«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Särkkä, S. (2013). Bayesian Filtering and Smoothing (Institute of Mathematical Statistics Textbooks). Cambridge: Cambridge University Press.
2. A. Doucet, A. M. Johansen, A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing: Fifteen years later. OXFORD HANDBOOK OF NONLINEAR FILTERING, 2012.

**Лекция 10. Метод частиц**

1. *Оптимальная нелинейная фильтрация*
2. *Метод Монте-Карло для вычисления интегралов*
3. *Выборка по значимости*
4. *Рекуррентное построение выборки по значимости*
5. *Рекуррентное перестроение выборки по значимости*
6. *Задачи для самостоятельного решения*
7. *Оптимальная нелинейная фильтрация*

Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , -измеримый случайный вектор -согласованные последовательности независимых случайных векторов ( независимы в совокупности). Рассматривается стохастическая динамическая система наблюдения с дискретным временем

Здесь

* (10.1) - уравнение динамики,
* (10. 2) - модель наблюдений,
* – ненаблюдаемое состояние системы; – последовательности детерминированных функций (дискретных сноса и диффузии в динамике); – последовательность случайных векторов – возмущений в динамике; – начальное условие;
* – процесс доступных наблюдений; – последовательности детерминированных функций (аддитивного полезного сигнала и интенсивности шумов); – последовательность ошибок наблюдений.

Предположения о системе наблюдения:

1. Матрицы и являются невырожденными.
2. – последовательность независимых стандартных одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения .
3. – последовательность независимых стандартных одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения .
4. Начальное условие имеет плотность распределения .
5. , и независимы в совокупности.

Пусть - -алгебра, порожденная наблюдениями, полученными на отрезке *[1,t]*.

Задача оптимальной фильтрации состояния – вычислить .

Кратко приведем решение. Оценка состояния (впрочем, УМО любой функции от состояния) выражается через – условная плотность распределения состояния относительно .

1. Начальное условие:

,

и

2. Плотность одношагового прогноза:

3. Условная совместная плотность распределения пары относительно

4. Оценка фильтрации (условная плотность и собственно оценка):

1. *Метод Монте-Карло для вычисления интегралов*

Рассмотрим некоторое обобщение

Если смоделировать случайную выборку : , то можно построить оценку среднего как

Из закона больших чисел (в форме Чебышева) следует, что точность оценки (10.10) имеет порядок порядка , и он не зависит от размерности вектора состояния .

1. *Выборка по значимости*

Рассмотрим для простоты простейший пример байесовской регрессии: приближенном вычислении УМО случайной величины по имеющемуся наблюдению .

Явный вид практически невозможно определить, поэтому смоделировать выборку : для последующего осреднения (10.10) также практически невозможно, и его заменяют *распределением значимости* , для которого

1. легко моделировать выборки,
2. .

Что такое – узнаем позднее.

Таким образом, для вычисления

нужно смоделировать выборку : , и аппроксимировать интеграл осреднением по выборке

где веса определяются формулой

**

**Замечание 10.1**. Формулы (10.10’) и (10.11) все еще не применимы в алгоритме нелинейной фильтрации, т.к. они зависят от плотности .

Таким образом, *алгоритм приближенного вычисления УМО с использованием распределения значимости*, имеет следующий вид.

1. Смоделировать выборку : .
2. Вычислить ненормированные веса

и нормализованные веса

1. Условное среднее вычисляется с помощью приближенной формулы

А условное распределение имеет приближение

1. *Рекуррентное построение выборки по значимости*

**Замечание 10.2**. Алгоритм (10.13) – (10.16) выведен без учета динамики и модели наблюдений. В действительности для учета изменения эволюции во времени распределения состояния , а также включения в процесс оценивания новых наблюдений следует учитывать марковскую природу последовательности .

**Замечание 10.3**. Знак означает «равенство двух функций с точностью до нормировочного множителя».

Пусть на шаге *t* распределение с плотностью аппроксимируется дискретным распределением , т.е.

Воспользуемся марковостью последовательности :

Пусть мы умеем моделировать выборки : , тогда используя те же аргументы, что и в предыдущих выводах, веса можно вычислить, используя следующее отношение

Для получения рекуррентного алгоритма осталось предположить, что распределение значимости также допускает рекуррентное представление:

Тогда верно следующее выражение весов

То есть возможен рекуррентный пересчет весов с помощью следующего соотношения

Таким образом, *алгоритм рекуррентного моделирования частиц и вычисления их весов*, имеет следующий вид.

1. Смоделировать выборку : , положить все веса равными: .
2. На каждом шаге смоделировать выборку : .
3. Вычислить новые веса согласно соотношению

и нормализовать их

Если существует возможность выбора распределения значимости, то удобнее, чтобы оно обладало «марковским» свойством:

1. *Рекуррентное перестроение выборки по значимости*

Основная проблема реализации метода частиц – вырождение выборки, заключающееся в том, что веса почти всех частиц равны или близки к нулю. Для нейтрализации этой проблемы используется *процедура перестроения выборки*.

1. Интерпретировать все веса как вероятности дискретного распределения со множеством возможных значений .
2. Смоделировать новую выборку из распределения .
3. Положить все веса равными между собой .

Идея процедуры рекуррентного перестроения выборки, заключающаяся в замене частиц с малыми весами некоторыми новыми и приводит к *многочастичному фильтру*. Есть два подхода к перестроению выборки: периодическое и адаптивное. В первом случае перестроение выборки происходит каждый *n*-й временной шаг. При периодическом перестроении вычисляется «эффективное число частиц» *neff*, и при его снижении ниже некоторого порога происходит перестроение выборки.

Например, выборка перестраивается, как только

.

**Замечание 10.4**. Для иллюстрации смысла *neff* рассмотрим два предельных случая весов.

1. . В этом случае *neff = 1.*
2. . В этом случае *neff = N.*

Ниже представлен адаптивный алгоритм *рекуррентного перестроения выборки по значимости.*

1. Смоделировать выборку : , положить все веса равными: .
2. На каждом шаге смоделировать выборку : .
3. Вычислить новые веса согласно соотношению

и нормализовать их

1. Вычислить *neff*  по формуле (10.23). Если выполнено условие (10.24), то перестроить выборку и веса с помощью алгоритма a)-c).

Полученный алгоритм позволяет использовать следующую аппроксимацию для условного распределения

и соответствующее УМО в виде

В качестве подходящего распределения значимости рекомендуется использовать

Для системы (10.1), (10.2) формула (10.25) принимает вид

**Замечание 10.5**. Вычисление интегралов в (10.26) может быть выполнено с помощью любого приближенного метода (например, сигма-точечного преобразования, локальной линеаризации, кубатур Гаусса-Эрмита и пр).

Окончательно, многочастичный фильтр вычисляется по следующему алгоритму.

1. Начальное условие
   1. Моделирование выборки частиц:

:

* 1. Вычисление весов:
  2. Вычисление оценки фильтрации:

1. Рекурсия
   1. Моделирование распространения частиц: на предыдущем шаге *t-1* известен набор частиц и весов . Моделируются случайные значения (частицы)
   2. Вычисление весов:

и их нормировка:

* 1. Вычисление оценки фильтрации:
  2. Перестроение выборки по значимости. Вычислить

Если

то смоделировать новую выборку из распределения . Перед следующим шагом 2 положить

**Замечание 10.6**. Примечательно, что метод частиц свелся к решению регрессионной задачи: необходимо найти условное распределение состояния относительно пары . В связи с этим, имеются две относительно самостоятельные вычислительные задачи:

* разработка эффективного («быстрого») алгоритма вычисления (или его близкой аппроксимации) – для быстрой многократной реализации формулы (10.30),
* разработка эффективного («быстрого») алгоритма вычисления (или его близкой аппроксимации) – для быстрой многократной реализации формулы (10.31).

В случае, если система наблюдения (10.1), (10.2) является автономной (правая часть не зависит от *t*), эти задачи можно решить один раз до, собственно, реализации процедуры фильтрации (UT, статистическая линеаризация, локальная линеаризация, кубатуры Гаусса-Эрмита, нейронные сети).

**Замечание 10.7**. Если в качестве распределения значимости выбирать

То соответствующая модификация многочастичного фильтра будет называться *бутстреп-фильтр*.

1. *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 10.1.** Вычислить (10.25) в случае, когда и – стандартные гауссовские плотности, и .

**Задача 10.2.** Выписать явные формулы ((10.27) – (10.36)) для бутстреп-фильтра.

**Задача 10.3.** В условиях задач 4.2 и 5.3 реализовать многочастичный фильтр и бутстреп-фильтр. Сравнить реальные точности (выборочные дисперсии ошибок фильтрации) оптимального фильтра (вычисленного с помощью метода сеток), фильтра Калмана, многочастичного фильтра и бутстреп-фильтра для равного числа узлов сетки и числа частиц *N=100, 10 000, 100 000*. Оценку дисперсий проводить по пучку траекторий объемом *10 000*.