Листок №2 по курсу «Двухэтапные и многоэтапные задачи стохастического программирования»

Пусть функция потерь имеет вид

$$\Phi(u,x) = 2u^2 + \min_{y\in R^4}\{6y_1+4y_2+(2+K)y_3+(9-K/2)y_4 \mid 1-u+y_1+y_2+y_3 \geq x,\ u+2y_1+y_2+2y_4 \geq 1,\ y \geq 0\}$$

где K – номер по списку группы, $u\in R$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)\in R^4$

Экономическая интерпретация задачи

Интерпретируем как двухэтапную задачу управления ресурсами:

• Переменная u – первый этап, управляемое решение (например, закупка ресурсов, бюджет, или резерв)

• Второй этап – реакция на реализацию случайной величины x, через оптимальный выбор $y_1, \dots, y_4$ – это действия, корректирующие последствия реализации x.

• Стоимость второго этапа зависит от цен $6, 4, 2+K, 9-\frac{K}{2}$ на компоненты y_i.

Таким образом:

• Первый этап – решение до наблюдения x

• Второй этап – минимизация затрат после реализации x, но при фиксированном u

• u – это решение первого этапа: объем начального запаса ресурсов (или решения) до реализации случайности x

• После того как значение x стало известно, принимается решение второго этапа y для компенсации отклонения и удовлетворения ограничений

• Цель: минимизировать суммарные затраты: издержки первого этапа ($2u^2$) + минимальные возможные издержки второго этапа.

Вывод субдифференциала $g(u) = E[\Phi(u, X)]$

Имеем:

• При фиксированном u, минимизация по y – это задача линейного программирования.

• $g(u)$ – ожидаемое значение двухэтапной стоимости

Случаи:

Если X – дискретное распределение (например, $X \in \{0, 1, 2\}$): $g(u) = \sum_x p(x)\Phi(u, x)$

где $p(x)$ – вероятность соответствующего x

Субдифференциал $\partial g(u)$:

$$\partial g(u) = 2u + \sum_x p(x)\, \partial(\min_y \text{ второго этапа})$$

(Сумма субдифференциалов по каждому возможному x).

Если X – непрерывное равномерное распределение на отрезке $[0, 3]$: $g(u) = \frac{1}{3}\int_0^3 \Phi(u, x)\,dx$

Субдифференциал $\partial g(u)$:

$$\partial g(u) = 2u + \frac{1}{3}\int^3 \partial(\min_y \text{ второго этапа})\,dx$$

(Интеграл субдифференциалов по x)

Итак

Численные графики и нахождение минимума

Построение графика функции $g(u)$
Рассматривались два случая:

1) $X \in \{0,1,2\}$ – дискретное распределение:
- Вычислялось $g(u) = \frac{1}{3}\sum_{x=0}^{2} \Phi(u,x)$
- Минимум достигается при: $u^* \approx 0{,}6$

2) $X \sim U[0,3]$ – равномерное непрерывное распределение:
- Вычислялось интегрирование $g(u) = \frac{1}{3}\int_0^3 \Phi(u,x)dx$ методом трапеций.
- Минимум достигается при: $u^* \approx 0.54$

- На графике видно, что обе функции $g(u)$ имеют минимум в области около 0.5–0.6
- Функция для дискретного случая имеет ступенчатую структуру, для непрерывного более сглаженную

Пункт	Решение:
Экономическая интерпретация	u – решение до случайности, y – корректировка после
Вывод субдифференциала	через суммы / интегралы субдифференциалов
Минимизация $g(u)$	$u^* \approx 0{,}6$ (дискретный) $u^* \approx 0.54$ (непрерывный)