

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау



## Лабораторная работа 1.3.2

### Определение модуля кручения

Авторы:  
Петров Олег  
Б02-202

# 1 Аннотация

**Цель работы:** измерение углов закручивания в зависимости от приложенного момента сил, определение модулей для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника

**Оборудование:** проволока из исследуемого материала, грузы, секундомер, микрометр, рулетка, линейка.

## 2 Теоретические сведения

При закручивании цилиндрических стержней круглого сечения распределение деформаций и напряжений одинаково по длине стержня только вдали от мест, где прикладываются закручивающие моменты. Для этих областей можно считать, что каждое поперечное сечение поворачивается поворачивается как жесткое, то есть частички материала не сходят с радиальных линий, на которых они были в начале, и все эти линии поворачиваются на один и тот же угол. Такое напряженное состояние называется чистым кручением.

При такой деформации любая прямая линия, проведенная до закручивания цилиндра по частицам материала и параллельная оси симметрии, при закручивании превращается в спираль (винтовую линию).

Покажем, что касательное напряжение в поперечном сечении увеличивается пропорционально расстоянию до оси вращения. Рассмотрим в цилиндре колечко бесконечно малой толщиной  $dr$  и высоты  $dl$ . При закручивании верхнее колечко поворачивается относительно нижнего на угол  $d\varphi$ , а образующая наклоняется на угол  $\alpha$ . Тогда при малых углах справедливо соотношение:

$$\alpha dl = r d\varphi \quad (1)$$

Касательное напряжение  $\tau$  связано с углом  $\alpha$  линейной зависимостью через модуль сдвига  $G$ , и следовательно растет с увеличением расстоянием от оси:

$$\tau = G \cdot \alpha = Gr \frac{d\varphi}{dl} \quad (2)$$

Эти касательные напряжения создают момент сил относительно оси цилиндра:

$$dM = 2\pi r dr \cdot r \cdot \tau \quad (3)$$

Интегрируя это выражение по всем колечкам от оси цилиндра до его радиуса  $R$  находим суммарный момент сил:

$$M = \frac{\pi G R^4}{2} \frac{d\varphi}{dl} \quad (4)$$

Так как момент сил не меняется по длине цилиндра. Тогда для связи приложенного момента сил  $M$  и угла поворота  $\varphi$  поперечных сечений цилиндра имеем:

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2l} \varphi = f \varphi \quad (5)$$

Где  $f$  - модуль кручения связанный с модулем сдвига  $G$  соотношением:

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f \quad (6)$$

В системе можно возбудить крутильные колебания. Вращение стержня с закрепленными на нем грузиками вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента  $M$ .

С учетом выражения для момента  $M$  получим, что это вращение описывается уравнением колебаний:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + f \varphi = 0 \quad (7)$$

Следовательно период колебаний системы связан с расстоянием  $r$  от оси вращения до грузов и моментом инерции стержня  $I_0$  следующим образом:

$$T^2 = (2\pi)^2 \frac{I}{f} = (2\pi)^2 \frac{I_0}{f} + (2\pi)^2 \frac{(m_1 + m_2)}{f} r^2 \quad (8)$$

Эти зависимости были получены для незатухающих колебаний. Поэтому для их применения необходимо убедиться, что в рассматриваемой системе диссипативными силами можно пренебречь. Для этого стоит убедиться, что период колебаний не зависит от начальной амплитуды и что амплитуда уменьшается не более чем в 2 раза после около 10 колебаний.

### 3 Экспериментальная установка

Экспериментальная установка, используемая в этой части работы, изображена на рис. 1 и состоит из длинной вертикально висящей проволоки П, к нижнему концу которой прикреплен горизонтальный металлический стержень С с двумя симметрично расположенными грузами Г. Их положение на стержне можно фиксировать. Верхний конец проволоки зажать в цангу и при помощи специального приспособления может вместе с цангой поворачиваться вокруг вертикальной оси. Таким способом в системе можно возбуждать крутильные колебания. Вращение стержня С с закрепленными на нем грузами Г вокруг вертикальной оси происходит под действием упругого момента, возникающего в проволоке.

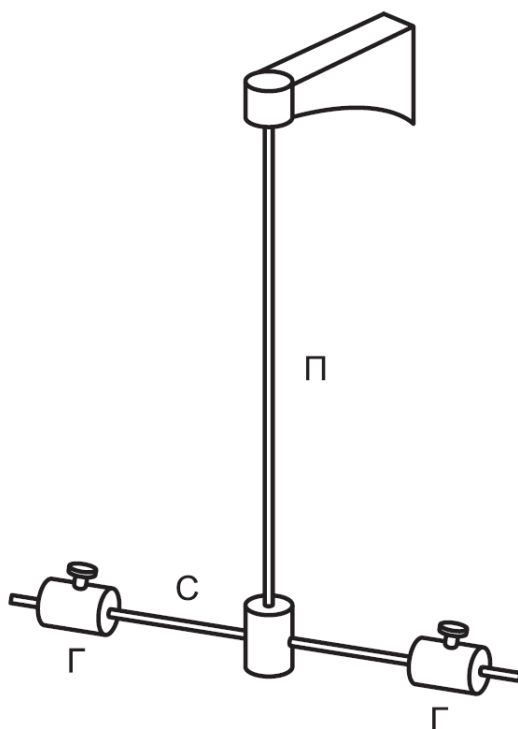


Рис. 1: Схема установки

## 4 Результаты эксперимента и обработка данных

- Перед началом работы установим параметры системы:

$$l = 174 \pm 1 \text{ см}, \quad d = 1.98 \pm 0.01 \text{ мм}, \quad m_1 = 377.5 \pm 0.05 \text{ гр}, \quad m_2 = 373.1 \pm 0.05 \text{ гр}$$

$$\varepsilon_l = 0.5\%, \quad \varepsilon_d = 0.5\%, \quad \varepsilon_{m_1} = 0.01\%, \quad \varepsilon_{m_2} = 0.01\%,$$

- Укрепим грузы на некотором одинаковом расстоянии от оси и возбудим в системе крутильные колебания. Перед началом измерений убедимся, что мы выбрали правильный диапазон амплитуд для измерений, в котором можно пренебречь затуханием и применять уравнения гармонических колебаний. Для этого убедимся в том, что амплитуда колебаний уменьшается не более чем в 2 раза после 10-15 периодов колебаний.
- Убедившись в том, что затуханием можно пренебречь установим, грузы на стержне на одинаковом расстоянии от оси  $r$  от оси симметрии системы до центра масс каждого из грузов. Будем измерять период колебаний  $T$  в зависимости от длины  $r$  и заносим данные в таблицу ниже:

$t, \text{с}$	$N$	$T, \text{с}$	$l, \text{см}$	$l^2, \text{см}^2$	$T^2, \text{с}^2$
72.04	23	3.13	100	10000	9.81
37.78	12	3.15	100	10000	9.91
57.65	20	2.88	90	8100	8.31
57.66	20	2.88	90	8100	8.31
106.74	37	2.88	90	8100	8.32
54.84	19	2.89	90	8100	8.33
57.88	20	2.89	90	8100	8.38
79.01	30	2.63	80	6400	6.94
55.16	21	2.63	80	6400	6.90
50	21	2.38	70	4900	5.67
45.09	21	2.15	60	3600	4.61
48.45	25	1.94	50	2500	3.76
46.16	24	1.92	50	2500	3.70

Таблица 1: измерение периода в зависимости от длины плеча

- По полученным данным строим график зависимости  $r^2$  от  $T^2$  пользуясь методом наименьших квадратов (МНК). По величине наклона определяем модуль кручения и его погрешность.

Определим коэффициент наклона графика и его случайную погрешность пользуясь формулами МНК и ковариацией  $D_{x,y} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$ :

$$k = \frac{\langle T^2 r^2 \rangle - \langle T^2 \rangle \langle r^2 \rangle}{\langle T^4 \rangle - \langle T^2 \rangle^2} = \frac{D_{r^2, T^2}}{D_{T^2, T^2}} = 12.18 \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$$

$$\varepsilon_k^{\text{случ}} = \frac{1}{k\sqrt{N-2}} \sqrt{\frac{\langle r^4 \rangle - \langle r^2 \rangle^2}{\langle T^4 \rangle - \langle T^2 \rangle^2} - k^2} = 0.5\%, \quad \varepsilon_k^{\text{сист}} = 2\sqrt{\varepsilon_T^2 + \varepsilon_r^2} = 0.6\%$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\varepsilon_{\text{сист}}^2 + \varepsilon_{\text{случ}}^2} = 0.7\%$$

По итогу получаем значение коэффициента наклона прямой:  $k = 12.18 \pm 0.08 \text{ м}^2/\text{с}^2$ . При подсчете погрешности  $f$  учтем, что  $\varepsilon_m \ll \varepsilon_k$ . Теперь мы можем получить значение для модуля кручения пользуясь формулами:

$$f = (2\pi)^2(m_1 + m_2) \cdot k = 3.6 \cdot 10^{-2} \text{ Нм}, \quad \varepsilon_f \approx \varepsilon_k = 0.7\%$$

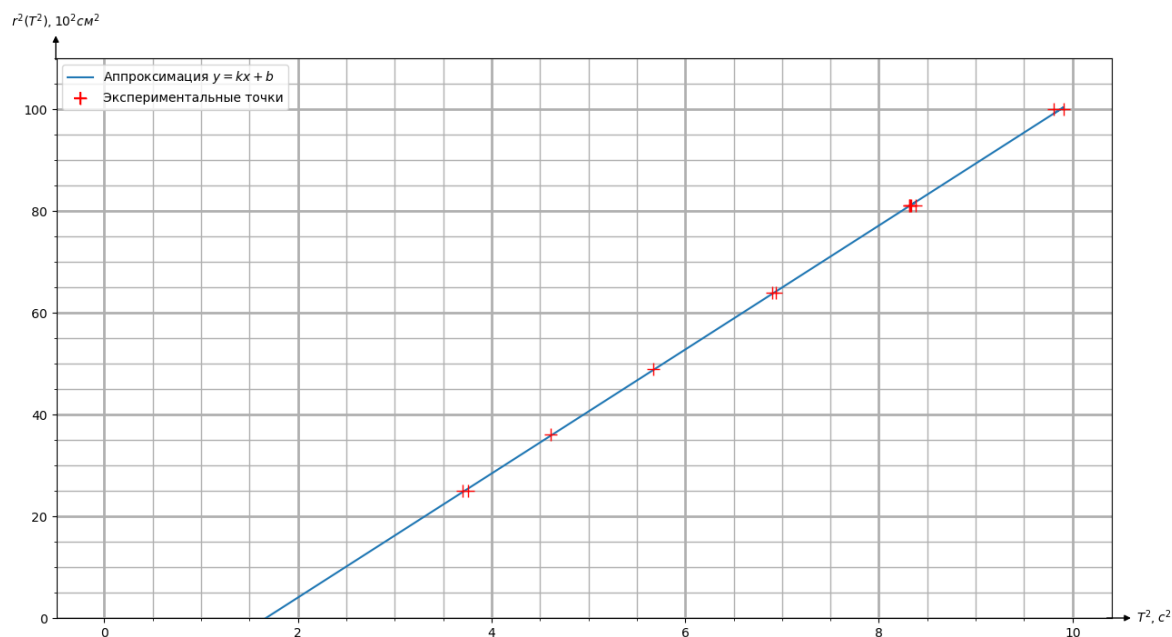


Рис. 2: График зависимости  $r^2$  от  $T^2$

Для итогового значения модуля кручения имеем:  $f = 3.61 \pm 0.02 \cdot 10^{-2}$  Нм

- Теперь зная геометрические параметры проволоки по найденному модулю кручения  $f$  мы можем найти модуль сдвига  $G$  пользуясь формулой:

$$G = \frac{32l}{\pi d^4} f = 40.8 \text{ ГПа} \quad \varepsilon_G = \sqrt{\varepsilon_f^2 + \varepsilon_l^2 + 16\varepsilon_d^2} = 2\%$$

Получаем итоговое значение для модуля сдвига:  $G = 40.8 \pm 0.8$  ГПа.

## 5 Выводы

В результате эксперимента были получены значения для модуля кручения  $f = 3.61 \pm 0.02 \cdot 10^{-2}$  Нм проволоки и модуля сдвига проволоки  $G = 40.8 \pm 0.8$  ГПа с приемлемой точностью  $\varepsilon_G = 2\%$ . Можно также заметить, что модуль сдвига материала проволоки в пределах погрешности совпадает с модулем сдвига сплавов меди в первую очередь и во вторую очередь частично попадает в значений модулей сдвига следующих материалов: титан, бронза, чугун, нейзильбер.