

# Работа 3.1.3

## Измерение магнитного поля Земли

Стрижак Даниил

### 1 Аннотация

В работе исследуются свойства постоянных неодимовых магнитов и с их помощью находится горизонтальная и вертикальная составляющие индукции магнитного поля Земли, а так же магнитное наклонение.

### 2 Теоретические сведения

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент  $m$  тонкого витка площадью  $S$  с током  $I$  равен  $\mathbf{m} = \frac{IS}{c}\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$  - вектор площади контура, образующий с направлением тока правовинтовую систему,  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали к площадке. Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению с расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь называют *элементарным*, или *точечным*.

Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\mathbf{B}_{\text{дип}} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}$$

Во внешнем магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  на точечный магнитный диполь  $\mathbf{m}$  действует механический момент сил  $\mathbf{M} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}]$ . При этом потенциальная энергия которой обладает диполь с постоянным  $\mathbf{m}$ , равна  $W = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$ . Когда диполь ориентирован вдоль внешнего поля, он находится в состоянии *равновесия*.

В *неоднородном* внешнем поле выражение для энергии постоянного диполя сохраняется. При этом кроме момента сил на диполь действует ещё и сила

$$\mathbf{F} = -\nabla W = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

Таким образом из вышесказанного следует, что *свободный* магнитный диполь в неоднородном магнитном поле ориентируется вдоль силовых линий магнитного поля и втягивается в область более сильного поля, поскольку это ведёт к уменьшению энергии диполя.

Выражения выше, позволяют рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$ . Когда моменты двух небольших магнитов направлены вдоль соединяющей их прямой:  $\mathbf{m}_{1,2} \parallel \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор между ними, они взаимодействуют с силой

$$F_{12} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial (2\mathbf{m}_2/r^3)}{\partial r} = -\frac{6\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4} \text{ (ед. СГС)}$$

Если магнитные моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой:  $\mathbf{m}_{1,2} \perp \mathbf{r}$ , то нетрудно показать, что сила их взаимодействия окажется в два раза меньшей и будет иметь противоположный знак:

$$F_{12} = \frac{3\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4} \text{ (ед. СГС)}.$$

## 3 Оборудование и инструментальные погрешности

**В работе используются:** неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

1. Весы – 0.005 г
2. Секундомер – 0.2 с
3. Штангенциркуль – 0.01 см
4. Измеритель магнитной индукции – 5% ед. СГС

### 3.1 Экспериментальная установка

В работе используются неодимовые магниты шарообразной формы. Важно, чтобы вещество из которого они изготовлены, было *магнитожёстким* материалом и чтобы шары были намагничены однородно.

Магнитное поле однородного намагниченного шара радиусом  $R$  может быть вычислено точно. На расстояниях  $r \geq R$  от центра шара оно совпадает с полем *точечного* магнитного диполя, расположенного в центре, магнитный момент  $\mathbf{m}$  которого совпадает с полным моментом шара. Внутри шара магнитное поле однородно. Нетрудно получить, что при  $r < R$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{2\mathbf{m}}{R^3}$$

В качестве ещё одной характеристики материала магнита используют остаточную *намагниченность*  $\mathbf{M}$ . По определению, намагниченность равна *объёмной плотности магнитного момента*, поэтому для однородного намагниченного шара  $\mathbf{m} = \mathbf{M}V$ , где  $V = \frac{4\pi}{3}R^3$  - объём магнита. Величину  $B_r = 4\pi\mathbf{M}$  называют остаточной индукцией материала.

Из сказанного выше нетрудно видеть, что индукция  $\mathbf{B}_p$  на *поллюсах* однородно намагниченного шара направлена по нормали к поверхности и совпадает поэтому с индукцией внутри шара  $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_0$ . Величина  $B_p$  связана с остаточной индукцией  $B_r$  соотношением

$$B_p = B_o = \frac{2}{3}B_r$$

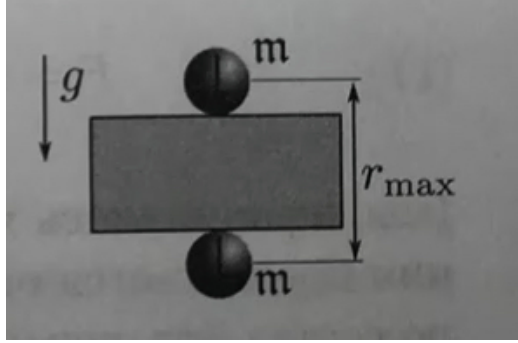
## 4 Результаты измерений и обработка данных

### 4.1 Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков

Диаметр шариков измеряется с помощью штангенциркуля:  $d = 0,585 \pm 0,005$  см.

Масса шариков измеряется на весах, но для того, чтобы магнитное поле шариков не влияло на показания весов, сделаем толстую подложку из легкого материала – бумаги.  $m = 0,85 \pm 0,1$  г.

Магнитометр показал значение  $B_{p1} = 380 \pm 5$  (ед. СГС) на одном из полюсов, и значение  $B_{p2} = 330 \pm 5$  (ед. СГС) на другом полюсе.



Проложим между двумя магнитными шариками брусок из немагнитного материала как на рисунке сверху и, подкладывая между бруском и верхним магнитиком листы бумаги, определим, на каком максимальном расстоянии  $r_{max}$  шарики удерживают друг друга в поле тяжести Земли.

$$r_{max} = 2.18 \pm 0.05 \text{ см}$$

Величина магнитного момента магнитика  $\mathfrak{m}$ :

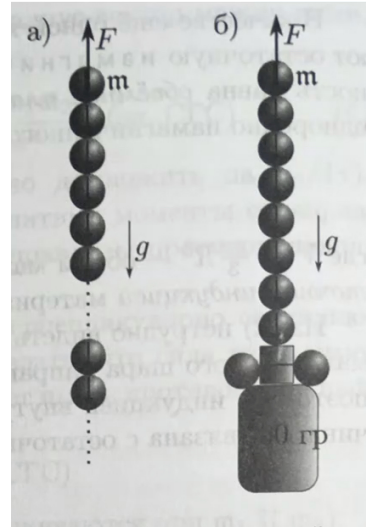
$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}}$$

$$\mathfrak{m} = 71.3 \pm 3.4 \text{ (ед. СГС)}$$

Полученные значения магнитных моментов отличаются. Это может быть связано с большой погрешностью методики эксперимента, а так же неточным взаимным расположением магнитных моментов из-за силы трения.

Величину намагниченности материала шариков рассчитаем по формуле  $M = \frac{\mathfrak{m}}{\frac{\pi}{6}d^3}$ , остаточную индукцию магнитного поля  $B_r = \frac{3}{2}B_0$ .

$$M = 875.1 \text{ (ед. СГС)}, B_r = 11000 \pm 550 \text{ (ед. СГС)}$$



Составим цепочку из 25 шариков, с помощью неодимовых магнитов в форме параллелепипедов, подсоединим цепочку к гире и развесим так, чтобы общая масса системы составила приблизительно 500 г. Далее подберём минимальный вес системы цепочки с гирей, при котором она отрывается от верхнего шарика.

Взвесим оторвавшуюся цепочку с гирей.

$$m_{min} = 466.95 \pm 0.05 \text{ г}$$

Рассчитаем силу сцепления двух шаров и по ней определим магнитный момент шарика  $\mathfrak{m}$ .

$$F_0 = \frac{6\mathfrak{m}^2}{d^4}$$

$$F = m_{min}g = F_0(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots) \approx 1.08F_0$$

$$\mathfrak{m} = \sqrt{\frac{d^4 m_{min} g}{6 \cdot 1.08}}$$

$$\mathfrak{m} = 88.5 \pm 1.8 \text{ (ед. СГС)}.$$

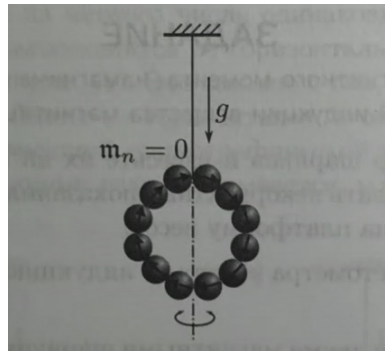
Табличное значение  $B_r$  для соединения  $Nd_2Fe_{14}B$ :  $B_{r_{\text{табл}}} = 12200$  (ед. СГС), Мы получили достаточно близкую величину к табличной. Из-за примесей и погрешности отличия допустимы.

Теоретическое значение индукции  $B_p$  у полюсов шарика с помощью формулы должно равняться:  $B_p = 7300$  (ед. СГС), однако прибор показал значение на порядок меньше, что, вероятно связано с резким убыванием магнитного поля вблизи полюсов.

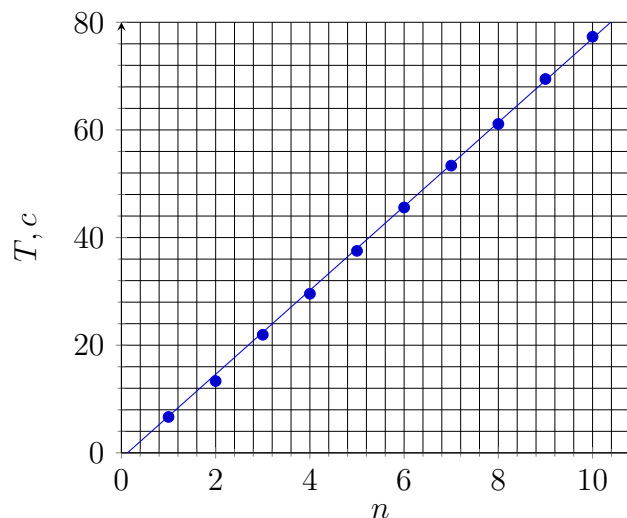
## 4.2 Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли

Оценим влияние упругости нити на период колебаний, возбудив крутильные колебания свёрнутой в кольцо "стрелки" (магнитный момент такого кольцеобразного маятника равен 0).

Соберём крутильный маятник в виде кольца из 12 магнитных шариков и подвесим его на немагнитном штативе. Используя  $\Lambda$ -образный подвес, установим "магнитную стрелку" в горизонтальное положение, далее свернем её в кольцо и измерим коэффициент упругости нити



N	t, c
1	6.67
2	13.34
3	21.94
4	29.56
5	37.53
6	45.59
7	53.37
8	61.11
9	69.46
10	77.32



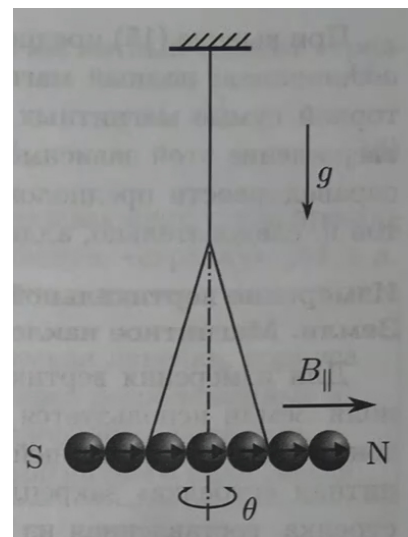
Зависимость времени колебаний от числа колебаний кольца из магнитов.

Из эксперимента получаем, что для кольца  $T = 7.73$  с. Запишем уравнение вращательного движения и формулу для периода колебаний:

$$I\ddot{\alpha} + f\alpha = 0, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}, \quad f = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I.$$

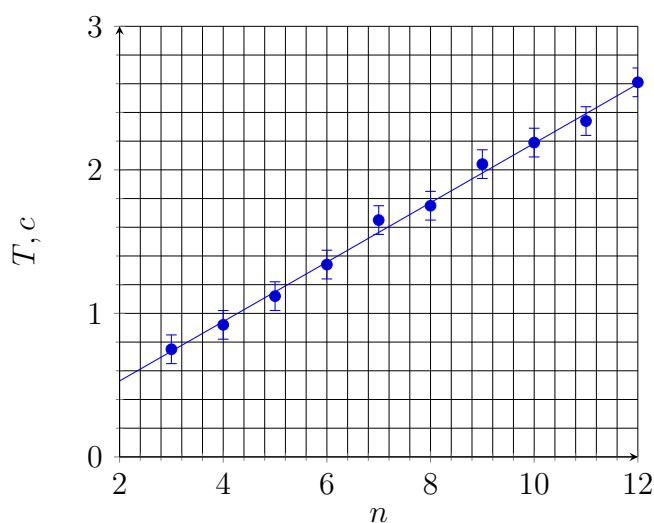
Момент инерции относительно нити колечка можно оценить как  $I = \frac{12mR^2}{2} = (2.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \Rightarrow f = (1.7 \pm 0.1) \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$ .

Соберём крутильный маятник из 12 магнитных шариков и подвесим его на немагнитном штативе. Используя  $\Lambda$ -образный подвес, установим "магнитную стрелку" в горизонтальное положение. Возбудим крутильные колебания маятника вокруг вертикальной оси и определим их период. Исследуем зависимость периода  $T$  крутильных колебаний "стрелки" от количества магнитных шариков  $n$ , составляющих "стрелку".



n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	t, c	t, c	t, c	t, c	t, c	t, c	t, c	t, c	t, c	t, c
10	6.35	9.33	11.18	13.33	16.56	17.70	20.20	23.50	23.89	27.60
20	18.67	18.51	22.00	26.66	32.79	35.40	40.40	44.17	47.61	51.26
30	24.91	27.68	33.45	39.70	43.35	52.83	61.93	66.29	70.33	77.85
40	31.21	36.77	44.01	53.00	65.91	70.00	82.03	88.09	93.91	104.5
50	37.45	46.01	56.11	67.00	82.47	87.58	102.10	109.4	117.2	130.3
T, c	0.749	0.920	1.122	1.340	1.649	1.752	2.042	2.188	2.344	2.606

График экспериментальной зависимости  $T(n)$ :



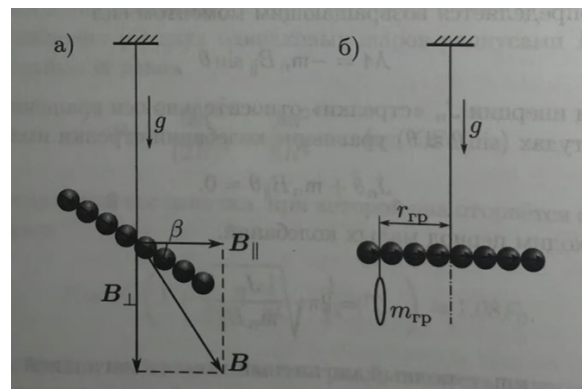
Зависимость периода колебаний от  
числа числа магнитов магнитной стрелки.

$$J_n \ddot{\theta} + (m_n B_{\parallel} + f) \theta = 0, J_n \approx \frac{1}{12} n^2 m d^2 \Rightarrow T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m d^2 n^2}{12(m B_{\parallel} + f)}}$$

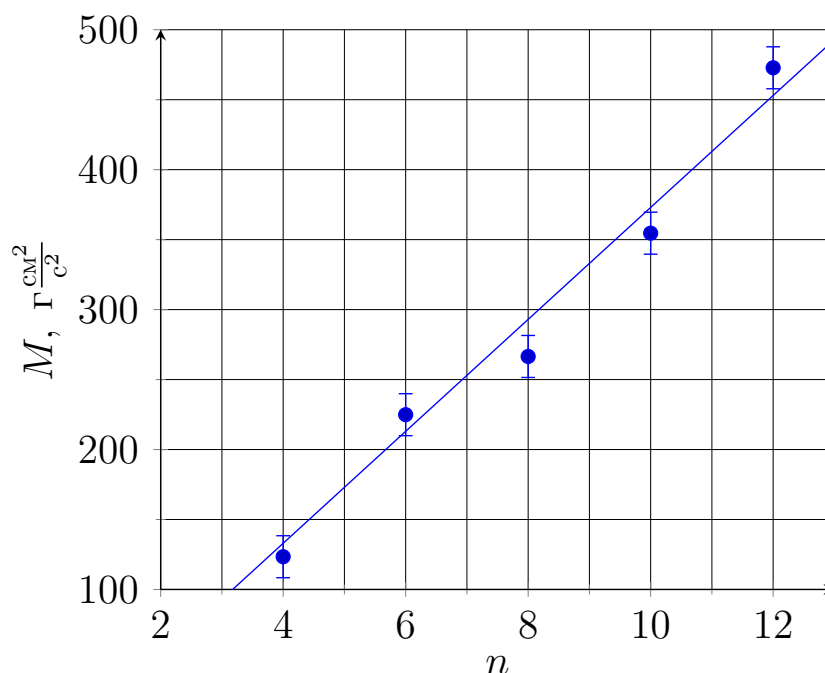
По значению углового коэффициента рассчитаем величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

$$\frac{T_n}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{m d^2 n^2}{12(m B_{\parallel} + f)}} = 0.207 \text{ c}, B_{\parallel} = \frac{\pi^2 m d^2 n^2}{3 T_n^2 m} - \frac{f}{m} \approx 0.066 \pm 0.003 \text{ (ед. СГС)}$$

Изготовим магнитную "стрелку" из 10 шариков и подвесим её за середину с помощью нити на штативе. Определим механический момент сил, действующий со стороны магнитного поля Земли на горизонтально расположенную магнитную "стрелку". Для этого с помощью одного или нескольких кусочков проволоки, уравновесим "стрелку" в горизонтальном положении. С помощью весов определим массу уравнивающего груза  $m_{гр}$ . Из условия равновесия рассчитаем механический момент сил  $M = m_{гр}gx$ , действующих на горизонтальную "стрелку" со стороны поля Земли. Измерения сил проведём для чётных значений  $n = 4, 6, 8, 10, 12$ .



n	$m_{гр}, \text{ г}$	x, см	$M, \text{ г} \frac{\text{см}^2}{\text{с}^2}$
4	0.215	0.585	123.4
6	0.196	1.170	224.9
8	0.149	1.755	256.5
10	0.154	2.340	354.6
12	0.165	2.925	472.8



Зависимость момента сил, уравнивающего стрелку от числа магнитов в ней.

Коэффициент наклона  $a = 36 \pm 5 \text{ г} \frac{\text{см}^2}{\text{с}^2}$ . Из линейности видно, что приближение аддитивности магнитных моментов для используемых в работе магнитов применимо. По значению углового коэффициента аппроксимирующей прямой рассчитаем величину вертикальной составляющей  $B_{\perp}$  магнитного поля Земли.

$$M_n = n m B_{\perp} \Rightarrow B_{\perp} = \frac{a}{m} \approx 0.40 \pm 0.06 \text{ (ед. СГС)}$$

## 5 Выводы и расчет погрешностей

### 5.1 Погрешности

$$\varepsilon_{m_1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r_{max}}{r_{max}}\right)^2} \approx 6\%$$

$$\varepsilon_{m_2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r_{min}}{r_{min}}\right)^2} \approx 2\%$$

$$\varepsilon_{B_{\parallel}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \frac{T_n}{n}}{\frac{T_n}{n}}\right)^2} \approx 5\%$$

$$\varepsilon_{B_{\perp}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2} \approx 6\%$$

### 5.2 Вывод

Поскольку установка находится в железобетонном здании, магнитное поле в нём сильно отличается от поля Земли. Так же на показания влияет наличие электронных приспособлений связи. Магнитное поле Земли в нашем районе около 0.05 - 0.1 ед. СГС. Полученное значение не сильно отличается действительного.

Используя результаты измерений  $B_{\perp}$  и  $B_{\parallel}$ , магнитное наклонение  $\beta$  и полная величина индукции магнитного поля Земли в кабинете выполнения лабораторной работы равны.

$$\beta = \arctan \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} \approx 80^\circ$$

Теоретически ( $\alpha$  – угол наклона Земли,  $\phi$  – широта Москвы),

$$\beta = \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} = \frac{\frac{-2m_3 \sin(\phi - \alpha)}{r^3}}{\frac{-m_3 \cos(\phi - \alpha)}{r^3}} = \arctg(2tg(\phi - \alpha)) \approx 53^\circ$$

Полный магнитный момент  $m$  Земли равен около  $7,72 \cdot 10^{25}$  ед. СГС. По данным эксперимента он равен  $9,20 \cdot 10^{25}$  ед. СГС.