

Спектральный анализ электрических сигналов

Цель работы

Изучение спектрального состава периодических электрических сигналов

Оборудование

Анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов, генератор сигналов специальной формы, осциллограф.

Экспериментальная установка

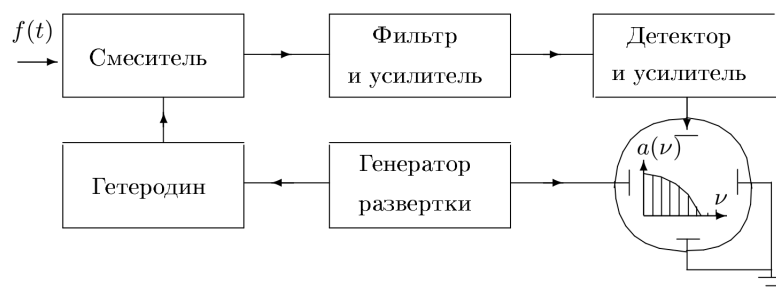


Рис. 1: Структурная схема анализатора спектра

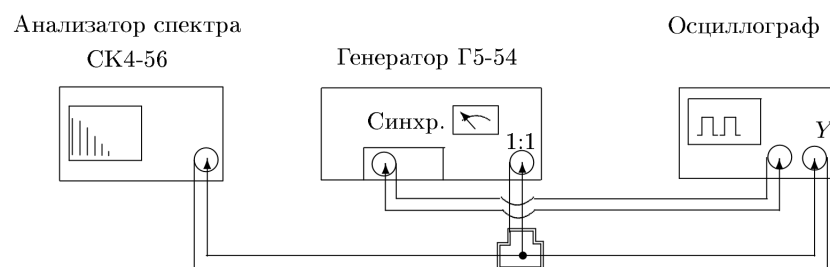


Рис. 2: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

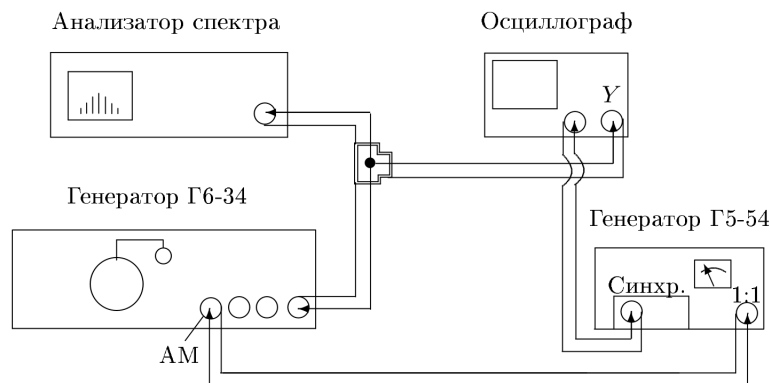


Рис. 3: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

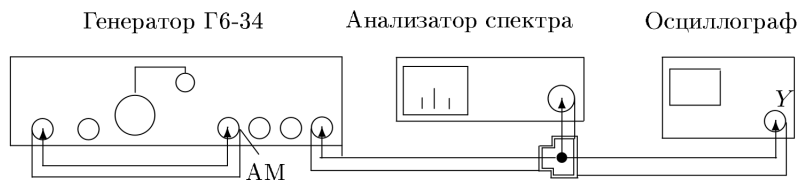


Рис. 4: Схема для исследования спектра высокочастотного гармонического сигнала, промодулированного по амплитуде низкочастотным гармоническим сигналом

Теоретическая часть

Рассмотрим функцию вида

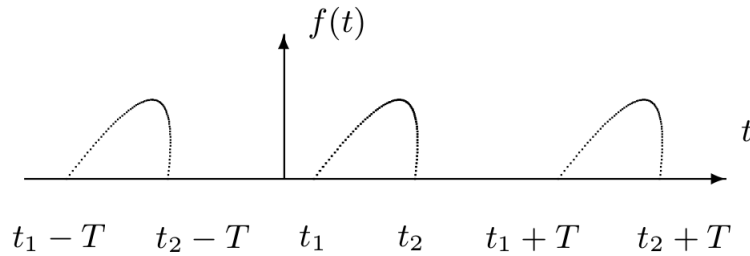
$$f(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2) + \dots + A_N \cos(\omega_N t - \alpha_N),$$

или в более короткой записи

$$f(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t - \alpha_n),$$

где A_n, ω_n, α_n — постоянные величины. Множество пар $(\omega_1, A_1), (\omega_2, A_2), \dots, (\omega_n, A_n)$ называется спектром функции $f(t)$. N может быть конечным или бесконечным.

В физике широко используется разложение сложных сигналов на гармонические колебания различных частот ω . Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фурье. Непериодические сигналы представляются в виде интеграла Фурье.

Рис. 5: График периодической функции с периодом повторения T

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T — период повторения. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)],$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n).$$

Здесь $a_0/2$ — постоянная составляющая (среднее значение) функции $f(t)$; a_n и b_n — коэффициенты косинусных и синусных членов разложения. Они определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt$$

Точку начала интегрирования t_1 можно выбрать произвольно.

В тех случаях, когда сигнал чётен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$, в тригонометрической записи остаются только косинусные члены. Ю так как все коэффициенты b_n обращаются в нуль. Для нечётной относительно $t = 0$ функции, наоборот, в нуль обращаются коэффициенты a_n , и ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда A_n и фаза ψ_n n -й гармоники выражаются через коэффициенты a_n и b_n следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}.$$

Заменяем косинусы экспонентами в соответствии с формулой

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right).$$

Введём комплексные амплитуды \hat{A}_n и \hat{A}_{-n} :

$$\hat{A}_n = A_n e^{i\psi_n}; \quad \hat{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \hat{A}_0 = a_0.$$

Разложение $f(t)$ приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{A}_n e^{in\Omega_1 t}.$$

Таким образом, введение отрицательных частот (типа $-n\Omega_1$) позволяет записать разложение Фурье особенно простым образом. Формулы комплексных амплитуд обеспечивают действительность суммы: в каждой частоте $k\Omega_1$ соответствуют один член из разложения в ряд Фурье до комплексных амплитуд ($n = k$), а в разложении суммы — два члена ($n = k$ и $n = -k$). Формулы комплексных амплитуд позволяют переходить от действительного разложения к комплексному и обратно.

Для расчёта комплексных амплитуд A_n не обязательно пользоваться формулами комплексных амплитуд, полученных выше. Умножим левую и правую части разложения в сумму с комплексными амплитудами на $e^{-ik\Omega_1 t}$ и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi/\Omega_1$. В правой части обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего $n = k$. Этот член даёт $A_k T/2$. Имеем поэтому

$$\hat{A}_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt.$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами: $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1, \dots$ и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой ($0 \cdot \Omega_1$). Такой спектр называют линейчатым или дискретным.

Пусть непериодический сигнал $f(t)$ действует в конечно временном интервале $t_1 < t < t_2$. Превратим функцию $f(t)$ в периодическую путём повторения её с произвольным периодом $T > (t_2 - t_1)$. Для этой новой функции применимо разложение в ряд Фурье. В соответствии с формулами абсолютная величина коэффициентов a_n и b_n обратно пропорциональна T , поэтому устремляя T к бесконечности, в пределе получим бесконечно малые амплитуды гармонических составляющих. Количество составляющих, входящих в ряд Фурье, будет при этом бесконечно большим, так как при $T \rightarrow \infty$ частота $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$. Другими словами, расстояние между спектральными линиями, равное частоте Ω_1 , становится бесконечно малым, и спектр из дискретного переходит в сплошной.

Воспользуемся комплексной формулой ряда Фурье и подставим вместо A_n выражение:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-in\Omega_1 t} dt \right] e^{in\Omega_1 t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-in\Omega_1 t} dt \right] e^{in\Omega_1 t} \cdot \Omega_1. \end{aligned}$$

При записи второго выражения использована связь $T = 2\pi/\Omega_1$.

При $T \rightarrow \infty$ частота Ω_1 превращается в $d\Omega_1$, $n\Omega_1$ — в текущую частоту Ω , а операция суммирования — в операцию интегрирования. В результате получаем двойной интеграл Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\Omega t} dt \right] e^{i\Omega t} d\Omega.$$

Внутренний интеграл обозначим

$$\hat{F}(\Omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\Omega t} dt.$$

$\hat{F}(\Omega)$ называется спектральной плотностью или спектральной характеристикой функции $f(t)$. Сравнивая полученное выражение с предыдущим для комплексной амплитуды соответствующей гармоники ($\Omega = \Omega_n$) той же самой функции, но уже периодической, получим

$$2\hat{F}(\Omega_n) = T \cdot \hat{A}_n = 2\pi \frac{\hat{A}_n}{\Omega_1}.$$

Поскольку Ω_1 — это полоса частот, определяющая соседние спектральные линии дискретного спектра, то $\hat{F}(\Omega)$ имеет смысл плотности амплитуд.

Из вышееречисленного соотношения следует важный вывод: огибающая сплошного спектра непериодической функции и огибающая линейчатого спектра той же периодической функции совпадают по форме и отличаются только масштабом.

Примеры спектров периодических функций

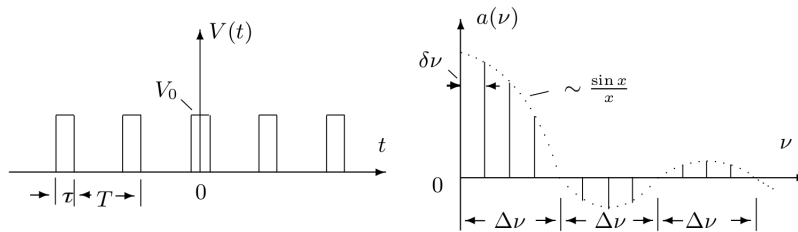


Рис. 6: Периодическая последовательность прямоугольных импульсов и её спектр

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T — период повторения импульсов.

Найдём среднее значение (постоянную составляющую):

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$$

Коэффициенты при косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}.$$

Поскольку наша функция чётная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рисунке. Амплитуды гармоник $A_n (A_n = |a_n|)$ меняются по закону $|\sin x/x|$.

На рисунке изображён случай, когда T кратно τ . Назовём шириной спектра $\Delta\omega$ (или $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$) расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей,

возникающего, как нетрудно убедиться, при $n = 2\pi/\tau\Omega_1$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1.$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределённости в квантовой механике. Несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот — явление широко известное в радиотехнике. Ширина селективной настройки $\Delta\nu$ радиоприёмника ограничивает приём радиосигналов длительность. $t < 1/\Delta\nu$.

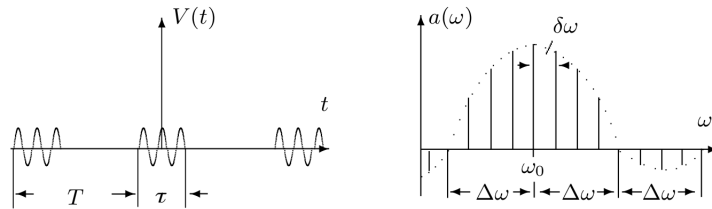


Рис. 7: Периодическая последовательность цугов и её спектр

Периодическая последовательность цугов гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T . Функция $f(t)$ снова является чётной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -й гармонике согласно формуле равен

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = \\ &= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right). \end{aligned}$$

Зависимость для случая, когда T/τ равно целому числу, представлена на рисунке выше. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр цугов, мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

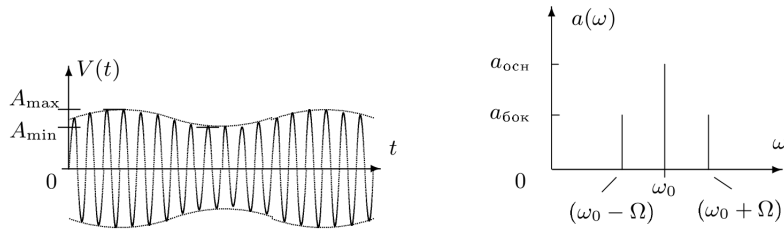


Рис. 8: Гармонические колебания, модулированные по амплитуде и их спектр

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t.$$

Коэффициент m называют глубиной модуляции. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{\min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{\max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \end{aligned}$$

. Спектр таких колебаний содержит три составляющих — основную компоненту и две боковых. Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a_{\text{осн}} = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного колебания: $a_{\text{бок}} = A_0 m/2$. Начальные фазы трёх колебаний одинаковы.

Обработка результатов экспериментов
Исследование спектра периодической
последовательности прямоугольных импульсов:1

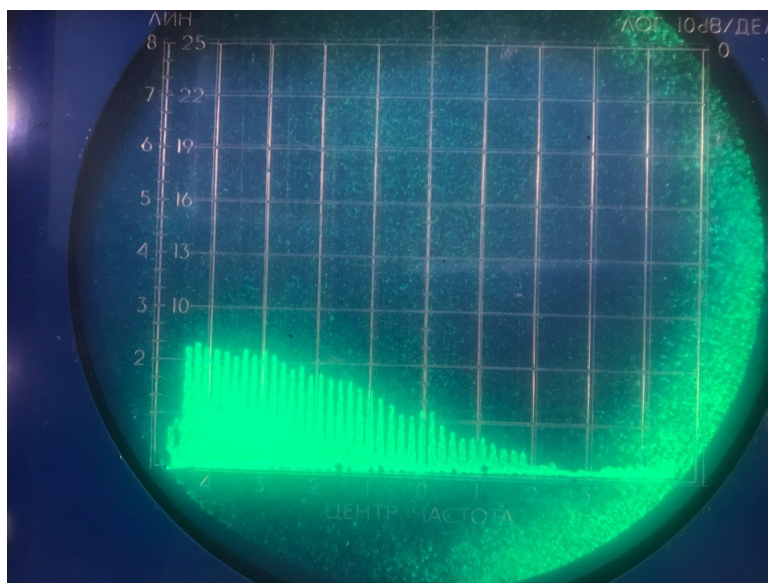


Рис. 9: Спектр прямоугольных импульсов при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и $\tau = 25$ мкс

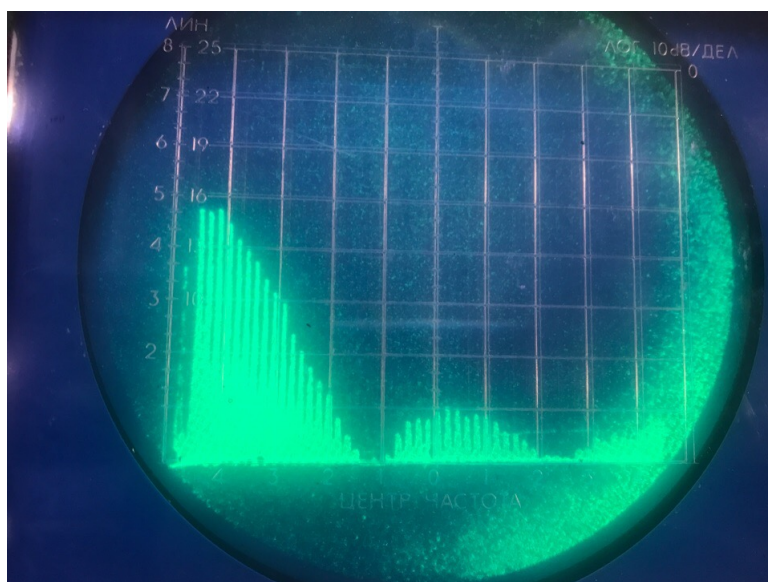
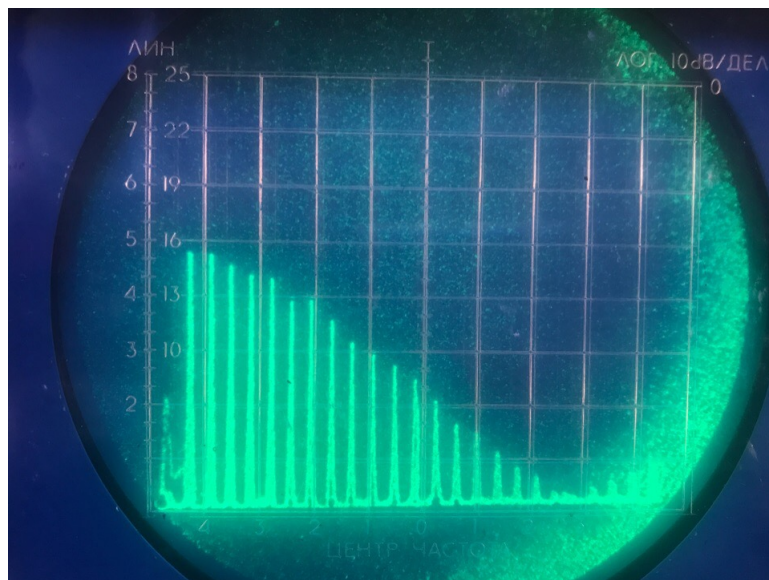
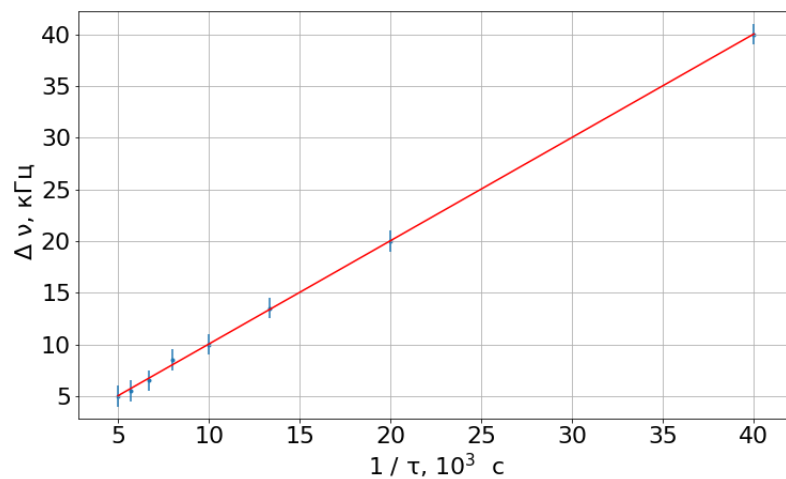


Рис. 10: Спектр прямоугольных импульсов при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и $\tau = 50$ мкс

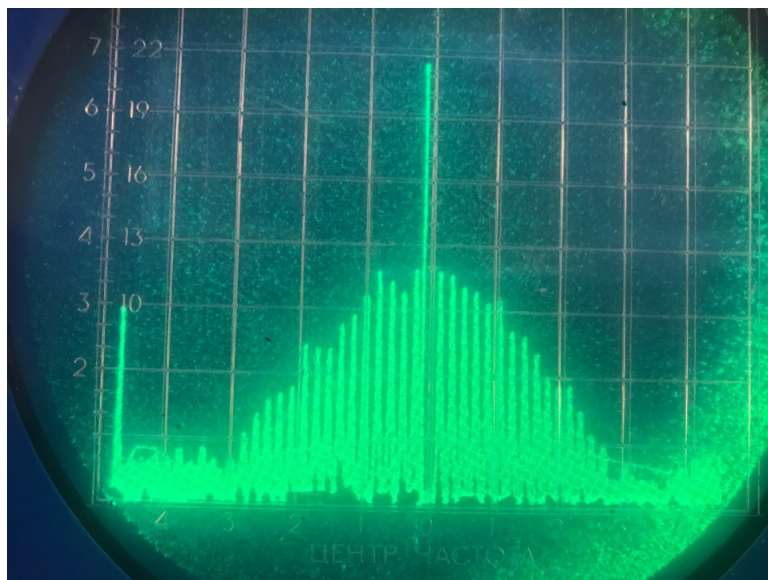
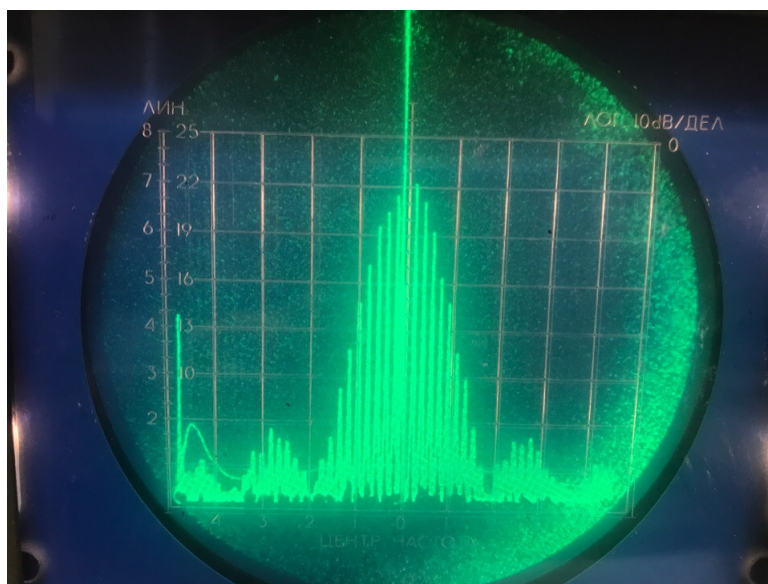
Рис. 11: Спектр прямоугольных импульсов при $f_{\text{повт}} = 2$ кГц и $\tau = 50$ мкс

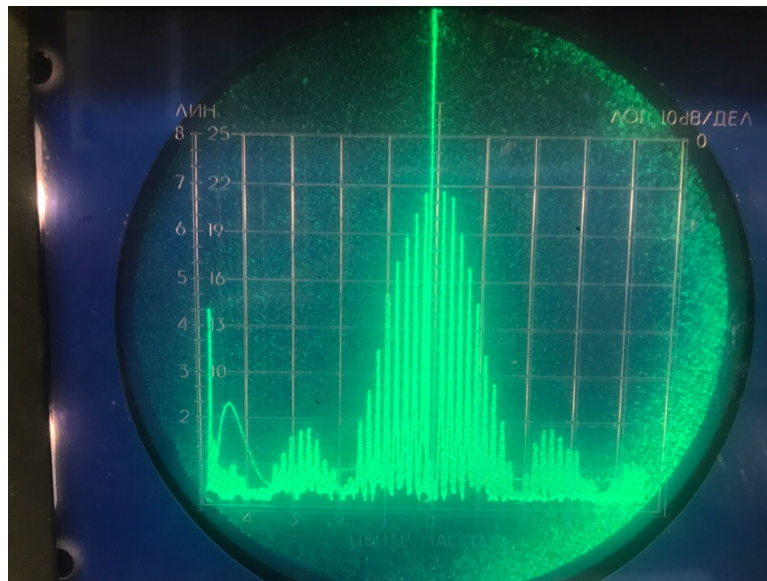
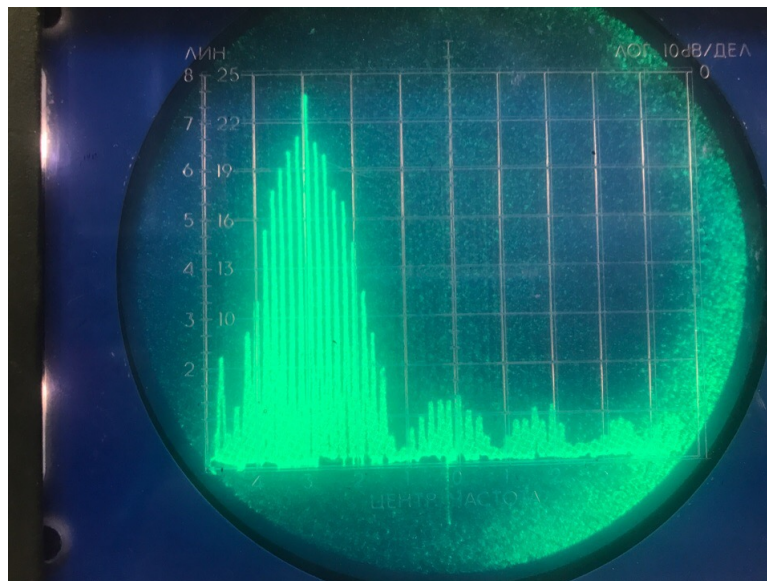
Построим график $\Delta\nu(1/\tau)$:

Рис. 12: График зависимости $\Delta\nu$ от $1/\tau$

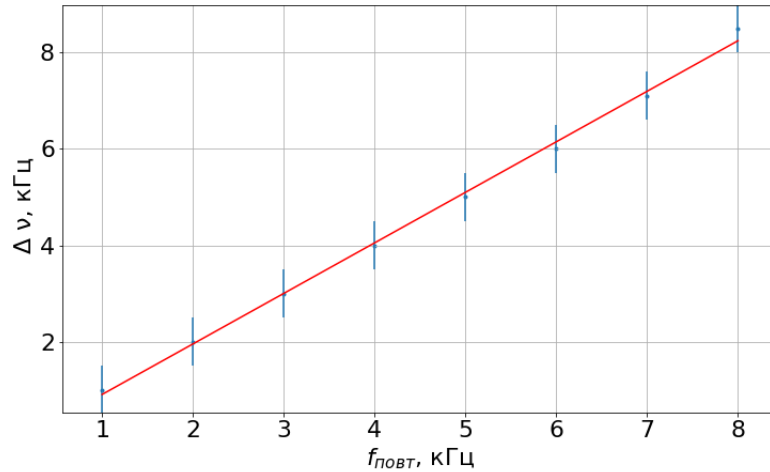
Коэффициент угла наклона графика $k = 1 \Rightarrow$ с большой точностью выполняется соотношение неопределённостей.

Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний:

Рис. 13: Спектр цугов при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и $\tau = 50$ мксРис. 14: Спектр цугов при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и $\tau = 100$ мкс

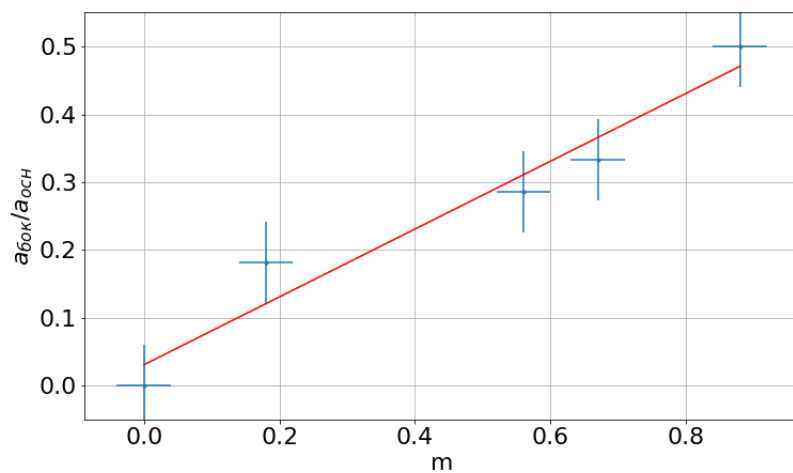
Рис. 15: Спектр цугов при $\nu_0 = 25$ кГц и $\tau = 50$ мксРис. 16: Спектр цугов при $\nu_0 = 10$ кГц и $\tau = 50$ мкс

Исследуем зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами от периода T (частоты повторения импульсов $f_{\text{повт}}$ в диапазоне 1-8 кГц):

Рис. 17: График зависимости $\Delta \nu$ от $f_{\text{повт}}$

Угловый наклон графика $k = 1.04$, что с достаточной точностью подтверждает справедливость соотношения неопределённости. **Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде** Измеряя глубину модуляции, исследуем зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии ($a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$) от глубины модуляции m и построим график:

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$

Рис. 18: График зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m

Угловым коэффициентом наклона графика $k_{\text{прак}} = 0.5$. По формуле $a_{\text{бок}} = a_{\text{осн}} \cdot m/2 \Rightarrow k_{\text{теор}} = 0.5$

Вывод

В данной лабораторной работе мы исследовали соотношение неопределённости $\Delta\nu \cdot \tau \simeq 1$ — несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот.