Физический маятник. (1.4.1 B)

Павлушкин Вячеслав

September 2021

1 Введение

Цели работы: 1) на примере измерения периода свободных колебаний физического маятника познакомиться с систематическими и случайными погрешностями, прямыми и косвенными измерениями; 2) проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения; 3) убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника; 4) оценить погрешность прямых и косвенных измерений и конечного результата.
Оборудование: металлический стержень; опорная призма; торцевые ключи; закреплённая на стене консоль; подставка с острой гранью для определения цента масс маятника; секундомер; линейки металлические длиной 30, 50 и 100 см; штангенциркуль; электронные весы; математический маятник (небольшой груз, подвешенный на нитях).

2 Теоретические сведения

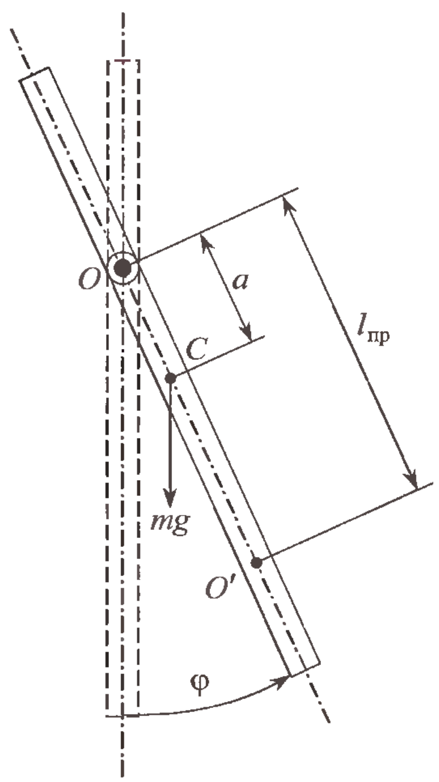

Рис. 1: Физический маятник

В работе изучается динамика движения физического маятника. Физический маятник, используемый в работе, представляет собой однородный стальной стержень массы m, длина которого l много больше ее диаметра. На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника.

Второй закон Ньютона определяет динамику движения тела точечной массы m. Импульс тела $P = mv$ изменяется во времени t под действием силы F:

$$F = \frac{dP}{dt}$$

Если рассмотреть точечную массу, которая движется по окружности радиуса r с угловой скоростью ω, тогда линейная скорость $v = \omega r$, то формулу для силы можно преобразовать:

$$Fr = \frac{dP}{dt}r$$

$$M = \frac{dP}{dt}r = \frac{dL}{dt}$$

где $L = J\omega$, и $J = mr^2$. Величину J называют *моментом инерции.*

$$J = \sum_{i=1} m_i r_i^2$$

Посчитаем момент инерции для данного нам стержня, при вращении вокруг препендикулярной стержню оси. Для этого разобьем стержень на отрезки dr и $dm = m \cdot \frac{dr}{l}$ и возьмем интеграл:

$$J_c = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{mr^2}{l} dm = \frac{ml^2}{12}$$

Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние OC от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$J = \frac{ml^2}{12} + ma^2,$$

где m – масса маятника.

Период колебаний получим через аналогию с пружинным маятником, как известно:

$$T_{\text{п}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

В нашем случае, роль массы играет *момент инерции тела* J, а *жесткость пружины* k - коэффицент пропорциональности mga. Таким образом приходим к следующей формуле колебаний произвольного физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

После подстановки период колебаний, для стержня длиной l подвешенного на расстоянии a от центра, равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{1}$$

Таким образом, период малых колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний.

Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T_{\text{м}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}$$

называют приведённой длиной математического маятника. Поэтому точку O' (см. рис. 1), отстоящую от точки опоры на расстояние $l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период будет таким же, как и при качании вокруг точки O.

3 Экспериментальная установка

Тонкий стальной стержень, подвешенный на прикрепленной к стене консоли с помощью небольшой призмы, которая опирается на поверхность консоли острым основанием. Призму можно перемещать вдоль стержня, изменяя положение точки подвеса. Период колебаний измеряется с помощью секундомера, расстояния измеряются линейкой и штангенциркулем. Положение центра масс можно определить с помощью балансирования маятника на вспомогательной подставке.

3.1 Расчет поправок

Если быть честными, то для вычисления периода следует использовать формулу, учитывающую оба тела (и стержень, и призму):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\text{ст}} + J_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}}$$

Однако призма мала по размеру и массе, поэтому поправка на момент инерции призмы в условиях опыта составляет не более 0,1% $\Rightarrow$ ей можно пренебречь.

Сравним теперь моменты сил, действующие на призму и стержень при $a = 10$ см:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{M_{\text{ст}}} = \frac{m_{\text{пр}} g a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} g a_{\text{ст}}} \approx 10^{-}2$$

В данном случае поправка достигает 1% $\Rightarrow$ ей пренебречь нельзя. Учесть влияние призмы можно – исключив $a_{\text{пр}}$, изменяя положение центра сиситемы. Пусть X – расстояние от центра масс системы до точки подвеса, тогда:

$$X = \frac{m_{\text{ст}} a_{\text{ст}} - m_{\text{пр}} a_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}} + m_{\text{пр}}}$$

Исключая из двух уравнений $a_{\text{пр}}$, получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12} + a^2}{g\beta X}} \tag{2}$$

где $\beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m_{\text{ст}}}$.

4 Задание

4.1 Оценка погрешностей измерительных приборов и g

Секундомер: $\sigma_c = 0{,}01$ с
Линейка: $\sigma_{\text{лин}} = 0{,}05$ см

Погрешность g зависит от точности измерения длин и периода колебаний. Длины измеряли линейкой. Наименьшее измеренное расстояние 15 см, а наибольшее 100 см. Абсолютная погрешность линейки: $\sigma_{\text{лин}} = 0{,}05$ см. Тогда относительная погрешность длин составляет порядка $\varepsilon_{\max} \approx 0{,}3\%$ ($\frac{0{,}05}{15} \times 100\% = 0{,}3\%$).

Вывод: используемые в работе инструменты позволяют вести измерения длин с точностью вплоть до 0,1%. Для получения конечного результата с данной точностью период колебаний следует измерять с той же относительной погрешностью: не хуже, чем $\varepsilon_{\max} \approx 0{,}3\%$.

4.2 Длина стержня и множитель β

Длина стержня $l = (100{,}1 \pm 0{,}05)$ см, масса стержня $m = (868{,}9 \pm 0{,}1)$ г, масса призмы $m_{\text{пр}} = (73{,}9 \pm 0{,}1)$ г. Формула для множителя β:

$$\beta = 1 + \frac{m_{\text{пр}}}{m}$$

Рассчитаем множитель используя снятые массы: $\beta = 1 + \frac{73,9}{868,9} \approx 1{,}08505$. Погрешность β σ_β будет рассчитывается по формуле:

$$\sigma_\beta = \beta\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\text{пр}}}{m_{\text{пр}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2}$$

$$\sigma_\beta = 1{,}08505\sqrt{\left(\frac{0{,}1}{73{,}9}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{868{,}9}\right)^2} \approx 0{,}00147$$

Получаем, что $\beta = (1{,}08505 \pm 0{,}00147)$ с учетом погрешности. В соответствии с правилами округления получаем, что β следует округлять до четырех знаков после запятой: $\beta = (1{,}0851 \pm 0{,}0015)$.

4.3 Центр масс стержня и конструкции

Центр масс стержня расположен на расстоянии $b = (50,10 \pm 0{,}05)$ см от одного из его концов. Острие призмы расположено на расстоянии $a = (24{,}90 \pm 0{,}05)$ см. Сбалансировав маятник *с призмой* на острие вспомогательной установки, измерим положение центра масс конструкции $x_{\text{ц}} = 23{,}0$ см. Определение точного положения центра масс усложняется тем, что достичь точного равновесия конструкции на установке почти невозможно, поэтому погрешность измерения увеличится: $x_{\text{ц}} = (23{,}0 \pm 0{,}1)$ см.

4.4 Предварительный опыт

Установим маятник на консоли и отклоним его на малый угол $\varphi_0 \approx 5°$. Измерим время $n = 10$ полных колебаний и вычислим период колебаний $T = t/n$. Результаты 10 измерений приведем в таблице 1.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ср.
t, с	15,37	15,42	15,37	15,24	15,35	15,31	15,43	15,28	15,39	15,36	15,35
T, с	1,537	1,542	1,537	1,524	1,535	1,531	1,543	1,528	1,539	1,536	1,535
Δt, с	0,02	0,07	0,02	0,11	0,00	0,04	0,08	0,07	0,04	0,01	

Таблица 1: Результаты измерения периода колебаний

Предварительное значение ускорения свободного падения посчитаем по формуле

$$g = \frac{4\pi^2(\frac{l^2}{12} + a^2)}{T^2\beta x_{\text{ц}}} \tag{3}$$

Полученное значение равно $g = 9{,}76$ м/с^2. Отличие от табличного значения $g = 9{,}81$ м/с^2 составляет

$$\alpha = \frac{9{,}81 - 9{,}76}{9{,}81} \times 100\% = 0{,}51\%$$

Случайная погрешность измерения времени составляет

$$I_{\text{ц}}.$$

Полная погрешность измерения времени составляет

$$\sigma_{\text{t}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{случ}} + \sigma^2_{\text{c}}} = 0{,}061 \text{ с}.$$

Следовательно, с учетом погрешности период колебаний равен $T = 1{,}535 \pm 0{,}007$ с.

4.5 Оценка количества колебаний

Оценим количество колебаний маятника, по которому следует измерять его период. Период составляет $T \approx 1{,}5$ с. Поскольку $T = t/n$, погрешность периода равна $\sigma_\text{T} = \sigma_\text{t}/n$. Относительная погрешность $\varepsilon_\text{T}/T = \varepsilon_\text{t}/nT$. При требуемой погрешности $\varepsilon = 0{,}3\%$ получим $n \approx 10 - 15$.

4.6 Измерение периода колебаний для различных значений a

Изменяем положение призмы, каждый раз измеряя ее положение a относительно центра, положение центра масс системы $x_\text{ц}$ и время n полных колебаний. Результаты приведены в таблице 2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a, см	41,0	37,0	33,0	29,0	24,9	20,0	15,0	10,0	5,0
$x_\text{ц}$, см	37,9	34,0	30,2	26,7	23,0	18,4	13,6	9,2	4,4
n	10	10	10	10	10	10	10	10	10
t_1, с	15,70	15,61	15,34	15,28	15,37	15,91	17,02	19,48	26,64
t_2, с	15,71	15,56	15,29	15,14	15,42	15,92	16,86	19,45	26,62
t_3, с	15,77	15,54	15,29	15,24	15,37	15,71	16,88	19,52	26,72
t_4, с	15,67	15,57	15,27	15,31	15,24	15,82	16,90	19,48	26,88
t_5, с	15,81	15,52	15,29	15,31	15,35	15,89	16,90	19,43	26,66
t_6, с	15,86	15,47	15,26	15,28	15,31	15,73	16,90	19,58	26,67
t_7, с	15,81	15,62	15,23	15,30	15,43	15,69	16,92	19,53	26,75
t_8, с	15,60	15,42	15,38	15,26	15,28	15,80	16,99	19,54	26,74
t_9, с	15,83	15,55	15,38	15,38	15,39	15,94	16,92	19,33	26,87
t_10, с	15,75	15,46	15,34	15,36	15,36	15,93	16,90	19,51	26,75
$t_\text{ср}$, с	15,75	15,53	15,31	15,29	15,35	15,83	16,92	19,49	26,73
$T_\text{ср}$, с	1,575	1,553	1,531	1,529	1,535	1,583	1,692	1,949	2,673
g, м/с^2	9,74	9,78	9,89	9,77	9,77	9,74	9,91	9,74	9,95
Δg, м/с^2	0,07	0,03	0,08	0,04	0,04	0,07	0,10	0,07	0,14

Таблица 2: Результаты измерения периода колебаний для различных a

4.7 Определение приведенной длины маятника

Для $a = 15{,}0$ см:

$$l_\text{прив} = a + \frac{l^2}{12a} = 15 + \frac{100{,}1^2}{12 \times 15} \approx 70{,}7 \text{ см.}$$

Установим соответствующую длину математического маятника и проведем серию измерений времени $n = 10$ колебаний. Результаты приведены в таблице 3:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ср.
t', с	16,90	16,98	16,95	17,02	16,87	16,95	16,90	16,79	16,83	16,97	16,92
T', с	1,690	1,698	1,695	1,702	1,687	1,695	1,690	1,679	1,683	1,697	1,692
$\Delta t'$, с	0,02	0,06	0,03	0,10	0,05	0,03	0,02	0,03	0,09	0,05	—

Таблица 3: Результаты измерения периода колебаний математического маятника

Период колебаний физического маятника при $a = 15$ см $- T = 1{,}692$ с $\Rightarrow$ физический маятник длиной l, подвешенный в точке a, имеет тот же период малых колебаний, что и математический маятник длиной $l_\text{пр}$.

4.8 Центр качания

Для $a = 29{,}0$ см $l_{пр} = 57{,}8$ см. Закрепим призму так, чтобы ее острие находилось в центре качания маятника, т.е. на расстоянии $l_{пр}$ от предыдщущего ее положения. Проведем серию измерений времени $n = 10$ полных колебаний. Результаты приведены в таблице 4.

№	1	2	3	4	5	ср.
T, с	15,18	15,25	15,20	15,25	15,38	15,25
t, с	1,518	1,525	1,520	1,525	1,538	1,525

Таблица 4: Измерение времени колебаний математического маятника

5 Обработка результатов измерений

5.1 Усредненное значение g

Усредним значение $g = 9{,}81\text{м}/\text{с}^2$.

По формуле (3) Найдем систематическую погрешность g:

$$\sigma_g^{\text{сист}} = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\frac{l^2}{12}+a^2}}{\frac{l^2}{12}+a^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T^2\beta X}}{T^2\beta X}\right)^2}$$

$$\sigma_{\frac{l^2}{12}+a^2} = \sqrt{(\sigma_{l^2}^2 + \sigma_{a^2}^2)}$$

$$\sigma_g^{\text{сист}} = g \cdot \sqrt{\frac{\left(\frac{2\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_a}{a}\right)^2}{\left(\frac{l^2}{12}+a^2\right)^2} + \left(\frac{2\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_X}{X}\right)^2}$$

$$\sigma_g^{\text{сист}} \approx 0{,}104\frac{\text{м}}{c^2}$$

Полную погрешность g получим из $\sigma_g^{\text{случ}}$ и $\sigma_g^{\text{сист}}$:

$$\sigma_g^{\text{полн}} = \sqrt{(\sigma_g^{\text{сист}})^2 + (\sigma_g^{\text{случ}})^2} \approx 0{,}133\frac{\text{м}}{c^2}$$

где $\sigma_g^{\text{случ}} = 0{,}083\frac{\text{м}}{c^2}$.

Тогда получаем: $g = (9{,}81 \pm 0{,}13)\ \frac{\text{м}}{c^2}$.

5.2 График $T(a)$

Минимум графика (Рисунок 2) находится на $a_{\min} \approx 29$ см, что сходится с рассчетом минимума по формуле (1): $a_{\text{формулы}} \approx 28{,}8$ см

5.3 График зависимости $T^2 x_ц \beta$ от a^2

Используя формулу для периода физического маятника (2) получаем следующее соотношение:

$$T^2 x_ц \beta = \frac{4\pi^2}{g}a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что $T^2 x_ц \beta$ линейно зависит от a^2, поэтому это зависимость можно представить в виде

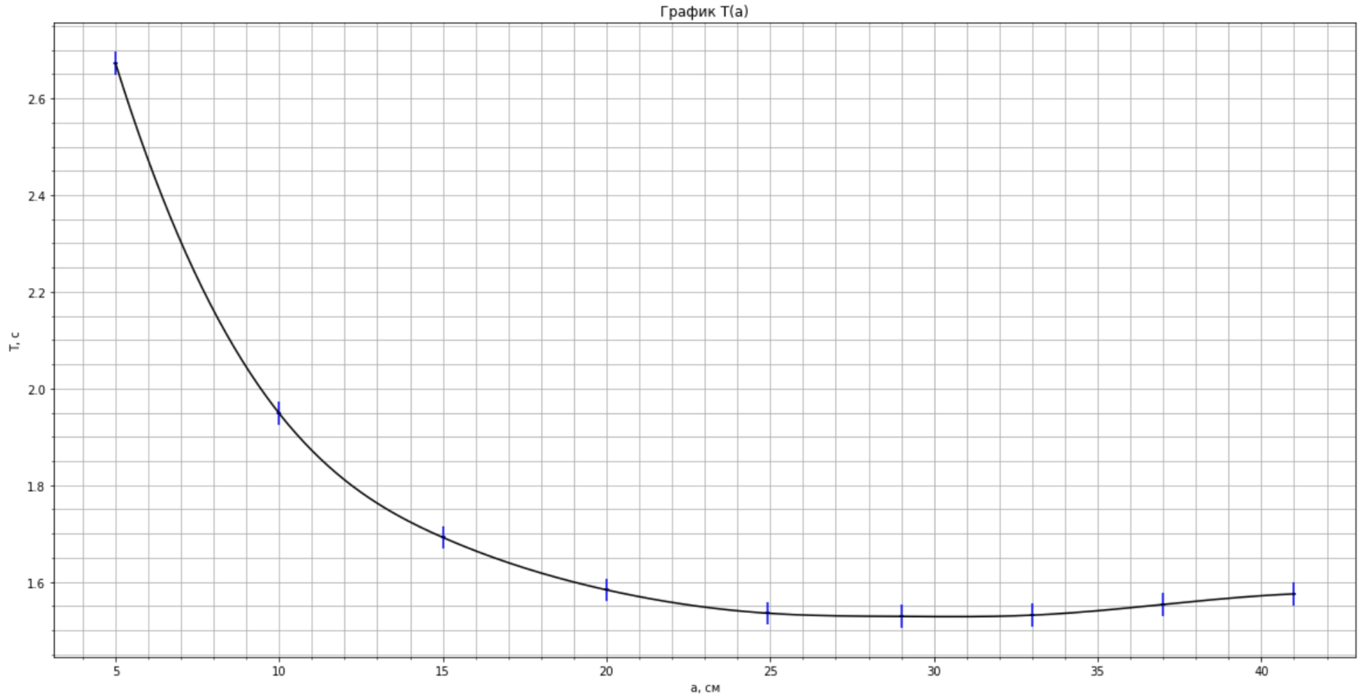

Рис. 2: Зависимость T от a

$$T^2 x_ц \beta = ka^2 + b,$$

где

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ и } b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}. \tag{4}$$

График зависимости $T^2 x_ц \beta$ от a^2 представлен на рисунке 3.

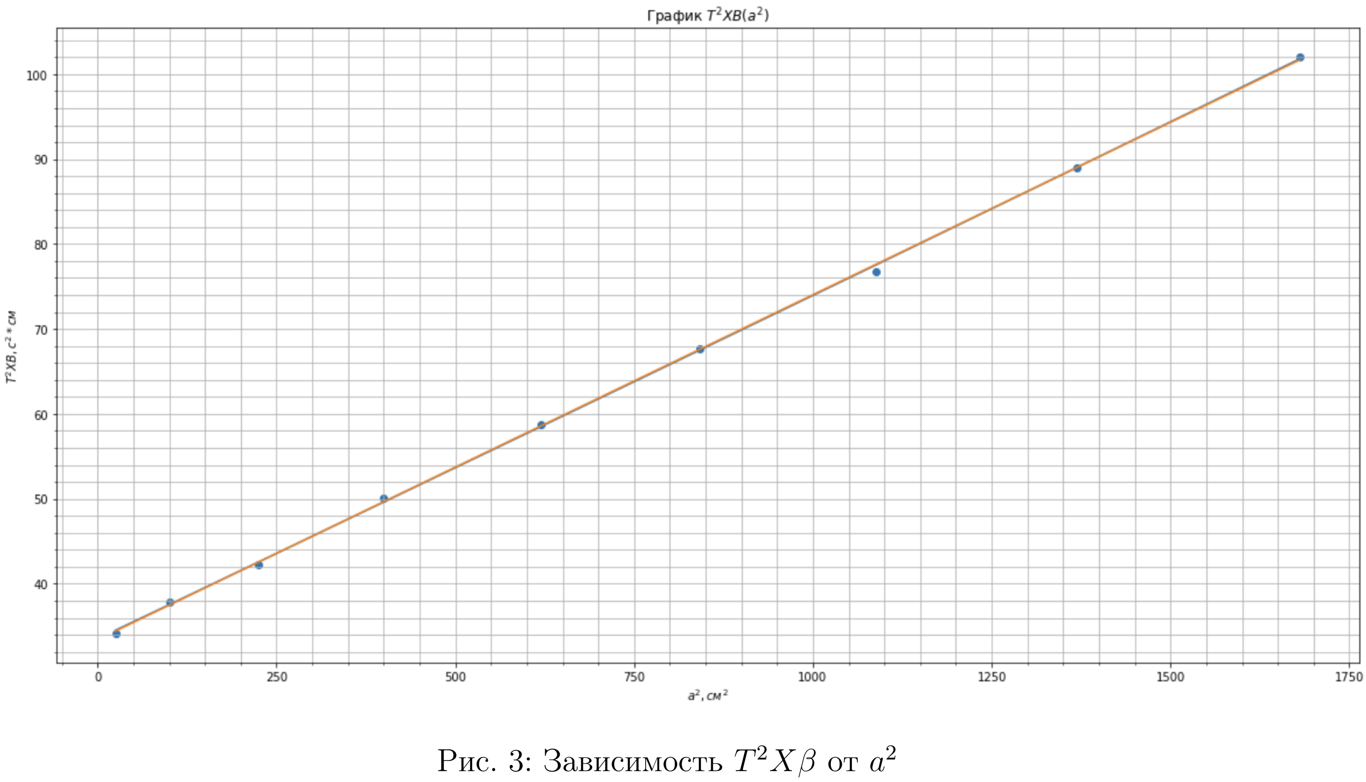

Рис. 3: Зависимость $T^2 X \beta$ от a^2

Погрешность расчёта a^2 найдём по следующей формуле:

$$\varepsilon_{a^2} = 2\varepsilon_a = 2\frac{\sigma_a}{a}$$

где $\sigma_a = 0{,}1$ см.

Погрешность вычисления $T^2 x_{\text{ц}} \beta$ можно найти по формуле:

$$\varepsilon_{T^2 x_{\text{ц}} \beta} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2} \approx 0{,}01,$$

Для вычисления коэффициентов k и b из (4) воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0{,}0406 \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$b = \langle y \rangle - k\langle x \rangle \approx 33{,}54 \ \text{см} \cdot \text{с}^2,$$

где $x = a^2$, $y = T^2 x_{\text{ц}} \beta$.

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 2{,}08 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сл}} = \sigma_k^{\text{сл}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0{,}11 \ \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k\sqrt{\left(\varepsilon_{T^2 X \beta}\right)^2 + \left(\varepsilon_{a^2}\right)^2} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b\sqrt{\left(\varepsilon_{T^2 X \beta}\right)^2 + \left(\varepsilon_{a^2}\right)^2} \approx 0{,}37 \ \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\sigma_k^{\text{сл}}\right)^2 + \left(\sigma_k^{\text{сист}}\right)^2} \approx 4{,}96 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b = \sqrt{\left(\sigma_b^{\text{сл}}\right)^2 + \left(\sigma_b^{\text{сист}}\right)^2} \approx 0{,}39 \ \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Таким образом, получаем:

- $k = (0{,}0406 \pm 4{,}96 \cdot 10^{-4}) \ \frac{\text{с}^2}{\text{см}}$, $\varepsilon_k = 1{,}22\%$
- $b = (33{,}54 \pm 0{,}39) \ \text{см} \cdot \text{с}^2$, $\varepsilon_b = 1{,}16\%$

Учитывая формулу (4), вычисляем g через угол наклона прямой:

$$g_k = \frac{4\pi^2}{k} \approx 9{,}723 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_{gk} = g \cdot \varepsilon_k \approx 0{,}088 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

Учитывая формулу (4), вычисляем g через пересечение с осью "y":

$$g_b = \frac{\pi^2 l^2}{3b} \approx 9{,}809 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_{gb} = g \cdot \varepsilon_b \approx 0{,}114\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

В итоге имеем следующие результаты:

- $\underline{g_k = (9{,}723 \pm 0{,}088)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_{gk} = 1{,}22\%}$
- $\underline{g_b = (9{,}809 \pm 0{,}114)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_{gb} = 1{,}16\%}$

Исходя из полученных данных, пожно сказать, что предпочтительнее использовать второй метод определения g, а именно нахождение линейной зависимости, определение ее коэффицентов методом наименьших квадратов. При такой обработке данных влияние случайной погрешности будет наименьшим, в отличие от нахождения g по среднему периоду и усреднение g.

6 Вывод

Проделанный опыт подтверждает теорию для периода колебаний физического маятника и теорию о приведенной длине физического маятника. Также, мы убедились в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника.

В ходе работы мы получили следующие величины:

- $g_k = (9{,}723 \pm 0{,}088)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_{gk} = 1{,}22\%$
- $g_b = (9{,}809 \pm 0{,}114)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_{gb} = 1{,}16\%$
- $g = (9{,}81 \pm 0{,}13)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon_g = 1{,}33\%$

Точность полученных результатов можно повысить, если исключить ошибку при фиксации периода колебаний маятника, которая существует в силу неидеальной реакции эксперименатора. Также свою погрешность вносит неточность определения расстояния от точки опоры до центра масс стержня.