \varepsilon - t_2). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} M\{K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2)\}^2 &= \\ &= D\{K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2)\} + (M\{K(t_1 + \varepsilon) - K(t_2)\})^2 = \\ &= \lambda \cdot (t_1 + \varepsilon - t_2) + \lambda^2(t_1 + \varepsilon - t_2)^2, \end{aligned}$$

предыдущую цепочку равенств можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 M\{(K(t_1 + \varepsilon) - K(t_1))(K(t_2 + \varepsilon) - K(t_2))\} &= \\
 &= \lambda^2(t_1 + \varepsilon - t_2)(t_2 - t_1) + \lambda^2(t_1 + \varepsilon - t_2)^2 + \lambda(t_1 + \varepsilon - t_2) + \\
 &\quad + \lambda^2(t_2 - t_1)^2 + \lambda^2(t_2 - t_1)(t_1 + \varepsilon - t_2) = \\
 &= \lambda^2(t_1 + \varepsilon - t_2)(t_2 - t_1 + t_1 + \varepsilon - t_2) + \lambda(t_1 + \varepsilon - t_2) + \\
 &\quad + \lambda^2(t_2 - t_1)(t_2 - t_1 + t_1 + \varepsilon - t_2) = \\
 &= \varepsilon\lambda^2(t_1 + \varepsilon) + \lambda(t_1 + \varepsilon - t_2) + \varepsilon\lambda^2(t_2 - t_1) = \\
 &= \varepsilon\lambda^2(t_1 + \varepsilon - t_2 + t_2 - t_1) + \lambda(t_1 + \varepsilon - t_2) = \varepsilon^2\lambda^2 + \varepsilon\lambda - \lambda(t_2 - t_1),
 \end{aligned}$$

так что корреляционная функция

$$K_N(t_1, t_2) = \frac{\lambda}{\varepsilon} - \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(t_2 - t_1).$$

Таким образом,

$$K_N(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } t_2 - t_1 > \varepsilon, \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} - \frac{\lambda}{\varepsilon^2}(t_2 - t_1) & \text{при } 0 \leq t_2 - t_1 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Если же снять ограничение $t_2 - t_1 \geq 0$, то из соображений симметрии получаем окончательно

$$K_N(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t_2 - t_1| > \varepsilon, \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} - \frac{\lambda}{\varepsilon^2}|t_2 - t_1| & \text{при } |t_2 - t_1| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

8. Пусть значение $X(t + \Delta)$ дважды дифференцируемого в ср.кв. стационарного в широком смысле случайного процесса $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_X(\tau)$ аппроксимируется выражением

$$X(t + \Delta) \approx X(t) + \Delta \frac{dX(t)}{dt}.$$

Показать, что дисперсия ошибки такой аппроксимации

$$\varepsilon(t + \Delta) \equiv X(t + \Delta) - X(t) - \Delta \frac{dX(t)}{dt}$$

приближенно равна $\frac{\Delta^4}{4}K_X^{(4)}(0)$:

$$D\{\varepsilon(t + \Delta)\} \approx \frac{\Delta^4}{4}K_X^{(4)}(0)$$

с точностью до малых более высокого порядка по сравнению с Δ^4 .

Решение. Поскольку $M\{\varepsilon(t + \Delta)\} = 0$, то

$$\begin{aligned} D\{\varepsilon(t + \Delta)\} &= M\{\varepsilon(t + \Delta)\}^2 = \\ &= M\{X(t + \varepsilon)^2 + M\{X(t)\}^2 + \Delta^2 M\left\{\frac{dX(t)}{dt}\right\}^2 - \\ &- 2M\{X(t + \Delta)X(t)\} - 2\Delta M\left\{X(t + \Delta)\frac{dX(t)}{dt}\right\} + 2\Delta M\left\{X(t)\frac{dX(t)}{dt}\right\}. \end{aligned}$$

Чтобы выразить все слагаемые в правой части через корреляционную функцию $K_X(\tau)$, вспомним общие результаты: если $MX(t) = 0$, то $K_X(t_1, t_2) = M\{X(t_1)X(t_2)\}$. В этом случае

$$\begin{aligned} M\left\{\frac{dX(t)}{dt}\right\}^2 &= \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=t} = \frac{\partial^2 K_X(t_2 - t_1)}{\partial t_1 \partial t_2} \Big|_{t_1=t_2=t} = \\ &= \frac{\partial K_X'(t_2 - t_1)}{\partial t_1} \Big|_{t_1=t_2=t} = -K_X''(t_2 - t_1) \Big|_{t_1=t_2=t} = -K_X''(0). \end{aligned}$$

Далее

$$M\left\{X(t_1)\frac{dX(t_2)}{dt}\right\} = \frac{\partial K_X(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \frac{\partial K_X(t_2 - t_1)}{\partial t_2} = K_X'(t_2 - t_1),$$

так что

$$M\left\{X(t + \Delta)\frac{dX(t)}{dt}\right\} = K_X'(-\Delta) = -K_X'(\Delta),$$

поскольку $K_X'(\tau)$ — нечетная функция в силу четности $K_X(\tau)$;

$$M\left\{X(t)\frac{dX(t)}{dt}\right\} = K_X'(0) = 0,$$

так как $K_X(\tau)$ — четная функция и дифференцируема в нуле, ибо $X(t)$ дифференцируем в ср. кв.

Учитывая все это, получим

$$\begin{aligned} D\{\varepsilon(t + \Delta)\} &= \\ &= K_X(0) + K_X(0) + \Delta^2(-K_X''(0)) - 2K_X(\Delta) - 2\Delta(-K_X'(\Delta)) = \\ &= 2(K_X(0) - K_X(\Delta)) + 2\Delta K_X'(\Delta) - \Delta^2 K_X''(0). \quad (1) \end{aligned}$$

Поскольку $K_X'(0) = K_X'''(0) = 0$ в силу четности $K_X(\tau)$, то по формуле Тейлора с точностью до малых более высокого порядка

$$K_X(\Delta) \approx K_X(0) + \frac{\Delta^2}{2} K_X''(0) + \frac{\Delta^4}{4!} K_X^{(4)}(0),$$

откуда

$$K_X'(\Delta) \approx \Delta K_X''(0) + \frac{\Delta^3}{3!} K_X^{(4)}(0).$$

Подставляя эти разложения в (1), находим

$$\begin{aligned}
 D\{\varepsilon(t + \Delta)\} &\approx 2\left(-\frac{\Delta^2}{2}K_X''(0) - \frac{\Delta^4}{4!}K_X^{(4)}(0)\right) + \\
 &+ 2\Delta\left(\Delta K_X''(0) + \frac{\Delta^3}{3!}K_X^{(4)}(0)\right) - \Delta^2 K_X''(0) = \\
 &= -\Delta^2 K_X''(0) - \frac{\Delta^4}{12}K_X^{(4)}(0) + 2\Delta^2 K_X''(0) + \frac{\Delta^4}{3}K_X^{(4)}(0) - \Delta^2 K_X''(0) = \\
 &= \frac{\Delta^4}{4}K_X^{(4)}(0),
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

9. Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$K_X(t_1, t_2) = D_X e^{-\alpha(t_2-t_1)^2} \cos[\beta(t_2 - t_1)],$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Найти дисперсию производной $X'(t)$ в ср.кв. процесса $X(t)$.

Решение. В соответствии с общими результатами имеем для корреляционной функции $K_{X'}(t_1, t_2)$ производной $X'(t)$:

$$\begin{aligned}
 K_{X'}(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 K_X(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K_X(t_2 - t_1)}{\partial t_1 \partial t_2} = -K_X''(t_2 - t_1), \\
 D_{X'} &= K_{X'}(t_1, t_2) \Big|_{t_1=t_2=t} = -K_X''(0).
 \end{aligned}$$

В нашем случае

$$\begin{aligned}
 K_X(\tau) &= D_X e^{-\alpha\tau^2} \cos \beta\tau, \\
 K_X'(\tau) &= D_X e^{-\alpha\tau^2} (-2\alpha\tau \cos \beta\tau - \beta \sin \beta\tau), \\
 K_X''(\tau) &= D_X e^{-\alpha\tau^2} (-2\alpha\tau)(-2\alpha\tau \cos \beta\tau - \beta \sin \beta\tau) + \\
 &+ D_X e^{-\alpha\tau^2} (-2\alpha \cos \beta\tau - 2\alpha\tau(-\sin \beta\tau) \cdot \beta - \beta^2 \cos \beta\tau),
 \end{aligned}$$

откуда получаем:

$$K_X''(0) = D_X(-2\alpha - \beta^2), \quad D_{X'} = (2\alpha + \beta^2)D_X.$$

10. Случайный процесс $X(t)$ имеет известные математическое ожидание $m_X(t)$ и корреляционную функцию $K_X(\tau)$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию процесса

$$Y(t) = t^2 \frac{dX(t+2)}{dt} + tX(t-1)$$

в предположении, что производная (в ср.кв.) существует.

Решение. Имеем для математического ожидания:

$$\begin{aligned} M\{Y(t)\} &= t^2 M\left\{\frac{dX(t+2)}{dt}\right\} + tM\{X(t-1)\} = \\ &= t^2 \frac{dM\{X(t+2)\}}{dt} + tM\{X(t-1)\} = t^2 \frac{m_X(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=t+2} + tm_X(\tau) \Big|_{\tau=t-1}. \end{aligned}$$

Для корреляционной функции процесса $Y(t)$ получим:

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= \\ &= M\left\{t_1^2 \frac{d\overset{\circ}{X}(t_1+2)}{dt_1} + t_1 \overset{\circ}{X}(t_1-1)\right\} \left\{t_2^2 \frac{d\overset{\circ}{X}(t_2+2)}{dt_2} + t_2 \overset{\circ}{X}(t_2-1)\right\} = \\ &= M\left\{t_1^2 t_2^2 \cdot \frac{d\overset{\circ}{X}(t_1+2)}{dt_1} \cdot \frac{d\overset{\circ}{X}(t_2+2)}{dt_2} + t_1^2 t_2 \cdot \frac{d\overset{\circ}{X}(t_1+2)}{dt_1} \cdot \overset{\circ}{X}(t_2-1) + \right. \\ &\quad \left. + t_2^2 t_1 \cdot \frac{d\overset{\circ}{X}(t_2+2)}{dt_2} \cdot \overset{\circ}{X}(t_1-1) + t_1 t_2 \cdot \overset{\circ}{X}(t_1-1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2-1)\right\} = \\ &= t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} M\{\overset{\circ}{X}(t_1+2) \overset{\circ}{X}(t_2+2)\} + t_1^2 t_2 \frac{\partial}{\partial t_1} M\{\overset{\circ}{X}(t_1+2) \overset{\circ}{X}(t_2-1)\} + \\ &\quad + t_2^2 t_1 \frac{\partial}{\partial t_2} M\{\overset{\circ}{X}(t_1-1) \overset{\circ}{X}(t_2+2)\} + t_1 t_2 M\{\overset{\circ}{X}(t_1-1) \overset{\circ}{X}(t_2-1)\} = \\ &= t_1^2 t_2^2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_X(t_2 - t_1) + t_1^2 t_2 \frac{\partial}{\partial t_1} K_X(t_2 - t_1 - 3) + \\ &\quad + t_2^2 t_1 \frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_2 - t_1 + 3) + t_1 t_2 K_X(t_2 - t_1) = \\ &= -t_1^2 t_2^2 K_X''(\tau) \Big|_{\tau=t_2-t_1} - t_1^2 t_2 K_X'(\tau) \Big|_{\tau=t_2-t_1-3} + \\ &\quad + t_2^2 t_1 K_X'(\tau) \Big|_{\tau=t_2-t_1+3} + t_1 t_2 K_X(\tau) \Big|_{\tau=t_2-t_1}. \end{aligned}$$

11. Определить корреляционную функцию $K_Y(\tau)$ случайного процесса

$$Y(t) = aX(t) + b\frac{dX(t)}{dt} + c\frac{d^2X(t)}{dt^2},$$

где $X(t)$ — стационарный, дважды дифференцируемый в среднеквадратичном случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_X(\tau)$; a, b, c — постоянные.

Решение. Ясно, что $MY(t) \equiv 0$. Обозначая для краткости операцию дифференцирования точкой над переменной, имеем

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= M\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \\ &= M\{(aX_{t_1} + b\dot{X}_{t_1} + c\ddot{X}_{t_1})(aX_{t_2} + b\dot{X}_{t_2} + c\ddot{X}_{t_2})\} = \\ &= M\{a^2 X_{t_1} X_{t_2} + ab X_{t_1} \dot{X}_{t_2} + ac X_{t_1} \ddot{X}_{t_2} + ba \dot{X}_{t_1} X_{t_2} + \\ &\quad + b^2 \dot{X}_{t_1} \dot{X}_{t_2} + bc \dot{X}_{t_1} \ddot{X}_{t_2} + ca \ddot{X}_{t_1} X_{t_2} + cb \ddot{X}_{t_1} \dot{X}_{t_2} + c^2 \ddot{X}_{t_1} \ddot{X}_{t_2}\}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
 M\{X_{t_1}X_{t_2}\} &= K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2 - t_1) = K_X(\tau), \\
 M\{X_{t_1}\dot{X}_{t_2}\} &= \frac{\partial}{\partial t_2}M\{X_{t_1}X_{t_2}\} = \frac{\partial}{\partial t_2}K_X(t_2 - t_1) = K'_X(\tau), \\
 M\{X_{t_1}\ddot{X}_{t_2}\} &= \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}M\{X_{t_1}X_{t_2}\} = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}K_X(t_2 - t_1) = K''_X(\tau), \\
 M\{\dot{X}_{t_1}X_{t_2}\} &= \frac{\partial}{\partial t_1}M\{X_{t_1}X_{t_2}\} = \frac{\partial}{\partial t_1}K_X(t_2 - t_1) = -K'_X(\tau), \\
 M\{\dot{X}_{t_1}\dot{X}_{t_2}\} &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}M\{X_{t_1}X_{t_2}\} = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}K_X(t_2 - t_1) = -K''_X(\tau), \\
 M\{\dot{X}_{t_1}\ddot{X}_{t_2}\} &= \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2^2}M\{X_{t_1}X_{t_2}\} = \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2^2}K_X(t_2 - t_1) = -K'''_X(\tau), \\
 M\{\ddot{X}_{t_1}X_{t_2}\} &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}M\{X_{t_1}X_{t_2}\} = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}K_X(t_2 - t_1) = K''_X(\tau), \\
 M\{\ddot{X}_{t_1}\dot{X}_{t_2}\} &= \frac{\partial^3}{\partial t_1^2 \partial t_2}M\{X_{t_1}X_{t_2}\} = \frac{\partial^3}{\partial t_1^2 \partial t_2}K_X(t_2 - t_1) = K'''_X(\tau), \\
 M\{\ddot{X}_{t_1}\ddot{X}_{t_2}\} &= \frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2}M\{X_{t_1}X_{t_2}\} = \frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2}K_X(t_2 - t_1) = K_X^{IV}(\tau),
 \end{aligned}$$

то получаем

$$\begin{aligned}
 K_Y(t_1, t_2) &= M\{Y(t_1)Y(t_2)\} = \\
 &= a^2K_X(\tau) + abK'_X(\tau) + acK''_X(\tau) + ba(-K'_X(\tau)) + b^2(-K''_X(\tau)) + \\
 &\quad + bc(-K'''_X(\tau) + caK''_X(\tau) + cbK'''_X(\tau) + c^2K_X^{IV}(\tau)),
 \end{aligned}$$

или, приводя подобные слагаемые,

$$K_Y(t_1, t_2) = a^2K_X(\tau) + (2ac - b^2)K''_X(\tau) + c^2K_X^{IV}(\tau).$$

12. Стационарный гауссовский случайный процесс $X(t)$ имеет следующие характеристики:

$$m_X(t) \equiv 0, \quad K_X(\tau) = De^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Построить распределение случайного вектора

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ \dot{X}(t) \\ \ddot{X}(t) \end{pmatrix},$$

где точка означает операцию дифференцирования в среднеквадратичном.

Решение. Случайный вектор $\mathbf{X}(t)$ нормален, поскольку является пределом последовательности нормальных случайных векторов, получаемых линейным преобразованием нормальной системы случайных величин, определяемых процессом $X(t)$. Ясно, что $M\mathbf{X}(t) \equiv \mathbf{0}$. Найдем элементы K_{ij} корреляционной матрицы K :

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= M\{X(t)X(t)\} = K_X(t, t) = K_X(0) = D, \\
 K_{12} &= M\{X(t)\dot{X}(t)\} = M\{X(t_1)\dot{X}(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t_2} M\{X(t_1)X(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_2 - t_1)|_{t_1=t_2} = \\
 &= K_X'(\tau)|_{\tau=0} = (De^{-\alpha^2\tau^2})'|_{\tau=0} = 0, \\
 K_{13} &= M\{X(t)\ddot{X}(t)\} = M\{X(t_1)\ddot{X}(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} M\{X(t_1)X(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} K_X(t_2 - t_1)|_{t_1=t_2} = \\
 &= K_X''(\tau)|_{\tau=0} = (De^{-\alpha^2\tau^2})''|_{\tau=0} = -2\alpha^2D, \\
 K_{22} &= M\{\dot{X}(t)\dot{X}(t)\} = M\{\dot{X}(t_1)\dot{X}(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} M\{X(t_1)X(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_X(t_2 - t_1)|_{t_1=t_2} = \\
 &\quad - K_X''(\tau)|_{\tau=0} = -(De^{-\alpha^2\tau^2})''|_{\tau=0} = 2\alpha^2D, \\
 K_{23} &= M\{\dot{X}(t)\ddot{X}(t)\} = M\{\dot{X}(t_1)\ddot{X}(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \\
 &= \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2^2} M\{X(t_1)X(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial t_2^2} K_X(t_2 - t_1)|_{t_1=t_2} = \\
 &\quad - K_X'''(\tau)|_{\tau=0} = -(De^{-\alpha^2\tau^2})'''|_{\tau=0} = 0, \\
 K_{33} &= M\{\ddot{X}(t)\ddot{X}(t)\} = M\{\ddot{X}(t_1)\ddot{X}(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \\
 &= \frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} M\{X(t_1)X(t_2)\}|_{t_1=t_2} = \frac{\partial^4}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} K_X(t_2 - t_1)|_{t_1=t_2} = \\
 &\quad - K_X^{IV}(\tau)|_{\tau=0} = -(De^{-\alpha^2\tau^2})^{IV}|_{\tau=0} = 12\alpha^4D.
 \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая симметричность корреляционной матрицы, имеем

$$K_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} D & 0 & -2\alpha^2D \\ 0 & 2\alpha^2D & 0 \\ -2\alpha^2D & 0 & 12\alpha^4D \end{pmatrix}.$$

§ 14. Винеровский процесс

Винеровским процессом, выходящим из точки w_0 , называется случайный процесс $W(t)$, $0 \leq t < \infty$, обладающий следующими свойствами:

- 0) $W(0) = w_0$;
- 1) для любых $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ случайные величины $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ (т. е. приращения процесса для любых непересекающихся интервалов изменения аргумента t) независимы;
- 2) случайная величина $W(t) - W(s)$, $0 \leq s \leq t$, имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t - s$.

Из этого определения следует, что все конечномерные распределения процесса $W(t)$ нормальны с постоянным вектором средних значений (все его компоненты равны w_0) и корреляционной функцией $K(s, t) = \min(s, t)$ (см. задачу 1 настоящего параграфа).

К винеровскому процессу приводит изучение эволюции системы, когда медленные флуктуации состояния системы интерпретируются как результат огромного числа последовательных малых изменений, вызванных случайными воздействиями. Такая ситуация может иметь место при описании многих явлений в физике, экономике и других областях знания. Одним из примеров таких явлений служит известный физический процесс броуновского движения, совершающего взвешенной в жидкости частицей под воздействием хаотических столкновений с молекулами. Другим примером является процесс изменения цены на рынке: цена изменяется в результате совокупного эффекта многих случайных импульсов, являющихся следствием получения новой информации. Это обстоятельство, как первым заметил французский ученый Л. Башелье, приводит к тому, что процесс изменения цены также можно рассматривать как винеровский.

Приведенные два примера являются наиболее известными примерами винеровского процесса. Поэтому последний называют еще *процессом броуновского движения*, а также *процессом Башелье*, или *Винера-Башелье*.

Покажем, как к винеровскому процессу приводит рассмотрение случайных блужданий, в которых длина δ отдельных шагов мала, но шаги столь быстро следуют друг за другом, что движение представляется практически непрерывным. Пусть в начальный момент частица занимала положение $S_0 = 0$, а n -й шаг приводит ее в положение

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

где X_i , $i = 1, 2, \dots$, — независимые случайные величины, каждая из которых принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями p и q соответственно, $p + q = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} M\{X_i\} &= p - q, \quad M\{S_n\} = \sum_{i=1}^n M\{X_i\} = (p - q)n; \\ D\{X_i\} &= (1 - (p - q))^2 p + (-1 - (p - q))^2 q = 4pq, \\ D\{S_n\} &= \sum_{i=1}^n D\{X_i\} = 4pqn. \end{aligned}$$

Если длина отдельного шага равна не единице, а δ , то смещение частицы после n -го шага будет равно случайной величине $S_n\delta$, математическое ожидание и дисперсия которой равны $M\{S_n\delta\} = \delta M\{S_n\} = (p - q)n\delta$ и $D\{S_n\delta\} = \delta^2 D\{S_n\} = 4pqn\delta^2$ соответственно.

Предположим, что из реальных наблюдений можно найти среднее смещение c и дисперсию d за единичный интервал времени. Если r — число столкновений в единицу времени, то должно быть

$$(p - q)r\delta = c, \quad 4pqr\delta^2 = d. \quad (1)$$

Рассмотрим случайные блуждания, в которых длина δ отдельных шагов мала, число r шагов за единицу времени велико, а $p - q$ мало, причем соотношение между ними таково, что имеют место равенства (1), где $c \geq 0$ и $d > 0$ — заданные постоянные. Выясним, что произойдет в пределе, когда $\delta \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ и $p \rightarrow 1/2$, причем так, что

$$(p - q)r\delta \rightarrow c, \quad 4pqr\delta^2 \rightarrow d.$$

Введем вероятность

$$v_{k,n} = P\{S_n = k\}$$

того, что после n шагов частица окажется в положении $S_n\delta = k\delta$. Поставим задачу найти вероятность нахождения частицы в данный момент t в окрестности заданной точки x . Для этого нужно выяснить поведение $v_{k,n}$ в пределе при $k \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ таким образом, что $n/r \rightarrow t$ и $k\delta \rightarrow x$.

Пусть из первых n шагов m шагов было вправо, тогда $(n - m)$ шагов — влево. Событие $S_n = k$ означает, что $m - (n - m) = k$, или $m = (n + k)/2$. Следовательно, $v_{k,n}$ можно рассматривать как вероятность того, что в серии из n независимых испытаний с двумя возможными исходами было $(n + k)/2$ успехов. Эта вероятность дается биномиальным распределением:

$$v_{k,n} = C_n^{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} q^{n-(n+k)/2}.$$

По локальной теореме Муавра–Лапласа (см. § 4) при переходе к пределу будем иметь

$$v_{k,n} \sim \frac{1}{\sqrt{nprq}} \varphi(x), \text{ где } x = \frac{(n+k)/2 - np}{\sqrt{nprq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\},$$

или

$$v_{k,n} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi nprq}} \exp\left\{-\frac{(k - n(p - q))^2}{8nprq}\right\},$$

где знак \sim между двумя величинами означает, что их отношение стремится к единице. Далее:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi nprq}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{n}{r} \cdot pqr \cdot 4\delta^2 \cdot \frac{1}{4\delta^2}}} = \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi \cdot \frac{n}{r} \cdot 4pqr\delta^2}} \sim \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi td}}, \\ \frac{(k - (p - q)n)^2}{8nprq} &= \frac{\left(k\delta \cdot \frac{1}{\delta} - (p - q)\delta \cdot r \cdot \frac{n}{r} \cdot \frac{1}{\delta}\right)^2}{2 \cdot 4pqr\delta^2 \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{n}{r}} = \\ &= \frac{\frac{1}{\delta^2} \left(k\delta - (p - q)\delta r \cdot \frac{n}{r}\right)^2}{\frac{1}{\delta^2} \cdot 2 \cdot 4pqr\delta^2 \cdot \frac{n}{r}} \sim \frac{(x - ct)^2}{2td}, \end{aligned}$$

так что

$$v_{k,n} \sim \frac{2\delta}{\sqrt{2\pi td}} \exp\left\{-\frac{(x - ct)^2}{2td}\right\}.$$

В пределе случайная величина $S_n\delta$ изменяется непрерывно, и $v_{k,n}$ можно трактовать как вероятность того, что $S_n\delta$ находится

между $(k - 1)\delta$ и $(k + 1)\delta$, так что отношение $v_{k,n}/(2\delta)$ локально измеряет вероятность на единицу длины, т. е. является плотностью вероятности. Из предыдущего ясно, что отношение $v_{k,n}/(2\delta)$ стремится к

$$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t d}} \exp\left\{-\frac{(x - ct)^2}{2td}\right\}.$$

При $c = 0$ и $d = 1$ эта формула дает плотность вероятности винеровского процесса, выходящего из нуля.

Винеровский процесс занимает заметное место в теории случайных процессов и ее приложениях. В частности, он нередко используется при математическом моделировании реальных стохастических процессов экономического и финансового содержания. Остановимся на изучении его свойств.

Покажем, что винеровский процесс является непрерывным в следующем смысле: для винеровского процесса $W(t)$ существует эквивалентный⁽¹⁾ процесс $Y(t)$, выборочные функции которого с вероятностью 1 непрерывны. С этой целью докажем следующую теорему⁽²⁾.

Теорема 1. Пусть $X(t)$ — случайный процесс на $0 \leq t \leq 1$. Предположим, что для всех $t, t + h$ из отрезка $[0, 1]$

$$P\{|X(t + h) - X(t)| \geq g(h)\} \leq q(h),$$

где g и q — четные функции от h , невозрастающие (и стремящиеся к нулю) при $h \downarrow 0$ и такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) < \infty.$$

Тогда для $X(t)$ существует эквивалентный случайный процесс $Y(t)$, выборочные функции которого с вероятностью 1 непрерывны на $0 \leq t \leq 1$.

Доказательство. Каждому натуральному n поставим в соответствие последовательность моментов

$$t_{n,r} = \frac{r}{2^n}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots, 2^n,$$

⁽¹⁾ Напомним, что два процесса $X(t)$ и $Y(t)$ называются эквивалентными, если при любом заданном t выполняется $P\{X(t) = Y(t)\} = 1$.

⁽²⁾ См.: Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. — М.: Мир, 1969.

и будем аппроксимировать процесс $X(t)$ процессом $X_n(t)$, траектории которого состоят из прямолинейных отрезков (см. рис. 13):

$$X_n(t) = X(t_{n,r}) + \frac{X(t_{n,r+1}) - X(t_{n,r})}{1/2^n} (t - t_{n,r}) \quad \text{при } t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}.$$

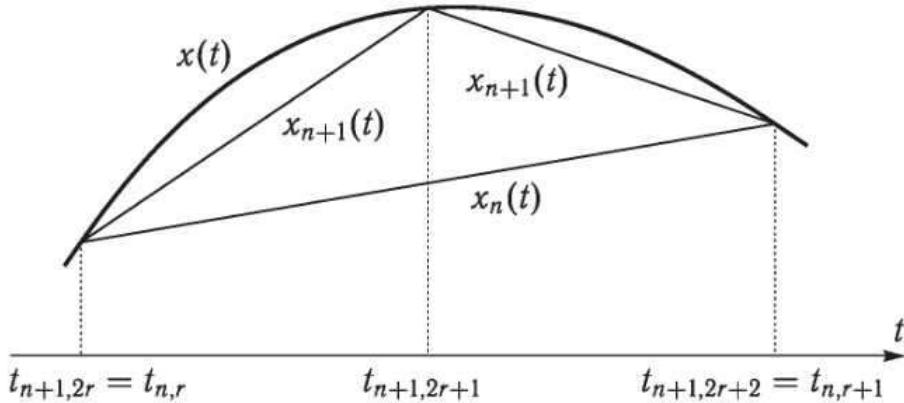


Рис. 13

Тогда для реализаций $x_n(t)$, $x_{n+1}(t)$, $x(t)$ процессов $X_n(t)$, $X_{n+1}(t)$, $X(t)$ соответственно при любом $t \in [t_{n,r}; t_{n,r+1}]$

$$\begin{aligned} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| &\leq |x(t_{n+1,2r+1}) - x_n(t_{n+1,2r+1})| = \\ &= \left| x(t_{n+1,2r+1}) - \frac{1}{2}[x(t_{n+1,2r}) + x(t_{n+1,2r+2})] \right| = \\ &= \frac{1}{2} |[x(t_{n+1,2r+1}) - x(t_{n+1,2r})] + [x(t_{n+1,2r+1}) - x(t_{n+1,2r+2})]| \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$a = |x(t_{n+1,2r+1}) - x(t_{n+1,2r})|, \quad b = |x(t_{n+1,2r+1}) - x(t_{n+1,2r+2})|,$$

т. е. a и b не зависят от t , так что

$$\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$$

Таким образом, случайные величины $\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |X_{n+1}(t) - X_n(t)|$, $A = |X(t_{n+1,2r+1}) - X(t_{n+1,2r})|$ и $B = |X(t_{n+1,2r+1}) - X(t_{n+1,2r+2})|$ связаны соотношением

$$\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \leq \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B,$$

поэтому

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geq g(2^{-n-1})\right\} &\leq \\ &\leq P\left\{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \geq g(2^{-n-1})\right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \geq g(2^{-n-1})\right\} &\leq \\ &\leq P\left\{\left(\frac{1}{2}A \geq \frac{1}{2}g(2^{-n-1})\right) \cup \left(\frac{1}{2}B \geq \frac{1}{2}g(2^{-n-1})\right)\right\} \leq \\ &\leq P\{A \geq g(2^{-n-1})\} + P\{B \geq g(2^{-n-1})\}. \quad (3) \end{aligned}$$

По условию теоремы

$$\begin{aligned} P\{A \geq g(2^{-n-1})\} &\equiv \\ &\equiv P\{|X(t_{n+1,2r+1}) - X(t_{n+1,2r})| \geq g(2^{-n-1})\} \leq q(2^{-n-1}) \end{aligned}$$

и аналогично

$$P\{B \geq g(2^{-n-1})\} \leq q(2^{-n-1}).$$

Поэтому, учитывая (2) и (3), получим

$$P\left\{\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geq g(2^{-n-1})\right\} \leq 2q(2^{-n-1}).$$

Отсюда для всего отрезка $[0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} P\left\{\max_{0 \leq t \leq 1} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geq g(2^{-n-1})\right\} &\leq \\ &\leq P\left\{\bigcup_{r=0}^{2^n-1} \left(\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geq g(2^{-n-1})\right)\right\} \leq \\ &\leq \sum_{r=0}^{2^n-1} P\left\{\max_{t_{n,r} \leq t \leq t_{n,r+1}} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geq g(2^{-n-1})\right\} \leq 2^{n+1}q(2^{-n-1}). \end{aligned}$$

Дальнейшее доказательство теоремы использует следующий результат, формулируемый ниже в виде леммы.

Лемма. Пусть Y_1, Y_2, \dots — последовательность случайных величин, а $\delta_1, \delta_2, \dots$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — такие последовательности положительных чисел, что ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$ сходятся. Если при этом для всех n

$$P\{|Y_{n+1} - Y_n| \geq \delta_n\} \leq \varepsilon_n,$$

то существует такая случайная величина Y , что $Y_n \rightarrow Y$ с вероятностью 1.

Доказательство леммы. Покажем, что

$$P\{|Y_{n+1} - Y_n| \geq \delta_n \text{ для бесконечно многих } n\} = 0. \quad (4)$$

Предположим противное, т. е. что эта вероятность есть $\tilde{\varepsilon} > 0$.

В силу сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$ можно указать такое m , что

$$\varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} + \dots = \sum_{i=m+1}^{\infty} \varepsilon_i < \tilde{\varepsilon}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} P\{|Y_{n+1} - Y_n| \geq \delta_n \text{ для бесконечно многих } n\} &\leq \\ &\leq P\{|Y_{n+1} - Y_n| \geq \delta_n \text{ для хотя бы одного } n > m\} \leq \\ &\leq \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_{m+2} + \dots = \sum_{i=m+1}^{\infty} \varepsilon_i < \tilde{\varepsilon} \end{aligned}$$

— получено противоречие и доказывает (4). Поэтому всюду, за исключением, быть может, ω -множества P -меры нуль, можно найти такое конечное число $N = N(\omega)$, что

$$|y_{n+1}(\omega) - y_n(\omega)| < \delta_n$$

для всех $n > N(\omega)$. Во всех таких точках ω последовательность $y_1(\omega), y_2(\omega), \dots$ сходится⁽¹⁾ к некоторому конечному пределу $y(\omega)$. На нулевом ω -множестве, где этот предел не существует, положим по определению $y(\omega) = 0$. Таким образом, $y_n(\omega) \rightarrow y(\omega)$ для всех ω , за исключением, быть может, ω -множества меры нуль, т. е.

$$P\{Y_n \rightarrow Y\} = P\{\omega: y_n(\omega) \rightarrow y(\omega)\} = 1.$$

Лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Выше показано, что

$$P\left\{ \max_{0 \leq t \leq 1} |X_{n+1}(t) - X_n(t)| \geq g(2^{-n-1}) \right\} \leq 2^{n+1} q(2^{-n-1}).$$

Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n-1}) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} q(2^{-n-1}) < \infty$, то из леммы

следует, что для почти всех ω (т. е. для всех, за исключением, быть может, ω -множества меры нуль) последовательность функций $x_n(t, \omega)$, $n = 1, 2, \dots$, сходится равномерно по $t \in [0, 1]$. Так как $x_n(t, \omega)$ — непрерывная функция от t при каждом $n = 1, 2, \dots$,

⁽¹⁾ Этот факт следует из критерия Коши сходимости последовательности и сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$.

то предельная функция, которую обозначим через $y(t, \omega)$, непрерывна на $[0, 1]$. Функции $y(t, \omega)$ можно рассматривать как реализации некоторого случайного процесса $Y(t)$. Непрерывность почти всех выборочных функций $y(t, \omega)$ на $[0, 1]$ означает непрерывность процесса $Y(t)$ на $[0, 1]$ с вероятностью 1.

Для всех ω при $t = t_{n,r}$ будет $x_n(t) = x(t)$ (по самому построению функций $x_n(t)$); кроме того, при этих значениях $t = t_{n,r}(t)$ будет $x_{n+p}(t) = x_n(t)$ для любого $p = 1, 2, \dots$. Значит, в точках $t = t_{n,r}$ при любом $p = 1, 2, \dots$ получим $x_{n+p}(t) = x(t)$, откуда, в свою очередь, следует, что при $t = t_{n,r}$ $Y(t) = X(t)$ с вероятностью 1.

Пусть теперь $t \neq t_{n,r}$ для всех n и r . Будем последовательно дробить отрезок $[0, 1]$ пополам, каждый раз беря ту половину, куда попадает точка t . Выберем последовательность r_n так, чтобы последовательность точек t_{n,r_n} совпадала с последовательностью левых концов вложенных отрезков. Тогда $0 < t - t_{n,r_n} < 2^{-n}$, $t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n,r_n}$ и по предположению теоремы

$$\begin{aligned} P\{|X(t_{n,r_n}) - X(t)| \geq g(2^{-n})\} &\leq \\ &\leq P\{|X(t_{n,r_n}) - X(t)| \geq g(t - t_{n,r_n})\} \leq q(t - t_{n,r_n}) \leq q(2^{-n}). \end{aligned}$$

Отсюда, аналогично доказательству леммы, заключаем, что последовательность случайных величин $X(t_{n,r_n})$ сходится к случайной величине $X(t)$ с вероятностью 1. Далее, так как $Y(t)$ имеет непрерывные с вероятностью 1 выборочные функции, то $Y(t_{n,r_n}) \rightarrow Y(t)$ с вероятностью 1. Но, как установлено выше, $P\{X(t_{n,r_n}) = Y(t_{n,r_n})\} = 1$. Следовательно, и $P\{X(t) = Y(t)\} = 1$. Теорема доказана.

Пусть теперь $W(t)$ — винеровский процесс, так что $W(t+h) - W(t)$ является для каждого t нормальной случайной величиной с нулевым средним и дисперсией $|h|$. Тогда

$$P\{|W(t+h) - W(t)| \geq \varepsilon\} = 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi|h|^{1/2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2|h|}\right\} dx.$$

Если ввести в рассмотрение специальные функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\{-v^2/2\} dv \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\},$$

то

$$\begin{aligned}
 & 1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi|h|^{1/2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2|h|}\right\} dx = \\
 & = 1 - \left(\int_{-\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi|h|^{1/2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2|h|}\right\} dx + \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi|h|^{1/2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2|h|}\right\} dx \right) = \\
 & = 1 - 2 \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi|h|^{1/2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2|h|}\right\} dx = \\
 & = 1 - 2 \left(\int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi|h|^{1/2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2|h|}\right\} dx - \right. \\
 & \quad \left. - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi|h|^{1/2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2|h|}\right\} dx \right) = \\
 & = 1 - 2 \left(\Phi\left(\frac{\varepsilon}{|h|^{1/2}}\right) - \frac{1}{2} \right) = 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{|h|^{1/2}}\right) \right).
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\forall x > 0 \quad 1 - \Phi(x) < \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Действительно, разность $\Delta(x) \equiv \varphi(x)/x - (1 - \Phi(x))$ строго убывает на $(0, \infty)$, ибо $\Delta'(x) \equiv -\varphi(x)/x^2 < 0$. Поскольку же $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Delta(x) = 0$, то $\Delta(x) > 0$ для любого $x > 0$. Поэтому

$$P\{|W(t+h) - W(t)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{2|h|^{1/2}}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{|h|^{1/2}}\right).$$

Пусть $\varepsilon = |h|^a$, где $a \in (0, 1/2)$. Тогда

$$P\{|W(t+h) - W(t)| \geq |h|^a\} \leq 2|h|^{1/2-a} \varphi(|h|^{a-1/2}).$$

Положим по определению

$$g(h) = |h|^a, \quad q(h) = 2|h|^{1/2-a} \varphi(|h|^{a-1/2}).$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(2^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-na},$$

очевидно, сходится (например, по признаку Коши), а для исследования сходимости ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n}) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (2^{-n})^{1/2-a} \varphi((2^{-n})^{a-1/2}) = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{na-n/2} \varphi(2^{n/2-na}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n/2+na} \varphi(2^{n/2-na}) \end{aligned}$$

удобно воспользоваться признаком Даламбера: если через b_n обозначить n -й член ряда, то

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= 2^{1/2+a} \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot 2^{(1-2a)(n+1)}\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot 2^{(1-2a)n}\right\}} = \\ &= 2^{1/2+a} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(2^{(1-2a)n} \cdot 2^{1-2a} - 2^{(1-2a)n})\right\} = \\ &= 2^{1/2+a} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot 2^{(1-2a)n}(2^{1-2a} - 1)\right\} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так что по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q(2^{-n})$ сходится. Таким образом, условия теоремы 1 выполняются при указанных функциях $g(h)$ и $q(h)$, и потому существует эквивалентный процессу $W(t)$ процесс $Y(t)$, выборочные функции которого непрерывны с вероятностью 1.

Покажем теперь, что винеровский процесс $W(t)$ недифференцируем, а именно: докажем, что имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Если для какого-либо t*

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \rightarrow Z(t) \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

в каком-либо смысле сходимости (с вероятностью 1, в смысле среднеквадратичной сходимости, по вероятности), то для любых конечных z_1 и z_2

$$P\{z_1 \leq Z(t) \leq z_2\} = 0,$$

т. е. с вероятностью 1 случайная величина $Z(t)$ принимает значения $\pm\infty$.

Доказательство. Ранее было показано (см. § 12), что из трех типов сходимости — с вероятностью 1, в среднеквадратичном, по вероятности — самой слабой является сходимость по

вероятности. Поэтому достаточно доказать утверждение теоремы в смысле сходимости по вероятности.

Итак, пусть имеет место сходимость по вероятности:

$$Z_h \equiv \frac{W(t+h) - W(t)}{h} \xrightarrow{P} Z \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0.$$

Тогда имеет место сходимость Z_h к Z по распределению: $F_{Z_h}(x) \rightarrow F_Z(x)$ при $h \rightarrow 0$ в тех точках, где $F_Z(x)$ непрерывна. В соответствии с определением винеровского процесса случайная величина $W(t+h) - W(t)$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией $|h|$. Следовательно, случайная величина $Z_h \equiv (W(t+h) - W(t))/h$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией $|h|/h^2 = 1/|h|$. Найдем

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} F_{Z_h}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} P\{Z_h < x\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/|h|}} \exp\left\{-\frac{v^2}{2/|h|}\right\} dv = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{|h|v^2}{2}\right\} dv = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\sqrt{|h|}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } x = -\infty, \\ 1/2 & \text{при } -\infty < x < \infty, \\ 1 & \text{при } x = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначим

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = -\infty, \\ 1/2 & \text{при } -\infty < x < \infty, \\ 1 & \text{при } x = \infty. \end{cases}$$

Тогда $F_{Z_h}(x) = F(x)$ в точках непрерывности функции $F_Z(x)$.

Любая функция распределения не может иметь более чем счетное число скачков (см. решение задачи 9 к § 5). Это означает, в частности, что функция распределения не может иметь более чем счетное число точек разрыва. Следовательно, для функции $F_Z(x)$ обязательно реализуется один из следующих случаев, в каждом из которых, как показано ниже, будет выполняться утверждение теоремы 2.

1) $F_Z(x)$ не имеет точек разрыва при $x \in (-\infty, \infty)$. Тогда она совпадает с $F(x)$ и

$$P\{z_1 \leq Z < z_2\} = F_Z(z_2) - F_Z(z_1) = F(z_2) - F(z_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

при любых конечных z_1 и z_2 , т. е. вероятность того, что случайная величина Z попадет в какой-либо конечный интервал, равна нулю.

2) $F_Z(x)$ имеет конечное или счетное число точек разрыва. Тогда для любых $z_1, z_2 \in (-\infty, \infty)$ найдутся $z_1^* \in (-\infty, z_1)$ и $z_2^* \in (z_2, \infty)$, такие, что $F_Z(x)$ будет непрерывна в точках z_1^* и z_2^* , так что

$$\begin{aligned} P\{z_1 \leq Z < z_2\} &\leq P\{z_1^* \leq Z < z_2^*\} = \\ &= F_Z(z_2^*) - F_Z(z_1^*) = F(z_2^*) - F(z_1^*) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0, \end{aligned}$$

т. е. $P\{z_1 \leq Z < z_2\} = 0$ — вероятность того, что случайная величина Z попадет в какой-либо конечный интервал, равна нулю.

Теорема 2 доказана.

Задачи

1. Показать, что винеровский процесс $W(t)$ является нормальным, а его корреляционная функция $K_W(s, t) = \min(s, t)$.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что процесс выходит из нуля: $W(0) \equiv 0$. Пусть $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ — произвольный набор временных моментов. Для доказательства нормальности процесса $W(t)$ нужно проверить нормальность вектора

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix}.$$

С этой целью заметим, что

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t_1) - W(0) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_n) - W(t_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Все компоненты вектора

$$\begin{pmatrix} W(t_1) - W(0) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_n) - W(t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

независимы и имеют нормальное распределение. Поэтому вектор

$$\begin{pmatrix} W(t_1) - W(0) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_n) - W(t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

является нормальным, т. е. система случайных величин — компонент вектора имеет совместное нормальное распределение. А поскольку линейное преобразование — в данном случае умножение на матрицу — сохраняет свойство нормальности, то нормальным будет и вектор

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix},$$

откуда и следует нормальность процесса $W(t)$.

Получим теперь формулу для $K_W(s, t)$. Считая для определенности $t \geq s$, имеем

$$\begin{aligned} K_W(s, t) &= M\{(W(s) - w_0)(W(t) - w_0)\} = \\ &= M\{(W(s) - W(0))(W(t) - W(s) + W(s) - W(0))\} = \\ &= M\{(W(s) - W(0))(W(t) - W(s)) + (W(s) - W(0))^2\} = \\ &= M\{(W(s) - W(0))(W(t) - W(s))\} + M\{(W(s) - W(0))^2\}. \end{aligned}$$

Поскольку математическое ожидание независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, то получаем отсюда, учитывая свойства процесса $W(t)$, что $K(s, t) = s$ (при $t \geq s$), что и требовалось доказать.

2. Пусть $W(t)$ — винеровский процесс, выходящий из нуля. Найти корреляционную функцию случайного процесса

$$X(t) = W(t) - tW(1), \text{ где } t \in [0, 1].$$

Решение. Поскольку $M\{W(t)\} \equiv 0$, то $M\{X(t)\} \equiv 0$ и
 $K_X(t_1, t_2) = M\{X(t_1)X(t_2)\} =$
 $= M\{(W(t_1) - t_1 W(1))(W(t_2) - t_2 W(1))\} =$
 $= M\{W(t_1)W(t_2)\} - t_1 M\{W(1)W(t_2)\} - t_2 M\{W(1)W(t_1)\} +$
 $+ t_1 t_2 M\{W^2(1)\} = \min(t_1, t_2) - t_1 t_2 - t_2 t_1 + t_1 t_2 = \min(t_1, t_2) - t_1 t_2.$

3. Пусть $W(t)$ — винеровский процесс, выходящий из нуля. Показать, что процесс

$$X(t) = e^{W(t)-t/2} - 1$$

является центрированным и имеет ортогональные приращения. (Последнее означает, что для любых t_1, t_2, t_3, t_4 , таких, что $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, имеет место $M\{(X(t_2) - X(t_1))(X(t_4) - X(t_3))\} = 0$.)

Решение. Имеем для математического ожидания

$$M\{X(t)\} = e^{-t/2} M\{e^{W(t)}\} - 1.$$

Определим $M\{e^{W(t)}\}$. Так как $W(t)$ есть нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией t , то

$$\begin{aligned} M\{e^{W(t)}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-x^2/(2t)} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2-2xt+t^2)/(2t)} \cdot e^{t/2} dx = e^{t/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/(2t)} dx = e^{t/2}. \end{aligned}$$

Значит,

$$M\{X(t)\} = e^{-t/2} \cdot e^{t/2} - 1 = 0,$$

и процесс $X(t)$ является центрированным.

Пусть $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$. Имеем

$$\begin{aligned} M\{(X(t_2) - X(t_1))(X(t_4) - X(t_3))\} &= \\ &= M\{(e^{W(t_2)-t_2/2} - e^{W(t_1)-t_1/2})(e^{W(t_4)-t_4/2} - e^{W(t_3)-t_3/2})\} = \\ &= M\{e^{W(t_2)+W(t_4)-(t_2+t_4)/2}\} - M\{e^{W(t_1)+W(t_4)-(t_1+t_4)/2}\} - \\ &\quad - M\{e^{W(t_2)+W(t_3)-(t_2+t_3)/2}\} + M\{e^{W(t_1)+W(t_3)-(t_1+t_3)/2}\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} M\{e^{W(t_2)+W(t_4)}\} &= M\{e^{2W(t_2)+W(t_4)-W(t_2)}\} = \\ &= M\{e^{2W(t_2)}\} \cdot M\{e^{W(t_4)-W(t_2)}\}; \end{aligned}$$

так как $W(t_2)$ есть нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией t_2 , то $2W(t_2)$ есть нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $4t_2$; поэтому (см. выше)

$$M\{e^{2W(t_2)}\} = e^{4t_2/2} = e^{2t_2};$$

поскольку $W(t_4) - W(t_2)$ есть нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t_4 - t_2$, то (см. выше)

$$M\{e^{W(t_4)-W(t_2)}\} = e^{(t_4-t_2)/2},$$

в результате

$$M\{e^{W(t_2)+W(t_4)}\} = e^{2t_2} \cdot e^{(t_4-t_2)/2}.$$

Вычисляя аналогично все другие математические ожидания и продолжая цепочку равенств (5), получим

$$\begin{aligned} M\{(X(t_2) - X(t_1))(X(t_4) - X(t_3))\} &= e^{2t_2} \cdot e^{(t_4-t_2)/2} \cdot e^{-(t_2+t_4)/2} - \\ &- e^{2t_1} \cdot e^{(t_4-t_1)/2} \cdot e^{-(t_1+t_4)/2} - e^{2t_2} \cdot e^{(t_3-t_2)/2} \cdot e^{-(t_2+t_3)/2} + \\ &+ e^{2t_1} \cdot e^{(t_3-t_1)/2} \cdot e^{-(t_1+t_3)/2} = e^{t_2} - e^{t_1} - e^{t_2} + e^{t_1} = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

4. Пусть $W(t)$ — винеровский процесс, выходящий из нуля; τ — положительный параметр. Требуется исследовать на стационарность процесс

$$X(t) = W(t + \tau) - W(t).$$

Решение. Из определения винеровского процесса следует, что

$$M\{X(t)\} = M\{W(t + \tau) - W(t)\} = 0.$$

Считая для определенности $t_2 > t_1$, найдем корреляционную функцию

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M\{(W(t_1 + \tau) - W(t_1))(W(t_2 + \tau) - W(t_2))\} = \\ &= M\{W(t_1 + \tau)W(t_2 + \tau)\} - M\{W(t_1)W(t_2 + \tau)\} - \\ &\quad - M\{W(t_1 + \tau)W(t_2)\} + M\{W(t_1)W(t_2)\} = \\ &= \min(t_1 + \tau, t_2 + \tau) - \min(t_1, t_2 + \tau) - \min(t_1 + \tau, t_2) + \min(t_1, t_2) = \\ &= \begin{cases} t_1 + \tau - t_1 - (t_1 + \tau) + t_1 = 0 & \text{при } (t_2 - t_1) > \tau, \\ t_1 + \tau - t_1 - t_2 + t_1 = \tau - (t_2 - t_1) & \text{при } (t_2 - t_1) \leq \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что при $t_2 < t_1$ следует поменять индексы местами. Поэтому при произвольном соотношении моментов t_1 и t_2 имеем

$$K_X(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t_2 - t_1| > \tau, \\ \tau - |t_2 - t_1| & \text{при } |t_2 - t_1| \leq \tau. \end{cases}$$

Таким образом, случайный процесс $X(t)$ стационарен в широком смысле. Будет ли он стационарным в узком смысле?

Поскольку $W(t)$ — нормальный процесс (см. задачу 1), то для любого натурального n и любого набора моментов t_1, t_2, \dots, t_n вектор

$$\begin{pmatrix} W(t_1 + \tau) \\ W(t_1) \\ W(t_2 + \tau) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n + \tau) \\ W(t_n) \end{pmatrix}$$

является нормальным, т. е. система случайных величин — компонент вектора имеет совместное нормальное распределение. Если теперь заметить, что

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t_1 + \tau) \\ W(t_1) \\ W(t_2 + \tau) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n + \tau) \\ W(t_n) \end{pmatrix},$$

то можно утверждать, что вектор

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix}$$

нормален, ибо он представляет собой линейное преобразование нормального вектора. Следовательно, $X(t)$ — нормальный случай-

ный процесс, а для нормального процесса понятия стационарности в узком и в широком смыслах совпадают.

5. Показать, что сумма квадратов приращений винеровского процесса, соответствующая разбиению $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ отрезка $[a, b]$, сходится к $(b - a)$ в среднеквадратичном при измельчении разбиения:

$$M \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (b - a) \right\}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \max_i (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Решение. Для доказательства найдем математическое ожидание и дисперсию суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2.$$

Имеем

$$\begin{aligned} M \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} M(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} D\{W(t_{i+1}) - W(t_i)\} = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = b - a. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, в силу независимости приращений $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ можем написать

$$\begin{aligned} D \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} D(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \{M(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 - [M(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2]^2\}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} M(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 &= D(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = t_{i+1} - t_i, \\ M(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right\}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_{i+1}-t_i}} dx = 3(t_{i+1} - t_i)^2, \end{aligned}$$

то получаем

$$\begin{aligned}
 D \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} [3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2] = \\
 &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leq 2 \max_i (t_{i+1} - t_i) \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \\
 &= 2(b-a) \max_i (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \max_i (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

С другой стороны, по определению

$$\begin{aligned}
 D \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 &= \\
 &= M \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - M \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \right\}^2,
 \end{aligned}$$

откуда с учетом (7) и (8) и следует требуемое равенство (6).

§ 15. Интегрирование случайных процессов

Пусть $W(t)$ — винеровский процесс, $X(t)$ — непрерывный в ср.кв. случайный процесс, такой, что случайный вектор с компонентами $X(t_1), \dots, X(t_n)$ не зависит от $W(s) - W(t)$ при любом n и любых значениях $t_1 < \dots < t_n \leq t < s$. Пусть a и $b > a$ — два фиксированных момента на временной оси. Любому n и любому разбиению τ

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

поставим в соответствие случайную величину

$$Y_{n,\tau} = \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

Обозначим через δ_τ мелкость разбиения τ , т. е.

$$\delta_\tau = \max_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}).$$

Если существует случайная величина Y , такая, что

$$M(Y - Y_{n,\tau})^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \delta_\tau \rightarrow 0, \quad (1)$$

то она называется *стохастическим интегралом Ито* в интервале (a, b) от случайного процесса $X(t)$ по процессу $W(t)$; при этом пишут:

$$Y = \int_a^b X(t) dW(t).$$

Для обозначения факта среднеквадратичной сходимости часто используют символ l.i.m., так что равенство (1) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$Y = \text{l.i.m. } Y_{n,\tau},$$

или, более подробно,

$$\int_a^b X(t) dW(t) = \text{l.i.m. } \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования интеграла Ито является существование определенного интеграла

$$\int_a^b M\{X(t)\}^2 dt.$$

Опуская доказательство этого утверждения, перейдем к примерам.

Пусть $W(t)$ — винеровский процесс, выходящий из нуля. Положим $X(t) \equiv W(t)$ и найдем

$$\int_0^T W(t) dW(t).$$

Введем разбиение τ : $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$. Представим $W(T) = (W(t_1) - W(t_0)) + (W(t_2) - W(t_1)) + \dots + (W(t_n) - W(t_{n-1}))$.

Возведем в квадрат:

$$\begin{aligned} W^2(T) &= \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + \\ &\quad + 2(W(t_n) - W(t_{n-1})) \sum_{i=0}^{n-2} (W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \\ &\quad + 2(W(t_{n-1}) - W(t_{n-2})) \sum_{i=0}^{n-3} (W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \dots \\ &\quad \dots + 2(W(t_2) - W(t_1))(W(t_1) - W(t_0)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i)) W(t_i), \end{aligned}$$

откуда

$$\sum_{i=0}^{n-1} W(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2.$$

Поскольку первое слагаемое в правой части от разбиения не зависит, то

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2.$$

Но (см. задачу 5 к § 14)

$$\text{l.i.m. } \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 = T.$$

Следовательно,

$$\int_0^T W(t) dW(t) = \frac{1}{2} W^2(T) - \frac{1}{2} T.$$

Рассмотренный пример показывает, что со стохастическими интегралами Ито нельзя обращаться как с обычными интегралами; в частности, для них не имеет места обычная формула замены переменных в определенном интеграле.

Определим интеграл от случайного процесса $G(t)$ по t на отрезке $[t_0, T]$

$$\int_{t_0}^T G(t) dt$$

как предел в среднеквадратичном соответствующих интегральных сумм Римана:

$$\int_{t_0}^T G(t) dt = \underset{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n-1} G(\tau_k)(t_{k+1} - t_k),$$

где $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$, $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Последнее равенство означает: существует случайная величина Z (обозначаемая

как $\int_{t_0}^T G(t) dt$), такая, что

$$\lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} M \left\{ Z - \sum_{k=0}^{n-1} G(\tau_k)(t_{k+1} - t_k) \right\}^2 = 0$$

при любом выборе точек $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, или, более подробно: для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого разбиения $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ при любом выборе точек $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$ будет выполняться неравенство

$$M \left\{ Z - \sum_{k=0}^{n-1} G(\tau_k)(t_{k+1} - t_k) \right\}^2 < \varepsilon,$$

если только мелкость разбиения $\max_k(t_{k+1} - t_k)$ будет меньше δ .

Можно показать, что необходимым и достаточным условием существования интеграла $\int_{t_0}^T G(t) dt$ является интегрируемость корреляционной функции $K_G(u, v)$ процесса $G(t)$ по квадрату $t_0 \leq u, v \leq T$, т. е. существование кратного интеграла

$$\int_{t_0}^T \int_{t_0}^T K_G(u, v) du dv$$

от неслучайной функции $K_G(u, v)$. Например, существует интеграл

$$\int_0^T W(t) dt \tag{2}$$

от винеровского процесса $W(t)$ на любом отрезке $[0, T]$, ибо для винеровского процесса $K_W(u, v) = \min(u, v)$ и

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^T K_W(u, v) du dv &= \int_0^T \int_0^T \min(u, v) du dv = \\ &= \int_0^T du \left\{ \int_0^u v dv + \int_u^T u dv \right\} = \int_0^T \left(\frac{u^2}{2} + (T-u)u \right) du = \frac{1}{3} T^3. \end{aligned}$$

Если интеграл $\int_{t_0}^t G(\tau) d\tau$ от случайного процесса $G(\tau)$ существует при любом $t \in [t_0, T]$, то можно говорить о случайном процессе

$$Y(t) = \int_{t_0}^t G(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

При этом можно показать, что математические ожидания $m_Y(t)$, $m_G(t)$ и корреляционные функции $K_Y(t_1, t_2), K_G(t_1, t_2)$ процессов $Y(t), G(t)$ связаны соотношениями:

$$m_Y(t) = \int_{t_0}^t m_G(\tau) d\tau, \quad K_Y(t_1, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} K_G(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2;$$

в частности, дисперсия

$$D_Y(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K_G(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Интеграл, как и производная (в случае их существования) от нормального случайного процесса, есть снова нормальный процесс⁽¹⁾. Поэтому, например, (2) является нормальной случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $T^3/3$.

Пусть теперь процесс $Z_t \equiv Z(t)$ представим в виде

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t G(t) dt + \int_0^t X(t) dW(t),$$

где $W_t \equiv W(t)$ — винеровский процесс, а $G(t)$ и $X(t)$ принадлежат тому классу случайных процессов, для которых определены соответствующие интегралы. В этом случае для краткости говорят, что процесс Z_t имеет стохастический дифференциал dZ_t , и пишут

$$dZ_t = G_t dt + X_t dW_t.$$

Последнее равенство называют также *стохастическим дифференциальным уравнением* относительно неизвестного случайного процесса Z_t ; при этом случайные процессы G_t и X_t в правой части в общем случае могут зависеть от Z_t .

Теорема. Пусть $F(t, x)$ — неслучайная функция, непрерывно дифференцируемая по $t \in [0, T]$ и дважды непрерывно дифференцируемая по $x \in (-\infty, \infty)$. Тогда случайный процесс $F(t, Z_t)$ имеет стохастический дифференциал, причем

$$\begin{aligned} dF(t, Z_t) = & \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \Big|_{x=Z_t} + G_t \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=Z_t} \right) dt + \\ & + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=Z_t} X_t dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} \Big|_{x=Z_t} X_t^2 dt. \quad (3) \end{aligned}$$

Формула (3) называется *формулой Ито*. Она устанавливает правило, по которому можно заменять переменные в стохастическом интеграле. Обратим внимание, что в случае, когда G , X и W — неслучайные функции, формула останется прежней, с той лишь разницей, что не будет последнего слагаемого (получится обычная формула для дифференциала сложной функции).

Доказательство сформулированной теоремы приводить не будем. Однако покажем, как результат (3) может быть получен на

⁽¹⁾ Это следствие общего результата, состоящего в том, что линейное преобразование нормального процесса сохраняет свойство нормальности.

интуитивном уровне⁽¹⁾, или, как говорят, на физическом уровне строгости. С этой целью выпишем разложение Тейлора для выражения $F(t + dt, Z_t + dZ_t)$ как функции двух переменных с точностью до членов порядка не более, чем dt :

$$\begin{aligned}
 F(t + dt, Z_t + dZ_t) &\approx F(t, Z_t) + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dZ_t + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2}_{\text{пренебрегаем}} + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dZ_t)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} dt dZ_t \approx F(t, Z_t) + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} (G_t dt + X_t dW_t) + \\
 &+ \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (G_t^2 (dt)^2 + 2G_t X_t dt dW_t + X_t^2 (dW_t)^2)}_{\text{пренебрегаем}} + \\
 &+ \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} (G_t (dt)^2 + X_t dt dW_t)}_{\text{пренебрегаем}} \approx \\
 &\approx F(t, Z_t) + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} (G_t dt + X_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} X_t^2 (dW_t)^2, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где все частные производные функции $F(t, x)$ берутся в точке (t, Z_t) . Поскольку

$$\int_0^T (dW_t)^2 = \max_k \lim_{(t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (W_{t_k} - W_{t_{k-1}})^2 = T,$$

то в (4) можно положить $(dW_t)^2 = dt$, и тем самым равенство (3) доказано.

Рассмотрим пример. Пусть

$$F(t, x) \equiv x^n, \quad G_t \equiv 0, \quad X_t \equiv 1.$$

Тогда формула (3) дает

$$d(W_t)^n = n W_t^{n-1} dW_t + \frac{1}{2} n(n-1) W_t^{n-2} dt,$$

т. е.

$$W_t^n - W_0^n = \int_0^t n W_\tau^{n-1} dW_\tau + \int_0^t \frac{n(n-1)}{2} W_\tau^{n-2} d\tau.$$

⁽¹⁾ Строгое доказательство можно посмотреть в каком-либо математическом курсе теории случайных процессов, напр.: Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. — М.: Наука, 1975.

Рассмотрим еще один пример. Пусть Z_t — случайный процесс изменения стоимости акций. Упоминавшийся выше Л. Башелье, анализируя в 1912 г. данные на Парижском рынке ценных бумаг, пришел к выводу, что $M\{\Delta Z_t\} = 0$, а при малых Δt математическое ожидание $M\{\Delta Z_t\}^2$ пропорционально Δt , или, если коэффициент пропорциональности обозначить $\tilde{\sigma}^2$, $M\{\Delta Z_t\}^2 = \tilde{\sigma}^2 \Delta t$. Данные условия будут удовлетворены, если принять

$$dZ_t = \tilde{\sigma} dW_t, \quad \text{или} \quad Z_t = Z_0 + \tilde{\sigma} W_t,$$

где W_t — винеровский процесс.

Позже, в 1965 г., П. Самуэльсон модифицировал модель Башелье, предложив для описания Z_t использовать уравнение

$$\frac{dZ_t}{Z_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (5)$$

т. е. предположив, что процессу типа броуновского движения подвержено не абсолютное, а относительное изменение цены акции. При этом первое слагаемое в (5) интерпретируется как некоторая общая неслучайная (и потому прогнозируемая) тенденция в изменении Z_t , а второе — случайная составляющая.

Найдем решение стохастического дифференциального уравнения (5). Для этого перепишем его в виде

$$dZ_t = \mu Z_t dt + \sigma Z_t dW_t^n$$

и воспользуемся формулой Ито (3). Положив $F(t, x) \equiv \ln x$, при $G(t) \equiv \mu Z_t$ и $X(t) \equiv \sigma Z_t$ имеем

$$\begin{aligned} d(\ln Z_t) &= \mu Z_t \left(\frac{1}{x} \Big|_{x=Z_t} \right) dt + \left(\frac{1}{x} \Big|_{x=Z_t} \right) \sigma Z_t dW_t + \\ &+ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} \Big|_{x=Z_t} \right) \sigma^2 Z_t^2 dt = \mu dt + \sigma dW_t - \frac{1}{2} \sigma^2 dt = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

т. е.

$$\ln Z_t - \ln Z_0 = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^t \sigma dW_t,$$

откуда при постоянных μ и σ получим

$$Z(t) = Z_0 \exp\{\mu t\} \exp\left\{\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t\right\}.$$

Таким образом, в принятой модели цена акции ведет себя как банковский счет $Z_0 \exp\{\mu t\}$ со случайным множителем $\exp\left\{\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t\right\}$.

Задачи

1. Доказать, что винеровский процесс $W(t)$ интегрируем в среднеквадратичном на $[0, t]$:

$$Y(t) = \int_0^t W(\tau) d\tau,$$

и найти корреляционную функцию $K_Y(t, s)$ процесса $Y(t)$.

Решение. Как было указано в основном тексте параграфа, необходимым и достаточным условием существования интеграла в среднеквадратичном

$$\int_0^T G(t) dt$$

от случайного процесса $G(t)$ является существование интеграла

$$\int_0^T \int_0^T K_G(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

от корреляционной функции $K_G(t_1, t_2)$ процесса $G(t)$; при этом

$$K_Y(t, s) = \int_0^t \int_0^s K_G(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

В нашем случае в роли процесса $G(t)$ выступает винеровский процесс $W(t)$, и $K_W(t_1, t_2) = \min(t_1, t_2)$. Пусть пока $s > t$, тогда

$$\begin{aligned} K_Y(t, s) &= \int_0^t \int_0^s \min(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^t \left(\int_0^{t_1} \min(t_1, t_2) dt_2 \right) dt_1 = \\ &= \int_0^t \left(\int_0^{t_1} \min(t_1, t_2) dt_1 + \int_{t_1}^s \min(t_1, t_2) dt_1 \right) dt_2 = \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{2} t_1^2 + t_1(t_2 - s) \right) dt_2 = \frac{1}{6} t^2 (3s - t). \end{aligned}$$

Очевидно, что при произвольном соотношении моментов t и s , обозначив

$$a = \min(t, s), \quad b = \max(t, s),$$

получим

$$K_Y(t, s) = \frac{1}{6} a^2 (3b - a).$$

В частности, при $a = b = s = t$

$$K_Y(t, t) = D_Y(t) = \frac{1}{3}t^3$$

— дисперсия процесса $Y(t)$.

2. Пусть

$$X(t) = \int_0^t \tau dW(\tau),$$

где $W(\tau)$ — винеровский процесс. Найти математическое ожидание $m_X(t)$ и дисперсию $D_X(t)$ процесса $X(t)$.

Решение. По определению стохастического интеграла

$$X(t) = \lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} t_k [W(t_{k+1}) - W(t_k)].$$

Поэтому, используя свойство перестановочности операций вычисления математического ожидания и предельного перехода, получим

$$\begin{aligned} MX(t) &= M \lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} t_k [W(t_{k+1}) - W(t_k)] = \\ &= \lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} t_k M[W(t_{k+1}) - W(t_k)] = 0, \end{aligned}$$

ибо $M[W(t_{k+1}) - W(t_k)] = 0$ по определению винеровского процесса.

Найдем теперь дисперсию:

$$\begin{aligned} D_X(t) &= M\{X(t)\}^2 = M \left\{ \lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} t_k [W(t_{k+1}) - W(t_k)] \times \right. \\ &\quad \times \left. \lim_{\max_j(t_{j+1}-t_j) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} t_j [W(t_{j+1}) - W(t_j)] \right\} = \\ &= \lim_{\max_m(t_{m+1}-t_m) \rightarrow 0} M \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} t_k [W(t_{k+1}) - W(t_k)] \sum_{j=0}^{n-1} t_j [W(t_{j+1}) - W(t_j)] \right\} = \\ &= \lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} M \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 [W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 \right\}, \end{aligned}$$

где последнее равенство обусловлено следующим свойством винеровского процесса: $M\{(W(t_{k+1}) - W(t_k))(W(t_{j+1}) - W(t_j))\} = 0$ при $k \neq j$. Далее,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} M \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 [W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 \right\} = \\
& = \lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 M[W(t_{k+1}) - W(t_k)]^2 = \\
& = \lim_{\max_k(t_{k+1}-t_k) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 \Delta t_k = \int_0^t u^2 du = \frac{1}{3} t^3,
\end{aligned}$$

так что $D_X(t) = (1/3)t^3$.

3. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{X'Y}(t_1, t_2)$ производной в среднеквадратичном $X'(t)$ и римановского интеграла в среднеквадратичном

$$Y(t) = \int_0^t X(u) du$$

от случайного процесса $X(t)$ в предположении, что $X'(t)$ и $Y(t)$ существуют.

Решение. Действуя согласно определению, имеем

$$\begin{aligned}
K_{X'Y}(t_1, t_2) &= M\{\overset{\circ}{X}'(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2)\} = \\
&= M\left\{ \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \frac{\overset{\circ}{X}(t_1 + \varepsilon) - \overset{\circ}{X}(t_1)}{\varepsilon} \underset{\max_i \Delta u_i \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{X}(u_i) \Delta u_i \right\},
\end{aligned}$$

где u_1, u_2, \dots, u_{n-1} — точки разбиения отрезка $[0, t_2]$: $0 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} < u_n = t_2$, $\Delta u_i = u_n - u_{n-1}$. Далее пользуемся свойством перестановочности операций вычисления математического ожидания и предельного перехода:

$$\begin{aligned}
& M\left\{ \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \frac{\overset{\circ}{X}(t_1 + \varepsilon) - \overset{\circ}{X}(t_1)}{\varepsilon} \underset{\max_i \Delta u_i \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{X}(u_i) \Delta u_i \right\} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \max_i \Delta u_i \rightarrow 0} M\left\{ \frac{\overset{\circ}{X}(t_1 + \varepsilon) - \overset{\circ}{X}(t_1)}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{X}(u_i) \Delta u_i \right\} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \max_i \Delta u_i \rightarrow 0} M\left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\overset{\circ}{X}(t_1 + \varepsilon) \overset{\circ}{X}(u_i) - \overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(u_i)}{\varepsilon} \cdot \Delta u_i \right\} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \max_i \Delta u_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{K_X(t_1 + \varepsilon, u_i) - K_X(t_1, u_i)}{\varepsilon} \cdot \Delta u_i = \int_0^{t_2} \frac{\partial K_X(t_1, u)}{\partial t_1} du,
\end{aligned}$$

где $K_X(v, u)$ — корреляционная функция процесса $X(t)$.

4. Напомним определение стохастического интеграла Ито от случайного процесса $X(t)$ по винеровскому процессу $W(t)$:

$$\int_a^b X(t) dW(t) = \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

Определим обобщенный стохастический θ -интеграл следующим образом:

$$\int_a^b X(t) dW(t) = \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} X(t_i + \theta \cdot (t_{i+1} - t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)),$$

где $0 \leq \theta \leq 1$. При $\theta = 0$ имеем стохастический интеграл Ито. При $\theta = 1/2$ получаемый интеграл называется *стохастическим интегралом Стратоновича*. Пусть в качестве $X(t)$ выступает винеровский процесс $W(t)$, так что рассматриваемый стохастический θ -интеграл имеет вид

$$J(\theta) = \int_0^T W(t) dW(t).$$

Вычислить значение $J(\theta)$ при: $\theta = 0; \theta = 1; \theta = 1/2$.

Решение. Пусть сначала $\theta = 0$. Тогда

$$J(0) = \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)).$$

Обозначим $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ и воспользуемся тождеством

$$W(t_i) \Delta W_i = \frac{1}{2}[W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)] - \frac{1}{2}(\Delta W_i)^2,$$

из которого имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} W(t_i) \Delta W_i = \frac{1}{2}[W^2(T) - W^2(0)] - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2.$$

Ранее показывалось (см. задачу 5 к § 14), что $\text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2 = T$. Поэтому при $W(0) \equiv 0$ получаем

$$J(0) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T.$$

Заметим, что этот результат уже был получен в основном тексте параграфа, хотя и несколько более громоздким путем.

Пусть теперь $\theta = 1$. Тогда

$$J(1) = \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}) \Delta W_i.$$

Но

$$\begin{aligned} W(t_{i+1}) \Delta W_i &= (W(t_i) + \Delta W_i) \Delta W_i = W(t_i) \Delta W_i + (\Delta W_i)^2 = \\ &= \frac{1}{2} [W^2(t_{i+1}) - W^2(t_i)] + \frac{1}{2} (\Delta W_i)^2, \end{aligned}$$

так что

$$\sum_{i=0}^{n-1} W(t_{i+1}) \Delta W_i = \frac{1}{2} [W^2(T) - W^2(0)] + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta W_i)^2.$$

Отсюда следует, что

$$J(1) = \frac{1}{2} W^2(T) + \frac{1}{2} T.$$

Пусть, наконец, $\theta = 1/2$. Тогда

$$J\left(\frac{1}{2}\right) = \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} W(\tilde{t}_i) \Delta W_i,$$

где $\tilde{t}_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$. Преобразуем выражение под знаком суммы:

$$\begin{aligned} W(\tilde{t}_i) \Delta W_i &= (W(\tilde{t}_i) + W(t_i) - W(t_i)) \Delta W_i = \\ &= W(t_i) \Delta W_i + (W(\tilde{t}_i) - W(t_i)) \Delta W_i = \\ &= W(t_i) \Delta W_i + (W(\tilde{t}_i) - W(t_i))(W(t_{i+1}) - W(\tilde{t}_i) + W(\tilde{t}_i) - W(t_i)) = \\ &= W(t_i) \Delta W_i + (W(\tilde{t}_i) - W(t_i))^2 + (W(\tilde{t}_i) - W(t_i))(W(t_{i+1}) - W(\tilde{t}_i)). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J\left(\frac{1}{2}\right) &= \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i) \Delta W_i + \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} (W(\tilde{t}_i) - W(t_i))^2 + \\ &\quad + \text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} (W(\tilde{t}_i) - W(t_i))(W(t_{i+1}) - W(\tilde{t}_i)). \end{aligned}$$

При рассмотрении случая $\theta = 0$ было показано, что

$$\text{l.i.m.} \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i) \Delta W_i = \frac{1}{2} W(T) - \frac{1}{2} T.$$

Рассуждая так же, как при решении задачи 5 к § 14, найдем

$$\text{l.i.m. } \sum_{i=0}^{n-1} (W(\tilde{t}_i) - W(t_i))^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{t}_i - t_i) = \frac{1}{2} T.$$

Наконец, пользуясь свойствами винеровского процесса, нетрудно проверить, что

$$\text{l.i.m. } \sum_{i=0}^{n-1} (W(\tilde{t}_i) - W(t_i))(W(t_{i+1}) - W(\tilde{t}_i)) = 0.$$

В результате получаем

$$J\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} W(T).$$

Отметим, что в случае $\theta = 1/2$ для обобщенного стохастического θ -интеграла

$$J(\theta) = \int_0^T W(t) dW(t)$$

получился такой же результат, как если бы в качестве $W(t)$ выступал не случайный процесс, а гладкая детерминированная функция, и интеграл понимался в обычном римановском смысле.

5. При измерении некоторой физической величины V показания $v(t)$ прибора непрерывно автоматически записываются в течение времени T . Величина

$$V_T \equiv \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

принимается за искомое значение измеряемой физической величины. Найти дисперсию DV_T случайной величины V_T , если $v(t)$ рассматривается как реализация случайного процесса $V(t)$ с корреляционной функцией

$$K_V(\tau) = Be^{-\alpha|\tau|}, \quad B > 0, \quad \alpha > 0.$$

Решение. Введем случайный процесс

$$X(T) = \frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt,$$

где интеграл понимается в смысле среднеквадратичной сходимости. Он существует в силу вида корреляционной функции процесса $V(t)$. Если через $K_X(s, t)$ обозначить корреляционную функцию процесса $X(t)$, то

$$DV_T = D\{X(T)\} = K_X(T, T).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} K_X(T, T) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_V(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T Be^{-\alpha|t_2-t_1|} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^{t_2} Be^{-\alpha(t_2-t_1)} dt_1 + \int_{t_2}^T Be^{-\alpha(t_1-t_2)} dt_1 \right) dt_2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^{t_2} Be^{-\alpha(t_2-t_1)} dt_1 \right) dt_2 + \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_{t_2}^T Be^{-\alpha(t_1-t_2)} dt_1 \right) dt_2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \frac{B}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_2}) dt_2 + \frac{1}{T^2} \int_0^T \frac{B}{\alpha} (1 - e^{-\alpha T} \cdot e^{\alpha t_2}) dt_2 = \\ &= \frac{B}{T^2 \alpha} \left(T + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha T} - 1) \right) + \frac{B}{T^2 \alpha} \left(T - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha T} (e^{\alpha T} - 1) \right) = \\ &= \frac{2B}{T^2 \alpha} \left(T + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha T} - 1) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что $DV_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, т. е. чем дольше длится наблюдение, тем точнее измеряем искомую величину.

6. Известна корреляционная функция $K_X(\tau)$ процесса $X(t)$. Определить дисперсию процесса

$$Y(t) = \int_0^t X(u) du,$$

являющегося интегралом в среднеквадратичном от $X(t)$.

Решение. Согласно общему результату (см. основной текст) искомая дисперсия может быть найдена по формуле

$$D_Y(t) = \int_0^t \int_0^t K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

В нашем случае

$$D_Y(t) = \int_0^t \int_0^t K_X(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \int_0^t \left(\int_0^t K_X(t_2 - t_1) dt_2 \right) dt_1 =$$

{заменяем переменные во внутреннем интеграле: $\tau = t_2 - t_1$, $dt_2 = d\tau$ }

$$= \int_0^t \left(\int_{-t_1}^{t-t_1} K_X(\tau) d\tau \right) dt_1 = \iint_D K(\tau) d\tau dt_1,$$

где последний интеграл берется по области, заштрихованной на рис. 14 и представляющей собой параллелограмм.

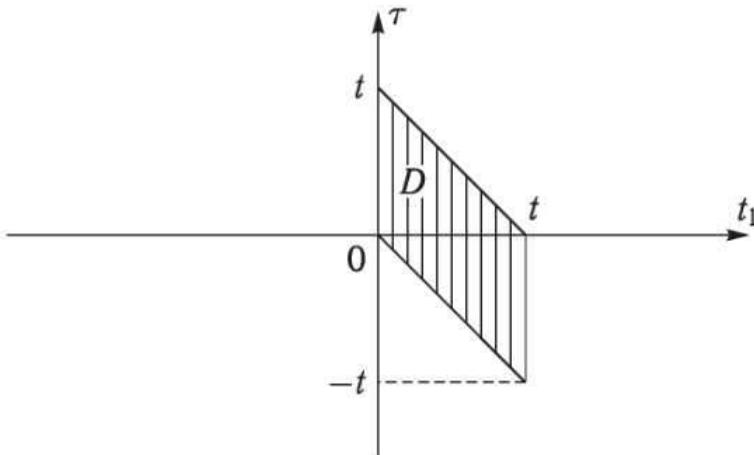


Рис. 14

Последний двойной интеграл можно представить в виде суммы двух повторных следующим образом:

$$\iint_D K(\tau) d\tau dt_1 = \int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} K_X(\tau) dt_1 \right) d\tau + \int_{-t}^0 \left(\int_{-\tau}^t K_X(\tau) dt_1 \right) d\tau,$$

где первое слагаемое в правой части есть интеграл по верхнему треугольнику, а второе — по нижнему треугольнику, из которых состоит область D . Для первого слагаемого имеем

$$\int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} K_X(\tau) dt_1 \right) d\tau = \int_0^t K_X(\tau)(t - \tau) d\tau;$$

для второго:

$$\int_{-t}^0 \left(\int_{-\tau}^t K_X(\tau) dt_1 \right) d\tau = \int_{-t}^0 K_X(\tau)(t + \tau) d\tau.$$

Если теперь в последнем интеграле произвести замену переменных

$$z = -\tau, \quad dz = -d\tau,$$

то получим

$$\begin{aligned} \int_{-t}^0 K_X(\tau)(t + \tau) d\tau &= \int_t^0 K_X(-z)(t - z) (-dz) = \\ &= \int_0^t K_X(-z)(t - z) dz = \int_0^t K_X(z)(t - z) dz, \end{aligned}$$

где последнее равенство имеет место в силу четности функции $K_X(\tau)$.

Таким образом, окончательно

$$D_Y(t) = 2 \int_0^t (t - \tau) K_X(\tau) d\tau.$$

7. Определить математическое ожидание $MX^2(t)$, где

$$X(t) = \int_0^t \tau^2 dK(\tau),$$

$K(\tau)$ — пуассоновский случайный процесс интенсивности λ , а интеграл понимается в следующем смысле:

$$\int_0^t \tau^2 dK(\tau) = \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i^2 [K(t_i) - K(t_{i-1})].$$

Решение. Воспользуемся известным тождеством

$$MX^2(t) = DX(t) + (MX(t))^2.$$

Для математического ожидания $MX(t)$ имеем

$$\begin{aligned} MX(t) &= M \left\{ \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i^2 [K(t_i) - K(t_{i-1})] \right\} = \\ &= \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i^2 \lambda \Delta t_i = \lambda \int_0^t \tau^2 d\tau = \frac{1}{3} \lambda t^3. \end{aligned}$$

Займемся теперь вычислением дисперсии $DX(t)$:

$$\begin{aligned} DX(t) &= M(\overset{\circ}{X}(t))^2 = M \left\{ \underset{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=1}^n t_i^2 [\overset{\circ}{K}(t_i) - \overset{\circ}{K}(t_{i-1})] \times \right. \\ &\quad \left. \times \underset{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=1}^n t_j^2 [\overset{\circ}{K}(t_j) - \overset{\circ}{K}(t_{j-1})] \right\} = \\ &= \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i^4 M(\overset{\circ}{K}(t_i) - \overset{\circ}{K}(t_{i-1}))^2. \end{aligned}$$

Последнее равенство здесь имеет место в силу свойства перестановочности операций вычисления математического ожидания и предельного перехода и свойства независимости приращений $\overset{\circ}{K}(t_i) - \overset{\circ}{K}(t_{i-1})$ и $\overset{\circ}{K}(t_j) - \overset{\circ}{K}(t_{j-1})$ при $i \neq j$. Заметив, что

$$M(\overset{\circ}{K}(t_i) - \overset{\circ}{K}(t_{i-1}))^2 = D(\overset{\circ}{K}(t_i) - \overset{\circ}{K}(t_{i-1})) = D(K(t_i) - K(t_{i-1})) = \lambda \Delta t_i,$$

получим

$$\begin{aligned} \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i^4 M(\overset{\circ}{K}(t_i) - \overset{\circ}{K}(t_{i-1}))^2 &= \\ &= \lim_{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n t_i^4 \lambda \Delta t_i = \lambda \int_0^t \tau^4 d\tau = \frac{1}{5} \lambda t^5. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно

$$MX^2(t) = \frac{1}{5} \lambda t^5 + \left(\frac{1}{3} \lambda t^3 \right)^2 = \frac{1}{5} \lambda t^5 + \frac{1}{9} \lambda^2 t^6.$$

8. Случайный процесс $X(t)$ называется *эргодичным по математическому ожиданию*, если $MX(t) = m_X$ — постоянная величина и

$$\underset{T \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = m_X, \quad (6)$$

или, более развернуто,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \left(\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt - m_X \right)^2 = 0,$$

где интеграл понимается в смысле среднеквадратичной сходимости. Процесс вычисления предела в левой части (6) можно интерпретировать как процесс осреднения по времени, и в этом смысле условие эргодичности (6) можно интерпретировать как равенство среднего по времени среднему по ансамблю.

Пусть $K(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ . Определим процесс $X(t)$ следующим образом:

$$X(t) = \frac{K(t)}{t}.$$

Будет ли процесс $X(t)$ эргодичным по математическому ожиданию?

Решение. Найдем математическое ожидание:

$$MX(t) = M\left\{\frac{K(t)}{t}\right\} = \frac{1}{t}MK(t) = \frac{1}{t} \cdot \lambda t = \lambda,$$

т. е. математическое ожидание постоянно и можно проверять на эргодичность. Имеем

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{K(t)}{t} dt - \lambda\right)^2 &= M\left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{K(t)}{t} dt\right)^2 - M\left(\frac{2\lambda}{T} \int_0^T \frac{K(t)}{t} dt\right) + \lambda^2 = \\ &= \frac{1}{T^2} M\left(\underset{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \sum_i \frac{K(t_i)}{t_i} \Delta t_i \cdot \underset{\max_j \Delta t_j \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \sum_j \frac{K(t_j)}{t_j} \Delta t_j\right) - \\ &\quad - \frac{2\lambda}{T} M\left(\underset{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0}{\text{l.i.m.}} \sum_i \frac{K(t_i)}{t_i} \Delta t_i\right) + \lambda^2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \frac{M\{K(t_i)K(t_j)\}}{t_i t_j} \Delta t_i \Delta t_j - \\ &\quad - \frac{2\lambda}{T} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_i \frac{MK(t_i)}{t_i} \Delta t_i + \lambda^2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \frac{\lambda \min(t_i, t_j) + \lambda^2 t_i t_j}{t_i t_j} \Delta t_i \Delta t_j - \\ &\quad - \frac{2\lambda}{T} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_i \frac{\lambda t_i}{t_i} \Delta t_i + \lambda^2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left(\frac{\lambda \min(t_1, t_2)}{t_1 t_2} + \lambda^2 \right) dt_1 dt_2 - \frac{2\lambda}{T} \int_0^T \lambda dt + \lambda^2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{\lambda \min(t_1, t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 = \end{aligned}$$

{см. рис. 15}

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T^2} \iint_{D_1} \frac{\lambda t_1}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 + \frac{1}{T^2} \iint_{D_2} \frac{\lambda t_2}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 = \\
 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^{t_2} \frac{\lambda}{t_2} dt_1 \right) dt_2 + \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^{t_1} \frac{\lambda}{t_1} dt_2 \right) dt_1 = \\
 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\frac{\lambda}{t_2} \cdot t_2 \right) dt_2 + \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\frac{\lambda}{t_1} \cdot t_1 \right) dt_1 = \frac{2\lambda}{T}.
 \end{aligned}$$

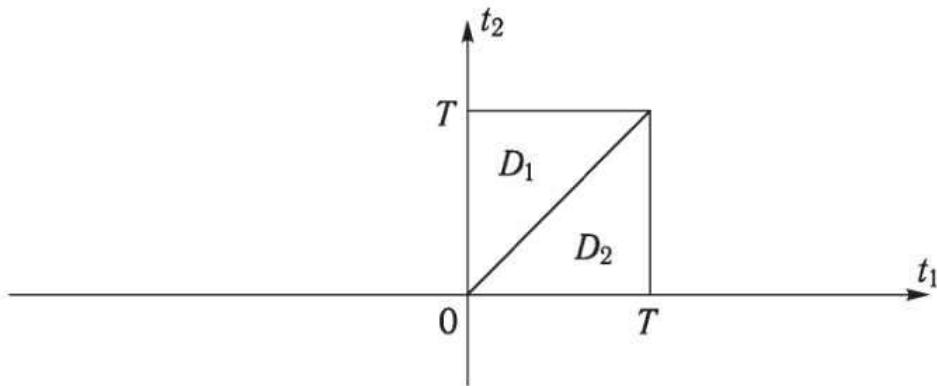


Рис. 15

Поскольку последнее выражение стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, то процесс $X(t)$ будет эргодичным по математическому ожиданию.

При проверке процесса на эргодичность по математическому ожиданию часто оказывается полезным следующее утверждение, справедливость которого несложно выводится непосредственно из определения эргодичности.

Теорема. Необходимым и достаточным условием эргодичности случайного процесса $X(t)$ с $MX(t) = \text{const}$ по математическому ожиданию является выполнение равенства

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \iint_0^T K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0,$$

где $K_X(t_1, t_2)$ — корреляционная функция процесса $X(t)$.

В частности, применительно к рассмотренному процессу

$$X(t) = \frac{K(t)}{t}$$

получим:

$$K_X(t_1, t_2) = M\{\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)\} = \frac{1}{t_1 t_2} M\{\overset{\circ}{K}(t_1)\overset{\circ}{K}(t_2)\} = \frac{\lambda \min(t_1, t_2)}{t_1 t_2},$$

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{\lambda \min(t_1, t_2)}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{2\lambda}{T},$$

что стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$. Таким образом, использование теоремы позволило получить нужный результат быстрее.

9. Случайный процесс $X(t)$ называется *эргодичным по дисперсии*, если $DX(t) = D_X$ — постоянная величина и

$$\underset{T \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{T} \int_0^T (\overset{\circ}{X}(t))^2 dt = D_X,$$

или, более развернуто,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\left(\frac{1}{T} \int_0^T (\overset{\circ}{X}(t))^2 dt - D_X\right)^2 = 0,$$

где интеграл понимается в смысле среднеквадратичной сходимости.

Определим случайный процесс $X(t)$ следующим образом:

$$X(t) = \frac{W(t)}{\sqrt{t}},$$

где $W(t)$ — винеровский процесс, выходящий из нуля. Будет ли процесс $X(t)$ эргодичным по дисперсии?

Решение. Поскольку процесс $X(t)$ — центрированный, то дисперсия

$$DX(t) = MX^2(t) = M\left\{\frac{W^2(t)}{t}\right\} = \frac{1}{t} M\{W(t) - W(0)\}^2 = \frac{1}{t} \cdot t = 1$$

— постоянная величина и процесс $X(t)$ можно проверять на эргодичность по дисперсии. Эргодичность по дисперсии означает в данном случае, что

$$\underset{T \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{W^2(t)}{t} dt = 1,$$

или, более развернуто,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{W^2(t)}{t} dt - 1\right)^2 = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 M\left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{W^2(t)}{t} dt - 1\right)^2 &= M\left(\frac{1}{T} \int_0^T \frac{W^2(t)}{t} dt\right)^2 - M\left(\frac{2}{T} \int_0^T \frac{W^2(t)}{t} dt\right) + 1 = \\
 &= \frac{1}{T^2} M\left(\underset{\substack{\text{l.i.m.} \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}}{\sum_i} \frac{W^2(t_i)}{t_i} \Delta t_i \cdot \underset{\substack{\text{l.i.m.} \\ \max_j \Delta t_j \rightarrow 0}}{\sum_j} \frac{W^2(t_j)}{t_j} \Delta t_j\right) - \\
 &\quad - \frac{2}{T} M\left(\underset{\substack{\text{l.i.m.} \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}}{\sum_i} \frac{W^2(t_i)}{t_i} \Delta t_i\right) + 1 = \\
 &= \frac{1}{T^2} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \frac{M\{W^2(t_i) W^2(t_j)\}}{t_i t_j} \Delta t_i \Delta t_j - \\
 &\quad - \frac{2}{T} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_i \frac{M W^2(t_i)}{t_i} \Delta t_i + 1 = \\
 &= \frac{1}{T^2} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \frac{M\{W^2(t_i) W^2(t_j)\}}{t_i t_j} \Delta t_i \Delta t_j - \\
 &\quad - \frac{2}{T} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_i \Delta t_i + 1 = \\
 &= \frac{1}{T^2} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \frac{M\{W^2(t_i) W^2(t_j)\}}{t_i t_j} \Delta t_i \Delta t_j - \frac{2}{T} \cdot T + 1 = \\
 &= \frac{1}{T^2} \lim_{\substack{i \\ \max_i \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \frac{M\{W^2(t_i) W^2(t_j)\}}{t_i t_j} \Delta t_i \Delta t_j - 1.
 \end{aligned}$$

Вычислим $M\{W^2(t_i) W^2(t_j)\}$, считая пока, для определенности, $t_j > t_i$:

$$\begin{aligned}
 M\{W^2(t_i) W^2(t_j)\} &= M\{W^2(t_i)(W(t_j) - W(t_i) + W(t_i))^2\} = \\
 &= M\{W^2(t_i) \cdot [(W(t_j) - W(t_i))^2 + 2(W(t_j) - W(t_i)) \cdot W(t_i) + W^2(t_i)]\} = \\
 &= M\{W^2(t_i) \cdot (W(t_j) - W(t_i))^2\} + 2M\{(W(t_j) - W(t_i)) \cdot W^3(t_i)\} + \\
 &\quad + M W^4(t_i) = t_i \cdot (t_j - t_i) + 0 + 3t_i^2 = 2t_i^2 + t_i t_j,
 \end{aligned}$$

а при произвольном соотношении моментов t_i и t_j получим

$$M\{W^2(t_i)W^2(t_j)\} = 2(\min(t_i, t_j))^2 + t_i t_j.$$

Продолжая теперь основную цепочку равенств, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \lim_{\substack{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0 \\ \max_j \Delta t_j \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \frac{M\{W^2(t_i)W^2(t_j)\}}{t_i t_j} \Delta t_i \Delta t_j - 1 &= \\ &= \frac{1}{T^2} \lim_{\substack{\max_i \Delta t_i \rightarrow 0 \\ \max_j \Delta t_j \rightarrow 0}} \sum_{i,j} \left(\frac{2(\min(t_i, t_j))^2}{t_i t_j} + 1 \right) \Delta t_i \Delta t_j - 1 = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left(\frac{2(\min(t_1, t_2))^2}{t_1 t_2} + 1 \right) dt_1 dt_2 - 1 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{2(\min(t_1, t_2))^2}{t_1 t_2} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

При вычислении последнего интеграла применим рис. 15:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{2(\min(t_1, t_2))^2}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 &= \frac{1}{T^2} \iint_{D_1} \frac{2t_1^2}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 + \frac{1}{T^2} \iint_{D_2} \frac{2t_2^2}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \iint_{D_1} \frac{2t_1}{t_2} dt_1 dt_2 + \frac{1}{T^2} \iint_{D_2} \frac{2t_2}{t_1} dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^{t_2} \frac{t_1}{t_2} dt_1 \right) dt_2 + \frac{2}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^{t_1} \frac{t_2}{t_1} dt_2 \right) dt_1 = \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T \frac{1}{t_2} \cdot \frac{t_2^2}{2} dt_2 + \frac{2}{T^2} \int_0^T \frac{1}{t_1} \cdot \frac{t_1^2}{2} dt_1 = 1. \end{aligned}$$

Чтобы рассматриваемый процесс был эргодичным по дисперсии, полученное выражение должно стремиться к нулю при $T \rightarrow \infty$. Поскольку это не так, то процесс не эргодичен по дисперсии.

Заметим, что эргодичность процесса $X(t)$ по дисперсии эквивалентна эргодичности процесса $(\overset{\circ}{X}(t))^2$ по математическому ожиданию. Поэтому, чтобы исследовать эргодичность процесса $X(t)$ по дисперсии, можно найти корреляционную функцию $K_Y(t_1, t_2)$ процесса

$$Y(t) = (\overset{\circ}{X}(t))^2,$$

а затем, опираясь на теорему, сформулированную при решении задачи 8, проверить выполнение условия

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_Y(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0.$$

Если это условие выполняется, то процесс $X(t)$ будет эргодичным по дисперсии; если не выполняется, то не будет.

В частности, если $X(t) = \frac{W(t)}{\sqrt{t}}$, то $Y(t) = \frac{W^2(t)}{t}$ и

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= M\{(Y(t_1) - MY(t_1))(Y(t_2) - MY(t_2))\} = \\ &= M\left\{\left(\frac{W^2(t_1)}{t_1} - 1\right)\left(\frac{W^2(t_2)}{t_2} - 1\right)\right\} = \\ &= M\left\{\frac{W^2(t_1)}{t_1} \frac{W^2(t_2)}{t_2} - \frac{W^2(t_1)}{t_1} - \frac{W^2(t_2)}{t_2} + 1\right\} = \\ &= M\left\{\frac{W^2(t_1)}{t_1} \frac{W^2(t_2)}{t_2}\right\} - 1 = \frac{1}{t_1 t_2} M\{W^2(t_1) W^2(t_2)\} - 1 = \\ &= \frac{1}{t_1 t_2} (2(\min(t_1, t_2))^2 + t_1 t_2) - 1 = \frac{2(\min(t_1, t_2))^2}{t_1 t_2}, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_Y(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \frac{2(\min(t_1, t_2))^2}{t_1 t_2} dt_1 dt_2 = 1$$

— не стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, а значит, процесс $\frac{W(t)}{\sqrt{t}}$ не является эргодичным по дисперсии.

10. Случайный процесс $X(t)$ может принимать только два значения: 1 и -1 . При этом

$$P\{X(0) = 1\} = P\{X(0) = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Переключение с одного значения на другое происходит в случайный момент времени T , причем случайные величины T и $X(0)$ независимы. Случайная величина T имеет показательное распределение с параметром λ . Требуется найти корреляционную функцию $K_X(t_1, t_2)$ процесса $X(t)$ и выяснить, будет ли процесс $X(t)$ эргодичным по математическому ожиданию.

Решение. Найдем математическое ожидание $MX(t)$. Имеем по определению:

$$MX(t) = 1 \cdot P\{X(t) = 1\} + (-1) \cdot P\{X(t) = -1\}.$$

Для вычисления вероятностей используем формулу полной вероятности:

$$\begin{aligned} P\{X(t) = 1\} &= P\{X(t) = 1 \mid X(0) = 1\} \cdot P\{X(0) = 1\} + \\ &\quad + P\{X(t) = 1 \mid X(0) = -1\} \cdot P\{X(0) = -1\}. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} P\{X(t) = 1 \mid X(0) = -1\} &= P\{T < t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \\ P\{X(t) = 1 \mid X(0) = 1\} &= P\{T \geq t\} = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$P\{X(t) = 1\} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{1}{2} + (1 - e^{-\lambda t}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично

$$P\{X(t) = -1\} = \frac{1}{2},$$

так что в результате будем иметь

$$MX(t) \equiv 0.$$

В таком случае для корреляционной функции получим

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M\{X(t_1)X(t_2)\} = \\ &= P\{X(t_1)X(t_2) = 1\} - P\{X(t_1)X(t_2) = -1\}. \end{aligned}$$

Пусть сначала $t_2 > t_1$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{X(t_1)X(t_2) = 1\} &= P\{T \notin [t_1, t_2]\} = 1 - P\{T \in [t_1, t_2]\} = \\ &= 1 - \int_{t_1}^{t_2} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 + e^{-\lambda t_2} - e^{-\lambda t_1}; \end{aligned}$$

при этом

$$P\{X(t_1)X(t_2) = -1\} = 1 - P\{X(t_1)X(t_2) = 1\} = e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}.$$

Таким образом, при $t_2 > t_1$

$$K_X(t_1, t_2) = 1 + e^{-\lambda t_2} - e^{-\lambda t_1} - (e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}) = 1 - 2e^{-\lambda t_1} + 2e^{-\lambda t_2},$$

а при $t_1 > t_2$

$$K_X(t_1, t_2) = 1 - 2e^{-\lambda t_2} + 2e^{-\lambda t_1}.$$

Чтобы ответить на вопрос об эргодичности процесса $X(t)$ по математическому ожиданию, исследуем поведение выражения

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

при $T \rightarrow \infty$. Понимая под областями D_1 и D_2 треугольники, показанные на рис. 15, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \frac{1}{T^2} \iint_{D_1} (1 - 2e^{-\lambda t_1} + 2e^{-\lambda t_2}) dt_1 dt_2 + \\ &+ \frac{1}{T^2} \iint_{D_2} (1 - 2e^{-\lambda t_2} + 2e^{-\lambda t_1}) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^{t_2} (1 - 2e^{-\lambda t_1} + 2e^{-\lambda t_2}) dt_1 \right) dt_2 + \\ &+ \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^{t_1} (1 - 2e^{-\lambda t_2} + 2e^{-\lambda t_1}) dt_2 \right) dt_1. \end{aligned}$$

Вычисляя эти простые повторные интегралы, получим в итоге

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 1 + \frac{8}{\lambda^2 T^2} (1 - e^{-\lambda T}) - \frac{4}{\lambda T} (1 + e^{-\lambda T}).$$

Поскольку это выражение не стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, то процесс $X(t)$ не является эргодичным по математическому ожиданию.