«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Физматлит, 1974.

**Лекция 1. Аксиоматика ТВ.**

**Условное математическое ожидание**

1. *Аксиоматика теории вероятностей.*
2. *Случайные величины. Математическое ожидание.*
3. *Условное математическое ожидание (УМО).*
4. *Использование УМО в задачах оптимального байесовского оценивания*
5. *Задачи для самостоятельного решения.*
6. *Аксиоматика теории вероятностей*

**Определение 1.1.** Тройка , в которой – пространство элементарных событий, - -алгебра на , а *P* – вероятностная мера на , называют *вероятностным пространством*. Если -алгебра включает в себя все свои подмножества множеств нулевой вероятностной меры, то соответствующее вероятностное пространство называется *полным*.

Ниже для напоминания представлены определения и .

**Определение 1.2.** Множество подмножеств *образуют -алгебру* , если обладает следующими свойствами:

1. ,

-алгебра называется *тривиальной*.

**Определение 1.3.** Функция множества называется *вероятностной мерой*, если она удовлетворяет следующим свойствам:

1. (аксиома неотрицательности),
2. (аксиома нормировки),
3. (аксиома аддитивности),
4. (аксиома непрерывности вероятности в нуле).

**Определение 1.4.** Пара называется *измеримым пространством*. Примерами измеримых пространств служат , где – борелевская -алгебра на соответствующем пространстве.

**Определение 1.5.** Пусть и – два измеримых пространства. Отображение называется – *измеримым*, если для .

1. *Случайные величины. Математическое ожидание*

**Определение 1.6.** Пусть – вероятностное пространство, а – измеримое пространство. - измеримое отображение называется *случайным элементом*. В частном случае, если , то – *случайная величина*, а если , то – *n-мерный случайный вектор*.

**Замечание 1.1.** Благодаря тому, что отображение - - измеримое, оно индуцирует на измеримом пространстве вероятностную меру.

Определение математического ожидания случайной величины (являющегося приложением интеграла Лебега) вводится за несколько этапов.

**Определение 1.7.** Подмножество называется *конечным разбиением пространства* , если , и выполнены следующие свойства: при , и Также для простоты будем считать, что

**Замечание 1.2.** Иногда конечное разбиение пространства называют *группой гипотез*.

**Определение 1.8.** Пусть – некоторое конечное разбиение пространства . Случайная величина

называется *простой*. Математическое ожидание простой случайной величины определяется следующей формулой

Пусть – некоторая неотрицательная случайная величина на . Известно, что для нее можно построить последовательность простых неотрицательных случайных величин , такую, что при для любого .

**Определение 1.9.** *Математическим ожиданием* (интегралом Лебега) неотрицательной случайной величины называется величина

**Замечание 1.3.** В силу данного определения математическое ожидание может быть бесконечным.

**Определение 1.10.** Пусть – произвольная (знакопеременная) случайная величина. Случайная величина называется *верхней срезкой* , а – *нижней срезкой*. При этом . Математическое ожидание случайной величины определено, если :

Если , то говорят, что *имеет конечное математическое ожидание* (или является интегрируемой случайной величиной). Эквивалентное условие: .

**Замечание 1.4.** Иногда математическое ожидание подчеркнуто записывается в форме интеграла Лебега:

*Свойства математических ожиданий*

1. Для любого события , т.е. вероятность события – математическое ожидание его индикаторной функции.
2. Если существует, и C – константа, то .
3. Если и – интегрируемые случайные величины, и , то и *E*[
4. Если – интегрируемая случайная величина, то |. Если *g=g(x)* – выпуклая функция и также является интегрируемой случайной величиной, то

– *неравенство Йенсена*.

1. Если – интегрируемая случайная величина, и , то – также интегрируемая случайная величина.
2. Если и – интегрируемые случайные величины, то
3. Если P-п.н., то .
4. Если = P-п.н. и и – интегрируемые случайные величины, то .
5. и – интегрируемые случайные величины, и для любого , то P-п.н.
6. – случайные величины. Если для всех *n*, и при , то .
7. (Лемма Фату). – случайные величины. Если для всех *n*, , то . Если , и , то .
8. (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости). – случайные величины, , и P-п.н. Тогда , и при .
9. Если и – независимые интегрируемые случайные величины, то .

**Замечание 1.5.** Свойства (безусловных) математических ожиданий приведены здесь для того, чтобы впоследствии сравнить их со свойствами условных математических ожиданий. Вообще, свойств математических ожиданий гораздо больше (см. книгу А.Н. Ширяева «Вероятность»).

1. *Условное математическое ожидание (УМО)*

**Определение 1.11.** Пусть , *P{B} > 0*. Тогда *условная вероятность события A при условии B* определяется формулой

**Определение 1.12.** Пусть – интегрируемая случайная величина, , *P{B} > 0*. Тогда *условное математическое ожидание относительно события*  определяется формулой

**Замечание 1.6.** Условная вероятность одного события относительно другого, а также условное математическое ожидание относительно события – неслучайные величины. По сути, это – *апостериорные* характеристики, которые вычисляются после проведения опыта, в результате которого произошло событие *B* (и нам об этом известно). На практике дополнительная информация гораздо богаче: обычно наблюдаются случайные величины, векторы, процессы. Как учитывать такую информацию? Как учитывать возможную информацию априорно, до получения результатов опыта?

**Определение 1.13.** Пусть – интегрируемая случайная величина, – конечное разбиение. Тогда *УМО относительно разбиения*  называется величина

**Замечание 1.7.** УМО относительно разбиения уже является функцией от случайного события, т.е. случайной величиной!

**Замечание 1.8.** УМО относительно разбиения позволяет построить условную вероятность относительно разбиения. При этом условная вероятность в этом случае уже будет случайной, но обладать свойствами вероятности. Действительно, пусть - еще одно конечное разбиение: . Построим по формуле (1.7) УМО , *k=1,…,m*. Легко проверить, что , и P-п.н.

**Замечание 1.9.** Легко заметить, что УМО относительно разбиения описывает нам УМО относительно дискретной случайной величины!

**Определение 1.14.** Пусть – неотрицательная интегрируемая случайная величина, – -подалгебра . Условное математическое ожидание случайной величины относительно -подалгебры – расширенная случайная величина , обладающая следующими свойствами:

1. – - измерима (т.е. ),
2. для любого выполняется равенство

или, что эквивалентно

для любого .

Для произвольной интегрируемой случайной величины УМО считается определенным, если , и определяется формулой

**Замечание 1.10.** Рассмотрим вероятностное пространство и измеримое пространство , где – -подалгебра . Рассмотрим функцию :

Можно проверить, что является (знакопеременной) мерой на , причем . По теореме Радона-Никодима существует производная Радона-Никодима , для которой верно равенство

С другой стороны, из (1.8) следует, что *P*-п.н. В последнем равенстве важно следующее: – не есть производная Радона-Никодима *Q* по *P*, т.к. она в общем случае -измерима, а не -измерима. А - -измерима по определению!

**Замечание 1.11.** В соответствии с теоремой Радона-Никодима УМО определено не единственным образом, а только с точностью до множеств вероятностной меры ноль.

**Замечание 1.12.** Пусть – конечное разбиение, . Если – интегрируемая случайная величина, то

Т.о. Определения 1.13 и 1.14 непротиворечивы.

**Определение 1.15.** Пусть – некоторое случайное событие. УМО называется условной вероятностью события относительно – -подалгебры .

**Замечание 1.13.** На практике доступная информация никогда не бывает доступной в -подалгебр: обычно это случайные величины, векторы или процессы. Пусть – интегрируемая случайная величина, – некоторая случайная величина. Легко проверить, что - -подалгебра -алгебры Она называется -подалгеброй, порожденной случайной величиной . Тогда по определению УМО случайной величины относительно случайной величины определяется следующим равенством . Аналогичным образом определяется -подалгебра в случае, если – случайный вектор. Если – случайный процесс, то - минимальная -подалгебра, содержащая все подалгебры .

**Замечание 1.14.** Как вычислять ? Верно следующее утверждение. Пусть –интегрируемая случайная величина, – случайная величина. Тогда существует такая борелевская функция что *P*-п.н. Таким образом, УМО – это некоторая функция от наблюдений. Аналогичные утверждения верны и для случая наблюдений в форме случайного вектора и случайного процесса.

**Определение 1.16.** Пусть – интегрируемая случайная величина, – случайная величина, – вероятностное распределение на измеримом пространстве . Борелевская функция называется УМО при условии *Y=y*, если для любого борелевского множества выполнено равенство

**Замечание 1.15.** Пусть – случайная величина. Тогда согласно предыдущему замечанию существует такая функция , что

1. Для любого фиксированного функция – измерима,

Тогда называется *условным распределением относительно случайной величины* . Ясно, что функция определена неединственным образом. Если обладает дополнительным свойством

1. для любого фиксированного функция является вероятностной мерой,

то такая функция называется *регулярной версией условного распределения*.

*Свойства условных математических ожиданий*

1. Если C – константа, то
2. Если и – интегрируемые случайные величины, и , то и *E*[
3. Если – интегрируемая случайная величина, то | Если g=g(x) – выпуклая функция и также является интегрируемой случайной величиной, то

– *неравенство Йенсена*.

1. Если и – интегрируемые случайные величины, *a* и *b* – константы, то
2. Если – интегрируемая случайная величина, – тривиальная алгебра, то
3. Формула взятия повторного математического ожидания:
4. Пусть - вложенные подалгебры, – интегрируемая случайная величина, тогда
5. Если - интегрируемая случайная величина, не зависящая от (т.е. ), то
6. Если - интегрируемая случайная величина, а - интегрируемая – измеримая случайная величина, то
7. – случайные величины.

Если , и при , то и

Если , и при , то

Если , то

Если , то

1. Пусть - интегрируемая случайная величина, - последовательность вложенных вложенные подалгебр, , тогда
2. *Использование УМО в задачах оптимального байесовского оценивания*

Математический аппарат УМО широко применяется в системном анализе стохастических динамических систем при решении задач анализа, оценивания и управления. В данном курсе будет представлено использование УМО в задачах СК-оптимального байесовского оценивания.

**Определение 1.17**. Пусть – ненаблюдаемая интегрируемая случайная величина, – наблюдаемая случайная величина. Измеримая борелевская функция называется *оценкой* , построенной по наблюдениям . Величина называется ошибкой оценки . Пусть задана некоторая функция , называемая функцией потерь и функционал , называемый *критерием оптимальности*. Задача

называется задачей *(оптимального) байесовского оценивания величины по наблюдениям в смысле критерия .* При этом оценки таковы, что значение критерия определено. Оценка , доставляющая критерию минимум, называется *(абсолютно) оптимальной в смысле критерия* .

**Определение 1.18**. Пусть – некоторый класс допустимых функций (допустимых оценок). Задача

называется задачей *условно-оптимального байесовского оценивания величины по наблюдениям в смысле критерия в классе допустимых оценок .* Оценка , доставляющая критерию минимум на , называется *условно-оптимальной в смысле критерия в классе допустимых оценок* .

**Замечание 1.16.** Обычно функции потерь обладают очевидными свойствами.

1. , если .

**Замечание 1.17.** В задачах (1.14), (1,14’) нужно найти оптимальную оценку (либо доказать, что ее не существует). При этом значение характеризует точность оптимальной оценки. Примечательно, что в большинстве случаев, даже если удается аналитически получить , не удается получить .

**Определение 1.19**. Частный случай задачи (1.14) для квадратичной функции потерь , называется задачей *оптимального в среднеквадратическом смысле оценивания (СК-оптимального оценивания)*.

**Теорема 1.1**. – СК-оптимальная оценка.

**Доказательство:**

Пусть – произвольная оценка. Тогда

**Замечание 1.18.** В большом количестве задач байесовского оценивания (для разных функций потерь) оптимальная оценка выражается через условное распределение *X* относительно *Y*. Ниже представлены некоторые частные случаи вычисления УМО и условных распределений.

**Пример 1.1**. (*УМО дискретной случайной величины по наблюдению дискретной случайной величины*). Совместное распределение *X* и *Y* задано двумерным рядом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ***y1*** | ***y2*** | **…** | ***ym*** |
| ***x1*** | *p11* | *p12* | … | *p1m* |
| ***x2*** | *p21* | *p22* | … | *p2m* |
| **…** | … | … | … | … |
| ***xn*** | *pn1* | *pn2* | … | *pnm* |

Тогда

**Пример 1.2**. (*УМО непрерывной случайной величины по наблюдению непрерывной случайной величины*). Совместное распределение *X* и *Y* задано двумерной плотностью распределения *fXY(x,y).* Без ограничения общности будем считать, что для всех *(x,y)* *fXY(x,y)>0.*

**Пример 1.3**. (*Теорема о нормальной корреляции).* Пусть блочный случайный вектор

тогда условное распределение относительно является гауссовским со средним

и условной ковариационной матрицей

где - матрица, псевдообратная к по Муру-Пенроузу.

**Пример 1.4**. (*Байесовская классификация).* Пусть *X* – дискретный случайный вектор с рядом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***X*** | *e1* | *e2* | *…* | *en* |
| ***p*** | *p1* | *p2* | *…* | *pn* |

(*e1,…, en* – единичные векторы-столбцы пространства ). Пусть – нормированная непрерывная случайная величина со строго положительной плотностью распределения , , – заданные вектор-столбцы, причем все компоненты – строго положительные. Наблюдение *Y* описывается моделью

Тогда

Проверим, что определяется формулой (1.23). Для этого нужно проверить выполнение определения УМО. Очевидно, что в форме (1.23) – измеримая функция наблюдения *Y*. Осталось только проверить истинность (1.8) или (1.8’). Прежде всего, по формуле полной вероятности наблюдения имеют плотность распределения, определяемую формулой

Далее, пусть – произвольное борелевское множество, тогда

С другой стороны,

Выполнение равенства (1.8) проверено.

1. *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 1.1.** Пусть - - измеримый случайный элемент. Доказать, что является -подалгеброй .

**Задача 1.2.** Сформулировать утверждения, «симметричные» свойствам 10, 11 математического ожидания.

**Задача 1.3.** Пусть *X* – дискретный случайный вектор с рядом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***X*** | *e1* | *e2* | *…* | *en* |
| ***p*** | *p1* | *p2* | *…* | *pn* |

(*e1,…, en* – единичные векторы-столбцы пространства ). Обозначим *p=( p1,…, pn)T –* вектор-столбец распределения. Найти *E[X], cov(X,X)*.Пусть *Y=g(X)* – произвольное преобразование вектора *X*. Доказать, что оно всегда может быть представлено в линейной форме: *Y=GХ*.

**Задача 1.4.** Пользуясь Определением 1.10 ответить на вопрос: у случайной величины, имеющей распределение Коши среднее значение бесконечно или не существует?

**Задача 1.5.** Пусть – случайная величина, – независимая от случайная величина, имеющая положительную плотность распределения , . Найти условное распределение относительно . (Подсказка: у этого распределения существует плотность).

**Задача 1.6.** Исходя из определения УМО относительно -подалгебры доказать справедливость Замечания 1.13.

**Задача 1.7.** Пусть – независимые одинаково распределенные случайные величины, Найти .

**Задача 1.8.** Проверить теорему о нормальной корреляции для скалярного случая.

**Задача 1.9.** Доказать, что в случае функции потерь оптимальная байесовская оценка совпадает с медианой условного распределения.

**Задача 1.10.** Доказать истинность формул (1.15) – (1.19).

**Задача 1.11.** Доказать истинность формулы (1.25).