Borisych@me.com

<u>Рекомендуемая литература по лекции</u>:

1. H. W. SORENSON & A. R. STUBBERUD (1968) Non-linear filtering by approximation of the a posteriori density, International Journal of Control, 8:1, 33-51.
2. Julier S.J., Uhlmann J.K. New extension of the Kalman filter to nonlinear systems.In: Kadar I, editor. Signal processing, sensor fusion, and target recognition VI,vol. 3068. International Society for Optics and Photonics, SPIE; 1997, p. 182–193
3. S. J. Julier and J. K. Uhlmann, "Unscented filtering and nonlinear estimation," in Proceedings of the IEEE, vol. 92, no. 3, pp. 401-422, March 2004
4. E.A. Wan, R. van der Merwe. The unscented Kalman filter. In Kalman Filtering and Neural Networks, Edited by Simon Haykin, 2001 John Wiley & Sons, Inc.
5. H. M. T. Menegaz, J. Y. Ishihara, G. A. Borges and A. N. Vargas, "A Systematization of the Unscented Kalman Filter Theory," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 60, no. 10, pp. 2583-2598, Oct. 2015
6. I. Arasaratnam, S. Haykin, T. R. Hurd, Cubature Kalman Filtering for Continuous-Discrete Systems: Theory and Simulations, IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 58, NO. 10, OCTOBER 2010, 4977-4993.
7. I. Arasaratnam, S. Haykin and R. J. Elliott, "Discrete-Time Nonlinear Filtering Algorithms Using Gauss–Hermite Quadrature," in Proceedings of the IEEE, vol. 95, no. 5, pp. 953-977, May 2007.

Лекция 9. Сигма-точечный алгоритм фильтрации и его модификации

1. Алгоритмы нелинейной фильтрации калмановского типа: общие идеи
2. Сигма-точечное преобразование
3. Сигма-точечный фильтр Калмана (UKF)
4. Кубатурный фильтр Калмана (CKF)
5. Задачи для самостоятельного решения

1. Алгоритмы нелинейной фильтрации калмановского типа: общие идеи

Для представления алгоритмов нелинейной фильтрации калмановского типа вспомним постановку и решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации. Будем рассматривать частный случай системы наблюдений (4.11), (4.12) (см. Лекцию 4).
Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{Z}_+})$, $\mathcal{F}_0$-измеримый случайный вектор X_0, $\mathcal{F}_t$-согласованные последовательности независимых случайных векторов $\{V_t\}$ и $\{W_t\}$ (X_0, $\{V_t\}$ и $\{W_t\}$ независимы в совокупности). Рассмотрим стохастическую динамическую систему наблюдения с дискретным временем

$$\boldsymbol{X}_t = a_t(\boldsymbol{X}_{t-1}) + b_t V_t, \qquad t \in \mathbb{N}, \qquad \boldsymbol{X}_0 \sim \pi_0(x), \qquad (9.1),$$
$$\boldsymbol{Y}_t = A_t(\boldsymbol{X}_t) + B_t W_t, \qquad t \in \mathbb{N}. \qquad (9.2)$$

Здесь
– (9.1) - уравнение динамики,
– (9.2) - модель наблюдений,

- $\boldsymbol{X}_t \in \mathbb{R}^N$ – ненаблюдаемое состояние системы; $a_t(x), b_t$: – последовательности дискретных сноса и диффузии в динамике; $V_t \in \mathbb{R}^N$ – последовательность случайных векторов – возмущений в динамике; X_0 – начальное условие;
- $\boldsymbol{Y}_t \in \mathbb{R}^M$ – процесс доступных наблюдений; $A_t(x), B_t$: – последовательности аддитивного полезного сигнала и интенсивности шумов; $W_t \in \mathbb{R}^M$ – последовательность ошибок наблюдений.

Пусть $\mathcal{Y}_t = \sigma\{\boldsymbol{Y}_1, \dots, \boldsymbol{Y}_t\}$ - σ-алгебра, порожденная наблюдениями, полученными на отрезке *[1,t]*. Задача оптимальной фильтрации заключается в нахождении $\widehat{\boldsymbol{X}}_t = E[\boldsymbol{X}_t|\mathcal{Y}_t]$.

Оценка оптимальной фильтрации вычисляется с помощью следующего двухшагового алгоритма типа «прогноз-коррекция»:

1. Начальное условие:

$$\hat{\pi}_0(x) = \pi_0(x) \quad (9.3)$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_0 = E[\boldsymbol{X}_0\,|\mathcal{Y}_0] = E[\boldsymbol{X}_0] = \int_{\mathbb{R}^N} x\,\pi_0\,(x)dx \qquad (9.4)$$

2. Прогноз:

$$\breve{\pi}_t(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |\det{}^{-1}(b_t)| p_V\left(b_t^{-1}\big(x - a_t(u)\big)\right)\hat{\pi}_{t-1}(u)du, \qquad (9.5)$$

$$\breve{\boldsymbol{X}}_t = \int_{\mathbb{R}^N} x\,\breve{\pi}_t(x)\,dx \qquad (9.6)$$

3. Коррекция:

$$\bar{\rho}_t(x,y) = \left|\det{}^{-1}\big(B_t(x)\big)\right| p_W\left(B_t^{-1}\big(y - A_t(x)\big)\right)\breve{\pi}_t(x). \qquad (9.7)$$

$$\hat{\pi}_t(x) = \frac{\bar{\rho}_t(x, Y_t)}{\int_{\mathbb{R}^N} \bar{\rho}_t(u, Y_t)du}, \qquad (9.8)$$

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_t = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} \bar{\rho}_t(v, Y_t)dv} \int_{\mathbb{R}^N} u\,\bar{\rho}_t(u, Y_t)du. \qquad (9.9)$$

Недостатки предлагаемого алгоритма:

1) Оцениваемый объект – бесконечномерный (условная плотность распределения), что влечет недопустимые вычислительные затраты.
2) Для вычисления оценки состояния необходимо выполнить дополнительную операцию интегрирования (9.8).

В то же время, алгоритм фильтрации Калмана тоже имеет двухшаговую структуру «прогноз-коррекция», но

1) оценка описывается замкнутой *конечномерной* рекуррентной схемой,
2) на шагах прогноза и коррекции вычисляются не вспомогательные объекты (плотности), а требуемые оценки,
3) алгоритм одновременно вычисляет показатель точности полученной оценки.

Предположения/ограничения, при выполнении которых строятся алгоритмы субоптимальной нелинейной фильтрации:

1) Пусть условное распределение описывается средним и ковариационной матрицей (и является гауссовским!).
2) Пусть алгоритм фильтрации будет двухшаговым типа «прогноз-коррекция», и на этих шагах будут непосредственно вычисляться оценки состояния и параметры их точности (некоторые оценки матриц ковариаций ошибок).
3) Предлагаемые оценки должны обладать малым смещением, а вычисляемые оценки матриц ковариаций ошибок должны быть *консервативными*.

Замечание 9.1. Алгоритмы EFK и LFK относятся к алгоритмам нелинейной фильтрации калмановского типа. Их недостатком является расходимость в некоторых практических задачах, обусловленная нарушением свойства 3), представленного выше.
Рассмотрим некоторые соображения, наводящие на выбор вида алгоритма фильтрации.

Пусть на шаге *t-1* известна условная плотность распределения $\hat{\pi}_{t-1}(u)$. Тогда одношаговый прогноз $\breve{X}_t$ и матрица условной ковариации его ошибки вычисляется $\breve{k}_t$, исходя из (9.1), следующим образом:

$$\breve{X}_t = \int_{\mathbb{R}^N} a_t(x)\hat{\pi}_{t-1}(x)dx, \qquad (9.10)$$

$$\breve{k}_t = \int_{\mathbb{R}^N} a_t(x)a_t^T(x)\hat{\pi}_{t-1}(x)dx - \breve{X}_t\breve{X}_t^{\ T} + b_t b_t^T. \qquad (9.11)$$

Пусть на шаге *t* известна условная плотность прогноза $\breve{\pi}_t(x)$. Скорректируем прогноз по имеющемуся наблюдению Y_t «по-калмановски»:

прогноз наблюдения, вычисление «ковариаций» для коэффициента усиления:

$$\breve{Y}_t = \int_{\mathbb{R}^N} A_t(x)\breve{\pi}_t(x)dx, \qquad (9.12)$$

$$\breve{\kappa}_t = \int_{\mathbb{R}^N} A_t(x)A_t^T(x)\breve{\pi}_t(x)dx - \breve{Y}_t\breve{Y}_t^{\ T} + B_t B_t^T, \qquad (9.13)$$

$$\breve{\mu}_t = \int_{\mathbb{R}^N} xA_t^T(x)\breve{\pi}_t(x)dx - \breve{X}_t\breve{Y}_t^{\ T} \qquad (9.14)$$

коррекция:

$$\bar{X}_t = \breve{X}_t + \breve{\mu}_t\ \breve{\kappa}_t^{-1}\ (Y_t - \breve{Y}_t), \qquad (9.15)$$

$$\bar{k}_t = \breve{k}_t - \breve{\mu}_t\ \breve{\kappa}_t^{-1}\ \breve{\kappa}_t^T. \qquad (9.16)$$

Замечание 9.2. К недостаткам предложенного алгоритма (9.10) – (9.16) можно отнести его необоснованность, неоптимальность и незамкнутость (или бесконечную размерность): алгоритм вновь зависит от условных плотностей $\hat{\pi}_{t-1}(u)$ и $\breve{\pi}_t(x)$. Для нейтрализации последнего недостатка делается радикальное предположение о том, что <u>*условные плотности*</u> $\hat{\pi}_{t-1}(u)$ и $\breve{\pi}_t(x)$ <u>*являются гауссовскими*</u> с параметрами $(\bar{X}_{t-1}, \bar{k}_{t-1})$ для прогноза и $(\breve{X}_t, \breve{k}_t)$ для коррекции. Таким образом формулы (9.9) - (9.13) преобразуются к виду

$$\breve{X}_t = \int_{\mathbb{R}^N} a_t(x)\mathcal{N}\left(x, \bar{X}_{t-1}, \bar{k}_{t-1}\right)dx, \qquad (9.10')$$

$$\breve{k}_t = \int_{\mathbb{R}^N} a_t(x)a_t^T(x)\mathcal{N}\big(x,\bar{X}_{t-1},\bar{k}_{t-1}\big)dx \; - \breve{X}_t\breve{X}_t^{\;T} + \; b_t b_t^T. \qquad (9.11')$$

$$\breve{Y}_t = \int_{\mathbb{R}^N} A_t(x)\mathcal{N}\big(x,\breve{X}_t,\breve{k}_t\big)dx, \qquad (9.12')$$

$$\breve{\kappa}_t = \int_{\mathbb{R}^N} A_t(x)A_t^T(x)\mathcal{N}\big(x,\breve{X}_t,\breve{k}_t\big)dx \; - \breve{Y}_t\breve{Y}_t^{\;T} + \; B_t B_t^T, \qquad (9.13')$$

$$\breve{\mu}_t = \int_{\mathbb{R}^N} xA_t^T(x)\mathcal{N}\big(x,\breve{X}_t,\breve{k}_t\big)dx - \breve{X}_t\breve{Y}_t^{\;T}, \qquad (9.14')$$

где $\mathcal{N}(x,m,k)$ – плотность гауссовского распределения со средним m и невырожденной ковариационной матрицей k. Эти интегралы известны под названием гауссовских квадратур, и их приближенное аналитическое вычисление является стандартной достаточно известной задачей численных методов. По сути, алгоритмы *UKF* и *CKF* отличаются друг от друга применяемыми численными методами.

Замечание 9.3. Есть ли какие-либо математические предпосылки к тому, чтобы считать плотности $\hat{\pi}_{t-1}(u)$ и $\breve{\pi}_t(x)$ хотя бы похожими на гауссовские? Их нет, но независимость диффузий в (9.1), (9.2) от оцениваемого состояния, а также гауссовость $\{V_t\}$ и $\{W_t\}$ «способствует» унимодальности и легким хвостам состояния и наблюдений. А робастность калмановского алгоритма (оптимальность в классе линейных оценок) по отношению к виду распределения (но не моментам!) «прощает» предположение о гауссовости.

2. Сигма-точечное преобразование

Рассмотрим вспомогательную задачу вычисления следующего интеграла

$$I = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathcal{N}(x,m,k)dx \qquad (9.17)$$

от гладкой функции $f(x)$. Идея заключается не в аппроксимации интегрируемой функции, а распределения.
Итак, выбираются Q точек и Q «весов» $\{(X_i,w_i\,)\}_{i=\overline{0,Q}}$ $(X_i = (x_i^1,\dots,x_i^N)^T)$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\sum_{i=0}^{Q} w_i = 1, \qquad \sum_{i=0}^{Q} w_i\, X_i = m, \qquad \sum_{i=0}^{Q} w_i(X_i-m)(X_i-m)^T = k. \qquad (9.18)$$

При этом интеграл *I* аппроксимируется очевидным образом

$$I \approx \sum_{i=0}^{Q} w_i\, f(X_i). \qquad (9.19)$$

Замечание 9.4. Согласно авторам UT, «веса» w_i могут быть отрицательными (!), но обязаны удовлетворять условию нормировки.

Замечание 9.5. Каково число Q? Казалось бы, что число неизвестных в $\{(X_i,w_i\,)\}_{i=\overline{0,Q}}$ равно *(N+1)(Q+1)*, а число (нелинейных!) уравнений в (9.17) равно $1+N+\frac{N(N+1)}{2}$, т.е. $Q\;\geq\frac{N}{2}$. Однако, из линейной алгебры известно следующее неравенство

$$rank\left(\sum_{i=0}^{Q} w_i(X_i-m)(X_i-m)^T\right) \le \min(Q+1, N),$$

Поэтому минимальное число точек *N+1*.

Пример 9.1. (*минимальное число точек*) Пусть, без ограничения общности, $m = \mathbf{0}_N$, $k = \boldsymbol{I}_N$ ($\mathbf{0}_N$ – *N*-мерный нулевой вектор-столбец, $\boldsymbol{I}_N$ – *N*-мерная единичная матрица). Обозначим также X_i^j – *j*-мерный блочный подвектор вектора X_i, содержащий *j* первых компонент.

Набор $\{(X_i, w_i)\}_{i=\overline{0,N}}$ строится следующим рекуррентным образом.

1) Выбирается «нулевой» вес

$$0 < w_0 < 1 \qquad (9.20)$$

2) Вычисляются остальные веса

$$w_i = \begin{cases} \dfrac{1-w_0}{2^N}, & \text{если } i = 1, \\ w_1, & \text{если } i = 2, \\ 2^{i-1}w_1, & \text{если } i = \overline{3, N+1} \end{cases} \qquad (9.21)$$

3) Инициализация векторов:

$$X_0^1 = [0], \quad X_1^1 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2w_1}}\right], \quad X_2^1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2w_1}}\right], \qquad (9.22)$$

4) Наращивание размерности векторов:

$$X_i^{j+1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} X_0^j \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{если } i = 0, \\ \begin{bmatrix} X_i^j \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2w_j}} \end{bmatrix} & \text{если } i = \overline{1, j}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_j \\ \dfrac{1}{\sqrt{2w_j}} \end{bmatrix} & \text{если } i = j+1. \end{cases} \qquad (9.23)$$

Замечание 9.6. Данные формулы повторяются из статьи в статью, но не удовлетворяют (9.18).

Примерами наборов двумерных сигма-точек и весов могут считаться, например, «сферический» набор точек (для стандартного двумерного гауссовского распределения)

$$w_0 = w_1 = w_2 = \frac{1}{3},$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

или «абстрактный» набор

$$w_0 = \frac{7}{9}, \qquad w_1 = w_2 = \frac{1}{9},$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Пример 9.2. (*симметричное множество точек*) Множество $\{(X_i, w_i)\}_{i=\overline{0,2N}}$ строится следующим образом:

$$X_0 = m, \qquad w_0 = w_0 \tag{9.24}$$

$$w_i = \frac{1-w_0}{2N}, \qquad X_i = m + \left(\sqrt{\frac{N}{1-w_0}k}\right)_i, \quad i = \overline{1,N}, \tag{9.25}$$

$$w_i = \frac{1-w_0}{2N}, \qquad X_i = m - \left(\sqrt{\frac{N}{1-w_0}k}\right)_{i-N}, \quad i = \overline{N+1,2N}, \tag{9.26}$$

где $\left(\sqrt{\frac{N}{1-w_0}k}\right)_i$ – i-й столбец матричного квадратного корня (нижней треугольной матрицы в разложении Холецкого). При этом w_0 может иметь произвольный знак: $w_0 > 0$, если при отображении $f(x)$ точки «стремятся от m» и $w_0 < 0$ если при отображении $f(x)$ точки «стремятся к m».

Заметим, что из-за симметричности множества $\{(X_i, w_i)\}_{i=\overline{0,2N}}$ следует, что

$$\sum_{i=0}^{2N} w_i (x_i^p - m^p)(x_i^j - m^j)(x_i^l - m^l) \equiv 0, \tag{9.27}$$

как и для исходного гауссовского распределения ($\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^1, \dots, \boldsymbol{X}^N)^{\boldsymbol{T}} \sim \mathcal{N}(m,k)$)

$$E\left[(\boldsymbol{X}^p - m^p)(\boldsymbol{X}^j - m^j)(\boldsymbol{X}^l - m^l)\right] \equiv 0. \tag{9.28}$$

Из условий (9.18) и (9.27) следует, что если $f(x)$ – многочлен степени, не более 3й, то формула (9.19) позволяет точно вычислить $E[f(\boldsymbol{X})]$, для $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(m,k)$, т.е. для таких функций

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, \mathcal{N}(x,m,k) dx = \sum_{i=0}^{2N} w_i\, f(X_i). \tag{9.29}$$

Если $f(x)$ имеет равномерно ограниченную четвертую производную на всем $\mathbb{R}^N$, т.е.

$$\sup_{\substack{i,j,k,l,\\ x\in\mathbb{R}^N}} \left| \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^{(i)} x^{(j)} x^{(k)} x^{(l)}} \right|_x \right| \le C,$$

то $\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, \mathcal{N}(x,m,k)dx - \sum_{i=0}^{2N} w_i\, f(X_i) \right| = O(E[\|\boldsymbol{X} - \boldsymbol{m}\|^4])$.

Замечание 9.7. Существуют разные методы выбора $\{(X_i, w_i\,)\}_{i=\overline{0,Q}}$. Подробности можно почерпнуть в работах [4], [5].

Замечание 9.8. Заметим, что число сигма-точек растет линейно с ростом размерности *N*.

3. Сигма-точечный фильтр Калмана (UKF)

Алгоритм *UKF* организован следующим образом.

1) Начальное условие:

$$\overline{\boldsymbol{X}}_0 = E[\boldsymbol{X}_0], \qquad (9.30)$$
$$k_0 = cov\,(\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{X}_0), \qquad (9.31)$$

2) Вычисление множества сигма-точек $\{(X_i(\overline{\boldsymbol{X}}_{t-1}, k_{t-1}),\quad w_i(\overline{\boldsymbol{X}}_{t-1}, k_{t-1})\,)\}_{i=\overline{0,Q}}$, соответствующих параметрам $(\overline{\boldsymbol{X}}_{t-1}, k_{t-1})$, например, с помощью формул (9.24) – (9.26).

3) Прогноз:

$$\breve{\boldsymbol{X}}_t = \sum_{i=0}^{Q} w_i(\overline{\boldsymbol{X}}_{t-1}, k_{t-1})\, a_t(X_i(\overline{\boldsymbol{X}}_{t-1}, k_{t-1})), \qquad (9.32)$$
$$\breve{k}_t = \sum_{i=0}^{Q} w_i(\overline{\boldsymbol{X}}_{t-1}, k_{t-1}) \left(a_t(X_i(\overline{\boldsymbol{X}}_{t-1}, k_{t-1})) - \breve{\boldsymbol{X}}_t\right) \left(a_t(X_i(\overline{\boldsymbol{X}}_{t-1}, k_{t-1})) - \breve{\boldsymbol{X}}_t\right)^T + \; b_t b_t^T, \qquad (9.33)$$

4) Вычисление множества сигма-точек $\left\{\left(X_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t),\quad w_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t)\,\right)\right\}_{i=\overline{0,Q}}$, соответствующих параметрам $(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t)$, например, с помощью формул (9.24) – (9.26).

5) Коррекция:

$$\breve{\boldsymbol{Y}}_t = \sum_{i=0}^{Q} w_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t)\, A_t\big(X_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t)\big), \qquad (9.34)$$
$$\breve{\kappa}_t = \sum_{i=0}^{Q} w_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t) \left(A_t\big(X_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t)\big) - \breve{\boldsymbol{Y}}_t\right) \left(A_t\big(X_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t)\big) - \breve{\boldsymbol{Y}}_t\right)^T + \; B_t B_t^T, \qquad (9.35)$$
$$\breve{\mu}_t = \sum_{i=0}^{Q} w_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t) \left(X_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t) - \breve{\boldsymbol{X}}_t\right) \left(A_t\big(X_i(\breve{\boldsymbol{X}}_t, \breve{k}_t)\big) - \breve{\boldsymbol{Y}}_t\right)^T, \qquad (9.36)$$
$$\overline{\boldsymbol{X}}_t = \breve{\boldsymbol{X}}_t + \; \breve{\mu}_t \;\; \breve{\kappa}_t^{-1}\;\; (\boldsymbol{Y}_t - \breve{\boldsymbol{Y}}_t), \qquad (9.15')$$
$$\bar{k}_t = \breve{k}_t - \; \breve{\mu}_t \;\; \breve{\kappa}_t^{-1}\;\; \breve{\mu}_t^T. \qquad (9.16')$$

4. Кубатурный фильтр Калмана (CKF)

Фильтр отличается другим способом приближенного вычисления интегралов типа (9.17) – квадратур Гаусса-Эрмита. Для понимания этого метода рассмотрим сначала одномерный случай стандартного гауссовского распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx \;\approx\; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum\nolimits_{i=1}^{n} w_i\, f\big(\sqrt{2}x_i\big), \qquad (9.37)$$

где x_i $(i=\overline{1,n})$ – корни полинома Гаусса-Эрмита $H_n(x)$:

$$H_n(x) = \;(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad (9.38)$$

$$w_i = \frac{2^{n-1}n!\,\sqrt{\pi}}{n^2\big(H_{n-1}(x_i)\big)^2}. \qquad (9.39)$$

Например, трехточечная схема:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx \;\approx\; \frac{f\big(-\sqrt{3}\big)}{6}+\frac{2f(0)}{3}+\frac{f\big(\sqrt{3}\big)}{6}. \qquad (9.40)$$

В случае одномерного интеграла с произвольным гауссовским распределением имеет место следующая квадратура

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx \;\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum\nolimits_{i=1}^{n} w_i\, f\big(\sqrt{2}\sigma x_i+m\big). \qquad (9.37')$$

Рассмотрим произвольный N-мерный случай:

$$I=\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathcal{N}(x,m,k)dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,(2\pi)^{-\frac{N}{2}}det^{-\frac{1}{2}}\,k\;exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)^T k^{-1}(x-m)\right)dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N} f(k^{\frac{1}{2}}x+m)\,(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\,e^{-\frac{x^Tx}{2}}dx \approx$$
$$\pi^{-\frac{N}{2}}\sum\nolimits_{i_1=1}^{n}\sum\nolimits_{i_2=1}^{n}\dots\sum\nolimits_{i_N=1}^{n} w_{i_1}w_{i_2}\dots w_{i_N} f\left(k^{\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}x_{i_1}\\ \cdots\\ x_{i_N}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m_1\\ \cdots\\ m_N\end{bmatrix}\right). \qquad (9.37'')$$

Кубатурный фильтр Калмана отличается от UKF тем, что интегралы в (9.9’) - (9.13’) вычисляются с помощью квадратурного правила (9.37’’).

Замечание 9.9. Заметим, что число сигма-точек растет экспоненциально с ростом размерности *N*.

5. *Задачи для самостоятельного решения*

Задача 9.1. Решить задачу о слежении за аэробаллистической целью из статьи 1.pdf (Sect. B Example). Сделать по одному расчету EKF, UKF и QKF. На графиках (отдельных для каждой компоненты состояния) выводить точное значение X, оценки $\hat{X}(t)$ (три штуки), и оценки СКО ошибки оценки $\sqrt{k(t)}$ (три штуки). Провести 10 000 испытаний. Посчитать для каждого алгоритма число случаев, когда оценки «разваливались». По выборке, из которой исключены случаи «рассыпающихся» алгоритмов вычислить выборочные дисперсии ошибок оценок различных алгоритмов фильтрации.