# Работа 5.6
# Измерение $\beta$-спектров с помощью сцинтилляционного пластикового детектора

Валеев Рауф Раушанович
группа 825

2 декабря 2020 г.

**Цель работы:** Измерить $\gamma$ и $\beta$-спектры $^{137}Cs$, $^{90}Sr$, $^{36}Cl$, $^{60}Co$ и $^{22}Na$. И с помощью них измерить граничные энергии электронов и позитронов, энергию края комптоновского рассеяния.

# Теория

## Принцип $\beta$-распада

Для спектрометрии гамма-излучения используется обычно неорганический кристалл $NaI(Tl)$. На рис. 1 в качестве примера показан спектр $^{60}Co$. Следует подчеркнуть, что в подавляющем большинстве случаев искусственные источники гамма-излучения являются бета-источниками, в которых после бета-распада образуется дочернее ядро в возбужденном состоянии. В данном случае мы имеем дело с бета-переходом из $^{60}Co$ в ядро $^{60}Ni$, как это показано на рисунке. Время жизни этого гамма-источника определяется периодом полураспада $^{60}Co$, равного 5,2 года, а время гамма-переходов при снятии возбуждения в ядре $^{60}Ni$ очень мало ($\approx 10^{-10}$ с).

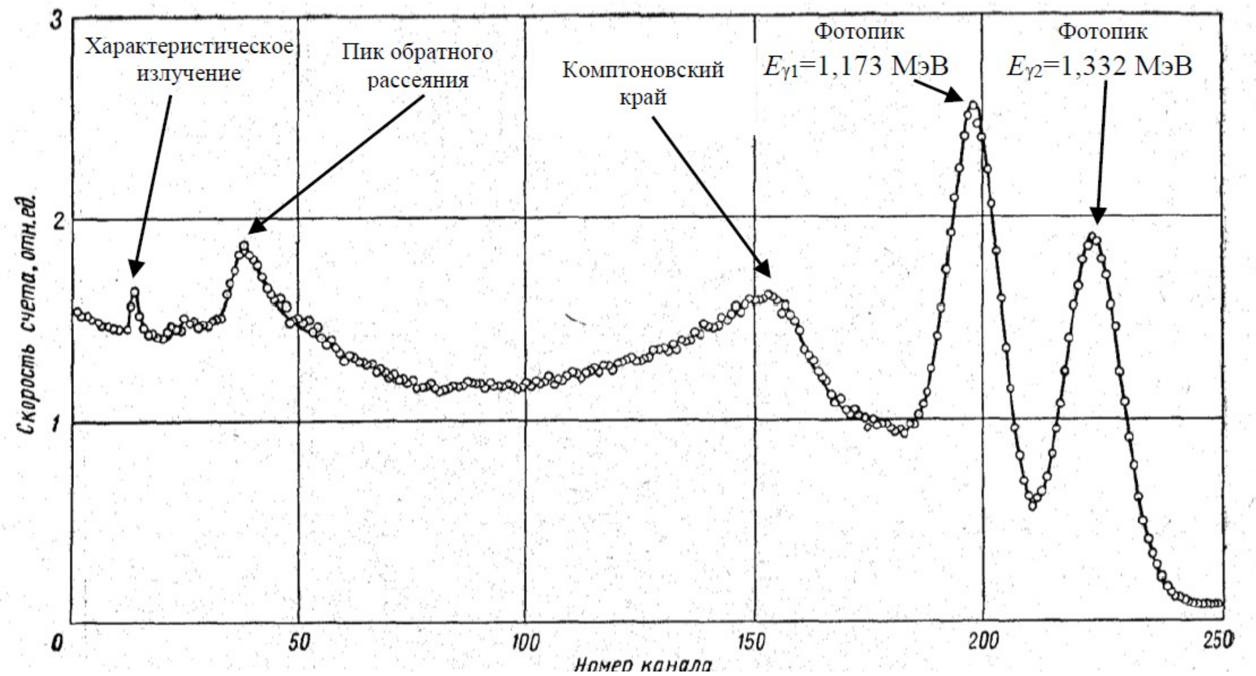


Рис. 1: Гамма-спектр радиоактивного источника $^{60}Co$, полученный при ре-гистрации излучения сцинтилляционным гамма-спектрометром с кристаллом NaI(Tl). В нижней части рисунка показана схема распада этого ядра.

На данном графике приведен $\gamma$-спектр $^{60}Co$ по которому мы в дальнейшем будем понимать для других элементов, что мы меряем.

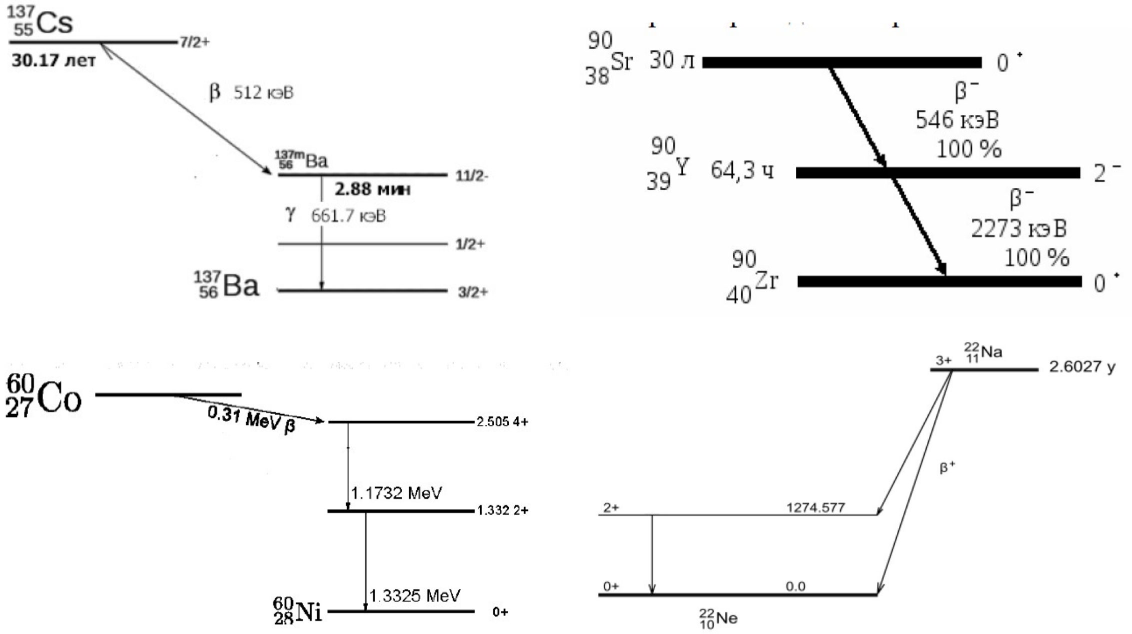


Рис. 2: Схемы распада различных элементов

# Схема установки

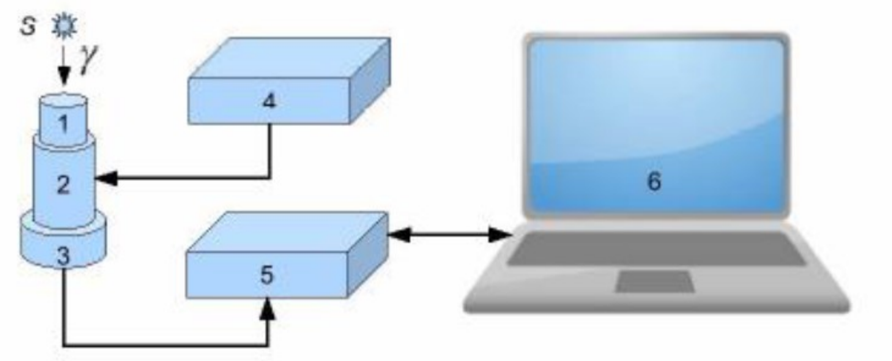


Рис. 3: Принципиальная блок-схема установки

На этом рисунке: 1 – сцинтиллятор, 2 – ФЭУ, 3 – предусилитель импульсов, 4 – высоковольтный блок питания для ФЭУ, 5 – блок преобразования аналоговых импульсов с ФЭУ в цифровой код (АЦП), 6 – компьютер для сбора данных, их обработки и хранения.

# Метод наименьших квадратов для параболы

В дальнейшем нам много где понадобится метод наименьших квадратов для параболы, поэтому здесь мы выведем формулу для определения пика параболы, чтобы использовать ее в дальнейшем.

Сама функция выглядит следующим образом:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Приведем сам метод:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

Найдем минимум этой функции:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-x_i)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -2(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)(-1)$$

Теперь решим систему частных производных равных 0 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn \end{cases}$$

Решением будет

$$a = \frac{\langle y_i x_i^2 \rangle - b\langle x_i^3 \rangle - c\langle x_i^2 \rangle}{\langle x_i^4 \rangle}$$

$$b = \frac{\langle y_i x_i \rangle \langle x_i^4 \rangle - \langle y_i x_i^2 \rangle \langle x_i^3 \rangle + c\left(\langle x_i^2 \rangle \langle x_i^3 \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_i^4 \rangle\right)}{\langle x_i^2 \rangle \langle x_i^4 \rangle - \langle x_i^3 \rangle^2}$$

$$c = \frac{\langle y_i x_i^2 \rangle^2 \langle x_i^2 \rangle^2 - \langle x_i^4 \rangle \langle x_i^3 \rangle \langle x_i^2 \rangle \langle y_i x_i \rangle + \langle x_i^4 \rangle^2 \langle y_i x_i \rangle \langle x_i \rangle + \langle x_i^4 \rangle \langle x_i^3 \rangle^2 \langle y_i \rangle - \langle x_i^2 y_i \rangle \langle x_i^4 \rangle \langle x_i^2 \rangle \langle y_i \rangle}{\langle x_i^4 \rangle \langle x_i^3 \rangle^2 - \langle y_i x_i^2 \rangle \langle x_i^4 \rangle \langle x_i^2 \rangle + \langle x_i y_i^2 \rangle \langle x_i^2 \rangle^3 - 2\langle x_i^4 \rangle \langle x_i^3 \rangle \langle x_i^2 \rangle \langle x_i \rangle + \langle x_i^4 \rangle^2 \langle x_i \rangle^6}$$

Далее находим пик как

$$x_c = \frac{-b}{2a}$$

Погрешность будет равна

$$\sigma_{x_c} = x_c \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2}$$

## Определение точки пересечения двух прямых

В некоторых опытах нам может понадобится по графику определить переломную точку. Это мы можем сделать построив две прямые по мнк по формуле для прямой: $y = kx + b$, тогда из мнк

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\frac{\langle y^2\rangle}{\langle y\rangle^2} - k^2\right)}$$

$$b = (\langle y\rangle - k\langle x\rangle)$$

$$\sigma_b = \sigma_k\sqrt{\langle x^2\rangle}$$

Тогда после аппроксимации у нас будут две прямые: $f_1(x) = k_1x + b_1, f_2(x) = k_2x + b_2$.

Найдем их точку пересечения. Будем все делать только для $x$, поскольку нас интересует только номер канала

$$x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - b_2}$$

Из этого следует, что

$$\sigma_x = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{b_1}}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{b_2}}{b_2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k_1}}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{k_2}}{k_2}\right)^2}$$

# Ход работы

Для начала замерим фон, для этого удалим из свинцового блока все образцы, после чего замерим спектр.

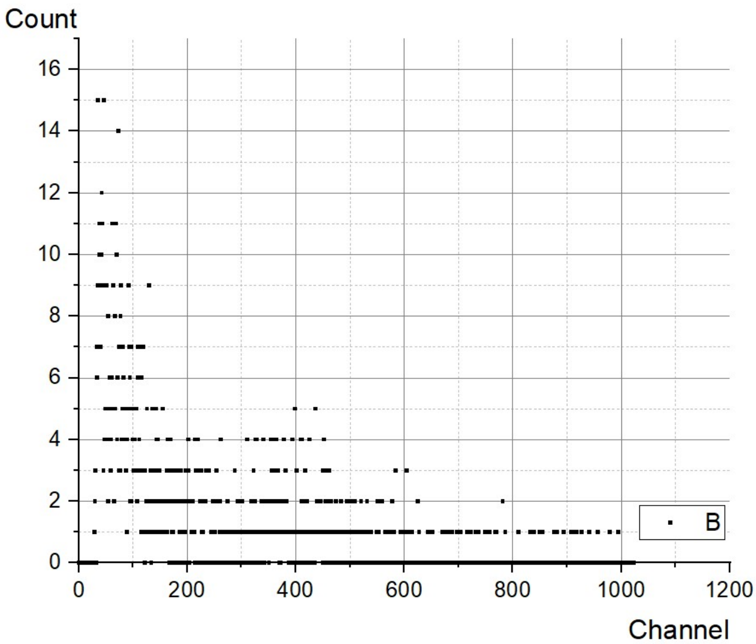


Рис. 4: Спектр фонового шума

Как мы увидим в дальнейшем, средняя амплитуда спектра фонового шума отличается на 3 порядка от амплитуды пиков, которые мы меряем, из чего следует вывод, что наша установка хорошо изолирована от внешних частиц.

## $\mathbf{Cs}^{137}$

Построим график распределения частиц и по нему проведем нормировку каналов по энергии. При распаде $Cs^137$ преимущественно возникают электроны с граничной энергией $0,512$ МэВ. Кроме того возникают электроны внутренней конверсии с энергией $0,624$ МэВ. Однако комптоновский край от гамма-квантов накладывается на пик электронов, поэтому мы нормируем только по энергии внутренней конверсии.

Для сцинтилляционного детектора номер канала пропорционален энергии электронов. Зная номер канала $N_k$ и энергию $E_k$ конверсионных электронов, постройте линейный калибровочный график зависимости номера канала $N_i$ от энергии $E_i$: $N_i = aE_i$.

По графику мы можем определить, что пик находится в $157,2 \pm 0,2$ канале. Пик определяем по параболе, найдем его так, как было расписано в начале работы.

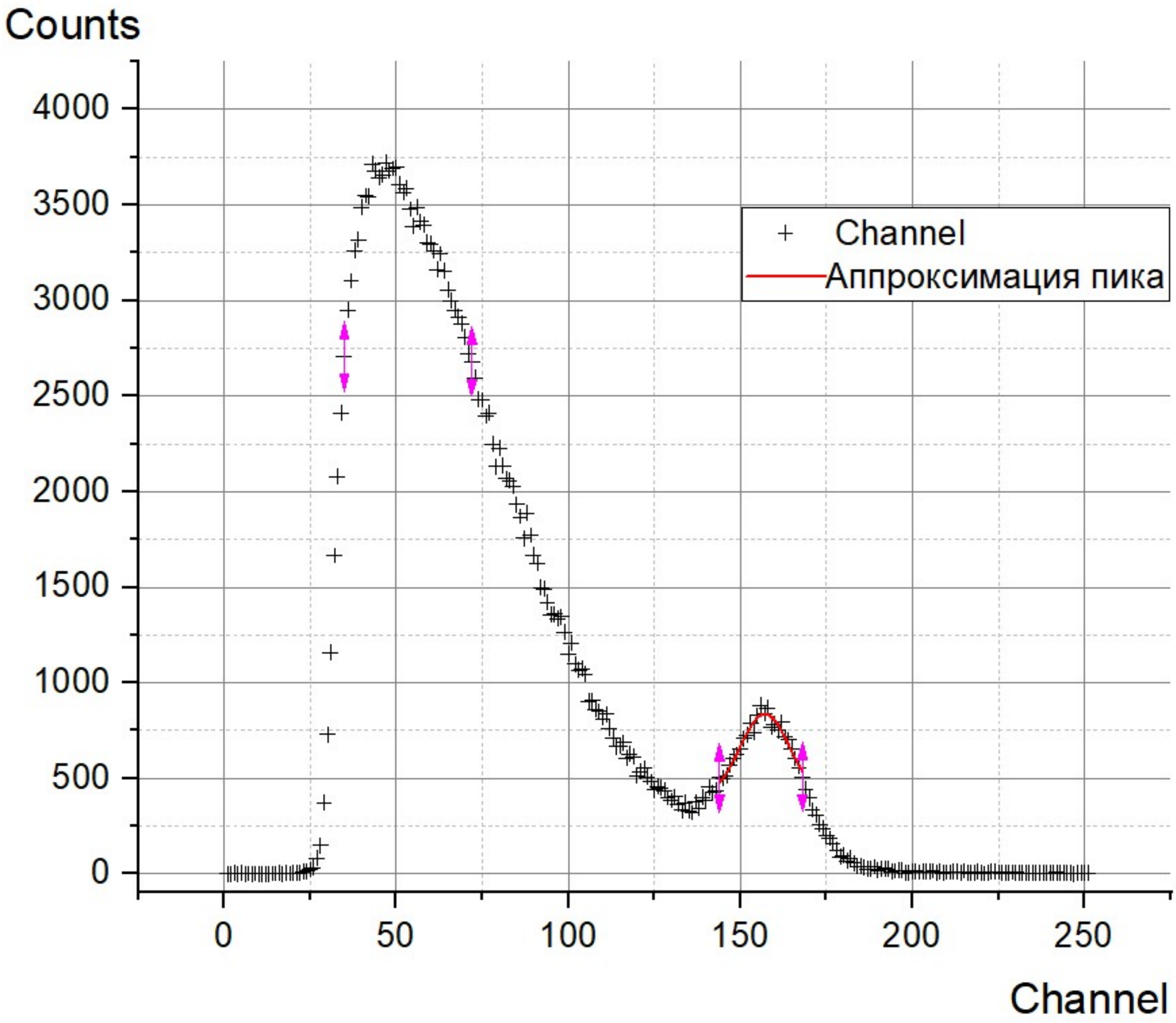


Рис. 5: $Cs^{137}$

Далее проводим нормировку:

$$a = \frac{N_k}{E_k} = 251,9 \pm 0,3 \frac{\text{канал}}{\text{МэВ}}$$

### $Cs^{137}$ с монетой

Сделаем то же, что мы делали в предыдущем пункте, только найдем пик от гамма квантов

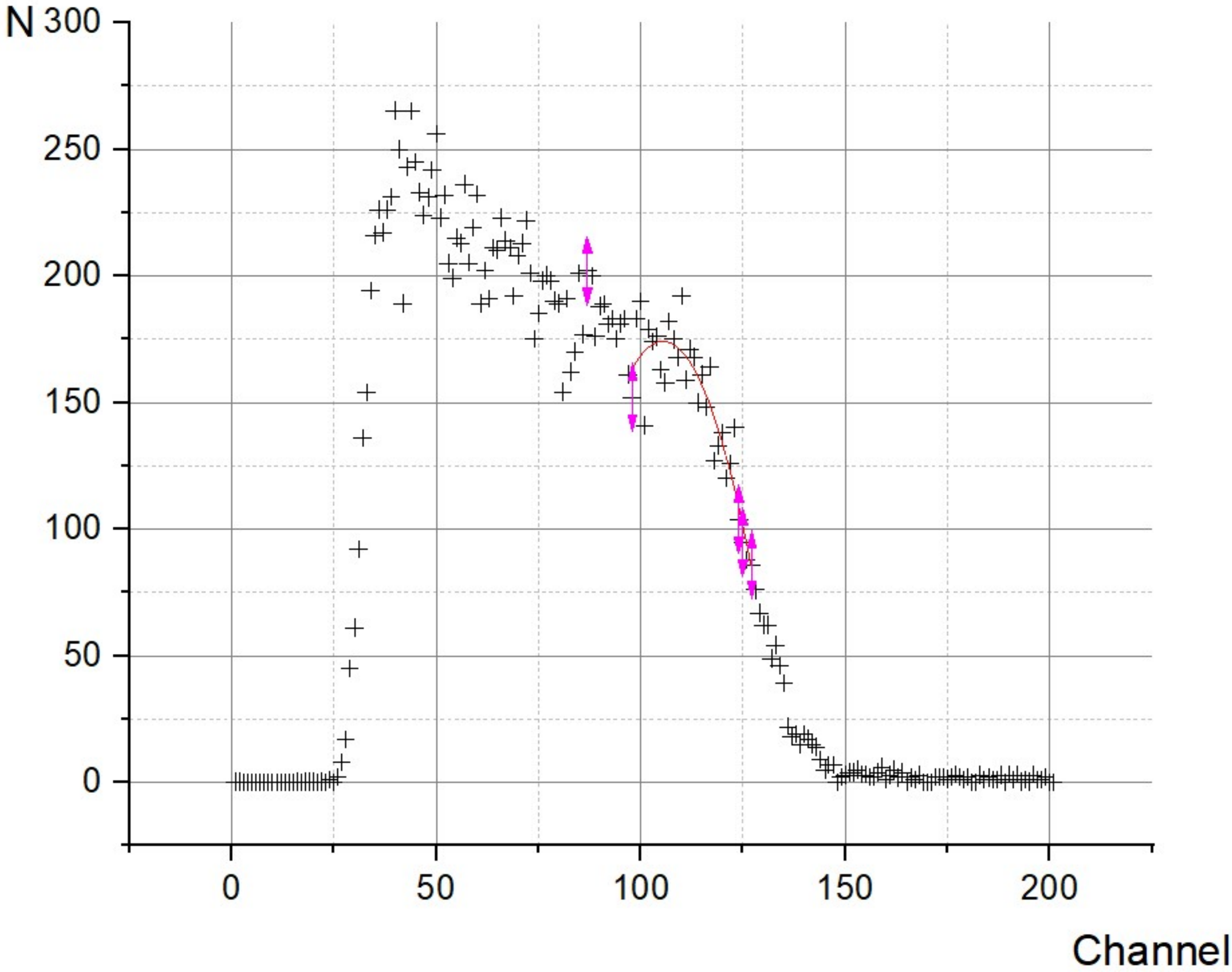


Рис. 6: $Cs^{137}$ с монетой

Пик в точке $168 \pm 1$, значит

$$E_\gamma = \frac{a}{N} = 0,666 \pm 0,01\text{МэВ}$$

Погрешность находим по формуле

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{\sigma_a^2}{a^2} + \frac{\sigma_N^2}{N^2}}$$

Что в пределах погрешности совпадает с реальным значением $0,664$ МэВ.

## $Cs^{137}$ максимальная энергия электронов

Найдем максимальную энергию электронов по разности графиков для цезия и цезия с монетой.

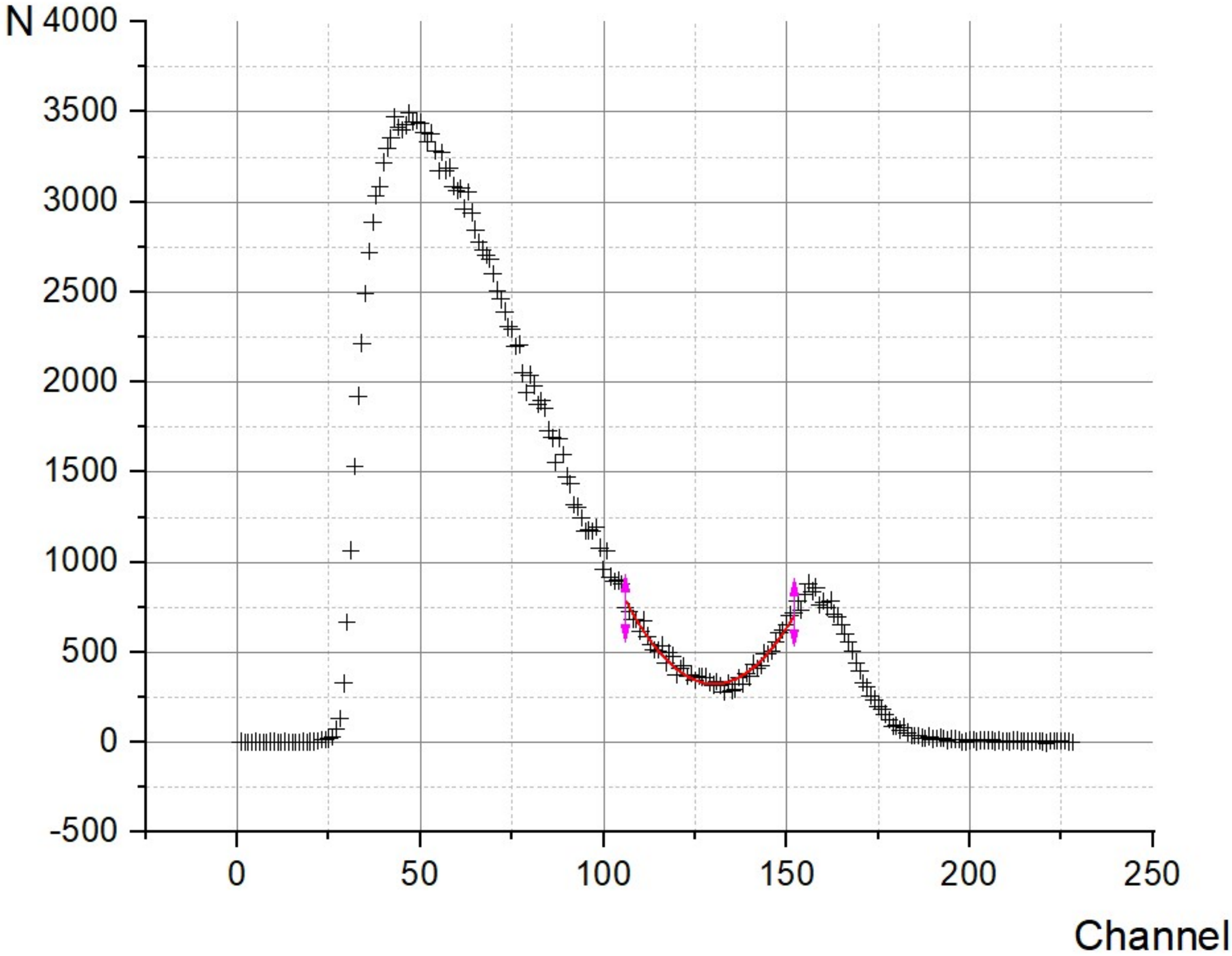


Рис. 7: Разность графиков для $Cs^{137}$

Пик в канале $131,2 \pm 0,6$. Значит

$$E_{max} = 0,51 \pm 0,01 \text{МэВ}$$

Что в пределах погрешности совпадает с теоретической оценкой

$$E_t = 0,512 \text{МэВ}$$

### $\mathbf{Sr}^{90}$

Сделаем то же, что и в предыдущих пунктах, только будем искать энергию из точек перегиба, как написано в теории.

В итоге мы получаем, что $x_1 = 127 \pm 3$, $x_2 = 533 \pm 5$.

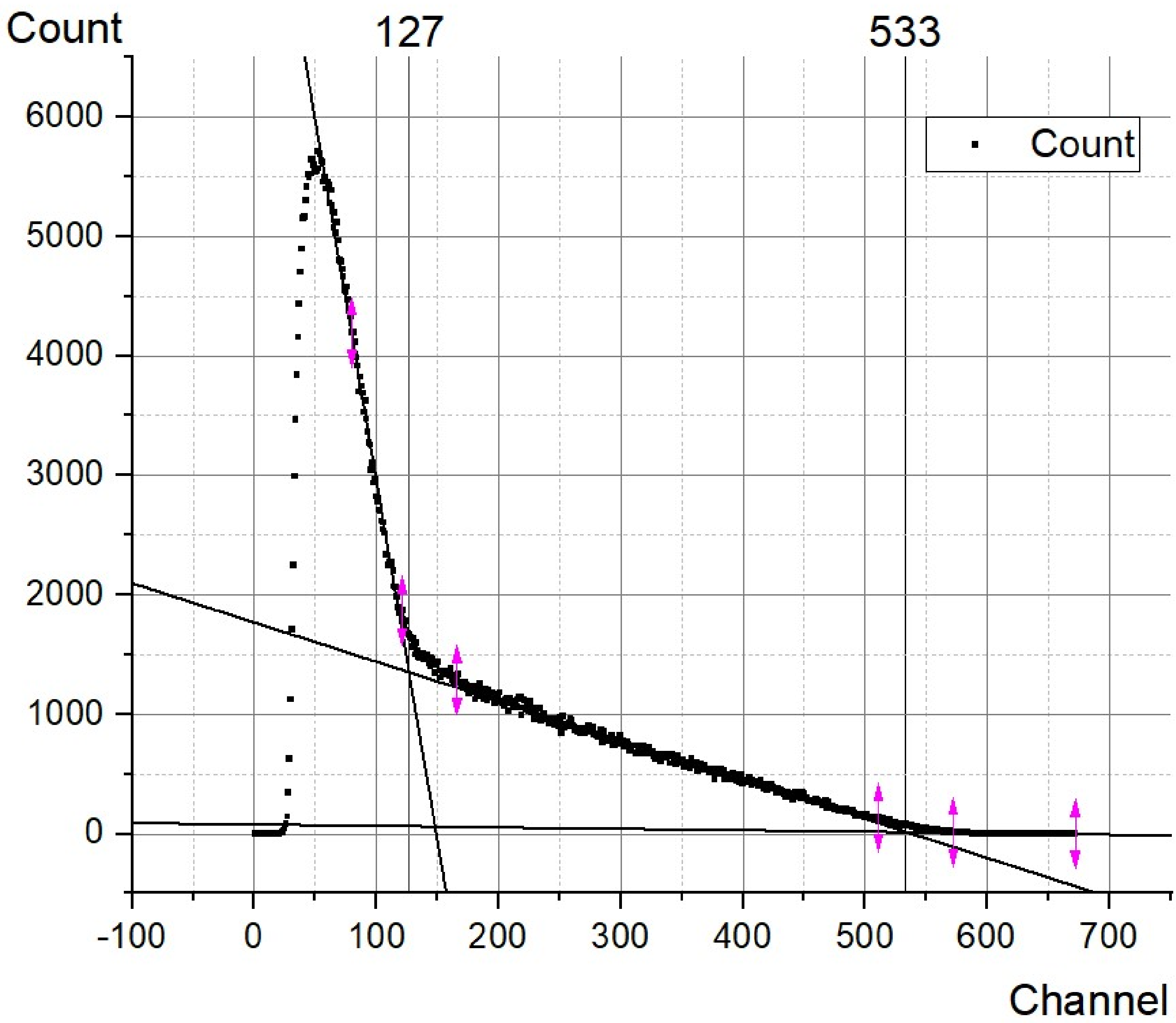


Рис. 8: $\mathrm{Sr}^{90}$

По этим перегибам мы получаем, что

$$E_1 = 0,51 \pm 0,02\text{МэВ}$$

$$E_2 = 2,11 \pm 0,1\text{МэВ}$$

Что с точностью до погрешностей совпадает с теоретическими данными $E_{1t} = 0,546$ МэВ, $E_2 = 2,273$ МэВ.

## $Cl^{36}$

Здесь нам нужно найти предельную энергию электронов которую мы так же определим как точку пересечения двух прямых

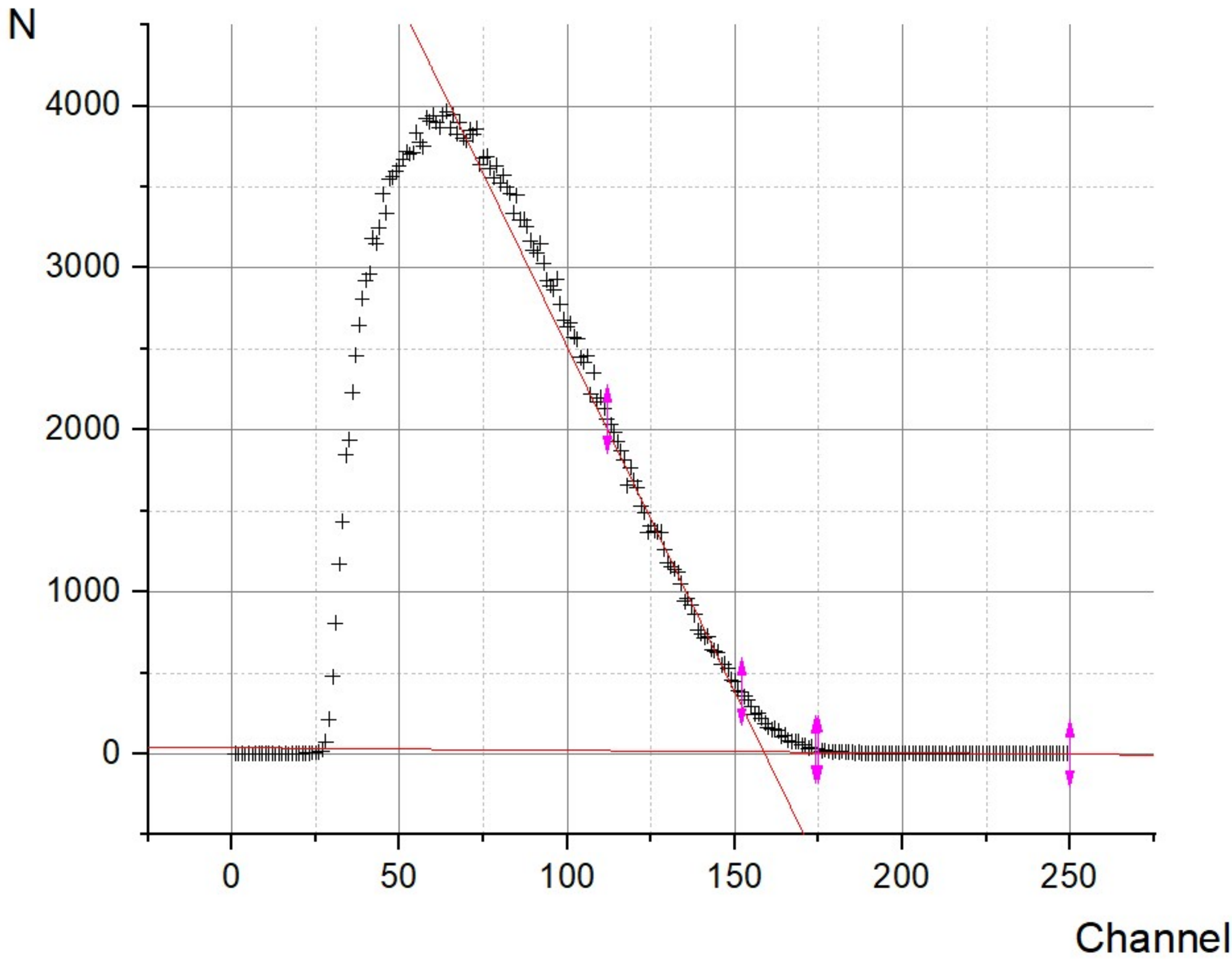


Рис. 9: $Cl^{36}$

В итоге получаем, что $x = 161 \pm 5$. А энергия получается

$$E = 0,64 \pm 0,03\text{МэВ}$$

Что с точностью до 2 сигма совпадает с теоретическим значением

$$E_t = 0,714\text{МэВ}$$

## Co$^{60}$

Найдем граничные энергии для двух групп электронов

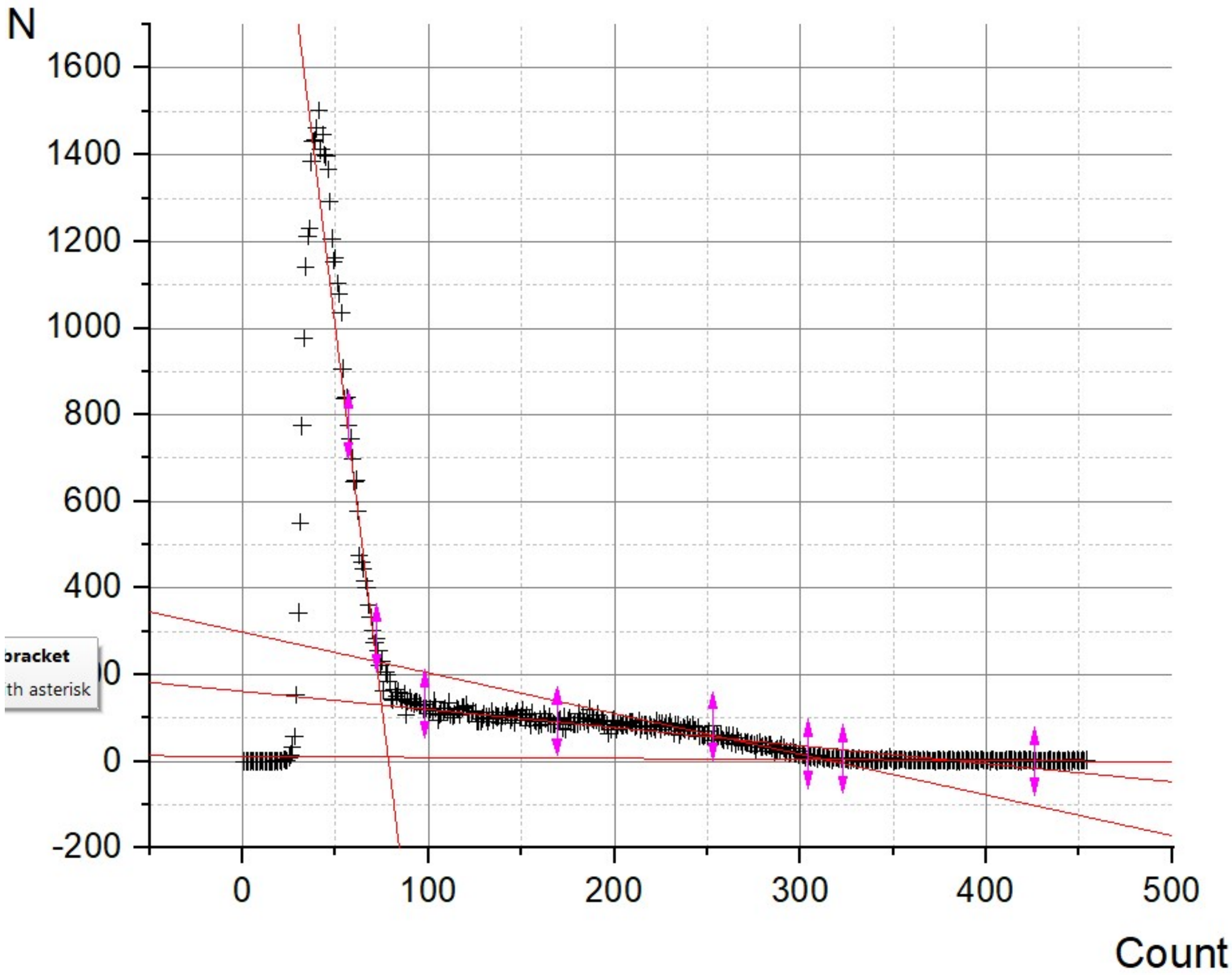


Рис. 10: Co$^{60}$

Номера каналов найдем как точки пересечения двух прямых: $x_1 = 0,29 \pm 0,02$, $x_2 = 300 \pm 20$ значит

$$E_1 = 0,29 \pm 0,02 \text{МэВ}$$

$$E_2 = 1,2 \pm 0,1 \text{МэВ}$$

Что с точностью до погрешностей совпадает с теоретическими

$$E_{1t} = 0,314 \text{МэВ}$$

$$E_{2t} = 1,48 \text{МэВ}$$

### $Co^{60}$ с монетой

Из данного графика найдем край комптоновского рассеяния

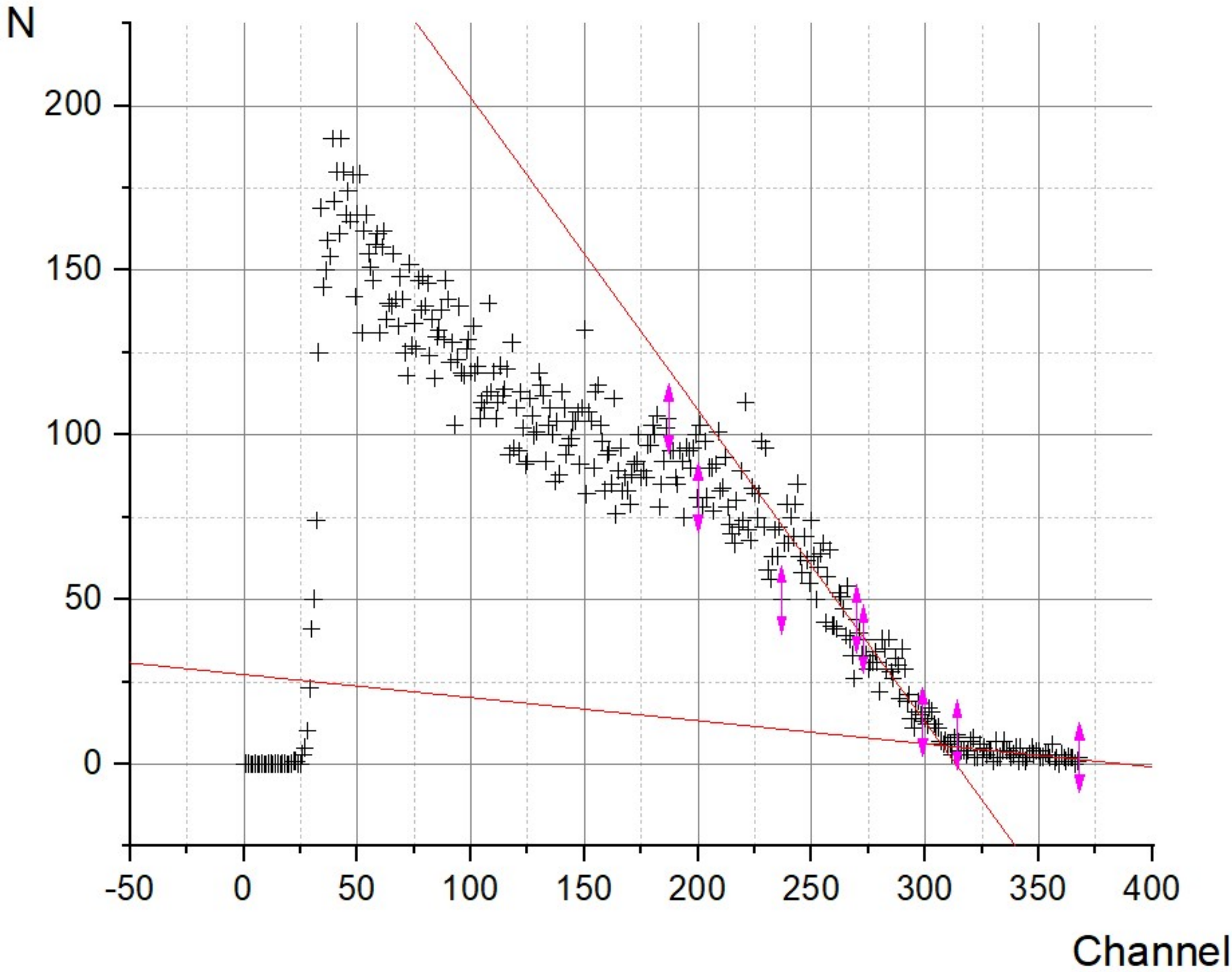


Рис. 11: $Co^{60}$

В итоге получаем $x = 310 \pm 30$.
Из этих данных мы получаем, что энергия равна

$$E = 1,23 \pm 0,12 \text{МэВ}$$

Что с точностью до погрешности совпадает с теорией

$$E_t = 1,173 \text{МэВ}$$

## Граничная энергия позитронов при распаде $Na^{22}$

Данную энергию мы получим из разности графиков с монетой и без.

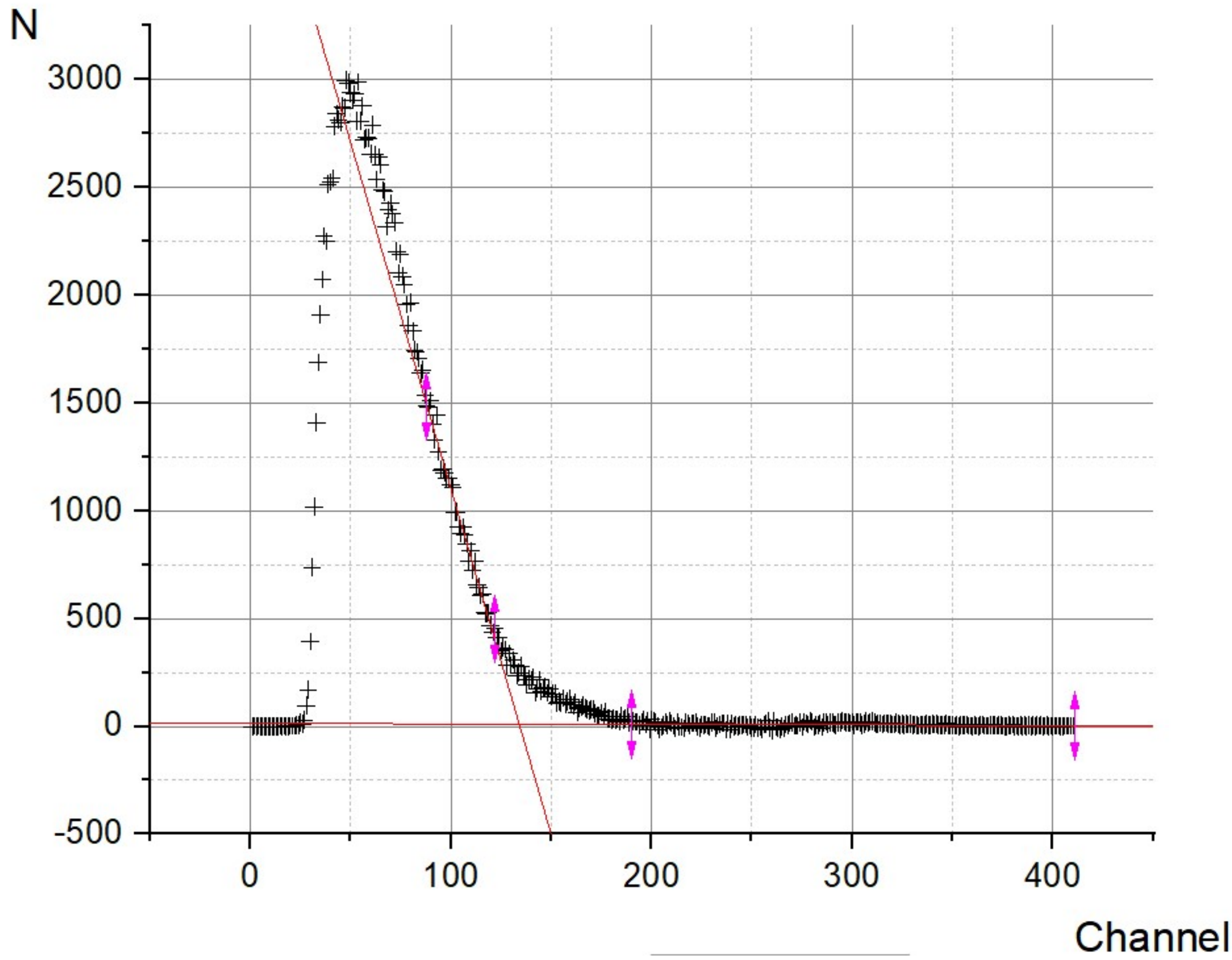


Рис. 12: Разность с монетой и без для $Na^{22}$

Из этого графика получаем, что $x = 134 \pm 5$.Отсюда

$$E = 0,533 \pm 0,011 \text{МэВ}$$

Что совпадает с теоретическим значением, равным

$$E_t = 0,545 \text{МэВ}$$

### Край комптоновского рассеяния для двух гамма-квантов

Эти энергии мы снимем для графика без монетки

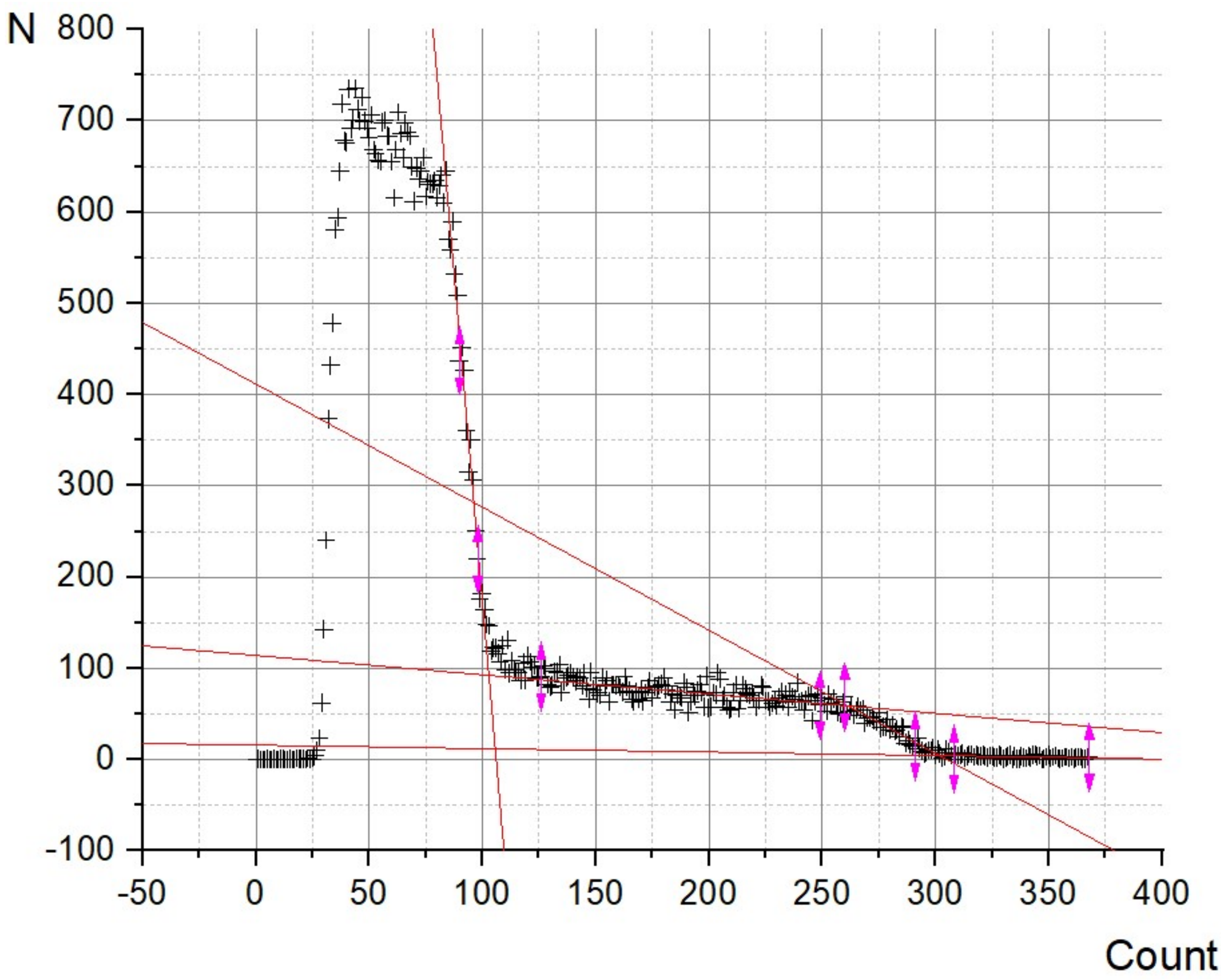


Рис. 13: $Na^{22}$ без монеты

В итоге мы получаем, что наши энергии равны

$$E_1 = 0,39 \pm 0,05 \text{МэВ}$$

$$E_2 = 1,23 \pm 0,04 \text{МэВ}$$

Что совпадает с теоретическими значениями.

## Вывод

Мы померяли некоторые граничные энергии для бетта-распадов различных частиц и убедились в правдивости теоретических подсчетов этих энергий.