«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Физматлит, 1974.
2. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Физматлит, 1986.
3. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Физматлит, 1972.
4. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях параметров. М.: Физматлит, 1969.
5. Каллианпур Г. Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987.
6. Kloeden, P. E., Platen, E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. NY: Springer, 1992.

**Лекция 3. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения**

1. *Процессы Ито. Диффузионные процессы. Формула Ито*
2. *СДУ Ито: определение сильного решения задачи Коши, теорема существования и единственности решения*
3. *Линейные СДУ: явный вид решения, свойства, уравнения моментов. Векторный случай*
4. *«Уравнение Самуэльсона»: явный вид решения, свойства, уравнения моментов.*
5. *Общие сведения о методах численного решения СДУ. Метод Эйлера численного решения СДУ*
6. *Задачи для самостоятельного решения*
7. *Процессы Ито. Диффузионные процессы. Формула Ито*

**Определение 3.1**. Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , -измеримую случайную величину -согласованный (без ограничения общности стандартный) винеровский процесс , а также -согласованные процессы : Случайный процесс

называется *процессом Ито*. Функция – снос (дрейф), – диффузия.

Для более краткой записи

И говорят, что *процесс имеет стохастический дифференциал* .

**Замечание 3.1**. Смысл (3.1): первое слагаемое – начальное условие, второе слагаемое – процесс с Р-п.н. (локальной) ограниченной вариацией, третье слагаемое – стохастический интеграл Ито. Второй интеграл рассматривается в смысле СК-сходимости. В общем случае условия на можно ослабить (см. [1]).

**Замечание 3.2**. В отличие от «классического дифференциала» из курса математического анализа, стохастический дифференциал – не более чем обозначение, сокращенная запись соответствующего интегрального соотношения!

**Замечание 3.3**. Ниже для простоты будем считать, что – непрерывны *по* t.

**Определение 3.2**. Процесс Ито (3.1) называется *процессом диффузионного типа по отношению к винеровскому процессу* , если функции в (3.1) являются – измеримыми почти везде на .

**Лемма 3.1**. Пусть – процесс Ито, тогда существуют такие измеримые по паре функционалы такие, что

Таким образом, диффузионный процесс можно записать в виде

Однако для краткости пишут

**Замечание 3.4**. Дрейф и диффузия имеют следующий физический смысл. Пусть – координата микрочастицы, которая движется в некотором макропотоке. Ее приращение координаты складывается из двух частей: движения с потоком (дрейф) и движение внутри потока (диффузия). Зафиксируем некоторый момент , и будем считать, что отрезок траектории доступен нам для наблюдения. Тогда приращение траектории на малом отрезке времени имеет следующее условное распределение относительно

**Замечание 3.5**. Известна классическая формула дифференцирования сложной функции: если – дифференцируемая функция, и – функция, дифференцируемая по обоим своим аргументам, то

т.е.

А как изменится формула, если вместо дифференцируемой функции подставить процесс Ито ,допускающий стохастический дифференциал (3.1’)? Для иллюстрации отличий рассмотрим следующий пример.

**Пример 3.1**. Пусть

Где все ограничены ().

1. Найти область сходимости ряда (3.3)
2. Пусть . Убедиться в том, что – гильбертова случайная величина.
3. Для малых значений представить в виде

Где такова, что

. (3.5)

*Решение:*

Зафиксируем некоторое и рассмотрим поведение остатка ряда :

Поэтому ряд (3.4) сходится на всей числовой оси, т.е. область определения функции – вся числовая ось.

Действуя аналогично, можно показать, что , а при . Отсюда следует, что .

Далее,

Легко проверить, что , поэтому

Для некоторой константы , поэтому . Значит,

Из построения функции *f* следует, что , и (3.6) может быть переписана в виде

где понимается в смысле (3.5). Таким образом мы видим, что для получения приближения с точностью до нужно учитывать не только слагаемое ряда, линейное по , но и крадратичное слагаемое.

**Теорема 3.1**. (*Формула замены переменных Ито*). Пусть функция непрерывна и имеет непрерывные производные , а процесс допускает стохастический дифференциал (3.1’). Тогда процесс также имеет стохастический дифференциал, определяемый формулой

**Пример 3.2**. Найдем стохастический дифференциал процесса .

*Решение:*

Это будет частным случаем формулы (3.7) для т.е. , и . Тогда

или в интегральной форме

Отсюда, кстати, следует, что

(Сравнить с результатом Задачи 2.5).

1. *СДУ Ито: определение сильного решения задачи Коши, теорема существования и единственности решения*

**Определение 3.3**. Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , -согласованный) винеровский процесс , – измеримое пространство непрерывных на функций с -алгеброй - -алгебра цилиндрических множеств, и – некоторые детерминированные функции

- - измеримое начальное условие. Говорят, что *Р*-п.н. непрерывный случайный процесс является сильным решением СДУ

если - - согласованный процесс, и с вероятностью 1 для всех выполняется равенство

Сильное решение называется единственным, если для любых двух сильных решений и следует, что (процессы и *неотличимы*).

Иногда (3.9) также записывают в символической форме

Где - обобщенный случайный процесс стандартного гауссовского белого шума.

**Теорема 3.2**. Пусть функции и

1. удовлетворяют условию Липшица:
2. растут не быстрее, чем линейно

тогда (3.10) на имеет единственное сильное решение.

**Замечание 3.6**. Известно, что для существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

(3.12)

так же необходимы липшицевость и скорость роста, не более линейного. При ослаблении условий (локальная липшицевость, полиномиальная скорость роста) у (3.12) существует локальное решение (на некотором интервале ). Аналогичная ситуация имеет место и со СДУ: решение (3.9) становится локальным, т.е. существует на , где – некоторый марковский момент относительно .

**Замечание 3.7**. Как и в случае ОДУ, теорема существования и единственности сильного решения доказывается с помощью метода последовательных приближений (Ито-) Пикара: показывается, что некоторая степень соответствующего преобразования является сжимающим отображением.

*Свойства сильных решений СДУ*

1. Решение (3.9) – марковский процесс с переходной функцией , где – решение уравнения

если то – однородная, т.е. .

1. Существует постоянная такая, что
2. Если то существует такое , что
3. Свойство «склейки»: если – единственное сильное решение

и – единственное сильное решение

То неотличимы на , т.е. .

**Замечание 3.8**. Все утверждения данного раздела могут быть перенесены на стохастические дифференциальные системы (системы СДУ).

Как и в случае с ОДУ, можно определить и СДУ порядка большего, чем 1:

СДУ высокого порядка может быть сведено к системе СДУ первого порядка:

где

**Замечание 3.9**. Условия Теоремы 3.2 слишком жесткие. Можно ли предложить какие-либо достаточные условия, не столь обременительные?

**Определение 3.4**. Пусть – некоторая достаточно гладкая функция. Определим следующий дифференциальный оператор :

**Теорема 3.3**. Пусть функции и непрерывны по обоим переменным, в каждой ограниченной области выполнено условие (3.10) (т.е. имеется локальная липшицевость) и существует неотрицательная достаточно гладкая функция , для которой

Тогда для (3.9) существует единственное сильное решение с траекториями, непрерывными с вероятностью 1. Помимо этого, выполняется неравенство

Иногда полезно знать, когда траектория диффузионного процесса не выходит из некоторого открытого множества за любое конечное время.

**Теорема 3.4**. Пусть имеется набор расширяющихся открытых ограниченных множеств Пусть функции и непрерывны по обоим переменным, в каждой области выполнено условие (3.10) (т.е. имеется локальная липшицевость) и существует неотрицательная достаточно гладкая функция , для которой

Тогда для (3.9) существует единственное сильное решение с траекториями, непрерывными с вероятностью 1, если только . Помимо этого, имеет место соотношение .

**Замечание 3.10***.* Для каждого СДУ выбор подходящей функции *V* – искусство!

Доказательства Теорем 3.3 и 3.4 можно найти в книгах

*Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Физматлит, 1972.*

*Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях параметров. М.: Физматлит, 1969.*

1. *Линейные СДУ: явный вид решения, свойства, уравнения моментов.*

*Векторный случай*

**Определение 3.5**. СДУ

называется *линейным*. Если то процесс носит название *процесса Орнштейна-Уленбека* (иногда для такого названия требуется стационарность процесса).

*Свойства решения линейного СДУ*

1. Решением является процесс

Где – функция Коши – решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения (в случае СДУ) или системы ОДУ (в случае СДС):

Если (3.13) – СДУ, то .

Если (3.13) – СДC и , то

1. Если имеет гауссовское распределение, то весь процесс – гауссовский.
2. Пусть - моментные характеристики процесса: функция математического ожидания и дисперсии. Она являются решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

(3.20) и (3.21) называются *уравнениями моментов*. Выведем их, используя свойства стохастических интегралов и формулу Ито. Рассмотрим (3.18) и возьмем математическое ожидание от обеих частей этой формулы:

и, дифференцируя обе части (3.20’) по *t*, получим (3.20).

Далее, вычтем (3.20’) из (3.18) для получения СДУ для центрированного процесса :

И построим СДУ для процесса с помощью формулы Ито:

Беря математическое ожидание от левой и правой части и дифференцируя их по *t*, получим (3.21).

**Замечание 3.11**. С учетом будущего решения домашней задачи 3.2 можно сделать вывод, что распределение гауссовского процесса, являющегося решением линейного СДУ полностью определяется совокупностью решений ОДУ – уравнений моментов.

**Замечание 3.12**. Линейные СДУ также часто применяются для моделирования реальных явлений, как и линейные ОДУ. Области приложения: механика, радиотехника, экономика. Помимо этого, реальные нелинейные системы аппроксимируются в окрестности некоторых опорных траекторий линейными (т.е. линеаризуются). Тогда эти линеаризованные системы называются уравнениями вариаций.

**Замечание 3.13**. В векторном случае (для СДС) уравнение (3.14) для среднего остается таким же, а уравнение автоковариационной матрицы будет выглядеть следующим образом (с учетом того, что ):

1. *Уравнение Самуэльсона: явный вид решения, свойства, уравнения моментов.*

**Определение 3.6**. СДУ

называется *линейным уравнением с мультипликативным шумом*.

Решением данного уравнения является процесс

**Замечание 3.14**. Иногда это уравнение называют «уравнением Самуэльсона», хотя это уравнение, определяющее процесс с распределением – моделью Самуэльсона. В статье

*Samuelson, P.A. (1965) Rational Theory of Warrant Pricing. Industrial Management Review, 6, 13-31*

были описаны свойства распределения случайного процесса эволюции цены некоторого финансового инструмента. Оказывается, решение как раз и обладает распределением подобного рода.

Пусть – текущая цена финансового инструмента, – его относительное изменение (индекс) цены на отрезке *[u,u+t]*. На малом отрезке времени имеет место приближенное равенство . Будем считать, что приращения независимы на разных временных отрезках, и имеют приближенно нормальное распределение со средним и дисперсией , где – текущая процентная ставка (*continuous interest rate*), – волатильность (*volatility*). Таким образом, +, где – стандартная гауссовская величина. Обозначим и, исходя, из предыдущих рассуждений, получим СДУ для :

Далее, применим формулу Ито для

- частный случай уравнения (3.23).

Как и в случае линейных стохастических систем, для (3.23) можно построить уравнения моментов, т.е. ОДУ, описывающие эволюцию во времени функции среднего и дисперсии . Легко видеть, что ОДУ для среднего будет таким же, как у линейного СДУ.

Далее, уравнение центрированного процесса имеет вид

Тогда формула Ито для имеет вид

Беря математическое ожидание от левой и правой частей этого равенства и дифференцируя по *t*, получаем

1. *Общие сведения о методах численного решения СДУ.*

*Метод Эйлера численного решения СДУ*

Большинство СДУ не могут быть решены аналитически, для них следует строить некоторые численные аппроксимации.

Рассмотрим процесс , являющийся единственным сильным решением уравнения

на последовательности сеток равномерных .

Будем рассматривать численные аппроксимации значений процесса в точках сетки. Аппроксимации представляют собой следующие рекуррентные соотношения:

**Определение 3.7**. Схема называется *сильной аппроксимацией решения* , если выполняется

Если , для достаточно малых , то говорят, что *аппроксимация сходится к истинному решению сильно с порядком* . Иногда говорят, что схема обеспечивает глобальный порядок точности .

**Определение 3.8**. Схема

называется *схемой Эйлера (Эйлера-Маруямы).*

**Теорема 3.5**. Схема Эйлера-Маруямы обеспечивает сильную аппроксимацию решения СДУ (3.9) с глобальным порядком точности .

**Замечание 3.15**. Схема Эйлера-Маруямы полностью повторяет схему решения ОДУ (если -  неслучайные, и – гладкая функция). Тем не менее, в детерминированном случае глобальный порядок точности выше: .

**Замечание 3.16**. Схема Эйлера-Маруямы используется для компьютерного моделирования решений СДУ:

где – независимые одинаково распределенные величины со стандартным гаусовским распределением.

1. *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 3.1.** Вывести уравнения моментов решения систем линейных стохастических дифференциальных уравнений.

**Задача 3.2.** Вывести уравнение автоковариационной функции решения линейного стохастического дифференциального уравнения (3.12).

**Задача 3.3.** В различных финансовых и экономических приложениях используется *mean-reversion model*:

1. При известных параметрах начального условия найти установившиеся среднее и дисперсию.
2. При каких моментах начального условия уравнение описывает стационарный в широком смысле случайный процесс?
3. Пусть *a = 1, b=2,* . Методом Эйлера-Маруямы c шагом *h=0,000001* смоделировать и вывести на один график 10 различных траекторий . Повторить это задание для *a = 0,001, b=0,002,* .
4. Пусть *a = 1, b=2,* . Методом Эйлера-Маруямы c шагом *h=0,0001* смоделировать 10 000 траекторий. По этому пучку построить выборочные оценки функции математического ожидания и дисперсии. Вывести графики этих оценок и их теоретических значений.

**Задача 3.4.** Рассмотрим уравнение Самуэльсона (3.22) с параметрами *a = 1, b=2,* .

1. Методом Эйлера-Маруямы c шагом *h=0,000001* смоделировать и вывести на один график 10 различных траекторий .
2. Методом Эйлера-Маруямы c шагом *h=0,0001* смоделировать 10 000 траекторий. По этому пучку построить выборочные оценки функции математического ожидания и дисперсии. Вывести графики этих оценок и их теоретических значений.
3. Решить задачи 1) и 2) для уравнения (3.6) с параметрами *a = -1, b=2,* .

**Задача 3.5.** Рассмотрим функционирование масляно-пружинного амортизатора массой *m*, пружиной с коэффициентом упругости *k* и демпфирующим коэффициентом *c* под действием переменной силы *F(t)*: *X(t) –* сжатие/растяжение амортизатора в момент времени *t*

Будем считать, что *F(t)* – процесс, описываемый mean-reversion model (3.23). Считая *a = 1, b=2,* с шагом *h=0,001* смоделировать методом Эйлера-Маруямы 10 траекторий вместе с графиком невозмущенного движения (*b=0*).

**Задача 3.6.** Рассмотрим СДУ

С помощью Теоремы 3.3 доказать существование и единственность сильного решения данного СДУ.