

Лабораторная работа 1.2.2
Экспериментальная проверка закона
вращательного движения на
крестообразном маятнике

Злобина Вера

24 ноября 2020 г.

Основное уравнение вращательного движения тела вокруг закреплённой оси:

$$I\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где $\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$ – угловое ускорение (ω – угловая скорость), I – полный момент инерции тела относительно оси вращения, M – суммарный момент внешних сил относительно этой оси.

Цель работы: экспериментально проверить уравнение (1), получив зависимость углового ускорения от момента инерции и момента прикладываемых к системе сил, а также проанализировать влияние сил трения, действующих в оси вращения.

Экспериментальная установка: для экспериментального исследования закона вращательного движения (1) в работе используется крестообразный «маятник», устройство которого изображено на рис. 1. Маятник состоит из четырёх тонких стержней радиуса a , укрепленных на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива различных радиусов (r_1 и r_2) насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции I маятника можно изменять, передвигая грузы m_i ($i = 1, \dots, 4$) вдоль стержней и меняя R_i . На один из шкивов маятника навита тонкая нить. Привязанная к ней лёгкая платформа известной массы m_n служит для размещения перегрузков m_r .

Установка оснащена датчиком, позволяющим фиксировать моменты времени прохождения концов стержней через него. Данные с датчика передаются на компьютер для последующей обработки и получения зависимостей угла поворота $\varphi(t)$, угловой скорости $\omega \equiv \dot{\varphi}$ и углового ускорения маятника $\beta \equiv \ddot{\varphi}$ от времени, а также углового ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$.

Вывод уравнения движения маятника: рассмотрим силы, действующие на маятник. Основной вращающий момент создаётся подвешенным на нити перегрузком. Непосредственно на маятник действует момент силы натяжения нити: $M_n = rT$, где r – радиус шкива (r_1 или r_2). Силу T выразим из уравнения движения платформы $m_n \ddot{y} = m_n g - T$, где $m_n = m_n + m_r$ – масса платформы с перегрузком. Ускорение платформы связано с угловым ускорением маятника условием нерастяжимости нити $\ddot{y} = \beta r$. Отсюда момент силы натяжения нити

$$M_n = m_n r (g - \beta r). \quad (2)$$

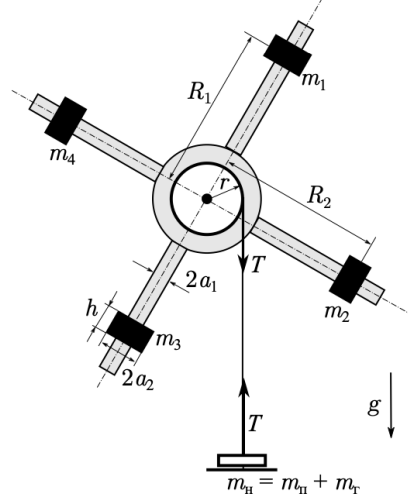


Рис. 1: Схема установки

Вращению маятника препятствует момент силы трения в оси $M_{\text{тр}}$. Таким образом, с учётом (2) уравнение (1) может быть записано как

$$(I + m_{\text{н}}r^2)\beta = m_{\text{н}}gr - M_{\text{тр}}. \quad (3)$$

Заметим, что в наших опытах, как правило, $m_{\text{н}}r^2 \ll I$, и соответственно $M_{\text{н}} \approx m_{\text{н}}gr$, то маятник будет раскручиваться с постоянным угловым ускорением $\beta_0 \approx m_{\text{н}}gr/I$.

Поскольку зависимость момента силы трения от нагрузки на маятник и скорости его вращения не известна (её исследование – отдельная экспериментальная задача), методика измерения должна быть построена так, чтобы минимизировать или вовсе исключить влияние $M_{\text{тр}}$. Можно высказать следующие качественные соображения о природе и величине $M_{\text{тр}}$. Она может иметь как составляющую, пропорциональную силе реакции в оси N (сухое трение в подшипниках), так и составляющую, пропорциональную угловой скорости ω вращения маятника (вязкое трение в подшипниках и сопротивления воздуха). Учитывая, что сила реакции уравновешенного маятника равна $N = m_{\text{м}}g + T \approx (m_{\text{м}} + m_{\text{н}})g \approx m_{\text{м}}g$, где $m_{\text{м}}$ – масса маятника (как правило, $m_{\text{м}} \gg m_{\text{н}}$), можно записать

$$M_{\text{тр}} \simeq \left(1 + \frac{m_{\text{н}}}{m_{\text{м}}}\right) M_0 + \eta\omega \approx M_0 + \eta\omega, \quad (4)$$

где M_0 – момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе подвеса (минимальное значение силы трения), η – некоторый коэффициент, отвечающий за вязкое трение.

Результаты измерений и обработка данных

Оценим момент сил трения в подшипниках. Граничное значение складывается из массы перегрузка и массы платформы и равно $m_{\text{тр}} = 4.80(\text{г}) + 6.17(\text{г}) = 10.97(\text{г})$.

Измерения проводились на большом шкифе, радиус которого $r_1 = 1.78(\text{см})$.

Тогда момент сил трения $M_0 = m_{\text{тр}}gr_1 \approx 1.95 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$.

Проведём измерение коэффициентов прямой $\beta(\omega)$ k и β_0 , чтобы оценить случайную погрешность β_0 .

$k, 1/\text{с}$	$\beta_0, \text{рад}/\text{с}^2$	$(\beta_{0\text{сред}} - \beta_{0i})^2, \text{рад}^2/\text{с}^4$
-0.0078 ± 0.0058	0.5126 ± 0.0012	0.0015
-0.0072 ± 0.0021	0.4513 ± 0.0008	0.005
-0.0079 ± 0.0045	0.4388 ± 0.0018	0.0012
-0.0090 ± 0.0017	0.4666 ± 0.0085	0.0001
-0.0085 ± 0.0070	0.4737 ± 0.0016	0.0001
-0.0084 ± 0.0015	0.4999 ± 0.0014	0.0007
-0.0088 ± 0.0049	0.4749 ± 0.0039	0.0001

$$\beta_{0\text{сред}} \approx 0.4740(\text{рад}/\text{с}^2)$$

$$\sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\beta_{0\text{сред}} - \beta_{0i})^2}{n(n-1)}} \approx 0.01(\text{рад}/\text{с}^2)$$

Проведём измерения коэффициентов прямой $\beta(\omega)$ k и β_0 при разных массах перегрузка.

$m_0 = 6.17(\text{г})$ – масса платформы

$r_1 = 1.78(\text{см})$ – радиус большего шкива

$r_2 = 0.90(\text{см})$ – радиус меньшего шкива

$m_{\text{г}}, \text{Г}$	$k, 1/\text{с}$	$\beta_0, \text{рад}/\text{с}^2$	радиус шкива $r_{1,2}, \text{см}$	$M_T, \text{Н} \cdot \text{м}$
68.17	-0.0113 ± 0.0021	0.669 ± 0.002	1.78	$1.21 \cdot 10^{-2}$
106.17	-0.0123 ± 0.0022	1.067 ± 0.007	1.78	$1.89 \cdot 10^{-2}$
146.17	-0.0172 ± 0.0029	1.658 ± 0.001	1.78	$2.6 \cdot 10^{-2}$
176.17	-0.0221 ± 0.0019	1.907 ± 0.003	1.78	$3.1 \cdot 10^{-2}$
206.17	-0.0253 ± 0.0041	2.300 ± 0.008	1.78	$3.7 \cdot 10^{-2}$
50.37	-0.0124 ± 0.0024	0.2275 ± 0.0090	0.90	$0.45 \cdot 10^{-2}$
106.17	-0.0200 ± 0.0076	0.6034 ± 0.0048	0.90	$0.96 \cdot 10^{-2}$
146.17	-0.0167 ± 0.0024	0.8333 ± 0.0032	0.90	$1.3 \cdot 10^{-2}$
168.17	-0.0187 ± 0.0031	0.9543 ± 0.0021	0.90	$1.5 \cdot 10^{-2}$
68.17	-0.0161 ± 0.0053	0.3482 ± 0.0019	0.90	$0.61 \cdot 10^{-2}$

где $M_T = m_T g r_{1,2}$ – момент силы натяжения нити

Построим график $\beta_0(M_T)$ зависимости начального ускорения от момента силы натяжения. Полученная зависимость является прямой пропорциональностью, то есть $\beta_0 = a + bM_T$.

Коэффициенты a и b вычислим по МНК.

$$a \approx -0.0396(\text{рад/с}^2)$$

$$b \approx 63.316(1/\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

Пересечение с осью абсцисс при $\beta_0 = 0 \Rightarrow M_0 = -a/b \approx 0.63 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$ – момент сил трения. (Найденный ранее $-1.95 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$).

Вычислим $I = 1/b \approx 0.0158(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$.

Оценим погрешность I . Из формулы выше следует, что $\varepsilon_I = \varepsilon_b$.

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle \beta_0^2 \rangle - \langle \beta_0 \rangle^2}{\langle M_T^2 \rangle - \langle M_T \rangle^2} - b^2} \approx 1.74(1/\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

$$\varepsilon_b = \sigma_b/b \approx 0.028$$

$$\text{Тогда } \sigma_I = \varepsilon_I I = \varepsilon_b I \approx 0.005(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

В итоге имеем:

$$I = (0.0158 \pm 0.0005)\text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Проведём измерения зависимости углового ускорения от момента инерции ситемы.

$m_T = 106.17(\text{г})$ – масса груза $r = 1.78(\text{см})$ – радиус шкива

По формуле (3) имеем:

$$(I + m_T r^2)\beta = m_T g r - M_{\text{тр}}$$

$$I \gg m_T r^2 \Rightarrow I_i \approx \frac{m_T g r - M_{\text{тр}}}{\beta_i}$$

Полученные значения I_i занесём в таблицу и построим по ним график $I(R^2)$.

$R, \text{см}$	$k, 1/\text{с}$	$\beta, \text{рад/с}^2$	$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
17	-0.0177 ± 0.0062	1.004 ± 0.0015	0.0182
15	-0.1540 ± 0.0030	1.1491 ± 0.0011	0.159
13	-0.0136 ± 0.0015	1.3941 ± 0.0011	0.0131
18	-0.0163 ± 0.0017	0.9090 ± 0.0023	0.2201

Полученные по МНК коэффициенты прямой $I = a + bR^2$ равны:

$$a \approx 0.00564(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

$$b \approx 0.448(\text{кг})$$

Вычислим I по формуле:

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2)$$

где I_0 – момент инерции системы без грузов, а $I_i = \frac{1}{12}m_i h^2 + \frac{1}{4}m_i(a_1^2 + a_2^2)$. Поскольку массы грузов и расстояния до центра масс почти не отличаются $\sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2) \approx 4I_1$. Вычислим эту величину и получим, что $4I_1 \approx 7.98 \cdot 10^{-5}(\text{кг} \cdot \text{м}^2) \ll a \Rightarrow I_0 \approx a$.

Тогда $\sigma_I = \sigma_a = \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 - b^2 (\langle R^4 \rangle - \langle R^2 \rangle^2)}{n}} \approx 0.00002(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$

Имеем

$$I_0 = (0.00564 \pm 0.00002)(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

Найдём I_0 другим способм. Измерим k и β_0 при перегрузке массой $m_{\text{н}} = 106.17(\text{г})$ без грузов на маятнике. Полученные данные занесём в таблицу.

$k, 1/\text{с}$	$\beta_0, (\text{рад}/\text{с}^2)$
-0.0452 ± 0.0031	3.238 ± 0.006
-0.0407 ± 0.0056	3.189 ± 0.009
-0.0839 ± 0.001	3.776 ± 0.002

$$\langle \beta_0 \rangle = 3.401(\text{рад}/\text{с}^2)$$

$$I_0 \approx \frac{m_{\text{н}} g r - M_0}{\beta_0} \approx 0.00537(\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

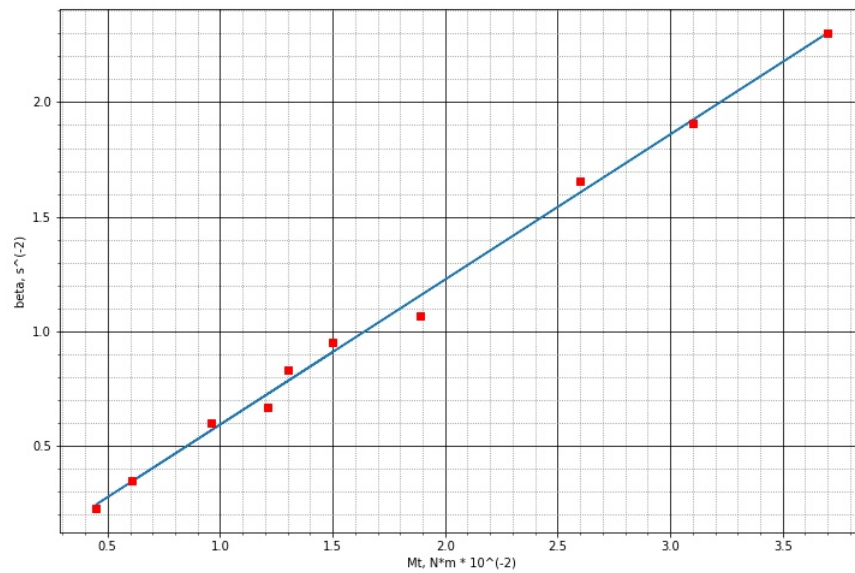


График зависимости $\beta_0 = a + bM_T$

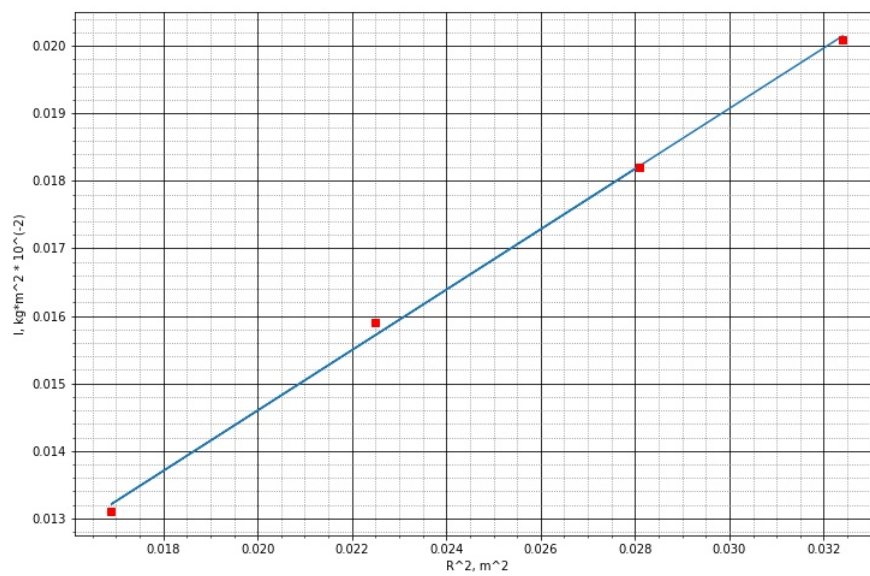


График зависимости $I = a + bR^2$

Вывод

Мы убедились, что угловое ускорение маятника обратно пропорционально моменту инерции тела и прямо пропорционально моменту прикладываемых сил. Помимо этого было выяснено, какой вклад в общий момент сил вносит момент силы трения в оси вращения.