«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Физматлит, 1974.
4. Г. Крамер, М. Лидбеттер. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.
5. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Физматлит, 1986.

**Лекция 2. Винеровский процесс.**

**Интеграл Ито по винеровскому процессу.**

1. *Общие сведения о случайных процессах*
2. *Случайные процессы с независимыми приращениями*
3. *Свойства винеровского процесса*
4. *Интеграл Ито по винеровскому процессу*
5. *Задачи для самостоятельного решения*
6. *Общие сведения о случайных процессах*

**Определение 2.1**. Пусть дано полное вероятностное пространство . Семейство случайных величин ( - параметр), называется *случайной функцией*. Если, исходя из практической постановки – время, то называется *случайным процессом*.

Если – континуальное множество (отрезок, луч, прямая), то называют *случайным процессом с непрерывным временем*, Если – конечное или счетное множество (набор числе, натуральные числа, целые числа), то называют *случайным процессом с дискретным временем (случайной последовательностью)*.

**Определение 2.2**. Пусть дано полное вероятностное пространство и неубывающее семейство *-*подалгебр Четверка называется *базисом с фильтрацией*.

В случае, если – отрезок, луч или прямая, называют *потоком -подалгебр*.

**Определение 2.3**. Если для потока выполняется условие: , то поток называется *непрерывным справа*.

**Определение 2.4**. Пусть – базис с фильтрацией, – случайный процесс (на данном вероятностном пространстве). Если для любого случайная величина - -измерима, то процесс называется *-согласованным*.

**Замечание 2.1**. Неубывающее семейство *-*подалгебр представляет собой «модель информации, содержащейся в случайных явлениях», которая со временем не убывает, а только накапливается. Если случайный процесс просто задан на вероятностном пространстве , то для любого случайная величина – -измерима. Если же процесс *-*согласован (см. Определение 2.4), то - -измерима, т.е. измерима относительно более бедной -подалгебры.

**Определение 2.5**. Пусть – вероятностное пространство, – некоторый случайный процесс. Семейство (поток) : называется *естественным семейством -подалгебр, порождённым процессом* .

1. *Случайные процессы с независимыми приращениями*

**Определение 2.6**. Приращением случайного процесса на промежутке *(s,t]*, называется случайная величина

Без потери общности будем считать, что Также для сокращения записи (если это не важно) будем опускать зависимость от .

**Определение 2.7.** Случайный процесс называется *случайным процессом с независимыми приращениями*, если для любых моментов случайные величины независимы в совокупности.

**Определение 2.8**. Случайный процесс с независимыми приращениями называется *однородным*, если для любых *t >0* и *s>0* распределение совпадает с распределением .

**Замечание 2.2**. Следует помнить, что случайные величины могут быть попарно независимы, но зависимы в совокупности. Свойство независимости в совокупности более сильное, чем свойство попарной независимости.

**Определение 2.9**. Пусть – семейство вероятностных мер на , параметризованных временем . Тогда семейство соответствующих характеристических функций определяется формулой

**Теорема 2.1**.





 (10.3)



**Замечание 2.3**. Если случайный процесс с независимыми приращениями является гильбертовым (имеет моменты до второго порядка включительно), то он автоматически является случайным процессом с ортогональными приращениями (обратное утверждение неверно). Есть утверждение о том, что гильбертов случайный процесс с независимыми приращениями может быть лишь некоторой линейной комбинацией винеровского и пуассоновского процессов.

1. *Определение и свойства винеровского процесса*

**Определение 2.10**. Случайный процесс называется винеровским процессом, если:

1. – однородный процесс с независимыми приращениями;
2. – гауссовский процесс.

**Замечание 2.4**. Из определения следует, что при любом *t > 0* сечение имеет распределение , а приращение – распределение , где – гауссовское распределение со средним и дисперсией . Параметр (или ) называют *параметром (или интенсивностью)* винеровского процесса. Если , то винеровский процесс называют стандартным.

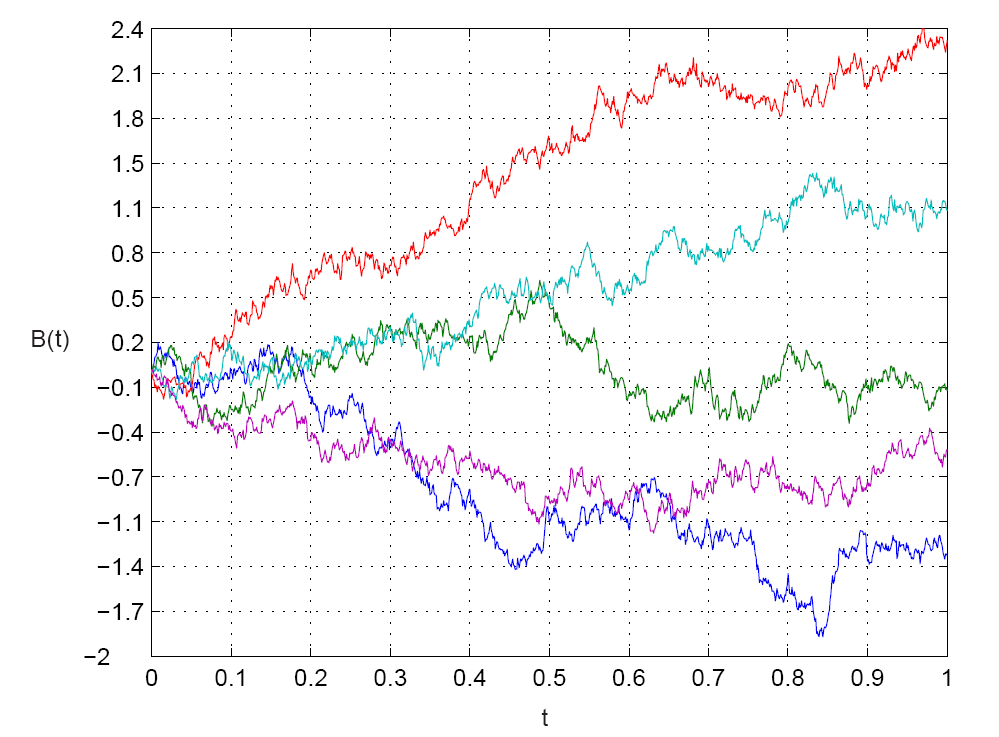
**Замечание 2.5**. В некоторых монографиях винеровский процесс всегда является стандартным (т.е. для винеровского процесса всегда ).

**Замечание 2.6**. Винеровский процесс иногда называют *броуновским движением*.

**Замечание 2.7**. В силу гауссовости и однородности приращения винеровского процесса имеют характеристическую функцию

и поэтому для любых верно равенство

т.е. выполнено условие (2.3) и условия Теоремы 2.1 выполняются для винеровского процесса.



*Свойства винеровского процесса*

**Определение 2.11**. Пусть - -согласованный процесс на . Процесс называется *марковским* относительно потока , если для любого борелевского множества и любых моментов выполнено равенство

**Замечание 2.8**. Марковское свойство можно описать следующим образом: процесс обладает марковским свойством, если при фиксированном настоящем будущее не зависит от прошлого.

1. Винеровский процесс обладает марковским свойством.
2. Почти все траектории винеровского процесса непрерывны.
3. (*теорема Пэли-Винера-Зигмунда*). Почти все траектории винеровского процесса *не дифференцируемы* ни в одной точке.
4. С вероятностью 1 на любом конечном отрезке *[s,t]* траектория винеровского процесса имеет неограниченную вариацию.
5. Винеровский процесс описывает симметричное блуждание частицы на положительной полуоси: для любого *t>0* Более того, если – случайный момент первого достижения траекторией уровня , то дальнейшее блуждание также симметрично:
6. Пусть - ортонормированный базис гильбертова пространства , - гауссовский стандартный дискретный белый шум (НОРСВ с распределением ). Тогда процесс

При этом сходимость понимается в СК-смысле.

1. Пусть *x > 0* – заданное число. Пусть - случайный момент первого достижения траекторией уровня , тогда функция распределения определяется формулой

а плотность распределения

**Замечание 2.9**. , т.е. траектория винеровского процесса обязательно пересечет любой сколь угодно высокий барьер *x*, при этом .

1. *«Принцип отражения»*. Пусть – момент первого пересечения винеровским процессом положительного уровня *x*. Построим «отраженный» процесс



Тогда процесс *Z(t)* является винеровским с той же интенсивностью.

1. *Свойство самоподобия*. Если процесс *w(t)* является стандартным винеровским, то *w(at)* – винеровский с интенсивностью *a*.
2. Совместное распределение величин *w(t)* и :

Следствие (Башелье). При всех

1. *«Закон повторного логарифма»* (Хинчин). С вероятностью 1

где



1. *«Локальный закон повторного логарифма»* (Леви). С вероятностью 1
2. Рассмотрим последовательность вложенных двоичных разбиений отрезка *[0,t]*: Тогда для стандартного винеровского процесса

Докажем это свойство. Для компактности выкладок используем следующие обозначения:

Тогда

Из этого можно сделать вывод, что при в СК-смысле. Однако, стремится достаточно быстро, что дает возможность применить следующую теорему.

**Теорема 2.2**. Пусть – последовательность случайных величин. Для сильной сходимости к некоторой случайной величине достаточно сходимости ряда

для некоторого .

В нашей задаче .

1. Почти все траектории винеровского процесса являются гёльдеровскими с показателем , т.е. на каждом конечном временном интервале *[a,b]*

**

1. С вероятностью 1 , т.е. условие Гельдера порядка ½ не выполняется в 0. В то же время условие Гельдера не выполняется ни в одной точке для .
2. обладает мартингальным свойством, т.е. для любых Р-п.н. верно равенство
3. (*Один из способов моделирования винеровского процесса*). Пусть *w(t)* – стандартный винеровский процесс, и *[a,b]* – произвольный отрезок. Тогда для любой точки верно представление

где

*X* – стандартная гауссовская случайная величина, не зависящая от ,

1. *Интеграл Ито по винеровскому процессу*

Легко видеть, что потраекторно построить интеграл нельзя из-за недифференцируемости траекторий .

Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , и согласованный с ним -согласованный (без ограничения общности стандартный) винеровский процесс *w(t)*.

**Определение 2.12**. Назовем – пространство всех -согласованных процессов на таких, что

Можно показать, что – банахово пространство с нормой .

**Определение 2.13**. Подмножество пространства содержит все процессы вида

В формуле (2.9) - некоторое натуральное число, , – случайные величины, такие, что - -измерима.

Можно показать, что всюду плотно в .

**Определение 2.14**. Пусть , тогда стохастический интеграл Ито функции по винеровскому процессу равен

Так как всюду плотно в , то для любой функции существует последовательность из , сходящаяся к .

**Определение 2.15**. Пусть и последовательность такова, что . Тогда существует СК-предел

называемый *стохастическим интегралом Ито функции по винеровскому процессу .*

**Определение 2.16**.

*Свойства интеграла Ито*

1. Р-п.н.
2. .
3. - -согласованный мартингал, т.е. для любых

Также

**Замечание 2.10**. Свойств стохастического интеграла Ито гораздо больше. Их можно посмотреть в монографии *Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Физматлит, 1986.*

**Замечание 2.11**. В случае, если интегрируемый процесс имеет непрерывные траектории, его «простую» аппроксимацию строить легко

в этом случае

Далее для (2.13) рассматривается предельный переход при и для таких разбиений, что .

Формула (2.13) представляет собой «формулу левых прямоугольников» численного интегрирования, или один из вариантов интегральной суммы Дарбу. Если бы была бы детерминированной дифференцируемой функцией, вместо аппроксимации можно было бы рассматривать

* сумму Дарбу, взятую в произвольных точках
* «схему трапеций»

и т.д. Однако, эти формулы не подходят для вычисления стохастического интеграла Ито.

**Определение 2.17**.

называется *стохастическим -интегралом*. Частный случай называется *интегралом Стратоновича (Стратоновича-Фиска)* и обозначается .

**Пример 2.1**. Убедиться, что

*Решение:*

Убедимся в том, что данные интегралы имеют, как минимум, разное среднее. Будем анализировать поведение «допредельных» аппроксимаций (построенных по равномерной сетке с шагом *h*)

и, далее, сделаем вывод о предельном предельном переходе.

В силу независимости приращений винеровского процесса

и (сравнить со свойством 2) ). В то же время

и . Действительно, средние значения интегралов Ито и Стратоновича – разные.

1. *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 2.1.** Пусть – вероятностное пространство, – некоторый случайный процесс. Доказать, что - -согласован.

**Задача 2.2.** Для примера 1.4 (см. Лекцию 1) написать программу, реализующую для различных параметров *n, a, b, p* моделирование случайного вектора *X*, наблюдения *Y* и оптимальной оценки . По выборке объемом *N= 10 000* (построить график выборки на оси для визуального контроля) вычислить выборочное среднее ошибки оценки (контролировать его малость) и выборочную ковариационную матрицу ее ошибки. Исследовать поведение данной ковариационной матрицы при варьировании параметров *a, b, p*: одинаковые/разные компоненты вектора *a*, одинаковые/разные компоненты вектора *b*, большие/малые компоненты вектора *a*, большие/малые компоненты вектора *b.*

**Задача 2.3.** На отрезке времени *[0,1]* смоделировать 10 траекторий стандартного винеровского процесса. Вывести эти траектории на одном графике (шаг дискретизации по времени 0,001). Для моделирования использовать:

А) Свойство 6) винеровского процесса, ограничив бесконечный ряд числом 1000.

Б) Свойство независимости приращений винеровского процесса.

Для одной траектории винеровского процесса, моделируемой с помощью свойства 6) вывести на общий график аппроксимации, полученные с помощью конечного ряда порядка 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

Смоделировать одну траекторию стандартного винеровского процесса на *[0,1]* с помощью свойства 17). Используя двоичное разбиение отрезка построить приближения одной и той же траектории процесса (ломаные линии) для 24, 26, 28 и 210 точек.

**Задача 2.4.** На отрезке времени *[0,1]* для стандартного винеровского процесса численно проверить выполнение свойства 13), выбирая *n=10, 20, 30*.

**Задача 2.5.** Для одной и той же траектории стандартного винеровского процесса вычислить приближенно и (шаг разбиения *h = 0,000001*). Сравнить первую аппроксимацию со значением , а вторую аппроксимацию – с .