«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Физматлит, 1974.
2. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Физматлит, 1972.

**Лекция 5. Оценивание состояний линейных гауссовских систем наблюдения**

1. *Линейные гауссовские системы наблюдения*
2. *Условия оптимальности Винера-Хопфа*
3. *Связь оптимальных линейных байесовских оценок и оценок МНК*
4. *Фильтры Калмана и Калмана-Бьюси*
5. *Решение задач сглаживания и прогнозирования*
6. *Задачи для самостоятельного решения*
7. *Линейные гауссовские системы наблюдения*

**Определение 5.1**. Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , -измеримый случайный вектор -согласованные последовательности независимых гауссовских нормированных случайных векторов ( независимы в совокупности). Пара марковских рекуррентных стохастических последовательностей

называется *линейной гауссовской (стохастической динамической) системой наблюдения с дискретным временем.* Здесь

* (5.1) - уравнение динамики,
* (5.2), (5.2’) - модель наблюдений,
* – ненаблюдаемое состояние системы; – последовательности детерминированных матриц (дискретных сноса и диффузии в динамике); – последовательность случайных векторов – возмущений в динамике; – начальное условие;
* – процесс доступных наблюдений; – последовательности детерминированных функций (аддитивного полезного сигнала и интенсивности шумов); – последовательность ошибок наблюдений.

**Замечание 5.1**. Система наблюдения (5.1), (5.2), (5.2’) – частный случай системы наблюдения (4.11), (4.12).

**Определение 5.2**. Задача оптимальной фильтрации состояния линейной гауссовской системой наблюдения с дискретным временем заключается в нахождении , где .

1. *Условия оптимальности Винера-Хопфа*

**Замечание 5.2**. Как уже было сказано, теорема о нормальной корреляции позволяет построить условное математическое ожидание одного случайного вектора по другому в случае их совместного гауссовского распределения, а если условия гауссовости не выполняются, то формула (1.20) определяет *СК-оптимальную линейную оценку*, а (1.21) – матрицу ковариации ее ошибки.

**Замечание 5.3**. Очевидно, что в случае линейной гауссовской системы наблюдения с дискретным временем все наблюдения и все состояния могут быть сформированы в большие блочные векторы, и теорема о нормальной корреляции, примененная к этим объектам, позволит построить оптимальную оценку фильтрации . Однако, такой подход нерационален с вычислительной точки зрения, т.к. не дает рекуррентного алгоритма для вычисления оценки, так необходимого для решения задачи оценивания в реальном масштабе времени по вновь поступающему массиву наблюдений. Для нахождения рекуррентных формул, описывающих оптимальную оценку фильтрации , следует воспользоваться свойством оптимальных линейных оценок (которые в гауссовском случае совпадают с абсолютно оптимальными оценками).

**Теорема 5.1**. Пусть – блочный случайный вектор с известными конечными моментами до второго включительно. Для того, чтобы линейная оценка была наилучшей линейной оценкой компоненты по наблюдениям компоненты необходимо и достаточно выполнения условий Винера-Хопфа:

В предыдущей формуле – произвольная неслучайная матрица подходящей размерности.

**Теорема 5.2**. Пусть – ковариационная матрица произвольного случайного вектора. Тогда и верно тождество

**Теорема 5.3**. (лемма об обращении матриц, формула Шермана-Моррисона-Вудберри).

Формула

верна для всех матриц подходящей размерности и вырожденности.

1. *Связь оптимальных линейных байесовских оценок и оценок МНК*

**Замечание 5.4**. Задача оценивания неизвестного неслучайного вектора параметров линейной регрессии по методу наименьших квадратов и задача оптимального линейного байесовского оценивания тесно связаны между собой. Можно сказать, что оценки Гаусса-Маркова могут быть получены из теоремы о нормальной корреляции путем некоторого предельного перехода. Покажем это на следующем примере.

**Пример 5.1**. Пусть – блочный случайный вектор со средним значением и ковариационной матрицей Предполагаем, что матрицы и не вырождены.

Модель наблюдения описывается следующей формулой

где – известная неслучайная матрица полного столбцового ранга. Найти оптимальную линейную оценку вектора по наблюдениям и ковариационную матрицу ошибки ее оценки. Сравнить ее с оценкой Гаусса-Маркова, полученной в предположении, что является неизвестным детерминированным вектором.

*Решение:*

По теореме о нормальной корреляции

По лемме об обращении матриц (5.8) трансформируется в

Используем эту же лемму для преобразования :

Формула (5.7’) имеет разную интерпретацию.

1. Будем трактовать как неизвестный детерминированный вектор. Пусть для него в качестве наблюдений выступят 2 несмещенные оценки: оценка Гаусса-Маркова:

с ковариационной матрицей ошибки

И математическое ожидание (тривиальная оценка) с ковариационной матрицей ошибки *K*. Тогда модель наблюдений будет иметь вид:

При этом ошибки и не коррелированы между собой. Построим оценку Гаусса-Маркова по этим новым наблюдениям:

Таким образом, находясь в «парадигме классического МНК», когда оценивается неизвестный детерминированный вектор *X*, информацию о том, что *X* на самом деле случайный с известными моментными характеристиками, можно трактовать как наличие дополнительных измерений с характеристиками, совпадающими с априорными моментами.

1. Будем пытаться приблизить описание неизвестного детерминированного (*неопределенного*) вектора в рамках байесовского подхода: пусть у него известное среднее , а ковариационная матрица очень большая: , . Тогда

,

С «инженерной точки зрения» неопределенный вектор без геометрических ограничений можно трактовать как случайный вектор с очень большой ковариационной матрицей.

1. Что будет, если качество измерений будет падать: , . Тогда
2. *Фильтры Калмана и Калмана-Бьюси*

**Теорема 5.4**. (Фильтр Калмана). Оптимальная оценка состояния системы (5.1) и ковариационная матрица ее ошибки вычисляются с помощью следующего двухшагового рекуррентного алгоритма:

1. Шаг прогноза:
2. Шаг коррекции:
3. Начальное условие

*Доказательство:*

Воспользуемся методом математической индукции. Будем использовать обозначения – центрированная случайная величина, соответствующая .

*t=0.* Найдем ошибку оценки

Тогда очевидно, что (как математическое ожидание центрированных случайных величин). Далее

*t-1*. Пусть – оптимальная оценка, тогда она удовлетворяет условиям Винера-Хопфа:

Будем искать оценку на в рекуррентной форме

При этом мы покажем, что

Для любого коэффициента усиления , а сам этот коэффициент найдем из условия

Разрешая последнее равенство относительно , получаем

то есть истинность формулы (5.11), описывающей оптимальную коррекцию, доказана. Проверим истинность уравнения (5.12).

Истинность формулы (5.12) и всего утверждения Теоремы 5.3 доказаны.

**Замечание 5.5**. У фильтра Калмана очень удобная с вычислительной точки зрения двухшаговая структура типа «прогноз-коррекция». В дальнейшем, когда мы будем изучать различные субоптимальные алгоритмы фильтрации именно вычислительное удобство будет являться определяющим (даже при некотором ущербе качества оценивания). В инженерной среде алгоритмы фильтрации, имеющие подобную двухшаговую структуру, называются *алгоритмами фильтрации калмановского типа*.

**Замечание 5.6**. Соотношения (5.10), (5.12) носят название *дискретного уравнения Риккати*.

Фильтр Калмана был опубликован в статье

*Kalman, R. E. (1960). "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". Journal of Basic Engineering. 82: 35–45*

Ниже без доказательства будет представлен аналог фильтра Калмана для случая линейных стохастических дифференциальных систем наблюдения – фильтр Калмана-Бьюси.

*R. Kalman and R. Bucy, New results in linear filtering and prediction theory, Trans. ASME, Basic Eng. Ser. D, 83 (1961), 95-108.*

Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , и частный случай стохастической дифференциальной системы (3.9) – линейная гауссовская система

.

Относительно (5.17), (5.18) сделаны следующие предположения.

1. – ненаблюдаемое состояние, - -измеримая случайная величина.
2. – процесс наблюдений.
3. – детерминированные матричнозначные и векторные функции подходящей размерности с кусочно-гладкими компонентами.
4. Процессы предполагаются стандартными -согласованными винеровскими процессами.
5. , и независимы в совокупности.
6. Шумы в наблюдениях равномерно не вырождены, т.е.

Обозначим – естественный поток -алгебр, порожденный процессом наблюдений.

**Теорема 5.5**. (Фильтр Калмана-Бьюси) Абсолютно оптимальная оценка состояния линейной гауссовской системы наблюдения и матрица ковариации ее ошибки является решением дифференциальной системы

с начальными условиями

**Следствие 1**. Если (5.17), (5.18) – линейная *негауссовская* система наблюдения с теми же моментными характеристиками, то оценка фильтрации Калмана-Бьюси (5.19) – (5.22) определяет наилучшую *линейную* оценку фильтрации.

1. *Решение задач сглаживания и прогнозирования*

**Теорема 5.6**. В условиях системы наблюдения (5.1)-(5.3)

1. Оптимальная оценка прогноза (с «растущим горизонтом») вычисляется с помощью следующих рекуррентных формул
2. Оптимальная оценка сглаживания в фиксированной точке вычисляется с помощью следующих рекуррентных формул

**Замечание 5.7**. Следует заметить, что оценки прогноза и сглаживания также вычисляются с использованием оценок фильтрации.

1. *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 5.1.** Используя Теорему 5.2, доказать, что (5.16) – действительно решение уравнения (5.15).

**Задача 5.2.** «На инженерном уровне точности», используя аппроксимацию Эйлера-Маруямы, вывести уравнения фильтра Калмана-Бьюси.

**Задача 5.3.** В условиях задачи 4.2 построить фильтр Калмана и сравнить его результаты с результатами аппроксимации оптимальной оценки фильтрации.

**Задача 5.4**. Вывести формулы (5.25) – (5.27), используя условия оптимальности Винера-Хопфа.

**Задача 5.5**. В условиях задачи 3.5 производятся зашумленные измерения:

Будем считать, что *F(t)* – процесс, описываемый mean-reversion model (3.23). Считая *a = 1, b=2,* с шагом *h=0,001* смоделировать методом Эйлера-Маруямы траекторию и с шагом – траектории наблюдений. С помощью фильтра Калмана построить оценки вектора состояния системы с шагом *h.* (*Подсказка*: наблюдения имеются не в каждый момент времени, когда наблюдений нет – пользоваться прогнозом!) На графиках вывести:

1. точное значение координаты, ее математическое ожидание, ее наблюдение и ее оценку,
2. точное значение скорости, ее математическое ожидание и ее оценку,
3. ошибку оценки координаты и утроенную СКО ее ошибки,
4. ошибку оценки скорости и утроенную СКО ее ошибки,
5. СКО координаты и СКО ошибки оценки координаты,
6. СКО скорости и СКО ошибки оценки скорости.