«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Borisov A, Bosov A, Miller B, Miller G. Passive Underwater Target Tracking: Conditionally Minimax Nonlinear Filtering with Bearing-Doppler Observations. *Sensors*. 2020; 20(8):2257. <https://doi.org/10.3390/s20082257>
2. A. V. Borisov, A. V. Bosov and G. B. Miller, "Conditionally-Minimax Nonlinear Filtering for Continuous-Discrete Stochastic Observation Systems: Comparative Study in Target Tracking," *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*, 2019, pp. 2586-2591, doi: 10.1109/CDC40024.2019.9029876.
3. A. Bosov, A. Borisov and K. Semenikhin, Conditionally-Minimax Prediction in Nonlinear Stochastic Systems, IFAC-PapersOnLine, vol. 48, no. 11, pp. 802–807, 2015. DOI:[10.1016/J.IFACOL.2015.09.288](https://doi.org/10.1016/J.IFACOL.2015.09.288)

**Лекция 11. Условно-минимаксная нелинейная фильтрация**

1. *Минимаксное оценивание параметров регрессии*
2. *Условно-минимаксный нелинейный фильтр для дискретно-непрерывных систем наблюдения*
3. *Минимаксное оценивание параметров регрессии*

Дан частично наблюдаемый случайный вектор , где – ненаблюдаемая компонента, – наблюдаемая компонента. Распределение *P* вектора *Q* является неопределенным: известно , а ковариационная матрица неизвестна, но ограничена

Здесь – известные неотрицательно определенные матрицы. Множество всех допустимых распределений *P* обозначим . Функции такие, что

формируют класс допустимых оценивателей . Качество оценивания, доставляемое оценивателем при фиксированном распределении *P* определяется традиционным СК-критерием

**Определение 11.1**. Задача минимаксного оценивания по заключается в нахождении такой оценки , что

**Теорема 11.1**. Минимаксная оценка является линейной

Критерий на множестве имеет седловую точку, т.е.

Гауссовское распределение является наихудшим (наименее благоприятным), и пара ( является одной из седловых точек, поэтому двойное неравенство

верно для любой пары . Оценка имеет гарантированную точность

и равенство выполняется только в том случае, если .

По аналогии с UT, назовем формулу (11.5) условно-минимаксным преобразованием (*Conditionally-Minimax Transform,* *CMT*), а саму оценку – условно минимаксной (CM-оценкой)

*Преимущества предложенной оценки:*

1. Несмещенность минимаксной оценки
2. Возможность строить консервативные аппроксимации ковариационной матрицы ошибки оценки (чем ближе к реальной – тем точнее)
3. Минимаксная оценка по качеству не хуже тривиальной
4. Доказан факт, что расширение класса оценивателей нелинейными функциями наблюдений не повышает качества оценивания (в минимаксной постановке!)

*Недостатки предложенной оценки:*

1. Необходимость знания для CMT.
2. Необходимость использования метода Монте-Карло для определения этих параметров.

**Замечание 11.1**. То, что наихудшим распределением является гауссовское, согласуется с предположениями, используемыми в UT или в статистической линеаризации. Формулы UT и SL могут трактоваться как вычисление формул (11.5), (11.8) с некоторой *фиксированной точностью* (эти методы определяют нужные параметры и лишь с некоторой точностью и не позволяют ее увеличить).

**Замечание 11.2**. По сравнению с UT, CMT имеет следующее преимущество. Рассмотрим систему наблюдения

на одном шаге. Задача оценивания заключается в оценки по . Прежде всего следует отметить, что UT «корректно» можно применять в системе лишь в случае независимости и от состояния, и при гладкости коэффициентов и .

Возьмем, помимо исходного наблюдения некоторое его преобразование , имеющее конечный второй момент, и добавим его к исходным наблюдениям:

С помощью метода Монте-Карло можно оценить моментные характеристики составного вектора *Q’*:

Далее используется формула (11.5):

Очевидно, что качество оценки будет не хуже, чем у оценки, построенной только по наблюдениям .

При этом можно строить консервативные оценки , используя доверительные интервалы для первых и вторых моментов с последующим решением задачи минимаксной оптимизации, либо выборочные моменты, вычисленные по выборке большого объема.

Таким образом, в случае известного совместного распределения можно улучшить оценку по по сравнению с линейной, включая в качестве «псевдонаблюдений» различные нелинейные преобразования исходных наблюдений.

**Пример 11.1**. – случайные координаты цели,

– локационные наблюдения от радаров, расположенных в точках :

– НОРСВ

Сравнивались следующие оценки:

1. Наилучшая линейная оценка по исходным наблюдениям (относится к CM),
2. Линеаризованная оценка по исходным наблюдениям,
3. Линейная оценка по исходным наблюдениям, вычисленная по коэффициентам, полученным по формулам UT,
4. CM-оценка, вычисленная по исходным наблюдениям и псевдонаблюдениям

Выборочные моменты для оценок 1) и 4) вычислялись осреднением по пучку . Рассматривались случаи *M=1,2*,

Качество оценок сравнивалось для следующих сценариев набора радаров и расположения цели:

Результаты оценивания представлены в следующей таблице.



Результаты каждого сценария представлены двумя строками. Первая строка содержит выборочные корни из средних выборочных квадратов ошибок оценок (они вычислялись по пучку объемом (другому, не тому, по которому рассчитывались коэффициенты!)):

Вторая строка содержит аппроксимации соответствующих значений, которые вычисляются по аналитическим формулам, соответствующим SL, UT, CM. По приведенной таблице можно сделать следующие выводы

1. Точность оценивания во всех случаях зависит от расположения цели и количества измерительных средств.
2. При больших расстояниях точности всех оценок совпадают. Аппроксимации ковариационных матриц в методах SL и UT соответствуют истинным значениям (являются консервативными).
3. При средних и малых расстояниях CM-оценки становятся предпочтительными. При этом использование псевдонаблюдений позволяет значительно повысить точность оценивания. Аппроксимации ковариационных матриц в методах SL и UT не соответствуют истинным значениям и не являются консервативными (могут отличаться в разы!). В зависимости от расстояния до цели (при приближении цели к радарам) оценки, построенные по методу SL, «разваливаются» быстрее, чем оценки, построенные по методу UT.
4. *Условно-минимаксный нелинейный фильтр для дискретно-непрерывных систем наблюдения*

**Замечание 11.3**. Вообще говоря, изначально алгоритм CMNF был предложен для решения задачи фильтрации стохастических систем наблюдения с дискретным временем.

Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , -согласованный винеровский процесс , начальное условие . Состояние системы является единственным сильным решением СДС

- гильбертовым случайным процессом (предполагается, что все соответствующие условия, налагаемые на снос и диффузию, выполнены).

Наблюдения регистрируются в дискретные моменты времени и описываются моделью

Последовательность также является гильбертовой; последовательность является -согласованной, - независимы в совокупности. Задача фильтрации заключается в построении оценки состояния по наблюдениям .

*Допустимые фильтры* имеют следующую структуру:

где

– известная *функция базового прогноза*,

– известная *функция преобразования наблюдений*,

– известная *функция базовой коррекции*.

Условия на (11.9), (11.10) гарантируют, что блочный вектор имеет конечные среднее и ковариационную матрицу:

*Задача условно-минимаксной нелинейной фильтрации* заключается в нахождении

где – множество вероятностных распределений *2n+l*-мерных случайных векторов с известным средним ^ и неизвестной ковариационной матрицей , ограниченной сверху: .

**Теорема 11.2**. CMNF алгоритм имеет двухшаговую форму «прогноз-коррекция». Прогноз и верхняя граница ковариации его ошибки равны

(11.13)

Скорректированная оценка и верхняя граница ковариации ее ошибки равны

(11.14)

где

(11.15)

- модифицированная коррекция, и

(11.16)

Итак, алгоритм CMNF имеет следующую структуру

1. ***Начальное условие***. Моделируется *выборка* *синтетического состояния* Вычисляются

– *целевая оценка фильтрации* в начальный момент времени, – ковариационная матрица ошибки оценки фильтрации в начальный момент времени. Формируется *выборка синтетических оценок фильтрации* в начальный момент времени :

1. ***Шаг прогноза***. Пусть на предыдущем шаге *k-1* имеются оценка состояния выборки синтетических состояний и синтетических оценок фильтрации .
   1. Методом Эйлера-Маруямы с малым шагом смоделировать решения СДС (11.9) с начальными условиями тем самым вычислить значения , из которых сформировать выборку синтетического состояния в момент времени .
   2. По выборке с помощью формулы (11.10) построить *выборку синтетических наблюдений* .
   3. Вычислить выборки *синтетических базовых прогнозов* и *синтетических базовых коррекций* .
   4. По пучку синтетических объектов

построить выборочные моменты , (11.12) (или верхнюю границу ).

* 1. По *целевой оценке фильтрации* в предыдущий момент времени и *действительным наблюдениям* , полученным в момент времени , вычислить *целевой базовый прогноз* и *целевую базовую коррекцию* .
  2. Модифицировать выборку синтетических прогнозов по формуле (11.13), получить выборку *синтетических модифицированных прогнозов* . Модифицировать выборку синтетических базовых коррекций по формуле (11.15), получить пучок *синтетических модифицированных коррекций* .
  3. По формуле (11.13) модифицировать целевой базовый прогноз , получив *целевой модифицированный прогноз* , по формуле (11.15) модифицировать целевую базовую коррекцию ,  получив *целевую модифицированную коррекцию* .

1. ***Шаг коррекции***.
   1. По выборке синтетических модифицированных объектов

по формуле (11.15) построить выборку синтетических оценок фильтрации .

* 1. По выборке синтетических модифицированных объектов

по формуле (11.15) построить оценку состояния и ковариационную матрицу ее ошибки (или оценку сверху ).

*Преимущества CMNF*

1. Несмещенность оценок фильтрации
2. Полученные оценки ковариаций ошибок оценок адекватны истинным параметрам
3. Возможность подбора функций базового прогноза
4. Возможность подбора функций преобразования наблюдений и базовой коррекции

*Недостатки CMNF*

1. Необходимость использования ресурсозатратного метода Монте-Карло.

**Замечание 11.4**. Одна из рекомендаций по выбору базового прогноза – прогноз в силу системы (нужно решить задачу Коши для системы ОДУ на отрезке времени ):

**Замечание 11.5**. Одна из рекомендаций по выбору базовой коррекции – коррекция в силу системы: