

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау



## Лабораторная работа 1.2.4

Определении главных моментов инерции  
твёрдых тел с помощью крутильных колебаний

Авторы:  
Петров Олег  
Б02-202

# 1 Аннотация

**Цель работы:** измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тела и построить эллипсоид инерции.

**Оборудование:** установка для получения крутильных колебаний, набор исследуемых твердых тел, секундомер.

## 2 Теоретические сведения

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяется пространственным распределением. Оно характеризуется тензором инерции тела. Тензор инерции твердого тела является симметричным тензором 2-ого ранга  $J \in T_2^0(V)$  и имеет 6 независимых компонент, которые в прямоугольной декартовой системе координат выражаются как:

$$J_{ij} = \int (\delta_{ij}r^2 - r_i r_j) dm = J_{ji}, \quad J = J_{ij} \cdot h^i \otimes h^j \quad (1)$$

где  $r$  — расстояния от точек до центра, относительно которого вычисляется тензор инерции, а  $r_i$  — координатные компоненты соответствующих отрезков,  $i$  и  $j$  — номера координат (от 1 до 3).

Если для какой либо системы координат все 6 компонент известны, то момент инерции тела относительно произвольной оси  $l$ , проходящей через начало координат может быть вычислен по формуле:

$$J_l = n^j n^i J_{ij} = \vec{n}^T J \vec{n} \quad (2)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор-столбец который задает направление оси,  $J$  — тензор инерции. А момент импульса  $\vec{L}$  и вращательная энергия тела  $E_{\text{вращ}}$  тогда будут выражаться как:

$$E_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot J \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega^i J_{ij} \omega^j \quad (3)$$

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}, \quad L_i = \sum_j J_{ij} \omega^j \quad (4)$$

Отложим вдоль оси  $l$  из начала координат радиус-вектор  $r$  равный по длине  $1/\sqrt{J_l}$ . Проведем множество таких отрезков, соответствующих различным направлениям оси  $l$ . Геометрическое место концов указанных отрезков, является поверхность второго порядка — эллипсоид. Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Он жестко связан с телом для которого он построен. Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Длина отрезка  $r$  будет определять момент инерции тела относительно оси  $l$ :

$$J_l = \frac{1}{r^2} \quad (5)$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга может быть диагонализирован некоторой заменой координат. Пусть система координат, в которой он диагонализирован имеет оси  $Ox, Oy, Oz$ , тогда эти оси совпадают с главными осями тела. Полученные диагональные элементы  $J_x, J_y, J_z$  называются главными моментами инерции тела, а уравнение эллипсоида инерции в этих координатах примет вид:

$$1 = J_x r_x^2 + J_y r_y^2 + J_z r_z^2 \quad (6)$$

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -f \cdot \phi \quad (7)$$

Здесь  $I$  и  $I_p$  - моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения,  $\phi$  - угол поворота рамки, меняющийся со временем  $t$ ,  $f$  - модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \quad (8)$$

На рисунке показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ .

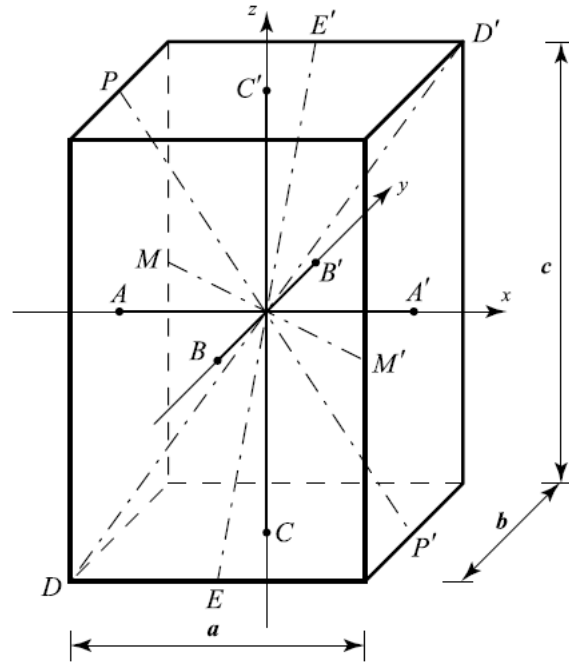


Рис. 1: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Момент инерции  $I_D$  при вращении относительно диагонали  $DD'$  выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \quad (9)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний получаем соотношение между периодами колебаний относительно осей  $DD'$ ,  $EE'$ ,  $MM'$  и  $PP'$  с периодами крутильных колебаний относительно главных осей.

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_D^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2$$

,

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2$$

,

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2$$

,

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2$$

. Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

### 3 Экспериментальная установка

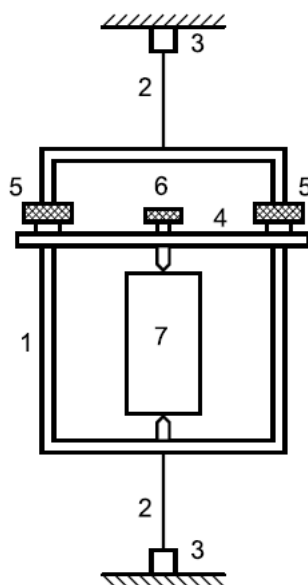


Рис. 2: Схема установки

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рисунке. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

### 4 Результаты эксперимента и обработка данных

- Для начала установим геометрические параметры исследуемых тел. Штангенциркулем измеряем размеры и заносим в табличку.

-	m, гр	d, см	h, см
Мелкий цилиндр	1569	12.45	1.68
Средний цилиндр	2264	88.3	49

Таблица 1: Измерения для цилиндров

m, гр	a, см
1084	92.7

Таблица 2: Измерения для куба

m, гр	c, см	b, см	a, см
2082	150.3	50.5	100.2

Таблица 3: Измерения для прямоугольника

Теперь по этим данным вычислим главные моменты инерции и их погрешность:

$$\varepsilon \approx \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2} \approx 0.1\%$$

**Маленький цилиндр** Моменты инерции относительно главных осей:  $I_z$ -относительно вертикальной оси,  $I_x$ -относительно горизонтальной оси.

$$I_z = 3.04 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2, \quad I_x = 3.08 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2$$

**Средний цилиндр**

$$I_z = 2.21 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2, \quad I_x = 2.66 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2$$

**Куб** Для куба момент инерции относительно любой оси равны.

$$I_z = 9.32 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2$$

**Параллелепипед** Моменты инерции относительно главных осей:  $I_z$ -относительно вертикальной оси  $CC'$ ,  $I_x$ -относительно горизонтальной оси  $AA'$ ,  $I_y$ -относительно горизонтальной оси  $BB'$

$$I_z = 13.11 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2, \quad I_x = 26.17 \pm 0.02 \text{ гр} \cdot \text{м}^2, \quad I_y = 33.97 \pm 0.02 \text{ гр} \cdot \text{м}^2$$

- Далее определим периоды колебаний для пустой рамки, и всех остальных тел при различном положении относительно оси колебаний. Отсчитываем 10-15 колебаний, проводя каждое измерение 3 раза. Также перед каждой серией измерений убеждаемся в правильности выборе амплитуды: амплитуда выбрана правильно, если при уменьшении ее в два раза период колебаний, определяемый по 10-15 колебаниям, остается тем же. Заносим данные для разных фигур в табличку. Погрешность измерения времени обусловлена ошибкой округления и равна:  $\varepsilon_T \approx 0.5\%$  при 10 измерениях и  $\varepsilon_T \approx 0.3\%$  при 15 измерениях.

**Рамка** Измерения для рамки:

Рамка	$N$	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	$T, c$
$T_{OZ}$	10	44.4	44.3	44.4	4.44

**Цилиндры** Измерения для цилиндров:

Цилиндр маленький	$N$	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	$T, c$	$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2}c^{-1}$
$T_{OZ}$	15	90.2	90.7	90.1	6.02	24.58
$T_{OX}$	15	79.1	79.3	79	5.28	35.10
Цилиндр средний	$N$	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	$T, c$	$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2}c^{-1}$
$T_{OZ}$	10	55.8	55.7	55.9	5.58	29.59
$T_{OX}$	10	52.6	52.4	52.4	5.25	35.77

**Куб** Измерения для куба:

куб	$N$	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	$T, c$	$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2}c^{-1}$
$T_{EE'}$	15	79.2	78.8	79.5	5.28	35.05
$T_{DD'}$	15	78.8	79	79	5.26	35.41
$T_{OZ(CC')}$	10	53	52.8	52.7	5.28	34.92

**Параллелепипед** Измерения для параллелепипеда:

Параллелепипед	$N$	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	$T, c$	$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2} c^{-1}$
$T_{OZ(CC')}$	10	55.7	55.6	55.4	5.56	29.93
$T_{OX(AA')}$	10	65.6	64.9	65.1	6.52	20.94
$T_{OY(BB')}$	10	69.9	69.9	69.7	6.98	18.55
$T_{DD'}$	10	59.3	59.5	59.5	5.94	25.31
$T_{EE'}$	10	57.3	56.9	57.1	5.71	27.85
$T_{MM'}$	10	66.1	66.6	65.9	6.62	20.37
$T_{PP'}$	10	59.2	58.5	58.9	5.89	25.87

- Проверим теоретически предсказанные соотношения для связи периодов колебаний вокруг побочных осей  $DD', EE', MM', PP'$  с периодами колебаний вокруг главных осей  $OX, OY, OZ$  пользуясь формулами . . . . Учтем также что параметры тел были измерены намного более точнее чем период колебаний, поэтому можем считать, что  $\varepsilon_{T^2} \approx 1\%$

**Ось DD'** теоретический результат:  $T_{DD'}^2 = 35.5 \pm 0.1 c^2$ ,  
экспериментальный результат:  $T_{DD'}^2 = 35.3 \pm 0.2$

**Ось EE'** теоретический результат:  $T_{EE'}^2 = 32.7 \pm 0.1 c^2$ ,  
экспериментальный результат:  $T_{EE'}^2 = 32.6 \pm 0.2$

**Ось MM'** теоретический результат:  $T_{MM'}^2 = 43.8 \pm 0.1 c^2$ ,  
экспериментальный результат:  $T_{MM'}^2 = 43.8 \pm 0.2$

**Ось PP'** теоретический результат:  $T_{PP'}^2 = 34.5 \pm 0.1 c^2$ ,  
экспериментальный результат:  $T_{PP'}^2 = 34.6 \pm 0.2$

Как видно, теоретические предсказания хорошо согласуются с экспериментальными в пределах погрешности, что подтверждает предположение о том, что оси  $OX, OY, OZ$  являются главными осями тела.

- Теперь по полученным ранее данным построим эллипсоид инерции для параллелограмма и куба. За длину радиус вектора примем  $r = 100/\sqrt{T^2 - T_p^2}$ . Строить эллипсы будем методом наименьших квадратов. Т.к параметрическое ур-ие эллипса выглядит как:  $y = b \cdot \sin(\varphi), x = a \cdot \cos(\varphi)$  То зависимость координаты  $x, y$  от соответственно  $\sin(\varphi), \cos(\varphi)$  линейная и проходит через начало координат. Тогда зная длину радиус вектора и углы под которыми направлены побочные оси к главным осям, проводим аппроксимацию методом наименьших квадратов и строим эллипс с полученными параметрами.

$$a = \frac{\langle x \cdot \cos(\varphi) \rangle}{\langle \cos(\varphi)^2 \rangle}, \quad b = \frac{\langle y \cdot \sin(\varphi) \rangle}{\langle \sin(\varphi)^2 \rangle}$$

**Цилиндры** Мелкий цилиндр:  $a = 35.1 \cdot 10^{-2} c^{-1}, b = 24.6 \cdot 10^{-2} c^{-1}$

Средний цилиндр:  $a = 35.8 \cdot 10^{-2} c^{-1}, b = 29.6 \cdot 10^{-2} c^{-1}$

**Куб** Для куба эллипсоид инерции - шар. Примим за его радиус средний по всем сериям измерений.  $r = 35.0 \cdot 10^{-2} c^{-1}$

**Параллелепипед** Проводим аппроксимацию эллипсом для 3 разных сечений и заносим результаты в табличку.

Параллелограмм	a	b
$XOZ$	22.8	27.5
$YOZ$	20.1	28.6
$XOY$	20.6	19.1

Причем так как в двух разных сечениях одной из осью является одна и та же ось вращения с одним и тем же моментом инерции, то разумно принять за истинное значение полуосиоси, усредненное по этим двум аппроксимациям, а за ее погрешность, ее париа-цию. Тогда для итоговых значений полуосей и их погрешностей имеем:  $c = r_{OZ(CC')} = 28.05 \pm 0.55 \cdot 10^{-2} c^{-1}$

$$a = r_{OX(AA')} = 21.07 \pm 1.1 \cdot 10^{-2} c^{-1}$$

$$b = r_{OY(BB')} = 19.06 \pm 0.5 \cdot 10^{-2} c^{-1}$$

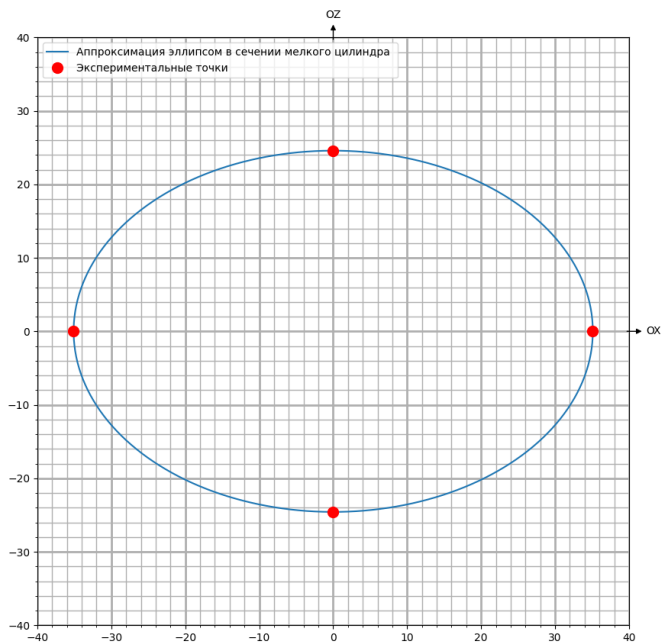


Рис. 3: Сечение эллипсоида инерции для мень- шего цилиндра

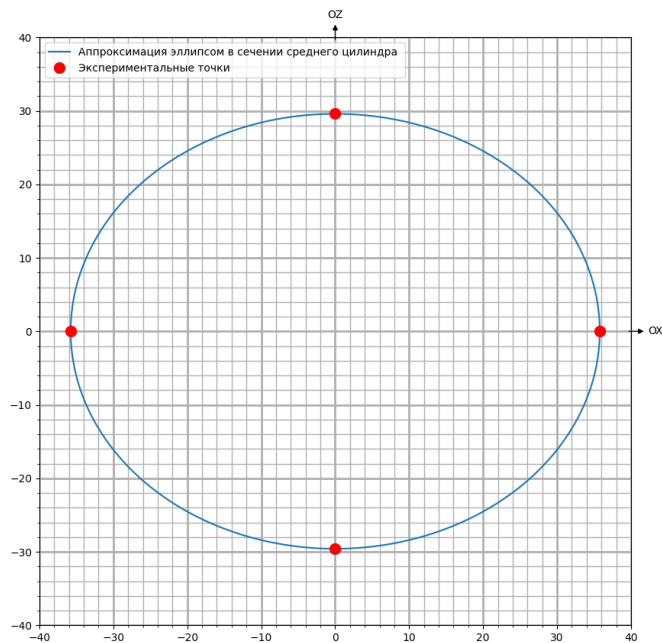


Рис. 4: Сечение эллипсоида инерции для боль- шего цилиндра

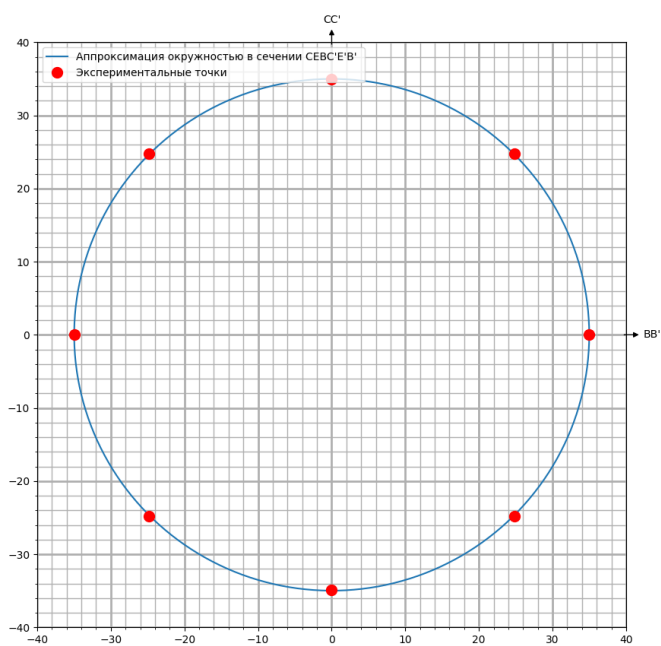


Рис. 5: Сечение эллипсоида инерции куба

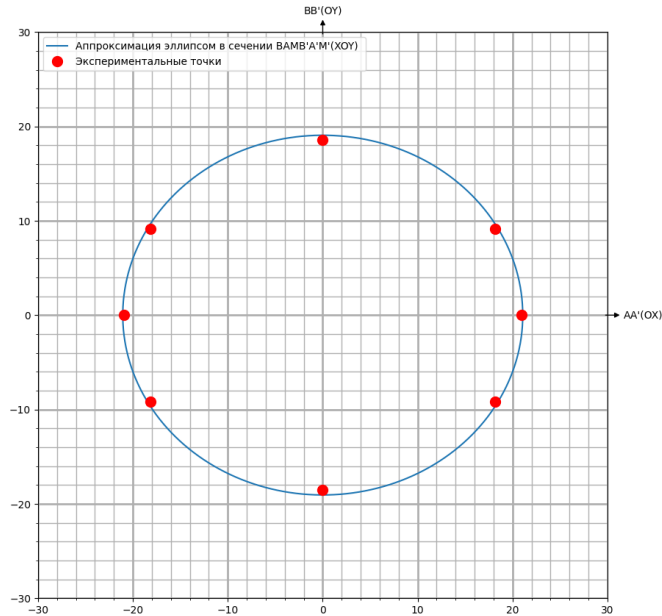


Рис. 6: Сечение эллипсоида инерции паралле- лограмма в плоскости XOY

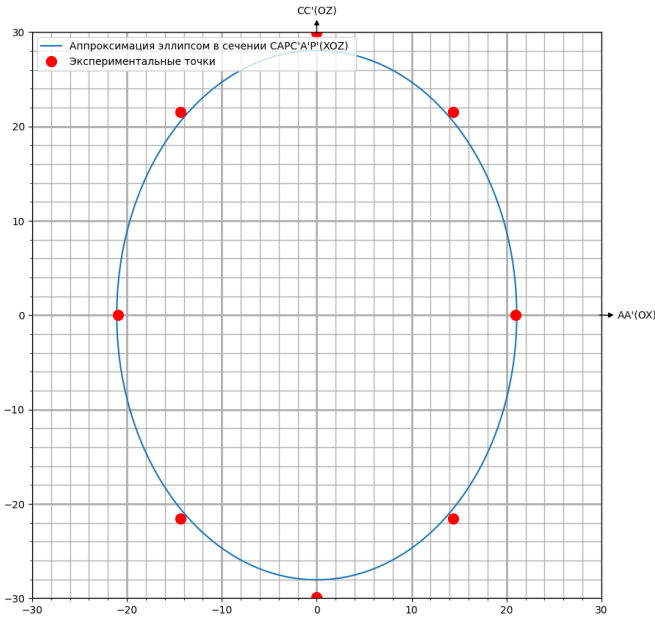


Рис. 7: Сечение эллипсоида инерции параллелограмма в плоскости XOZ

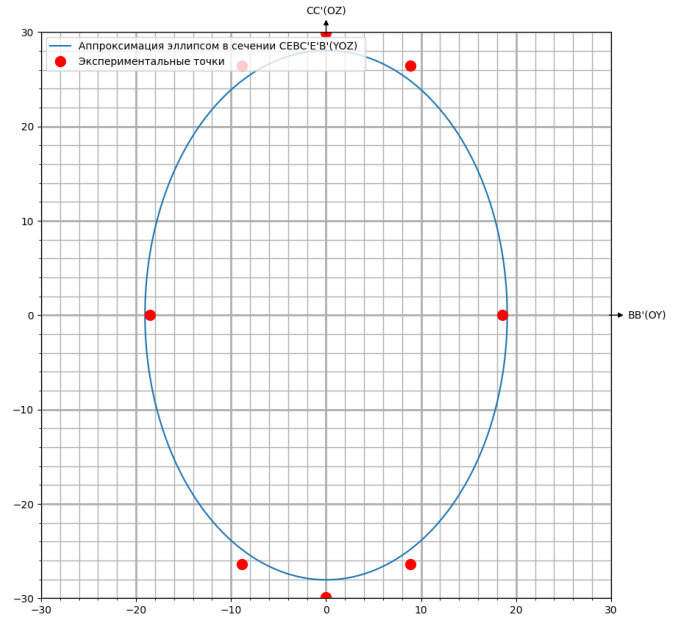


Рис. 8: Сечение эллипсоида инерции параллелограмма в плоскости YOZ

- Проверим насколько теоретически предсказанные моменты инерции для параллелограмма относительно главных осей с полученным экспериментальным результатом, пользуясь тензором инерции. Вычислим отношения моментов инерции вдоль главных осей. Погрешность экспериментального значения оценим как:

$$\varepsilon_{J_i/J_j} = 2\sqrt{\varepsilon_{ri}^2 + \varepsilon_{rj}^2} \approx 10\%$$

Погрешность теоретического пренебрежимо мала и порядка 1%.

Теоретическое значение:  $J_x/J_z = 2$ , экспериментальное  $J_y/J_z = c^2/a^2 = 1.8 \pm 0.2$

Теоретическое значение:  $J_y/J_z = 2.6$ , экспериментальное  $J_y/J_z = c^2/b^2 = 2.2 \pm 0.3$

Теоретическое значение:  $J_y/J_x = 1.3$ , экспериментальное  $J_y/J_x = a^2/b^2 = 1.2 \pm 0.1$

## 5 Выводы

В ходе работы были измерены периоды колебаний относительно различных осей. Была подтверждена теоретическая зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей. По ним были установлены положения главных осей тела и вычислены моменты инерции относительно этих осей. По этим данным был построен вид эллипсоида инерции.

Также можем заметить, что точки не идеально ложатся на построенную кривую, что вероятно обусловлено особенностями установки (затуханием, провисанием или возникающими эффектами) и случайной погрешностью, связанной со скоростью реакции человека. Таким образом использование нашей установки дает некоторую приличную погрешность, но ее точности вполне достаточно для получения интересных нас выводов. Поэтому, так как точки хорошо ложатся на эллипс, мы можем сделать вывод о справедливости теоретических формул. По виду эллипсоида инерции были вычислены соотношения между моментами инерции тела относительно главных осей, которые совпадают с теоретическим расчетом в пределах погрешности.