

Листок № 1 по курсу «Двухэтапные и многоэтапные задачи
стохастического программирования»

Пусть функция потерь имеет вид

$$\Phi(u, x) = cu + b \max\{x - u, 0\} + h \max\{u - x, 0\}, \quad (1)$$

где $b > c > 0$, $h > 0$. Случайная величина X принимает неотрицательные значения x . Рассмотрим следующие задачи:

$$\mathbf{M}\Phi(u, X) \rightarrow \min_{u \in \mathbb{R}_+}, \quad (2)$$

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\{\Phi(u, X) \leq \varphi\} \rightarrow \max_{u \in \mathbb{R}_+}, \quad \varphi > 0 \quad (3)$$

$$\varphi_\alpha(u) = [\Phi(u, X)]_\alpha = \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid P_\varphi(u) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0; 1] \quad (4)$$

1) Запишите в явном виде функцию математического ожидания для следующих распределений: $\mathcal{R}[0; 1]$, $\mathcal{R}[\underline{a}; \bar{a}]$, $\mathcal{E}(\lambda)$, $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\text{Bi}(2; 0,75)$, $\text{G}(p)$, дискретное равномерное на множестве $\{0; 1; 2; 3; 4\}$.

2) Докажите, что задача (2) имеет решение $[X]_{\frac{b-c}{b+h}}$ при любом распределении X (является ли это решение единственным?).

3) Докажите, что если $X \sim \mathcal{R}[0; 1]$, то задача (3) имеет решение $u_\varphi^* = \frac{\varphi}{c+h}$ (при каком соотношении параметров это решение единственно?).

4) Найдите решение задачи (3), если $X \sim \mathcal{R}[\underline{a}; \bar{a}]$.

5) Докажите, что если $X \sim \mathcal{R}[\underline{a}; \bar{a}]$, то задача (4) имеет решение $u_\alpha^* = \underline{a} + \frac{\alpha b}{b+h}(\bar{a} - \underline{a})$.

6) Предложите графический метод решения задач (3) и (4) при дискретном распределении X (для конечного числа реализаций).

7) Получите решение задач (2), (3) и (4) при $b = 3n$, $c = 2n$, $h = 2n + 1$, где n — номер по списку группы, считая, что $X - 1$ распределено по закону $\text{Bi}(2; \frac{1}{n+1})$.

8) Получите решения задач (2), (3) и (4) при $b = 3n$, $c = 2n$, $h = 2n + 1$ для распределений $\mathcal{E}(n + 2)$ ($n = 0 \pmod{3}$), $\mathcal{N}(9 + n, 4)$ ($n = 1 \pmod{3}$), $\text{G}(\frac{1}{n+1})$ ($n = 2 \pmod{3}$) аналитически или численно. Постройте графики функций математического ожидания, вероятности и квантили.

Список литературы

- [1] Кубзун А. И., Кан Ю. С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
- [2] Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2014. Section 1.2.
- [3] Ширяев А. Н., Эрмих И. Г., Яськов П. А. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). М.: МЦНМО, 2013. С. 68.