Лабораторная работа №1.2.3
Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

Гёлецян А.Г.

22 июля 2022 г.

1 Введение

Для измерения моментов инерции сложных тел экспериментальным путем можно воспользоватся трифилярным подвесом. Методом несложных вычислении можно найти зависимость периода подвеса от массы и момента инерции иследуемого тела (1). Воспользуемся этой зависимостью для проведения ряда экспериментов, связанных с проверкой теоретической модели.

$$I = kmT^2, k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \tag{1}$$

2 Ход работы

2.1 Опыт с 2мя фигурами

Для начала проверим для каких углов приближение с использованием малости угла оправдана. Несколько измерении показали, что при амплитудах меньше 10° период не зависит от амплитуды. Соответственно будем придерживатся таких амплитуд.

Измерим параметры установки для подсчета коэффицента k в формуле (1)

$$\begin{aligned} R &= (114.6 \pm 0.5)\text{мм} \\ r &= (30.5 \pm 0.5)\text{мм} \\ m &= (983.2 \pm 0.5)\text{г} \\ z_0 &= (2.14 \pm 0.01)\text{м} \end{aligned}$$

Из таблиц имеем значение $g = (9,8155 \pm 0.0005)\text{мс}^{-2}$ для Москвы. Погрешность k считаем по формуле

$$\sigma_k = k\sqrt{\left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_0}{z_0}\right)^2}$$

Подставляя данные получаем

$$k = (4.06 \pm 0.07)10^{-4}\text{м}^2\text{с}^{-2}$$

Начнем измерения измерением момента инерции ненагруженной платформы.

No	N	t, c	T, c
1	10	44.052	4.4052
2	10	44.003	4.4003
3	10	44.005	4.4005
4	10	43.940	4.3940
5	11	48.353	4.3957

Среднее значение $\bar{T} = 4.399$ Случайная погрешность $\sigma_T = 0.002\text{с} \rightarrow T = (4.399 \pm 0.002)\text{с}$. Отсюда

$$I_{\text{пф}} = kmT^2 = (7.7 \pm 0.1)\text{гм}^2$$

. Погрешность считалось по формуле

$$\Delta I = I\sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2}$$

Теперь проведем аналогичный опыт, где измерим момент инерции металличесеого кольца с характеристиками

$$m_{\text{кол}} = (981.7 \pm 0.5)\text{г}$$
$$r_{\text{внеш}} = (8.45 \pm 0.05)\text{см}$$
$$r_{\text{внут}} = (7.90 \pm 0.05)\text{см}$$

No	N	t, c	T, c
1	10	42.459	4.2459
2	10	42.428	4.2428
3	10	42.426	4.2426
4	10	42.385	4.2385

Из этих данных, аналогично для ненагруженной платформы находим все интересующее.

$$T = (4.242 \pm 0.002)\text{с}$$
$$I_{\text{пф+кол}} = (14.4 \pm 0.2)\text{гм}^2$$
$$I_{\text{кол}} = (6.7 \pm 0.3)\text{гм}^2$$

Теоретической формулой для кольца получаем

$$I_{\text{кол}}^{\text{теор}} = m_{\text{кол}}\frac{r_{\text{внеш}}^2 + r_{\text{внут}}^2}{2} = (6.57 \pm 0.05)\text{гм}^2$$

Как видим в пределах погрешности теория соответствует эксперименту.

Сделаем все то же самое для диска с параметрами

$$m_{\text{диск}} = (580.6 \pm 0.5)\text{г}$$
$$r_{\text{диск}} = (5.75 \pm 0.01)\text{см}$$

No	N	t, c	T, c
1	10	39.254	3.9254
2	10	39.221	3.9221
3	10	39.203	3.9203
4	10	39.189	3.9189

Из этих данных получаем

$$T = (3.922 \pm 0.002)\text{c}$$
$$I_{\text{пф+диск}} = (9.8 \pm 0.2)\text{гм}^2$$
$$I_{\text{диск}} = (2.1 \pm 0.3)\text{гм}^2$$

Теоретически получаем

$$I_{\text{диск}}^{\text{теор}} = m_{\text{диск}} r_{\text{диск}}^2 = (1.920 \pm 0.007)\text{гм}^2$$

Как видим в пределах погрешности теория соответствует эксперименту.

Когда оба тела на платформе.

No	N	t, c	T, c
1	10	39.750	3.9750
2	10	39.873	3.9873
3	10	39.964	3.9964
4	10	39.773	3.9773

$$T = (3.984 \pm 0.006)\text{с}$$
$$I_{\text{пф+общ}} = (16.4 \pm 0.3)\text{гм}^2$$
$$I_{\text{общ}} = (8.7 \pm 0.4)\text{гм}^2 I_{\text{диск}} + I_{\text{кол}} = (8.8 \pm 0.6)\text{гм}^2$$

Как видим в пределах погрешности момент инерции аддитивен.

2.2 Опыт с разрезанным диском

Опыт описывать не смысла, сразу приведу данные.

h, см	T, с	σ_T, с
0.0	3.07	0.06
0.5	3.08	0.05
1.0	3.11	0.03
1.5	3.13	0.01
2.0	3.16	0.01
2.5	3.21	0.02
3.0	3.28	0.03
3.5	3.35	0.02
4.0	3.43	0.03
4.5	3.53	0.02
5.0	3.63	0.03
5.5	3.72	0.03
6.0	3.85	0.01
6.5	3.97	0.02
7.0	4.09	0.02
7.5	4.22	0.02

Ошибка $h \approx 0.1$см. Теория предсказывает что (здесь m и I это масса и момент инерции платформы, M и R это масса и радиус диска соответственно

$$k(m+M)T^2 = \frac{MR^2}{2} + Mh^2 + I \tag{2}$$

Нарисуем график $T^2(h^2)$ и сделаем выводы

Формула прямой полученный методом МНК.

$$T^2 = (0.149 \pm 0.001)\text{с}^2\text{см}^{-2} h^2 + (9.42 \pm 0.03)\text{с}^2$$

В соответствии с (2) получаем что

$$\frac{M}{k(m+M)} = (0.149 \pm 0.001)\text{с}^2\text{см}^{-2} \qquad = \alpha$$
$$\frac{\frac{MR^2}{2} + I}{k(m+M)} = (9.42 \pm 0.03)\text{с}^2 \qquad = \beta$$

$$M = \frac{km\alpha}{1 - k\alpha}$$
$$\Delta M = M\sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha(1-k\alpha)}\right)^2}$$
$$M = (1500 \pm 40)\text{г}$$

Найдем так же момент инерции диска

$$I_{\text{диск}} = \beta k(m+M) - I$$
$$\Delta I_{\text{диск}} = \sqrt{(\Delta I)^2 + (k(m+M)\Delta\beta)^2 + (\beta(m+M)\Delta k)^2 + (\beta k \Delta m))^2 + (\beta k \Delta M))^2}$$
$$I_{\text{диск}} = (1.8 \pm 0.2)\text{гм}^2$$

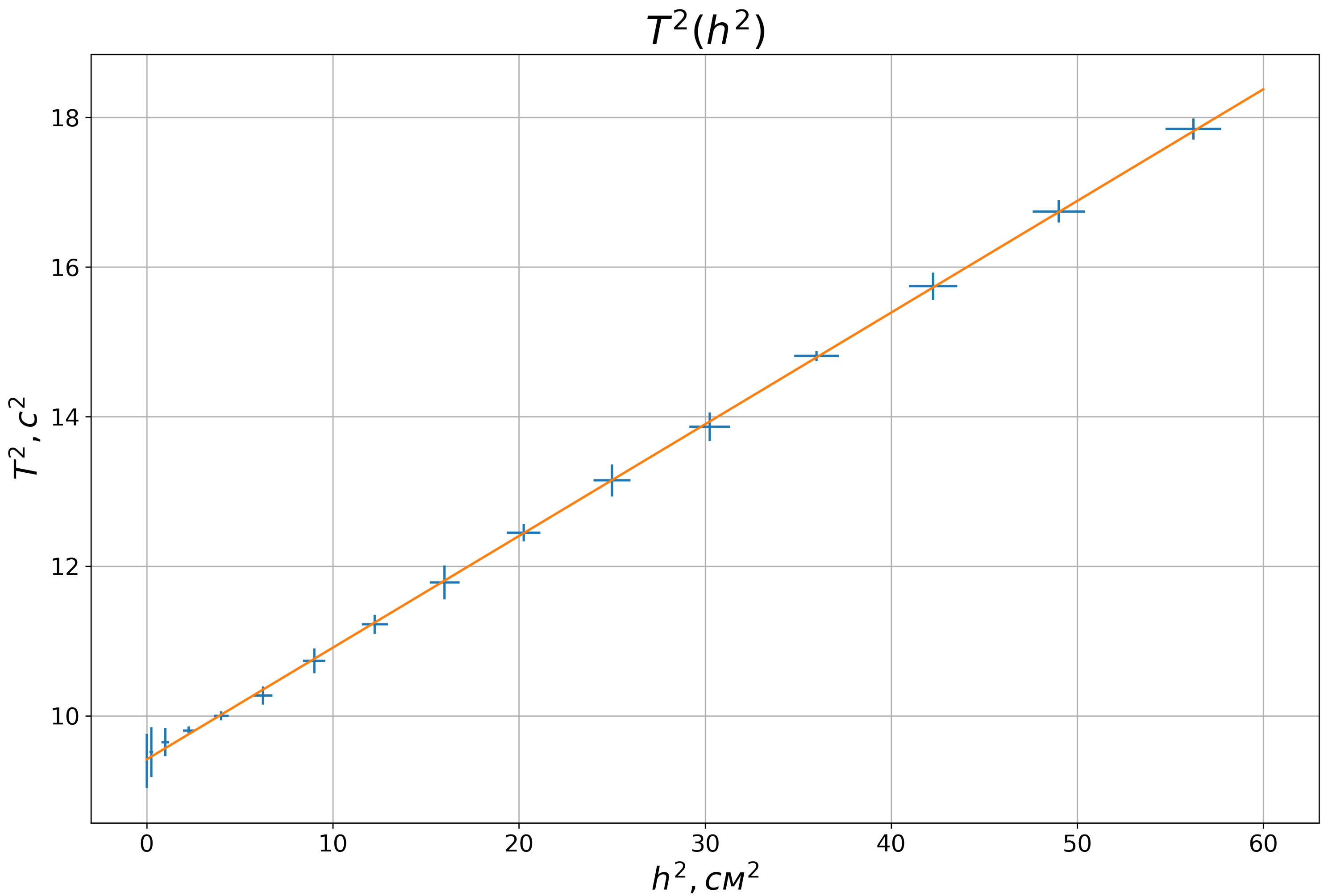

Рис. 1: График зависимости $T^2(h^2)$