«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
2. Elliott R., Moore J., Aggoun L. Hidden Markov Models: Estimation and Control. – New York, NY: Springer, 2010. 382 p.
3. Borisov A., Sokolov I. Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // Mathematics, 2020. Vol. 8. Iss. 4. Art. No. 506.

**Лекция 6. Оценивание состояний марковских цепей**

1. *Краткие сведения о марковских цепях*
2. *Мартингальное представление марковской цепи*
3. *Оптимальная фильтрация состояний марковской цепи по дискретным наблюдениям*
4. *Оптимальная фильтрация состояний марковской цепи по континуальным наблюдениям*
5. *Задачи для самостоятельного решения*
6. *Краткие сведения о марковских цепях*

**Замечание 6.1**. В данной лекции мы будем активно пользоваться свойствами решения Задачи 1.3.

Пусть *X* – дискретный случайный вектор с рядом распределения

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***X*** | *e1* | *e2* | *…* | *eN* |
| ***p*** | *p1* | *p2* | *…* | *pN* |

(*e1,…,eN* – единичные векторы-столбцы пространства ). Обозначим *p=( p1,…,pN)T –* вектор-столбец распределения. Тогда распределение обладает следующими полезными свойствами:

1. ,
2. Пусть *Y=g(X)* – произвольное преобразование вектора *X*, тогда т.е. любая функция конечного аргумента представима в виде линейной.
3. .

Поэтому далее мы будем считать, что в качестве *фазового пространства* (множество возможных состояний) марковской цепи будет выступать множество

**Определение 6.1.** Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией и -согласованную *цепь* (стохастическую последовательность с конечным фазовым пространством) с фазовым пространством . Цепь называется марковской, если верно тождество

**Определение 6.2**. – условная вероятность перехода на *t*-м шаге. Матрица называется *матрицей переходных вероятностей* марковской цепи на t-м шаге. Матрица обладает следующими свойствами:

1. .

**Определение 6.3**. – *вектор распределения марковской цепи* в момент времени *t*.

*Свойства марковской цепи:*

1. полностью определяет распределение марковской цепи :
2. *Мартингальное представление марковской цепи*

**Теорема 6.1**. Пусть – марковская цепь с распределением, определяемым парой . Тогда она описывается следующей рекуррентной зависимостью

где - -согласованная *мартингал-разность* (). Стохастическая последовательность также является *дискретным белым шумом* (последовательностью некоррелированных случайных векторов):

*Доказательство:*

откуда следует, что – действительно мартингал-разность. Далее, , таким образом истинность (6.4) доказана.

Рассмотрим два момента времени и найдем

Далее,

поэтому

Формула (6.5) и Теорема 6.1 доказаны.

**Замечание 6.2**. Марковская цепь является частным случаем *линейной* авторегрессии 1-го порядка! Однако, (6.4) нужна не для моделирования, а для анализа. Например, эта формула позволит построить рекуррентные уравнения моментов. Помимо этого, (6.4) может использоваться как уравнение динамики состояния системы.

**Замечание 6.3**. Больше информации о марковских цепях можно найти, например, в книге *Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.*

**Замечание 6.4**. Для представленных выше результатов можно привести аналоги в непрерывном времени.

**Определение 6.4.** Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией . -согласованный процесс -п.н. называется марковским скачкообразным процессом, если верно тождество:

**Определение 6.5**. – условная вероятность перехода на отрезке времени *[s,t]*. Матрица называется *матрицей переходных вероятностей* марковского скачкообразного процесса на отрезке времени *[s,t]*. Матрица обладает следующими свойствами:

1. ,

**Определение 6.6**. – *вектор распределения марковской цепи* в момент времени *t*.

*Свойства марковского скачкообразного процесса:*

1. полностью определяет распределение МСП :

уравнение Колмогорова-Чепмена.

**Замечание 6.5**. Далее рассматриваем только стохастически непрерывные МСП (непрерывные по вероятности в каждой точке).

**Определение 6.7.** Пусть для МПВ процесса выполнено соотношения:

Коэффициент называется *интенсивностью перехода*  в момент времени *t*,  *- интенсивностью выхода из*  в момент времени *t*, матрица –

*матрица интенсивностей переходов в момент времени t.*

*Свойства МИП :*

1. Если причем все равномерно малы по *i,j,t*, то МПВ является решением следующей системы линейных дифференциальных уравнений (Колмогорова):

Вектор распределения также удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений (Колмогорова):

**Теорема 6.2**. Пусть – МСП с фазовым пространством , МИП и начальным распределением . Тогда существует -согласованный квадратично интегрируемый мартингал (т.е. процесс, для которого ) такой, что будет единственным сильным решением линейного стохастического дифференциального уравнения (системы)

Квадратическая характеристика мартингала равна

*–* случайный процесс с ортогональными приращениями, дисперсионная функция которого равна

1. *Оптимальная фильтрация состояний марковской цепи по дискретным наблюдениям*

Рассмотрим следующую систему наблюдения. В качестве ненаблюдаемого состояния выступает МЦ *X*  (6.4) с известной МПВ *P(t)* и начальным распределением . В качестве наблюдений выступает стохастическая последовательность , обладающая следующим свойством:

Задача оптимальной фильтрации состояния *X* по наблюдениям *Y* заключается в нахождении

**Замечание 6.6**. Предложенная система наблюдения – классический пример *скрытой марковской модели* (*Hidden Markov Model, HMM*). Имеется состояние, являющееся марковским процессом, и некоторые наблюдения, по которым это состояние нужно восстановить (оценить).

Обозначим . Матрица обладает очевидными свойствами:

**Теорема 6.3**. Оптимальная оценка вычисляется с помощью следующего двухшагового алгоритма:

1. шаг прогноза:
2. шаг коррекции:

с начальным условием

Здесь – вектор-строка подходящей размерности, составленная из единиц.

**Замечание 6.7**. Оптимальный фильтр – хоть и двухшаговый типа «прогноз-коррекция», но коррекция является нелинейной функцией прогноза и наблюдений.

**Замечание 6.8**. Несмотря на простоту фильтра (6.14) – (6.16), компактного аналитического вида безусловной ковариационной матрицы ошибки оценки нет, есть только формула условной ковариационной матрицы:

**Теорема 6.4**. Наблюдаемая компонента описывается следующей математической моделью:

где -согласованная квадратично интегрируемая стохастическая последовательность такова, что . – центрированный дискретный белый шум с ковариационной функцией

**Замечание 6.9**. Система наблюдения (6.12), (6.18) является линейной негауссовской, и для нее можно построить оценку фильтрации Калмана, являющуюся наилучшей в классе линейных.

1. *Оптимальная фильтрация состояний марковской цепи по континуальным наблюдениям*

Рассмотрим следующую систему наблюдения. В качестве ненаблюдаемого состояния выступает МЦ *X*  (6.4) с известной МПВ *P(t)* и начальным распределением . В качестве наблюдений выступает стохастическая последовательность ,

Здесь

* – марковская цепь с конечным множеством состояний , заданная своим мартингальным разложением (см. предыдущую лекцию); –множество матриц переходных вероятности цепи на одном шаге, – начальное распределение цепи;
* – процесс доступных наблюдений: – последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с плотностью распределения , независимая от состояния *X*, *E[W] = 0*, *cov (W,W) = I*; симметрических положительно определенных матриц.

**Замечание 6.10**. Согласно решению Задачи 1.3, к линейному виду (6.19) можно привести любые наблюдения вида «полезный сигнал плюс некоторый аддитивный шум».

**Замечание 6.11**. Для простоты будем считать, что – неубывающее семейство -подалгебр. Очевидно, что , и также , где – неубывающее семейство -подалгебр, порожденных процессом *X*.

Вновь задача абсолютно оптимальной фильтрации заключается в нахождении . Выведем его методом математической индукции.

1. Пусть *t = 0*. В этом случае, в силу Примера 1.4
2. Пусть известна оценка фильтрации на шаге *t-1*: . Сначала построим оптимальный одношаговый прогноз:

Таким образом, относительно наблюдений до момента времени *t-1* включительно состояние *X(t)* представляет собой случайный вектор со значениями из и распределением . Тогда совместная «обобщенная» плотность пары *(X(t),Y(t))* относительно имеет вид:

Тогда искомая оценка фильтрации на шаге *t* определяется следующим образом:

или покомпонентно

**Теорема 6.5**. Оптимальная оценка вычисляется с помощью следующего двухшагового алгоритма:

1. шаг прогноза – формула (6.21),
2. шаг коррекции – формула (6.22),
3. начальное условие – формула (6.20).

**Замечание 6.12**. Аналоги Теоремы 6.5 имеют место и для непрерывного времени.

Пусть ненаблюдаемое состояние системы описывается МСП с фазовым пространством , МИП и начальным распределением (см. уравнение (6.12)). Пусть наблюдения описываются моделью

Здесь – детерминированные матрицы с кусочно-непрерывными компонентами, – равномерно невырождена (), a – стандартный -согласованный векторный винеровский процесс.

**Теорема 6.6**. Оптимальная оценка МСП (6.12) по наблюдениям (6.23) является единственным сильным решением следующего стохастического дифференциального уравнения (системы) – фильтра Вонэма (*Wonham Filter*):

**Замечание 6.13**. В модели наблюдений (6.23) шумы аддитивные, т.е. их интенсивность не зависит от ненаблюдаемого состояния . Если шумы являются мультипликативными, т.е.

то уравнения оптимальной фильтрации выглядят гораздо сложнее. Их можно найти в статье

*Borisov A., Sokolov I. Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // Mathematics, 2020. Vol. 8. Iss. 4. Art. No. 506.*

Несмотря на их сложность, наличие мультипликативных шумов в наблюдениях позволяет значительно увеличить точность оценок фильтрации, вплоть до восстановления точных значений состояния .

Дискретизуем систему наблюдения

с шагом *h>0* по времени, причем для *h* должно выполняться условие:

В равноотстоящие моменты времени *tn = hn* МСП *X* аппроксимируется МЦ : c МПВ и начальным распределением . Наблюдения также дискретизуются с шагом : . Аппроксимирующая система наблюдения имеет вид

uде – стандартный гауссовский векторный дискретный белый шум. Тогда оценка может быть получена с помощью следующей рекуррентной схемы:

1. Начальное условие
2. Прогноз
3. Коррекция

где – плотность гауссовского распределения со средним и невырожденной ковариационной матрицей .

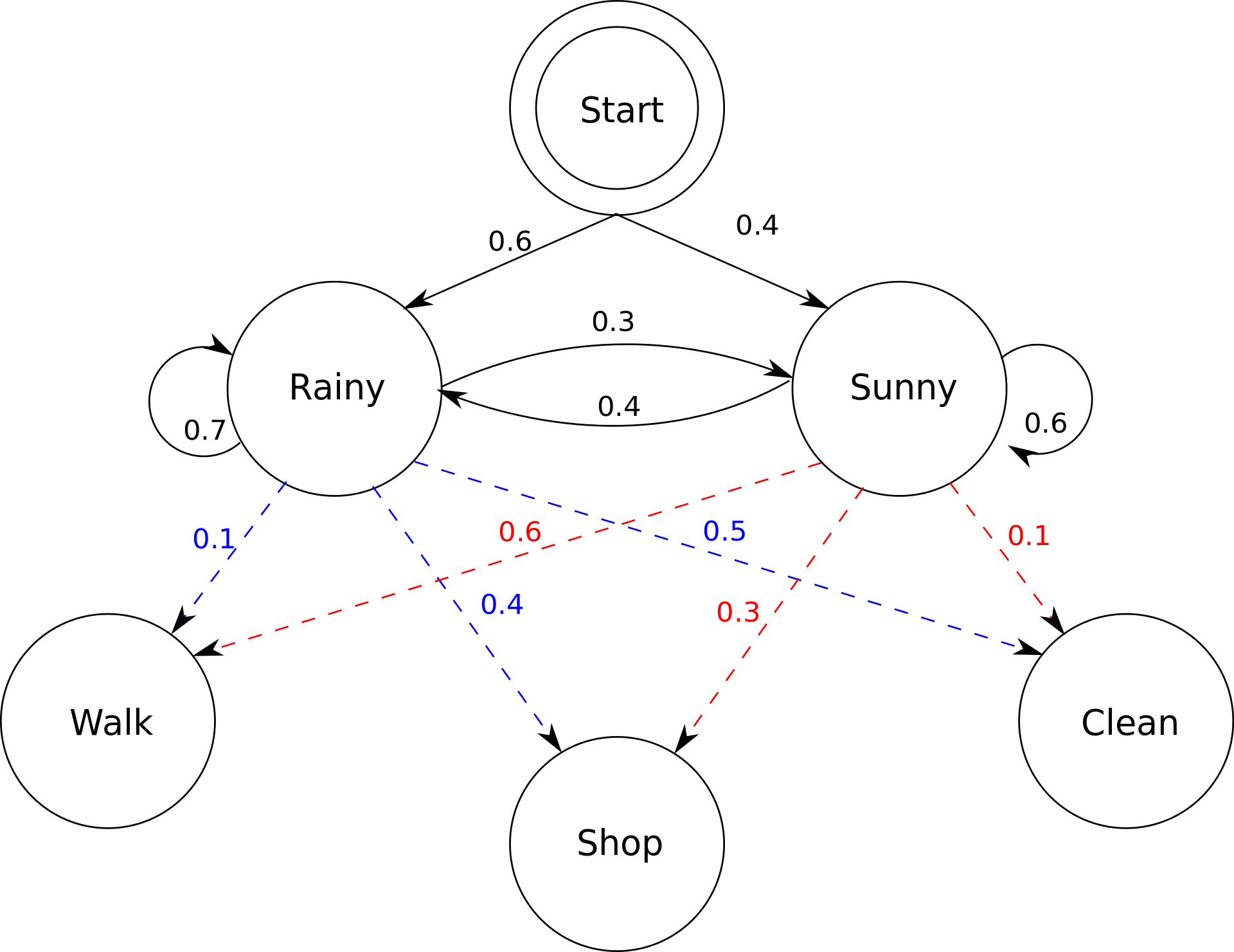
1. *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 6.1.** Вывести уравнения моментов для марковской цепи, описываемой рекуррентным соотношением (6.4): уравнение для эволюции среднего и ковариационной матрицы.

**Задача 6.2.** Доказать Теорему 6.3.

**Задача 6.3.** Доказать Теорему 6.4.

**Задача 6.4.** Задачка из Википедии



Погода в сказочной местности имеет два состояния: «дождливо» и «солнечно», и ее смена описывается МЦ. О погоде нам ничего не известно, но известно, как некоторая личность проводит время в зависимости от погоды. Задача – по наблюдениям за этой личностью на протяжении одного года (365 отсчетов) оценить погоду. Построить оптимальную нелинейную оценку и оптимальную линейную оценку.

1. На одном графике в зависимости от номера дня вывести индикатор солнечной погоды, оптимальную нелинейную оценку индикатора этого события и оптимальную линейную оценку индикатора этого события.
2. На одном графике путем осреднения по пучку из 100 000 траекторий в зависимости от номера дня построить выборочное СКО ошибки оценки индикатора солнечной погоды, сравнить его с СКО оптимальной линейной оценки этого события и СКО самого индикатора.

**Задача 6.5.** (*Классификация №1*) Имеются 100 несимметричных монет: *n*-я монета выпадает орлом вверх с вероятностью Из монет один раз равновероятным образом выбирается монета, которая затем последовательно подбрасывается. По результатам подбрасывания монеты построить оценку номера выбранной монеты. Число подбрасываний *10 000*.

1. На одном графике в зависимости от номера подбрасывания вывести истинный номер выбранной монеты и номер наиболее вероятной монеты.
2. На одном графике в зависимости от номера подбрасывания вывести вероятность выпадения орла выбранной монеты и частоту выпадения орла, реализовавшуюся в серии.

**Задача 6.6.** (*Классификация №2*) Имеются 100 несимметричных игральных костей: *n*-я кость имеет следующее распределение , ( – нормировочная константа). Из костей один раз равновероятным образом выбирается одна, которая затем последовательно подбрасывается. По результатам подбрасывания кости построить оценку номера выбранной кости. Число подбрасываний *10 000*.

1. На одном графике в зависимости от номера подбрасывания вывести истинный номер выбранной кости и номер наиболее вероятной кости.
2. На одном графике в зависимости от номера подбрасывания вывести распределение выбранной кости и частоты выпадения граней, реализовавшихся в серии.

**Задача 6.7.** Рассмотрим систему наблюдения (6.4), (6.19) со следующими параметрами:

Начальное распределение МЦ – стационарное. На отрезке времени *[0, 1000]*, построить абсолютно оптимальную и линейную оптимальную оценки фильтрации.

1. На каждом из трех графиков вывести индикатор состояния МЦ, «тривиальную оценку» этого индикатора, оптимальную линейную и абсолютно оптимальную оценки индикатора.
2. Путем осреднения по пучку траекторий объемом *100 000* вычислить выборочные дисперсии ошибок нелинейных оценок индикаторов каждого состояния МЦ. На каждом из трех графиков для каждой компоненты вывести СКО индикатора компоненты, СКО ошибки оптимальной линейной оценки и СКО ошибки абсолютно оптимальной оценки.

**Задача 6.8.** Рассмотрим систему наблюдения (6.4), (6.19) со следующими параметрами:

Начальное распределение МЦ – стационарное. На отрезке времени *[0, 1000]*, построить абсолютно оптимальную и линейную оптимальную оценки фильтрации.

1. На каждом из трех графиков вывести индикатор состояния МЦ, «тривиальную оценку» этого индикатора, оптимальную линейную и абсолютно оптимальную оценки индикатора.
2. Путем осреднения по пучку траекторий объемом *100 000* вычислить выборочные дисперсии ошибок нелинейных оценок индикаторов каждого состояния МЦ. На каждом из трех графиков для каждой компоненты вывести СКО индикатора компоненты, СКО ошибки оптимальной линейной оценки и СКО ошибки абсолютно оптимальной оценки.

**Задача 6.9**. («Игрушечные» финансы). Наблюдаемый курс финансового инструмента описывается уравнением Самуэльсона:

где – текущий скрытый сценарий развития рынка (МСП с известными параметрами и ), – известный «непрерывный процент», – известные значения волатильностей для различных сценариев.

1. После логарифмического преобразования с шагом *h = 0.00005* построить аппроксимацию оценки скрытого сценария развития рынка. На каждом из четырех графиков вывести индикатор состояния рынка и его оценку.