

Измерение магнитного поля Земли

Цель работы

Определить характеристики шарообразных неодимовых магнитов и, используя законы взаимодействия магнитных моментов с полем, измерить горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

Оборудование

12 одинаковых неодимовых магнитных шариков, тонкая нить для изготовления крутильного маятника, медная проволока диаметром (0,5 — 0,6) мм, электронные весы, секундомер, измеритель магнитной индукции АТЕ-8702, штангенциркуль, брусок из немагнитного материала ($25 \times 30 \times 60$ мм³), деревянная линейка, штатив из немагнитного материала; дополнительные неодимовые магнитные шарики (20 шт.) и неодимовые магниты в форме параллелепипедов (2 шт.), набор гирь и разновесов.

Экспериментальная установка

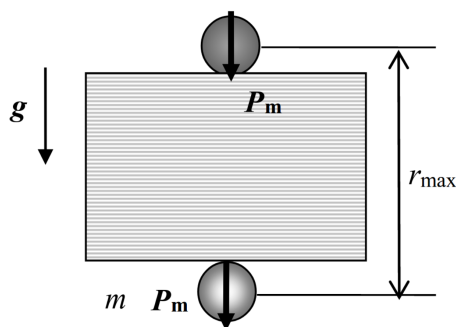


Рис. 1: Определение магнитного момента шариков по силе тяжести.

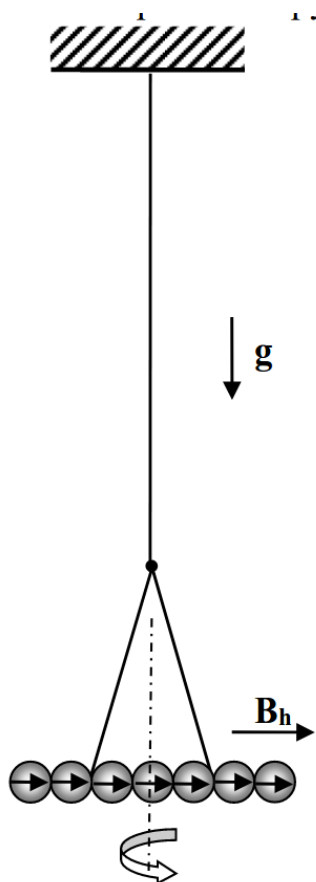


Рис. 2: Определение горизонтальной составляющей поля Земли.

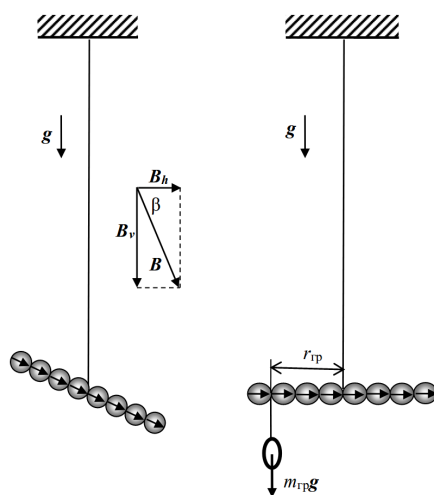


Рис. 3: Определение вертикальной составляющей поля Земли.

Теоретическая часть

Точечный магнитный диполь.

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент \vec{P}_m тонкого витка S с током I равен:

$$\vec{P}_m = (I/c) \vec{S} = (I/c) S \vec{n},$$

где c — скорость света в вакууме, $\vec{S} = S \vec{n}$ — вектор площади контура, образующий с направлением тока правовинтовую систему, \vec{n} — единичный вектор нормали к площадке S (это же направление \vec{P}_m принимается за направление $S \rightarrow N$ от южного (S) к северному (N) полюсу). Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению с расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь \vec{P}_m называют элементарным или точечным.

Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\vec{B} = 3(\vec{P}_m \vec{r}) \vec{r} / r^5 - \vec{P}_m / r^3.$$

В магнитном поле с индукцией \vec{B} на точечный магнитный диполь \vec{P}_m действует механический момент сил:

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}.$$

Под действием вращающего момента \vec{M} виток с током или постоянный магнит поворачивается так, чтобы его магнитный момент выстроился вдоль вектора индукции магнитного поля. Это — положение устойчивого равновесия: при отклонении от этого положения возникает механический момент внешних сил, возвращающий диполь к положению равновесия. В положении, когда \vec{P}_m и \vec{B} параллельны, но направлены противоположно друг другу, также имеет место равновесие ($M = 0$), но такое равновесие неустойчиво: малейшее отклонение от этого положения приведёт к появлению момента сил, стремящихся отклонить диполь ещё дальше от начального магнитный момент шарика положения.

Магнитный диполь в магнитном поле обладает энергией:

$$W = -(\vec{P}_m, \vec{B}).$$

Из этой формулы следует, что энергия диполя в поле минимальна и равна $W_{min} = -P_m B$ при сонаправленных

векторах $\vec{P}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$ (угол θ между \vec{P}_m и \vec{B} равен нулю), т. е., как и следовало ожидать, в положении устойчивого равновесия.

Обратим внимание на то, что формула для энергии диполя в магнитном поле очень удобна для выяснения единиц измерения магнитного диполя \vec{P}_m , причём, как в системе СИ, так и в системе СГСЭ, т. к. в обеих системах единиц формулы для энергии диполя выглядят одинаково:

в системе СИ размерность $[P_m] = [W]/[B] = \text{Дж/Тл}$;

в системе СГСЭ размерность $[P_m] = [W]/[B] = \text{эрг/Гс}$.

В неоднородном поле на точечный магнитный диполь, кроме момента сил, действует ещё и сила:

$$\vec{F} = (\vec{P}_m, \vec{\Delta})\vec{E}.$$

Используя формулы для момента силы, силы и энергии, не сложно выяснить, как ведёт себя свободный магнитный диполь в неоднородном магнитном поле: он выстраивается вдоль силовых линий магнитного поля и, кроме того, под действием результирующей силы, возникающей из-за неоднородности поля, втягивается в область более сильного магнитного поля, т.е. в область, где он обладает меньшей энергией.

Зная магнитные моменты P_1 и P_2 двух небольших постоянных магнитов, можно рассчитать силу их взаимодействия. Если магнитные моменты $P_1 = P_2 = P_m$ двух одинаковых небольших магнитов направлены вдоль соединяющей их прямой, а расстояние между ними равно r , то магниты взаимодействуют с силой:

$$F = P_m \partial B / \partial r = P_m \partial (2P_m / r^3) / \partial r = -6P_m^2 / r^4.$$

Магниты притягиваются, если их магнитные моменты сонаправлены ($\vec{P}_1 \uparrow\uparrow \vec{P}_2$) и отталкиваются, если моменты направлены противоположно друг другу ($\vec{P}_1 \uparrow\downarrow \vec{P}_2$).

Если магнитные моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой, то сила их взаимодействия окажется в два раза меньшей: $F = 3p^2/r^4$ (в этом случае диполи притягиваются при $\vec{P}_1 \uparrow\downarrow \vec{P}_2$ и отталкиваются при $\vec{P}_1 \uparrow\uparrow \vec{P}_2$).

Неодимовые магнитные шары.

В настоящей работе используются неодимовые магниты шарообразной формы.

Для нас важно то, что: 1) шары намагничены однородно; 2) Вещество, из которого изготовлены магниты, является магнитожёстким материалом. Магнитное поле однородно намагниченного шара радиуса R на расстояниях $r \geq R$ от

центра шара совпадает с полем точечного магнитного диполя \vec{P}_m , равного полному магнитному моменту шара и расположенного в центре (можно сказать, что внутри ($r < R$) такого шара поле однородно и равно $B_0 = 2P_m/R^3$)

Магнитожёсткость материала означает, что магнитные моменты шаров в нашей работе не изменяются под действием внешних магнитных полей, т. е. шар ведёт как жёсткий диполь. Поэтому, при расчетах можно считать, что шары взаимодействуют как жёсткие точечные магнитные диполи, расположенные в центрах шаров.

Полный магнитный момент \vec{P}_m постоянного магнита определяется намагниченностью \vec{p}_m вещества, из которого он изготовлен. По определению, намагниченность — это магнитный момент единицы объёма. Для однородно намагниченного шара намагниченность, очевидно, равна:

$$\vec{p}_m = \vec{P}_m/V,$$

где V — объём шара. Намагниченность — важная характеристика вещества постоянных магнитов, определяющая, в частности, величину остаточной магнитной индукции $B_r = 4\pi p_m$ (остаточная индукция B_r — одна из величин, которая, как правило, указывается в справочниках по магнитожёстким материалам).

Не сложно показать, что индукция магнитного поля \vec{B}_p на полюсах однородно намагниченного шара связана с величиной намагниченности \vec{p}_m и остаточной магнитной индукцией \vec{B}_r формулой:

$$\vec{B}_p = (8\pi/3)\vec{p}_m = (2/3)\vec{B}_r.$$

Экспериментальное определение величины магнитного момента магнитных шариков.

Величину магнитного момента P_m одинаковых шариков можно рассчитать, зная их массу m и определив максимальное расстояние r_{max} , на котором они ещё удерживают друг друга в поле тяжести (см. рис.1). При максимальном расстоянии сила тяжести шариков равна силе их магнитного притяжения:

$$6P_m^2/r_{max}^4 = mg, \quad P_m = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}}.$$

По величине магнитного момента P_m можно рассчитать величину индукции магнитного поля вблизи любой точки на

поверхности шара радиуса R . Максимальная величина индукции наблюдаются на полюсах:

$$\vec{B}_p = 2\vec{P}_m/R^3.$$

Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли.

Магнитное поле Земли в настоящей работе определяется по периоду крутильных колебаний магнитной стрелки вокруг вертикальной оси.

«Магнитная стрелка» образована из сцепленных друг с другом противоположными полюсами шариков и с помощью Λ -образного подвеса подвешена в горизонтальном положении (см. рис. 2). Магнитные моменты шариков направлены в одну сторону вдоль оси «стрелки». Под действием вращательного момента $\vec{M} = \vec{P}_0 \times \vec{B}$ магнитный момент «стрелки» \vec{P}_0 выстроится вдоль горизонтальной составляющей магнитного поля Земли \vec{B}_h в направлении Юг \rightarrow Север. При отклонении «стрелки» на угол θ от равновесного положения в горизонтальной плоскости возникают крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стрелки. Если пренебречь упругостью нити, то уравнение крутильных колебаний такого маятника определяется возвращающим моментом сил $M = -P_0 B_h \sin \theta$, действующим на «стрелку» со стороны магнитного поля Земли, и моментом инерции I_n «стрелки» относительно оси вращения.

При малых амплитудах ($\sin \theta \approx \theta$) уравнение колебаний «стрелки» имеет вид:

$$I_n d^2\theta/dt^2 = -P_0 B_h \theta, \quad \text{или} \quad I_n \ddot{\theta} + P_0 B_h \theta = 0.$$

Период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{I_n/P_0 B_h} = 2\pi\sqrt{I_n/nP_m B_h},$$

где $P_0 = nP_m$ — полный магнитный момент магнитной «стрелки», составленной из n шариков.

Момент инерции «стрелки», состоящей из n шариков, как не сложно убедиться, с хорошей точностью равен моменту инерции тонкого однородного стержня массой $m = nm$ и длиной $l = nd$:

$$I_n = (1/12)m_{\text{ст}}l_{\text{ст}}^2 = (1/12)nm(nd)^2 = (1/12)n^3md^2.$$

Даже для трёх шариков момент инерции, рассчитанный по приближённой формуле, отличается от точного результата

примерно на 2 %, а для $n \geq 5$ — различие не превышает процента; если же учесть, что $T \sim \sqrt{I_n}$, то для всех $n \geq 3$ погрешность наших расчётов для периода колебаний T не превысит процента, что освобождает нас от необходимости вводить поправочные коэффициенты.

Таким образом, в нашем приближении период колебаний маятника оказывается пропорциональным числу шаров n , составляющих «стрелку»:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2\pi\sqrt{I_n/nP_mB_h} = \\ &= 2\pi\sqrt{n^3md^2/12nP_mB_h} = \pi n\sqrt{md^2/3P_mB_h} = kn, \end{aligned}$$

где $k = \pi\sqrt{md^2/3P_mB_h}$.

При выводе этой формулы предполагалось, что магнитный момент — величина аддитивная: полный магнитный момент системы магнитов («стрелки») равен векторной сумме магнитных моментов шариков, составляющих «стрелку». Экспериментальное подтверждение этой зависимости ($T \sim n$) будет являться косвенным доказательством наших предположений о магнитожёсткости материала магнитов и, соответственно, свойства аддитивности магнитных моментов шаров.

Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение.

Для измерения вертикальной B_v составляющей вектора индукции поля Земли используется та же установка, что и для измерения горизонтальной составляющей с тем лишь отличием, что магнитная «стрелка» подвешивается на нити без Λ -образного подвеса. В этом случае магнитная «стрелка», составленная из чётного числа шариков и подвешенная на тонкой нити за середину, расположится не горизонтально, а под некоторым, отличным от нуля, углом к горизонту (см. рис. 3, слева). Это связано с тем, что вектор \vec{B} индукции магнитного поля Земли в общем случае не горизонтален, а образует с горизонтом угол β , зависящим от географической широты ϕ места, где проводится опыт. Величина угла β называется магнитным наклонением.

С помощью небольшого дополнительного грузика «стрелку» можно «выровнять», расположив её горизонтально (см.рис. 3, справа): в этом случае момент силы тяжести груза относительно точки подвеса будет равен моменту сил, действующих на «стрелку» со стороны магнитного поля Земли. Если масса уравновешивающего груза равна $m_{гр}$, плечо силы

тяжести $r_{\text{гр}}$, а полный магнитный момент «стрелки» $P_0 = nP_m$, то в равновесии:

$$m_{\text{гр}}gr_{\text{гр}} = P_0B_v = nP_mB_v,$$

где B_v — вертикальная составляющая поля Земли. Видно, что момент $M(n)$ силы тяжести уравнивающего груза пропорционален числу n шариков, образующих магнитную «стрелку»:

$$M(n) = An, \quad A = P_mB_v.$$

Обработка результатов измерений

Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков.

N	$m, 10^{-3} \text{ г}$	$d, 10^{-2} \text{ см}$
1	863	61
2	848	62
3	857	63
4	846	62
5	838	60
6	850	61
7	853	62
8	842	61
9	844	63
10	853	62
11	847	61
12	848	60

Таблица 1: Измерения первого задания.

Проложим между двумя магнитными шариками брусок из немагнитного материала; выясним максимальное расстояние, при котором шарики удерживают друг друга в поле Земли с учётом случайной погрешности:

$$r_{\text{max}} = 2,5 \pm 0,1 \text{ см.}$$

Рассчитаем величину p_m :

$$P_m = \sqrt{\frac{mgr_{\text{max}}^4}{6}} = 73 \pm 2 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$$

$$p_m = \frac{P_m}{V} = 600 \pm 30 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс} \cdot \text{см}^3}$$

Рассчитаем величину B_p и B_r материала, из которого изготовлен шарик:

$$B_p = 2P_m/R^3 = 5,0 \pm 0,2 \text{ кГс.}$$

$$B_r = 4\pi p_m = 7,5 \pm 0,3 \text{ кГс; } B_{r_{\text{табл}}} = 11,5\text{--}14 \text{ кГс}$$

Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли.

Измерим зависимость периода T крутильных колебаний «стрелки» от количества магнитных шариков n , составляющих «стрелку», померив количество периодов k за время t :

n	T, c
3	0,86
4	1,09
5	1,32
6	1,53
7	1,78
8	2,05
9	2,31
10	2,58
11	2,86
12	3,14

Таблица 2: Измерения второго задания.

Построим график зависимости T от n :

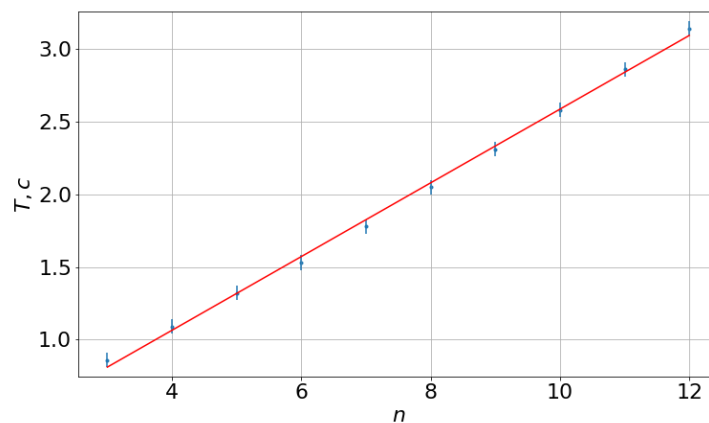


Рис. 4: График зависимости $T = kn$

$$k = 0,253 \pm 0,018$$

Вычислим величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли:

$$B_h = \frac{\pi^2 m d^2}{2k^2 P_m} = 0,227 \pm 0,024 \text{ Гс}$$

Рассчитаем моменты сил тяжести для разного количества шариков:

$$M = m \cdot g \cdot d \cdot \left(\frac{N}{2} - 1\right)$$

N , шт	4	6	8	10	12
M , $\frac{\text{г} \cdot \text{см}^3}{\text{с}^2}$	172,98	314,61	428,31	547,25	641,88

Построим график момента силы тяжести M от числа шариков n для нахождения вертикальной составляющей магнитного поля Земли:

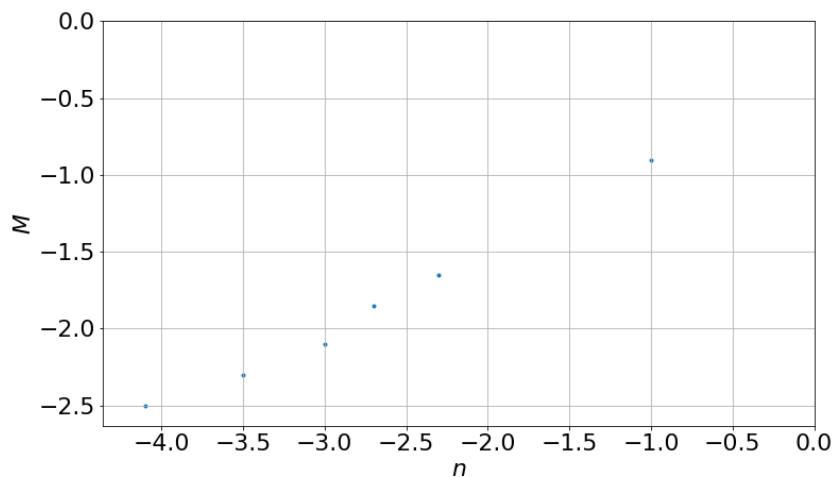


Рис. 5: График зависимости $M = An$

$$A = 48 \pm 4$$

$$B_v = \frac{A}{P_m} = 0,66 \pm 0,10 \text{ Гс}$$

Магнитное поле Земли:

$$B = 0,70 \pm 0.13 \text{ Гс}$$

Вывод

Полученное с помощью магнитных неодимовых шариков магнитное поле Земли с учетом погрешности совпадает с табличным: $B_{\text{табл}} = 0.25\text{—}0.65$ Гс, что можно с некоторой степенью сказать и о остаточной магнитной индукции, однако расхождения с табличными данными получились заметными из-за большой случайной погрешности.