«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Физматлит, 1974.
2. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Физматлит, 1972.

**Лекция 4. Стохастические системы наблюдения с дискретным временем. Задачи оценивания. Решение задачи оптимальной фильтрации**

1. *Марковские процессы с дискретным временем, дискретная диффузия. Свойства.*
2. *Стохастические динамические системы наблюдения с дискретным временем. Задачи оптимального оценивания.*
3. *Решение задачи оптимальной фильтрации состояний систем с дискретным временем.*
4. *Задачи для самостоятельного решения.*
5. *Марковские процессы с дискретным временем, дискретная диффузия. Свойства*

**Определение 4.1**. Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , -измеримую случайную величину -согласованную последовательность , а также борелевскую функцию . Случайная последовательность

называется *рекуррентной стохастической последовательностью*.

**Замечание 4.1**. Пусть – стохастическая последовательность

Легко проверить, что для всех   справедливо тождество

Это свойство аналогично свойству 4) («склейка») решений СДУ (см. предыдущую лекцию).

**Теорема 4.1**. Пусть и все сечения независимы в совокупности. Тогда последовательность является марковской. Ее переходная функция на *t*-м шаге равна

**Определение 4.2**. Линейный оператор

называется *производящим* *оператором*.

**Замечание 4.2**. можно интерпретировать как среднее приращение функции на шаге .

**Теорема 4.2**. Пусть – такая марковская последовательность (4.1), что – интегрируемая случайная величина. Тогда

**Теорема 4.3**. Пусть существует неотрицательная в области функция , для которой в этой области, где { – последовательность, удовлетворяющая условиям , . Тогда последовательность выходит из за конечное время с вероятностью 1.

**Определение 4.3**. Пусть , Функция , если она неотрицательна и при всех для некоторого выполнено

**Теорема 4.4**. Пусть существует и множество , для которых при ,

причем { – последовательность, удовлетворяющая условиям , . Тогда

**Определение 4.4**. Частный случай рекуррентной марковской стохастической последовательности (4.1)

где – последовательность таких независимых в совокупности случайных величин, что , а функции *a* и *b* растут по *x* не быстрее, чем линейно, называется *дискретной диффузией*.

*Свойства дискретной диффузии*

1. Дискретная диффузия – гильбертова стохастическая последовательность, т.е. имеет моменты до 2-го включительно.
2. Если дополнительно для любых *t*, то для любых *t.*
3. Смысл коэффициентов *a* и *b*:

**Замечание 4.3**. Все представленные выше определения, свойства и утверждения очевидным образом обобщаются на случай векторных стохастических последовательностей.

**Замечание 4.4**. Далее для компактности записи зависимость функций от времени t будет перенесено в нижний индекс, а зависимость от будет опущена.

1. *Стохастические динамические системы наблюдения с дискретным временем.*

*Задачи оптимального оценивания*

**Определение 4.5**. Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , -измеримый случайный вектор -согласованные последовательности независимых случайных векторов ( независимы в совокупности). Пара марковских рекуррентных стохастических последовательностей

называется *стохастической динамической системой наблюдения с дискретным временем.* Здесь

* (4.11) - уравнение динамики,
* (4.12) - модель наблюдений,
* – ненаблюдаемое состояние системы; – последовательности детерминированных функций (дискретных сноса и диффузии в динамике); – последовательность случайных векторов – возмущений в динамике; – начальное условие;
* – процесс доступных наблюдений; – последовательности детерминированных функций (аддитивного полезного сигнала и интенсивности шумов); – последовательность ошибок наблюдений.

**Определение 4.6**. Пусть - -алгебра, порожденная наблюдениями, полученными на отрезке *[1,T]*.

1. Задача нахождения при *t=T* называется *задачей оптимальной нелинейной фильтрации*.
2. Задача нахождения при *t<T* называется задачей *оптимальной нелинейной интерполяции*. Если *T –* фиксированный момент, а оценки нужно найти для всех *t* из *[1,T],* то это – *задача обратной интерполяции (сглаживания на фиксированном интервале наблюдений)*. Если *t –* фиксированный момент, а оценки нужно найти для всех *T>t,* то это – *задача прямой интерполяции (сглаживания в фиксированной точке)*. Если *T=t+s* с некоторым фиксированным *s>0,* то это – *задача сглаживания с фиксированным запаздыванием s*.
3. Задача нахождения при *t>T* называется задачей *оптимальной нелинейной экстраполяции (прогнозирования)*. Если *t –* фиксированный момент, а оценки нужно найти для всех *T* из *[1,t],* то это – *задача прогнозирования в фиксированной точке*. Если *T –* фиксированный момент, а оценки нужно найти для всех *t>T,* то это – *задача прогнозирования по фиксированному набору наблюдений*. Если *t=T+s* с некоторым фиксированным *s>0,* то это – *задача прогнозирования с фиксированным шагом s*.

**Замечание 4.5**. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном задачи оптимальной фильтрации (и частично обратной интерполяции).

**Замечание 4.6**. Определенные выше задачи оценивания используют фундаментальное свойство УМО – быть решением задачи (абсолютно) оптимального оценивания:

uде – множество -измеримых функций с конечным вторым моментом.

Если решается задача условной оптимизации

где – множество линейных (аффинных) оценок вида то результат решения называется *СК-оптимальной линейной оценкой фильтрации состояния* .

**Определение 4.7**. Оценка далее в изложении называется *тривиальной*. Название объясняется, во-первых, тем, что безусловное математическое ожидание совпадает с условным относительно тривиальной сигма-алгебры, а, во-вторых, тривиальным использованием имеющихся наблюдений (попросту неиспользованием).

**Замечание 4.7**. Тривиальная оценка часто используется при отладке и верификации корректной работы программного обеспечения, реализующего какой-либо алгоритм фильтрации (может быть и неоптимальной). Если СК-ошибка предлагаемой оценки больше СК-ошибка тривиальной оценки (т.е. дисперсии или следа ковариационной матрицы состояния ), то либо предлагаемая оценка плохая, либо имеется ошибка в программе.

1. *Решение задачи оптимальной фильтрации состояний систем*

*с дискретным временем*

Выведем уравнения оптимальной фильтрации при некоторых дополнительных предположениях.

1. Матрицы и являются невырожденными.
2. – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения .
3. – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения .
4. Начальное условие имеет плотность распределения .
5. , и независимы в совокупности.

Вывод рекуррентных соотношений фильтрации основан на свойстве условной плотности распределения:

Вывод уравнений осуществляется методом математической индукции. Будем обозначать – условная плотность распределения состояния относительно (*плотность оценки фильтрации*).

1. *t = 0*. В этом случае

,

и

– формулы для вычисления начального условия.

1. Пусть для момента времени известны плотность оценки фильтрации состояния относительно и соответствующая оценка фильтрации . Тогда плотность состояния относительно (*плотность распределения одношагового прогноза*) определяется формулой
2. Условная совместная плотность распределения пары относительно принимает вид

Тогда плотность оценки фильтрации на шаге *t* равна

а искомая оценка оптимальной фильтрации –

Таким образом, абсолютно оптимальная оценка фильтрации имеет двухшаговую структуру типа «прогноз-коррекция» и задается формулами (4.13), (4.14) – начальное условие, (4.15) – прогноз и (4.16), (4.17), (4.18) – коррекция.

**Замечание 4.8**. Следует отметить, что в действительности рекуррентными соотношениями связаны не оценка фильтрации состояния системы , а плотность оценки фильтрации . Если в качестве интересующего нас «полезного сигнала», подлежащего оценке, выступает не состояние, а некоторая функция от нее , обладающая конечным 2-м моментом, то она может быть вычислена по формуле

**Замечание 4.9**. Несмотря на кажущуюся простоту, оценки оптимальной фильтрации весьма сложно реализуются на практике. Это связано с необходимостью многократного вычисления многомерных интегралов в формулах (4.15) и (4.18) (для разных *t* и всех *x*), и (4.18’).

**Замечание 4.10**. Обычно, при решении задачи оптимизации (и оптимальная фильтрация – не исключение) помимо точки минимума интерес представляет также и значение критерия оптимальности в точке минимума. В нашем случае критерий оптимальности может быть вычислен с помощью ковариации ошибки оценки фильтрации . Если считать, что – совместная плотность распределения наблюдений , то

Очевидно, что практические вычисления по этим формулам в общем случае невозможны. Обычно оценивают с помощью метода Монте-Карло.

Тем не менее, условную ковариацию ошибки оценки можно вычислить следующим образом

**Замечание 4.10**. Оптимальная оценка фильтрации обладает следующим свойством:

для произвольной функции такой, что Теоретически оптимальную оценку можно искать, исходя из условия (4.19).

1. *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 4.1.** В условиях Примера 1.4 (см. Лекцию 1) и Задачи 2.2 (см. Лекцию 2) построить наилучшую линейную оценку вектора *X* по наблюдениям *Y*. По выборке объемом *N= 10 000* построить абсолютно оптимальную, оптимальную линейную и тривиальную оценки. Вычислить для них выборочные ковариационные матрицы ошибок оценок и сравнить. Вычислить теоретические значения ковариационные матрицы ошибок оптимальной линейной и тривиальной оценок и сравнить с их выборочными значениями. Исследовать поведение ковариационных матриц при варьировании параметров *a, b, p*: одинаковые/разные компоненты вектора *a*, одинаковые/разные компоненты вектора *b*, большие/малые компоненты вектора *a*, большие/малые компоненты вектора *b.*

**Задача 4.2.** Для линейной гауссовской системы наблюдения (скалярное состояние, скалярное наблюдение)

численно реализовать алгоритм оптимальной фильтрации (4.13) - (4.18). Использовать сеточный метод. Положение и масштаб сетки выбирать и контролировать с помощью метода моментов. На отрезке времени [0,100] на общем рисунке построить графики точного состояния наблюдения и оптимальной оценки для набора параметров . На отрезке времени [0,100] на общем рисунке построить графики точного состояния наблюдения и оптимальной оценки для набора параметров .

**Задача 4.3.** Смоделировать с помощью метода Эйлера-Маруямы решение СДУ:

При реализации учитывать свойство . На отрезке времени [0,10] с шагом дискретизации 0.0001 построить график траектории для значений параметров. С помощью осреднения по пучку траекторий 10 000 построить графики выборочного среднего и дисперсии смоделированного процесса.

**Задача 4.4**. В условиях задачи 3.5 (см. предыдущую лекцию) смоделировать с помощью метода Эйлера-Маруямы решение СДУ (3.23), в котором *F(t)* является решением (4.20) с параметрами из задачи 4.3. На отрезке времени [0,10] с шагом дискретизации 0.0001 построить график 10 траекторий решения СДУ (3.23) и его производных (на отдельном графике)