«Дополнительные главы теории случайных процессов».

Лектор: Борисов Андрей Владимирович, проф. каф. МС

[Borisych@me.com](mailto:Borisych@me.com)

Рекомендуемая литература по лекции:

1. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
2. Jazwinski A.H. Stochastic Processes and Filtering Theory. NY: Academic Press,1970.
3. Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal Filtering. NJ: Prentice Hill, 1979.
4. Bar-Shalom Y., Li X.-R., Kirubirajan T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. NY: Wiley, 2001.

**Лекция 8. Приближенные методы нелинейной фильтрации**

1. *Линеаризованный фильтр Калмана*
2. *Расширенный фильтр Калмана*
3. *EKF для стохастических дифференциальных систем наблюдения*
4. *EKF для непрерывно-дискретных систем наблюдения*
5. *Задачи для самостоятельного решения*
6. *Линеаризованный фильтр Калмана*

Рассмотрим полное вероятностное пространство с фильтрацией , -измеримый случайный вектор -согласованные последовательности независимых случайных векторов ( независимы в совокупности). Рассмотрим стохастическую динамическую систему наблюдения с дискретным временем вида

называется *стохастической динамической системой наблюдения с дискретным временем.* Здесь

* (8.1) - уравнение динамики,
* (8.2) - модель наблюдений,
* – ненаблюдаемое состояние системы; – дискретный снос и диффузия в динамике; – последовательность случайных векторов – возмущений в динамике; – начальное условие;
* – процесс доступных наблюдений; – аддитивный полезный сигнал и интенсивность шумов; – последовательность ошибок наблюдений.

Пусть - -алгебра, порожденная наблюдениями, полученными на отрезке *[1,T]*.

**Замечание 8.1.** Задача оптимальной фильтрации заключается в построении , однако реализация соответствующих формул (4.13) – (4.18) (см. Лекцию 4) с вычислительной точки зрения весьма затруднительна. Заметим, что (8.1), (8.2) – частный случай системы наблюдения (4.11), (4.12).

О (8.1), (8.2) имеется следующая дополнительная информация:

1. Функции , непрерывно дифференцируемы по ,
2. Известна некоторая опорная траектория состояния , в окрестности которой располагается истинная траектория системы .

Разложим (8.1), (8.2) в окрестности в ряд Тейлора:

и исключим из рассмотрения слагаемые более высоких порядков и . Тогда (8.1), (8.2) заменяется своим линейным приближением:

Линеаризованный фильтр Калмана – «обычный» фильтр Калмана, примененный к линеаризованной системе наблюдения (8.1’), (8.2’):

1. Начальное условие:
2. Прогноз:
3. Коррекция:

**Замечание 8.1**. Очевидно, что выбор «удачной» опорной траектории является ключевым фактором, влияющим на точность оценок фильтрации.

**Замечание 8.2**. Важнейшим для понимания работы всех нелинейных фильтров калмановской структуры, в том числе линеаризованного фильтра Калмана является тот факт, что – **не** матрица ковариации ошибки прогноза, и – **не** матрица ковариации ошибки оценки фильтрации! *Эти лишь некоторые их приближения, оценки*.

**Замечание 8.3**. Предложенный в лекции алгоритм линеаризованного фильтра Калмана взят из книги

*Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.*

1. *Расширенный фильтр Калмана*

Существуют различные варианты расширенного фильтра Калмана.

1. *Расширенный фильтра Калмана первого порядка* – это линеаризованный фильтр Калмана (8.3)-(8.8), в котором в качестве опорной траектории выступает оценка на предыдущем шаге, т.е. . Этот вариант предложен, в частности, в книге [1].
2. *Расширенный фильтра Калмана второго порядка.* В книге

*Bar-Shalom Y., Li X.-R., Kirubirajan T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. NY: Wiley, 2001*

предложен другой вариант EKF, в котором авторы использовали разложение (8.1), (8.2) в ряд Тейлора до второго порядка.

Итак, пусть на предыдущем шаге имеются оценка , которая трактуется (*на самом деле она не является таковой!*) как оценка оптимальной фильтрации (УМО) на предыдущем шаге и матрица , которая трактуется (*на самом деле она не является таковой!*) как матрица условной ковариации ошибки оценки относительно имеющихся наблюдений. Также считаем, что функции и дважды непрерывно дифференцируемы по .

Разложим (8.1) в окрестности в ряд Тейлора до второго порядка включительно:

и исключим из рассмотрения слагаемые более высокого порядка :

где – *n*-й единичный вектор в . Тогда прогноз состояния по известной паре ( имеет вид

При этом ошибка прогноза имеет вид

Умножим на и возьмем УМО относительно (, предполагая, что условные моменты третьего порядка равны 0 (*как в гауссовском распределении, на самом деле это не так!*):

Для выполнения шага коррекции нужно построить прогноз наблюдений по , вычислить его невязку и ее условную ковариационную матрицу (ее оценку!). С моделью наблюдений (8.2) поступим аналогично (8.1), используя пару :

где – *m*-й единичный вектор в .

Тогда прогноз наблюдений имеет вид

Ошибка прогноза наблюдений имеет вид

Ее условная ковариационная матрица относительно равна (предполагая, что условные моменты третьего порядка равны 0):

Шаг коррекции будет выполняться по формулам «классического» фильтра Калмана:

Итак, второй вариант EKF описывается следующими формулами:

1. Начальное условие – (8.3), (8.4),
2. Прогноз – (8.5’), (8.6’),
3. Коррекция - (8.5’’), (8.6’’), (8.7’), (8.8’).

**Замечание 8.4**. Свое название EKF получил за его применимость для решения совместной задачи фильтрации состояния системы наблюдения и идентификации параметров.

где – вектор ненаблюдаемых параметров, подлежащих оцениванию. Используем байесовский подход, считая, что – случайный вектор с известным математическим ожиданием (его важно правильно выбрать!) и ковариационной матрицей , не зависящий от .

Для также можно выписать псевдоуравнение динамики

*Расширим* (поэтому EKF!) вектор состояния системы ; уравнение динамики для него описывается замкнутой рекуррентной системой (8.9) и (8.9’) – частным случаем (8.1). Для совместного оценивания состояния и параметров достаточно применять алгоритм EKF для динамики (8.9), (8.9’) и наблюдений (8.10).

**Замечание 8.5**. Рассмотренные алгоритмы нелинейной фильтрации калмановского типа, при их широчайшем использовании, имеют значительный недостаток: оценки часто «разваливаются». Это значит, что реальная ошибка оценки большая и продолжает расти, в то время как вычисленная аппроксимация матрицы ковариации ошибки оценки демонстрирует умеренные значения. Причинами этого могут быть

1. существенное смещение прогноза и/или невязки наблюдения,
2. слишком оптимистические аппроксимации матрицы ковариации ошибки прогноза состояния и/или невязки наблюдения.

Имеется ряд способов нейтрализации этих причин, которые описаны в Sect. 10.4, 10.5 в книге

*Bar-Shalom Y., Li X.-R., Kirubirajan T. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. NY: Wiley, 2001,*

однако и они не являются панацеей.

1. Построение консервативной аппроксимации ошибки оценки: она должна удовлетворять условию

Это достигается различными способами:

* эвристическими (добавление некоторого «псевдошума» в алгоритм (шума, которого нет на самом деле), умножение матрицы на коэффициент, больший 1),
* более точное вычисление вторых моментов для динамики и/или наблюдений в некоторых специальных случаях (например, при обработке локационных/угловых наблюдений с гауссовскими ошибками).

1. Борьба со смещением в прогнозе / невязке:

* компенсация смещения (*debiasing*),
* оценка смещения.

1. Подбор подходящей «опорной» траектории (Iterated Kalman Filter).
2. *EKF для стохастических дифференциальных систем наблюдения*

Дано полное вероятностное пространство с фильтрацией , -согласованныe независимые винеровские процессы , , – некоторые детерминированные функции;

являющиеся липшицевыми и растущие не быстрее линейных; – функции, интегрируемые с квадратом на *[0,T],* причем ; - -измеримое начальное условие: .

Уравнение динамики оцениваемого состояния

имеет единственное сильное решение.

Модель наблюдения описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:

Пусть дан некоторая опорная траектория ; линеаризуем в ее окрестности (8.11) и (8.12):

В этом случае оценка линеаризованного фильтра Калмана-Бьюси и аппроксимация ковариационной матрицы ее ошибки описываются следующей системой

Если , то получим расширенный фильтр Калмана-Бьюси:

1. *EKF для непрерывно-дискретных систем наблюдения*

Уравнение динамики оцениваемого состояния – стохастическое дифференциальное

Наблюдения – дискретные, в моменты времени :

Расширенный фильтр Калмана в этом случае имеет следующую форму:

1. Начальное условие
2. Прогноз
3. Коррекция
4. *Задачи для самостоятельного решения*

**Задача 8.1.** (Уравнение Самуэльсона с кубическим сенсором)

Дана система наблюдения

Построить EFK для дифференциальной системы. С шагом *h=0, 001* выполнить 10 тестовых расчетов. Вывести в качестве результатов на каждом графике (всего 10) точное значение оценку , оценку СКО ошибки оценки , «простейшую» оценку , вычисленную по дискретизованным наблюдениям.

**Задача 8.2.** Решить задачу о слежении за аэробаллистической целью из статьи 1.pdf (Sect. B Example). Сделать 1 расчет. На графиках (отдельных для каждой компоненты состояния) выводить точное значение оценку , оценку СКО ошибки оценки .

**Задача 8.3.** Рассмотреть модельную задачу из статьи 2.pdf. (Sect. B One-Dimensional Nonlinear Example With Additive Gaussian Noise). Построить EKF и фильтр второго порядка. Сделать 1 расчет. На графиках (отдельных для каждой компоненты состояния) выводить точное значение оценку EKF, оценку СКО ошибки EKF , оценку EKF 2го порядка, оценку СКО ошибки EKF 2го порядка .

**Задача 8.4.** Решить задачу о слежении за целью, совершающей «плоский» разворот из статьи 3.pdf (Sect. VII Case Study). Сделать 1 расчет. На графиках (отдельных для каждой компоненты состояния) выводить точное значение оценку , оценку СКО ошибки оценки .