

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

# Отчёт о выполнении лабораторной работы

## 1.4.1

Изучение физического маятника

Автор:  
Сенокосов Арсений Олегович  
Б02-012Б

Долгопрудный 2020

# 1 Введение

**Цель работы:** исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от момента его инерции.

**В работе используются:** физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

## 2 Теоретические сведения

Физическим маятником называют любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M, \quad (1)$$

где  $I$  – момент инерции маятника,  $\varphi$  – угол отклонения маятника от положения равновесия,  $t$  – время,  $M$  – момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника (рис. 1) используется однородный стальной стержень длиной  $l$ . На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние  $OC$  от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно  $a$ . Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2,$$

где  $m$  – масса маятника. Момент силы тяжести, действующий на маятник,

Рис. 1: Физический маятник

$$M = -mga \sin \varphi.$$

Если угол  $\varphi$  мал, то  $\sin \varphi \approx \varphi$ , так что

$$M \approx -mga\varphi$$

В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. Поэтому моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь. Подставляя выражение для  $I$  и  $M$  в (1), получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}.$$

Тогда период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \quad (3)$$

Таким образом, период малых колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний. Это утверждение (изохорность) справедливо для колебаний, подчиняющихся уравнению (2). Движение маятника описывается по этой формуле только для малых углов  $\varphi$ .

Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}},$$

где  $l'$  – длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \quad (4)$$

называют приведённой длиной математического маятника. Поэтому точку  $O'$  (см. рис. 1), отстоящую от точки опоры на расстояние  $l_{\text{пр}}$ , называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки  $O'$  период будет таким же, как и при качании вокруг точки  $O$ .

### 3 Оборудование и экспериментальные погрешности

Секундомер:  $\Delta_c = 0,01$  с

Линейка:  $\Delta_{\text{лин}} = 0,05$  см

## 4 Результаты измерений и обработка данных

### 4.1 Определение диапазона амплитуд, в пределах которых период колебаний маятника можно считать не зависящим от амплитуды

Определим диапазон амплитуд, в пределах которым колебания можно считать не зависящими от начальной фазы. Для этого отклоняем маятник на угол  $\varphi \approx 10^\circ$  и измеряем период колебаний. Затем уменьшаем угол отклонения в 2 раза и повторяем измерения. Результаты приведены в таблице 1.

№	$\varphi$	$T_{\text{общ}}, \text{ с}$	$N_{\text{изм}}$	$T, \text{ с}$	$T_{\text{ср}}, \text{ с}$	$\sigma, \text{ с}$	$\varepsilon, \%$
1	10	152,94	100	1,5294	1,5291	0,0001	0,0115
2	10	152,89	100	1,5289			
3	10	152,91	100	1,5291			
4	5	152,84	100	1,5284	1,5284	0,0002	0,0148
5	5	152,81	100	1,5281			
6	5	152,88	100	1,5288			

Таблица 1: Результаты измерения периода колебаний в зависимости от начального угла

Время одного колебания для отдельного эксперимента рассчитываем по формуле:

$$T = \frac{T_{\text{общ}}}{N_{\text{изм}}},$$

где  $T_{\text{общ}}$  – время  $N_{\text{изм}}$  колебаний.

Среднее значение периода колебаний для одной серии опытов рассчитываем по следующей формуле:

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{N_{\text{изм}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{изм}}} T_i.$$

Случайная погрешность определения  $T_{\text{ср}}$  вычисляется по формуле:

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{изм}}(N_{\text{изм}} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{\text{изм}}} (T_{\text{ср}} - T_i)^2}.$$

Полная погрешность измерения периода колебаний в одной серии опытов определяется следующим соотношением:

$$\sigma = \sqrt{\Delta_{\text{с}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2}.$$

Также можем рассчитать относительную погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{T_{\text{ср}}}.$$

Исходя из измерений и пользуясь представленными выше формулами, получаем, что  $T_{10^\circ} = (1,5291 \pm 0,0001)$  с и  $T_{5^\circ} = (1,5284 \pm 0,0002)$  с. Следовательно, полученные значения периода колебаний маятника совпадают с хорошей точностью. Поэтому в дальнейшем будем считать колебания не зависящими от начальной фазы при отклонении на угол не более  $\varphi_0 \approx 5^\circ$ .

## 4.2 Вычисление ускорения свободного падения и длины стержня

Для вычисления ускорения свободного падения и длины стержня будем исследовать зависимость периода колебаний  $T$  от расстояния  $a$  между точкой опоры и центром масс. Результаты проведённых измерений представлены в таблице 2.

№	$a$ , см	$T_{\text{общ}}$ , с	$N_{\text{изм}}$	$T$ , с	$T_{\text{ср}}$ , с	$\Delta$ , с	$\sigma_{\text{сл}}$ , с	$\sigma_T$ , с	$\varepsilon$ , %
1	5	132,47	50	2,6494	2,6503	0,0002	0,000129	0,0002	0,0089
2	5	132,56	50	2,6512					
3	10	116,72	60	1,9453	1,9450	0,0001	$3,25 \cdot 10^{-5}$	0,0002	0,0087
4	10	116,69	60	1,9448					
5	15	118,38	70	1,6911	1,6909	0,0001	$3,44 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0086
6	15	118,34	70	1,6905					
7	20	126,32	80	1,5791	1,5793	0,0001	$3,52 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0082
8	20	126,37	80	1,5796					
9	25	138,19	90	1,5354	1,5354	0,0001	$5,89 \cdot 10^{-6}$	0,0001	0,0072
10	25	138,18	90	1,5353					
11	28	137,59	90	1,5287	1,5281	0,0001	$7,07 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0086
12	28	137,47	90	1,5274					
13	30	152,84	100	1,5284	1,5281	0,0001	$3,03 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0068
14	30	152,78	100	1,5278					
15	33	153,31	100	1,5331	1,5337	0,0001	$6,53 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0077
16	33	153,44	100	1,5344					
17	35	123,35	80	1,5418	1,5422	0,0001	$3,52 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0084
18	35	123,4	80	1,5425					
19	37	93,04	60	1,5506	1,5506	0,0001	$1,08 \cdot 10^{-5}$	0,0002	0,0108
20	37	93,03	60	1,5505					

Таблица 2: Измерение периода колебаний маятника  $T$  в зависимости от расстояния  $a$

По полученным данным вычисляем  $T$ ,  $T_{\text{ср}}$ ,  $\Delta$ ,  $\sigma_{\text{сл}}$ ,  $\sigma$  и  $\varepsilon$  по формулам представленным в разделе 4.1.

Используя формулу для периода физического маятника (3) получаем следующее соотношение:

$$T^2 a = \frac{4\pi^2}{g} a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что  $T^2 a$  линейно зависит от  $a^2$ , поэтому эту зависимость можно представить в виде

$$T^2 a = k a^2 + b,$$

где

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ и } b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}. \quad (5)$$

Найдём эти коэффициенты. Для удобства перенесём все необходимые данные в таблицу 3.

$a$ , см	5	10	15	20	25	28	30	33	35	37
$a^2$ , см <sup>2</sup>	25	100	225	400	625	784	900	1089	1225	1369
$\sigma_{a^2}$ , см <sup>2</sup>	0,5	1	1,5	2	2,5	2,8	3	3,3	3,5	3,7
$\varepsilon_{a^2}$ , %	2	1	0,67	0,5	0,4	0,36	0,33	0,31	0,28	0,27
$T$ , с	2,650	1,945	1,691	1,579	1,535	1,528	1,528	1,534	1,542	1,551
$T^2$ , с <sup>2</sup>	7,024	3,783	2,859	2,494	2,357	2,335	2,335	2,352	2,378	2,404
$aT^2$ , см · с <sup>2</sup>	35,120	37,833	42,885	49,885	58,935	65,383	70,053	77,629	83,242	88,959
$\sigma_{aT^2}$ , см · с <sup>2</sup>	0,351	0,189	0,143	0,125	0,118	0,117	0,117	0,118	0,120	0,122
$\varepsilon_{aT^2}$ , %	1	0,5	0,33	0,25	0,21	0,18	0,16	0,15	0,14	0,3

Таблица 3: Значения  $aT^2$  и  $a^2$  и их погрешности

График зависимости  $aT^2$  от  $a^2$  представлен на рисунке 2.

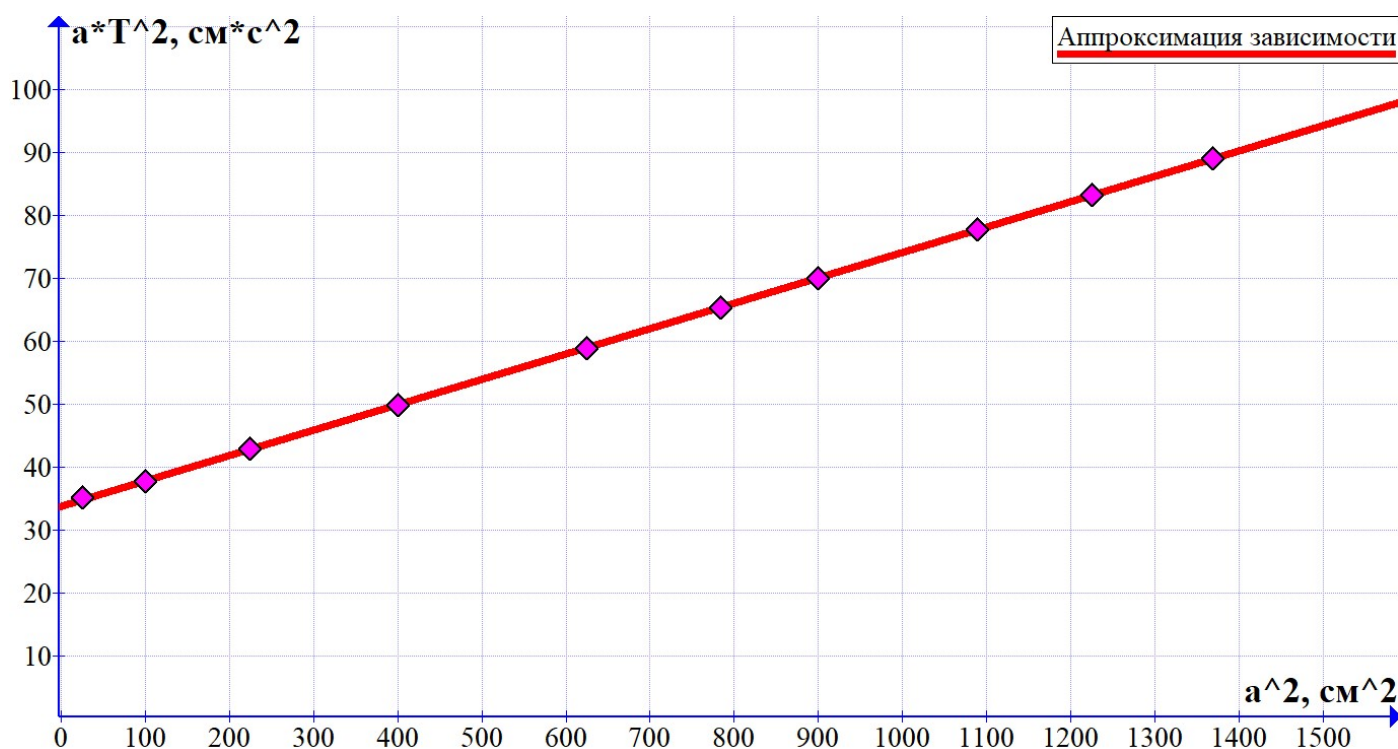


Рис. 2: Зависимость  $aT^2$  от  $a^2$

Погрешность расчёта  $a^2$  найдём по следующей формуле:

$$\sigma_{a^2} = 2a^2 \frac{\Delta a}{a} = 2a\Delta a,$$

где  $\Delta a = \Delta_c = 0,05$  см.

Погрешность вычисления  $aT^2$  можно найти по формуле:

$$\sigma_{aT^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2},$$

где  $\Delta T = \sigma_T$  из таблицы 2.

Для вычисления коэффициентов  $k$  и  $b$  из (5) воспользуемся методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,0402 \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$b = \langle y \rangle - k\langle x \rangle \approx 33,88 \text{ см} \cdot \text{с}^2,$$

где  $x = a^2$ ,  $y = aT^2$ .

Случайные погрешности вычисления  $k$  и  $b$  можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N-2} \left( \frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2 \right)} \approx 7,31 \cdot 10^{-5} \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сл}} = \sigma_k^{\text{сл}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,0331 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k \sqrt{(\varepsilon_{aT^2})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 0,0001 \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b \sqrt{(\varepsilon_{aT^2})^2 + (\varepsilon_{a^2})^2} \approx 0,1026 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{\text{сл}})^2 + (\sigma_k^{\text{сист}})^2} \approx 0,0001 \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{сл}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0,1078 \text{ см} \cdot \text{с}^2.$$

Таким образом, получаем:

- $k = (0,0402 \pm 0,0001) \frac{\text{с}^2}{\text{см}}$ ,  $\varepsilon_k = 0,35\%$
- $b = (33,88 \pm 0,11) \text{ см} \cdot \text{с}^2$ ,  $\varepsilon_b = 0,31\%$

Учитывая формулу (5), вычисляем  $g$  и  $l$ :

$$g = \frac{4\pi^2}{k} \approx 9,82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_g = g \cdot \varepsilon_k \approx 0,03 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$l = \sqrt{\frac{3bg}{\pi^2}} \approx 1,005 \text{ м},$$

$$\sigma_l = l \sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_g\right)^2} \approx 0,002 \text{ м.}$$

В итоге имеем следующие результаты:

- $g = (9,82 \pm 0,03) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \varepsilon_g = 0,31\%$
- $l = (1,005 \pm 0,002) \text{ м}, \varepsilon_l = 0,2\%$

### 4.3 Проверка справедливости формулы приведённой длины физического маятника

Для  $a = 25 \text{ см}$  подберём длину математического маятника, чтобы периоды колебаний совпадали. Возьмём  $l_{\text{мат}} = 58 \text{ см}$ . Запишем в таблицу 4 результаты измерения периода колебаний математического маятника.

№	$l_{\text{мат}}, \text{ см}$	$T_{\text{общ}}, \text{ с}$	$N_{\text{изм}}$	$T_1, \text{ с}$	$T_{\text{ср}}, \text{ с}$	$\sigma, \text{ с}$	$\varepsilon, \%$
1	58	122,44	80	1,5305	1,5298	0,0006	0,0417
2	58	122,34	80	1,5293			

Таблица 4: Период колебаний математического маятника длиной  $l_{\text{мат}} = 58 \text{ см}$

Получаем, что  $T_{\text{ср}}^{\text{мат}} = (1,5305 \pm 0,0006) \text{ с}$  при  $l_{\text{мат}} = 58 \text{ см}$ .

Это значение с хорошей точностью совпадает с периодом колебаний физического маятника  $T_{\text{ср}}^{\text{физ}} = (1,5354 \pm 0,0001) \text{ с}$  при  $a = 25 \text{ см}$ .

Вычислим  $l_{\text{пр}}$  для  $a = 25 \text{ см}$  по формуле (4):

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \approx 58,3 \text{ см.}$$

Таким образом,  $l_{\text{мат}} \approx l_{\text{пр}}$  и формула приведённой длины физического маятника справедлива.

### 4.4 Проверка обратимости точки подвеса и центра качания физического маятника

Для  $a_1 = 25 \text{ см}$  вычислим  $l_{\text{пр}}$ :

$$l_{\text{пр}} = a_1 + \frac{l^2}{12a_1} \approx 58,3 \text{ см.}$$

Следовательно расстояние от центра масс до центра качания  $a_2$  вычисляем следующим образом:

$$a_2 = |a_1 - l_{\text{пр}}| \approx 33 \text{ см}$$

№	$a, \text{ см}$	$T_{\text{общ}}, \text{ с}$	$N_{\text{изм}}$	$T_1, \text{ с}$	$T_{\text{ср}}, \text{ с}$	$\sigma_T, \text{ с}$	$\varepsilon, \%$
1	25	138,19	90	1,5354	1,5354	0,0001	0,007
2	25	138,18	90	1,5353			
1	33	153,31	100	1,5331	1,5336	0,0001	0,008
2	33	153,44	100	1,5344			

Таблица 5: Измерение периода колебаний физического маятника для  $a_1 = 25 \text{ см}$  и  $a_2 = 33 \text{ см}$

Проведём измерение периода колебаний физического маятника для  $a_1 = 25$  см и  $a_2 = 33$  см. Результаты измерений представлены в таблице 5.

Получаем, что

- $T_{\text{ср1}} = (1,5354 \pm 0,0001) \text{ с}$
- $T_{\text{ср2}} = (1,5336 \pm 0,0001) \text{ с}$

Следовательно,  $T_{\text{ср1}} \approx T_{\text{ср2}}$  и точка подвеса и центр качания физического маятника обратимы.

## 5 Выводы и обсуждение результатов

В ходе работы были получены следующие величины:

- $g = (9,82 \pm 0,03) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \varepsilon_g = 0,31\%$
- $l = (1,005 \pm 0,002) \text{ м}, \varepsilon_l = 0,2\%$

Они были получены с хорошей точностью, что говорит о малых погрешностях при измерениях, а так же о хорошем методе нахождения этих величин.

Также, были экспериментально проверена теория о приведённой длине физического маятника и теория об обратимости точки подвеса и центра качания. Точность полученных результатов можно повысить, если исключить ошибку при фиксации периода колебаний маятника, которая существует в силу неидеальной реакции экспериментатора. Возможно, стоит использовать цифровой прибор фиксации колебаний и отсчёта времени. Также свою погрешность вносит неточность определения расстояния от точки опоры до центра масс стержня.