Билет №3

№1

Пусть $u, v \in L_1(\mathbb{Z})$. Критерий полноты и ортонормированности семейства $\{R_{2k}u\} \cup \{R_{2k}v\}$ в $l_2(\mathbb{Z})$

Теорема.

Пусть $u, v \in L_1(\mathbb{Z})$. Тогда $\{R_{2k}u\} \cup \{R_{2k}v\}$ есть полное ортонормированное множество в $l_2(\mathbb{Z})$ в том и только в том случае, если матрицы

$$A(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}(\theta) & \hat{v}(\theta) \\ \hat{u}(\theta+\pi) & \hat{v}(\theta+\pi) \end{pmatrix}$$ унитарны при всех $\theta \in [0;\pi)$

Док-во:

Ортонормированность данного множества равносильна унитарности матриц. Остается доказать, что унитарность влечет полноту множества. Пусть матрицы унитарны. Докажем равенство

$$z = v\cdot(U \circ D(z\cdot\tilde{v})) + u\cdot(U\circ D(z\cdot\tilde{u}))$$

Имеем

$$(v\cdot(U\circ D(z\cdot\tilde{v})))^{\theta} + (u\cdot(U\circ D(z\cdot\tilde{u})))^{\theta} =$$

$$= \hat{v}(\theta)\frac{(z\cdot\tilde{v})^{\theta} + ((z\cdot\tilde{v})^{*})^{\theta}}{2} + \hat{u}(\theta)\frac{(z\cdot\tilde{u})^{\theta} + ((z\cdot\tilde{u})^{*})^{\theta}}{2} =$$

$$= \hat{v}(\theta)\frac{\hat{z}(\theta)\cdot\overline{\hat{v}(\theta)} + \hat{z}(\theta+\pi)\cdot\overline{\hat{v}(\theta+\pi)}}{2} + \hat{u}(\theta)\frac{\hat{z}(\theta)\cdot\overline{\hat{u}(\theta)} + \hat{z}(\theta+\pi)\cdot\overline{\hat{u}(\theta+\pi)}}{2}$$

$$= \frac{\hat{z}(\theta)}{2}(|\hat{v}(\theta)|^2 + |\hat{u}(\theta)|^2) + \frac{\hat{z}(\theta+\pi)}{2}(\hat{v}(\theta)\overline{\hat{v}(\theta+\pi)} + \hat{u}(\theta)\overline{\hat{u}(\theta+\pi)})$$

Из унитарности матриц получаем

$$|\hat{v}(\theta)|^2 + |\hat{u}(\theta)|^2 = 2$$
$$\hat{v}(\theta)\overline{\hat{v}(\theta+\pi)} + \hat{u}(\theta)\overline{\hat{u}(\theta+\pi)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (v\cdot(U\circ D(z\cdot\tilde{v})))^{\theta} + (u\cdot(U\circ D(z\cdot\tilde{u})))^{\theta} = \hat{z}(\theta)$$

Поскольку $z = (\hat{z})^{\vee}$, то мы получаем требуемое равенство

Заметим, что

$$(D(z\cdot\tilde{v}))_k = (z\cdot\tilde{v})_{2k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{2k-n}\tilde{v}_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z_{2k-n}\bar{v}_{-n} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z_m \bar{v}_{m-2k} =$$

$= (z, R_{2k}v)$. Аналогично, $(D(z\cdot\tilde{u}))_k = (z, R_{2k}u)$. Если $(z, R_{2k}u) = (z, R_{2k}v) = 0$ при любом k, то $z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{R_{2k}u\}\cup\{R_{2k}v\}$ полна.

№4

Пусть $R_k : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$, где $(R_k z)_n = z_{n-k}$ — оператор сдвига

Рассмотрим скалярное произведение

$$\delta_{km} = (\varphi_{0k}, \varphi_{0m}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-k) \cdot \overline{\varphi(x-m)}\, dx \underset{x-k=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)$$

$$\varphi(y-(m-k))dy = (\varphi, \varphi_{0,m-k})$$

Also $\varphi(x) = \sum_{k\in \mathbb{Z}} z_k \varphi_{1k}(x)$

$$\varphi^{(x)} = \varphi(x-m) = \sum_{k\in \mathbb{Z}} z_k \varphi_{1k}(x-m) = \sum_{k\in \mathbb{Z}} z_k \sqrt{2}\, \varphi(2(x-m)-k)$$

$$= \sum_k z_k \sqrt{2}\, \varphi(2x-2m-k) = \sum_k z\, \varphi_{1,2m+k}(x)$$

№2

$f(x) = e^{-|x|}$

$F_x[e^{-|x|}](\omega)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{i\omega x}\, dx = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2+1}$$