Лабораторная работа №3.7.1
Скин-эффект в полом цилиндре

Гёлецян А.Г.

6 ноября 2022 г.

Цель работы: Исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр

1 Теоретическая часть

1.1 Скин-эффект для полупространства

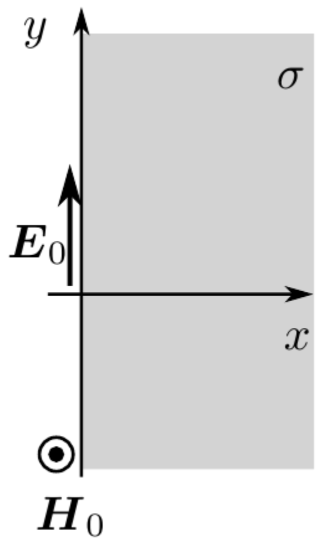

Рис. 1: Скин-эффект в полупространстве

Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор $\boldsymbol{E}$ направлен всюду вдоль оси y (рис.1) и зависит только от координаты x, т. е. $E_x = E_z \equiv 0$, $E_y = E_y(x,t)$. В квазистационарном приближении

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \boldsymbol{H} = \sigma \boldsymbol{E}$$

Берем ротор обоих частей

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \boldsymbol{H}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{H}\right) - \vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \boldsymbol{H} = \sigma \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \boldsymbol{E}$$

Испоьзуя ур-е Максвелла для ротора $\boldsymbol{E}$ и для дивергенчии $\boldsymbol{H}$ получаем

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \boldsymbol{H} = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \vec{\boldsymbol{\nabla}}\left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{H}\right) = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1}$$

Берем ротор еще раз

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times (\vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \boldsymbol{H}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \boldsymbol{H}) = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial (\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \boldsymbol{H})}{\partial t}$$

Осталось подставить первое ур-е, и воспользоватся уравнением Максвелла

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}^2 \boldsymbol{E} = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2}$$

Подставляем в (2) наше электрическое поле $E_y = E_y(x,t)$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{3}$$

Если $E_y(0,t) = E_0 e^{i\omega t}$ то решением (3) будет функция вида

$$E_y(x,t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \tag{4}$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu\mu_0}} \tag{5}$$

1.2 Скин-эффект в тонокм полом цилиндре

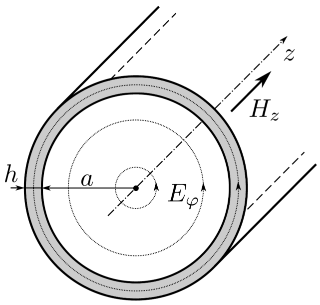

Рис. 2: Эл-магнитные поля в цилиндре

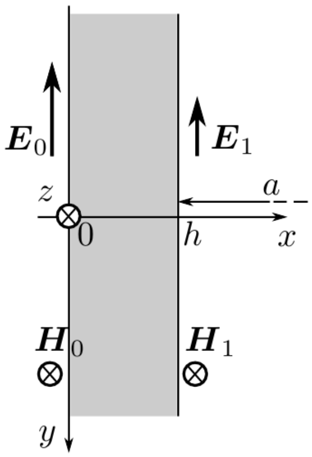

Рис. 3: Стенка цилиндра

Перейдем теперь к описанию теории в нашей работе. Из соображении симметрии и непрерывности соответствующих компонет векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можем сказать что

$$H_z = H(r)e^{i\omega t},\ E_\varphi = E(r)e^{i\omega t}$$

и при этом функции $H(r)$ и $E(r)$ непрерывны.

Внутри цилиндра токов нет, следовательно $H(r) = H_1 = \mathrm{const}$ внутри цилиндра. По теореме об электромагнитной индукции

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1$$

откуда мы получаем граничное условие

$$E_1 = E(a) = -\frac{1}{2}\mu_0 a \cdot i\omega H_1 \tag{6}$$

В прближении $h \ll a$ можем пренебречь кривизной стенки и смоделировать его бесконечной полосой. Тогда, надо решить уравнение (1) с граничными условиями. Решая уравнение получим связь полей H_1 (поле внутри цилиндра которое мы будем измерять) и H_2, которое колебается с частотой ω

$$H_1 = \frac{H_0}{\mathrm{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a\,\mathrm{sh}(\alpha h)} \quad \alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\delta}e^{i\pi/4} \tag{7}$$

из этой формулы получим сколько по фазе отстает поле H_1 от H_0. При $\delta \ll h$ (высокачастотная область)

$$\psi \approx \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \tag{8}$$

При $\delta \gg h$ (низкочастотная область)

$$\tan\psi \approx \frac{ah}{\delta^2} = \pi a h\sigma\mu\mu_0\nu \tag{9}$$

1.3 Процесс измерения

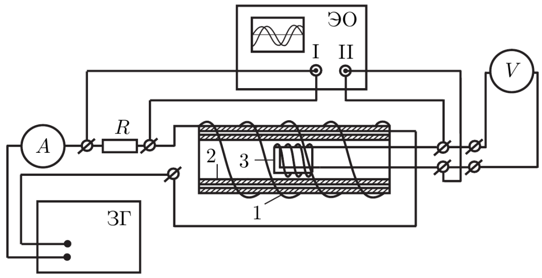

Рис. 4: Установка

Мангнитное поле внутри цилиндра измеряется катушкой 3. Напряжение на катушке пропорционалньна производной $\dot{B}_1(t)$

$$U(t) \propto \dot{B}_1(t) = -i\omega H_1 e^{i\omega t}$$

Поле внутри цилиндра пропорциональна току через соленоид

$$B_0(t) \propto I(t)$$

Отсюда несложно увидеть, что

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = c \cdot \frac{U}{\nu I} = c\xi \tag{10}$$

где константу можно определить из условия $|H_1|/|H_2| \to 1$ при $\nu \to 0$.

При измерениях разности фаз нужно учесть, что первый сигнал на осциллографе пропорционален магнитному полю снаружи, а второй пропорционален производному поля внутри цилиндра по времени. Вследствии этого набегает дополнительная фаза $\pi/2$, которую надо вычесть при измерениях.

2 Ход работы

Параметры нашей установки $2a = 45$мм, $h = 1.5$мм. Проводимость порядка $\sigma \sim 5 \cdot 10^7$См/м. Получаем оценку для частоты, при которой глубина проникновения равна толщине стенок цилиндра $\nu_h = 2250$Гц.

2.1 Измерение проводимости через отношение амплитуд

В области частот $\nu \ll \nu_h$ $\alpha h \ll 1$, и из (7) получаем

$$(c\xi)^2 \approx \frac{1}{1 + A\nu^2}$$

или, эквивалентно

$$\frac{1}{\xi^2} = B\nu^2 + c^2 \text{ где } B = \pi a h \sigma \mu_0 c$$

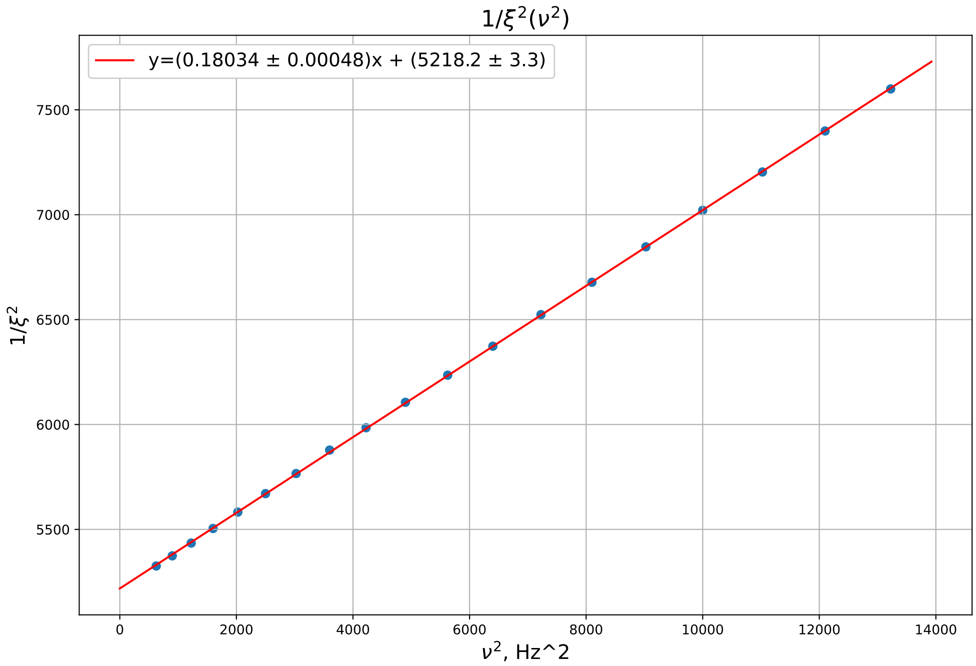

Рис. 5: График зависимости $1/\xi^2(\nu)$

Из графика получаем значение c, а так же проводимость меди σ

$$c = (72.237 \pm 0.023),\ \sigma = (4.4122 \pm 0.0061) \cdot 10^7\text{См/м} \tag{11}$$

2.2 Измерение проводимости через разность фаз в низкочастотном диапазоне

Согласно формуле (9), при $\delta \gg h$

$$\tan\psi = k \cdot \nu \ ; \ k = \pi a h \sigma \mu_0 \ \ (\mu = 1)$$

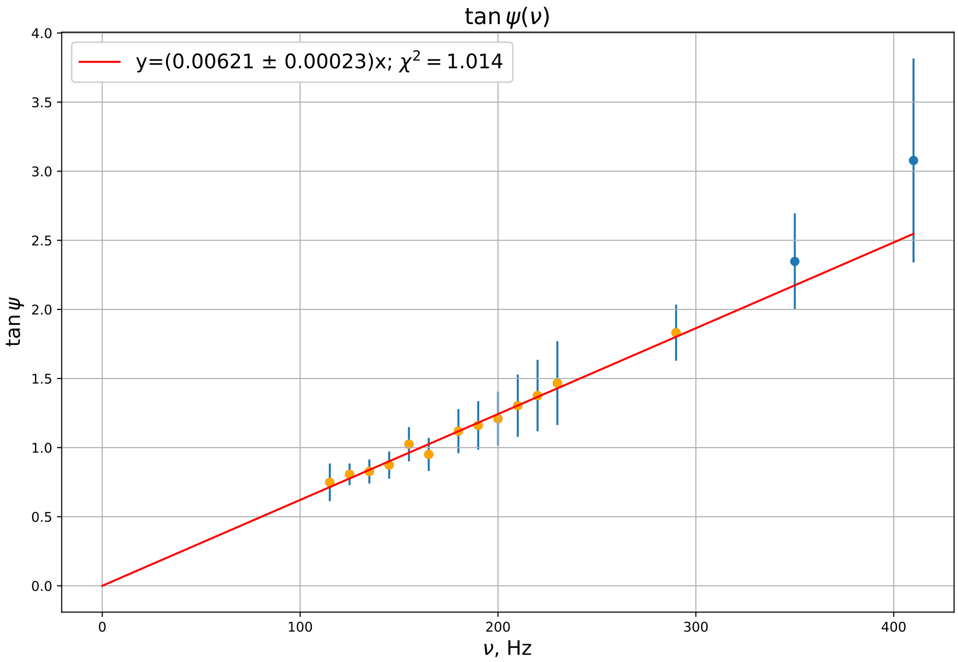

Рис. 6: График зависимости $\tan\psi(\nu)$ (линейная часть)

Из коэффициента наклона прямой находим проводимость

$$\sigma = (4.66 \pm 0.17) \cdot 10^7 \text{См/м} \tag{12}$$

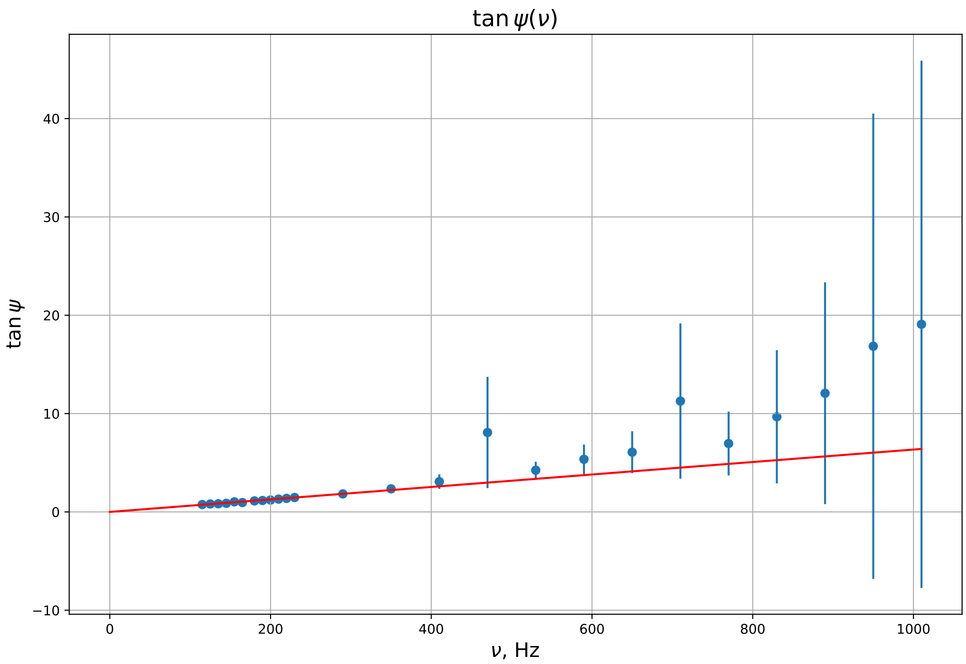

Рис. 7: График зависимости $\tan\psi(\nu)$ (нелинейная часть)

2.3 Измерение проводимости через разность фаз в высокачастотном диапазоне

Согласно формуле (8), при $\delta \ll h$

$$\psi - \pi/4 = k \cdot \sqrt{\nu};\ \ k = h\sqrt{\pi\mu_0\sigma}$$

Из графика получаем следующее значение проводимости

$$\sigma = (4.28 \pm 0.33) \cdot 10^7 \text{См/м} \tag{13}$$

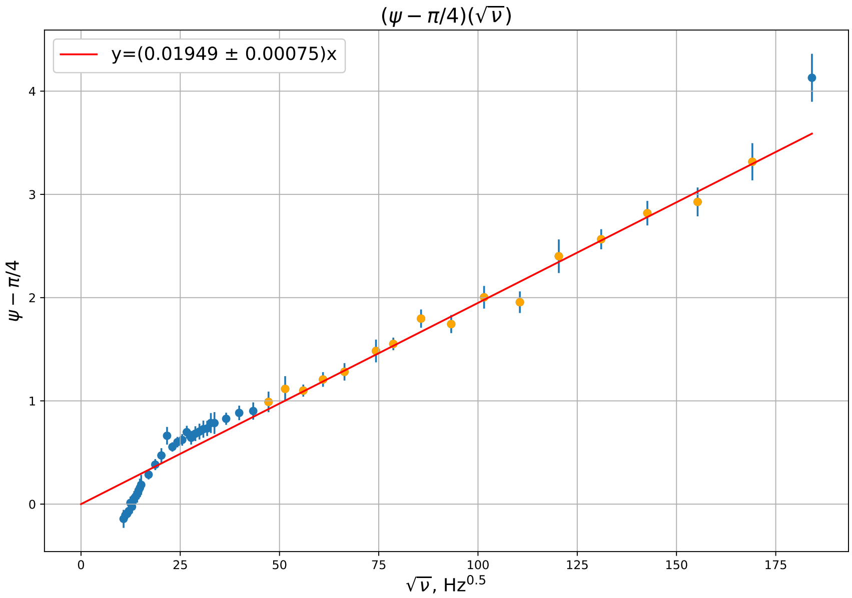

Рис. 8: График зависимости $(\psi - \pi/4)(\sqrt{\nu})$

2.4 Измерение проводимости через изменение индуктивности

Из за наличия цилиндра внутри, индуктивность внешней катушки зависит от катушки следующим образом

$$\frac{L_{\max} - L}{L - L_{\min}} = \pi^2 a^2 h^2 {\mu_0}^2 \sigma^2 \nu^2$$

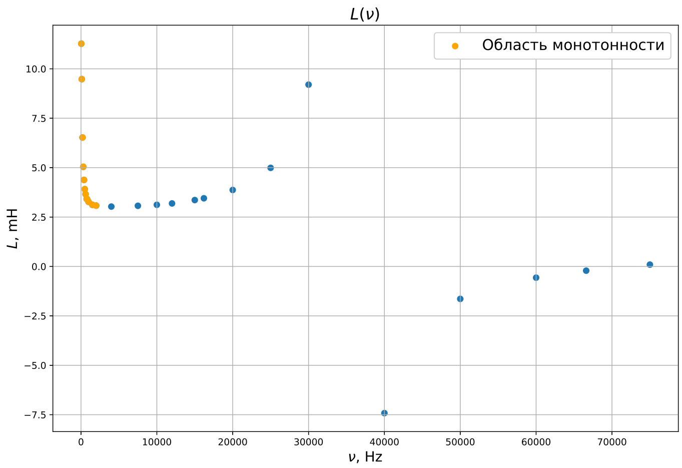

Рис. 9: График зависимости $L(\nu)$

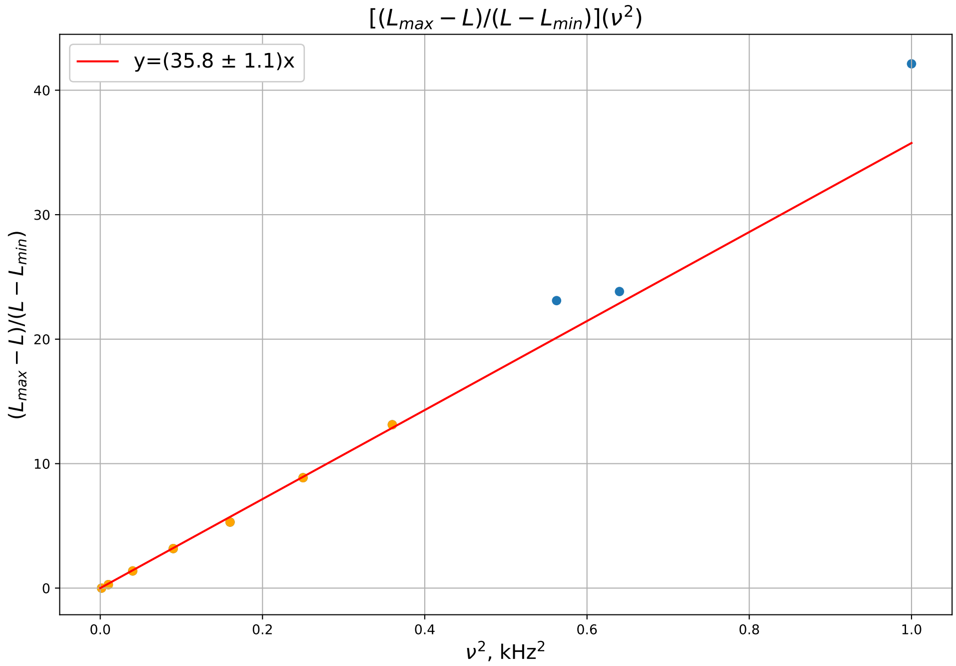

Рис. 10: График зависимости $\frac{L_{\max}-L}{L-L_{\min}}(\nu^2)$

$L_{\max}$ и $L_{\min}$ ищем в области монотонности. Далее, линеаризуя данные по формуле выше получаем линейную зависимость при малых ν. По наклону кривой находим

$$\sigma = (4.49 \pm 0.07) \cdot 10^7 \text{См/м} \tag{14}$$

2.5 Отношение магнитных полей

Отношение $|H_1|/|H_0|$ можем посчитать двумя способами. Первый способ - через формулу (10),использовав значение c из пункта (2.1). Второй способ - через теоретическую формулу (7), использовав значение σ из пункта (2.1). Посмотрим на их различие с помощью графиков зависимости $|H_1|/|H_0|(\nu)$

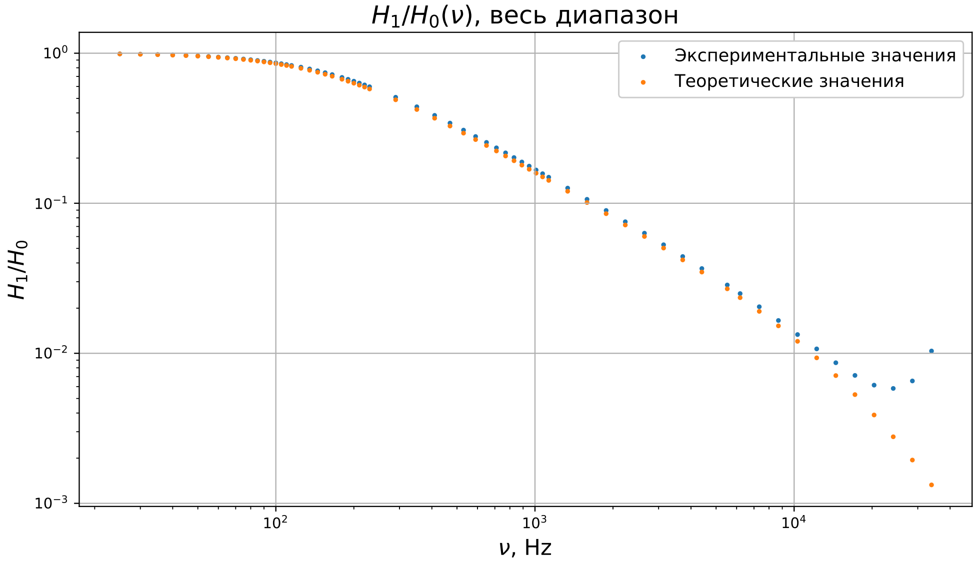

Рис. 11: Отношение полей - весь диапазон

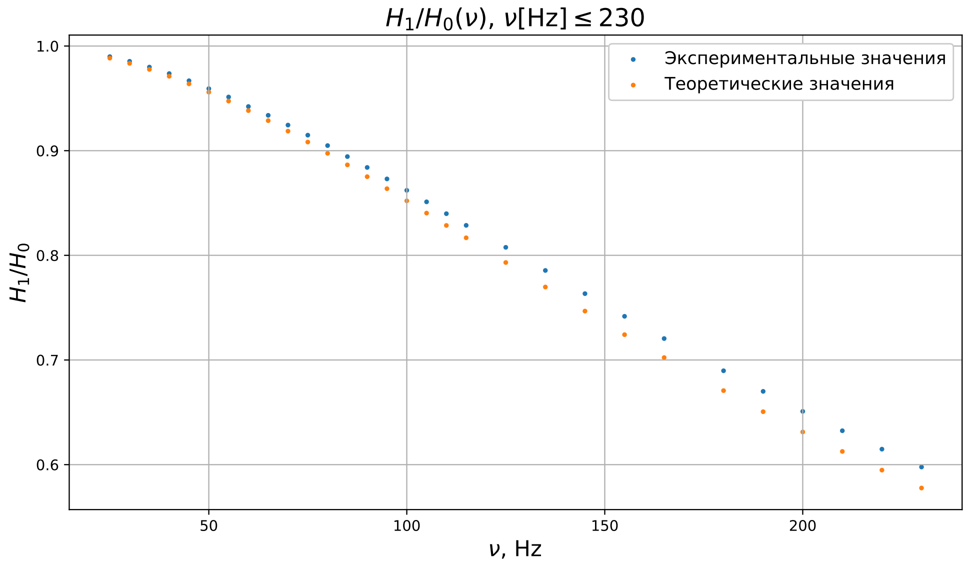

Рис. 12: Отношение полей - низкочастотный диапазон

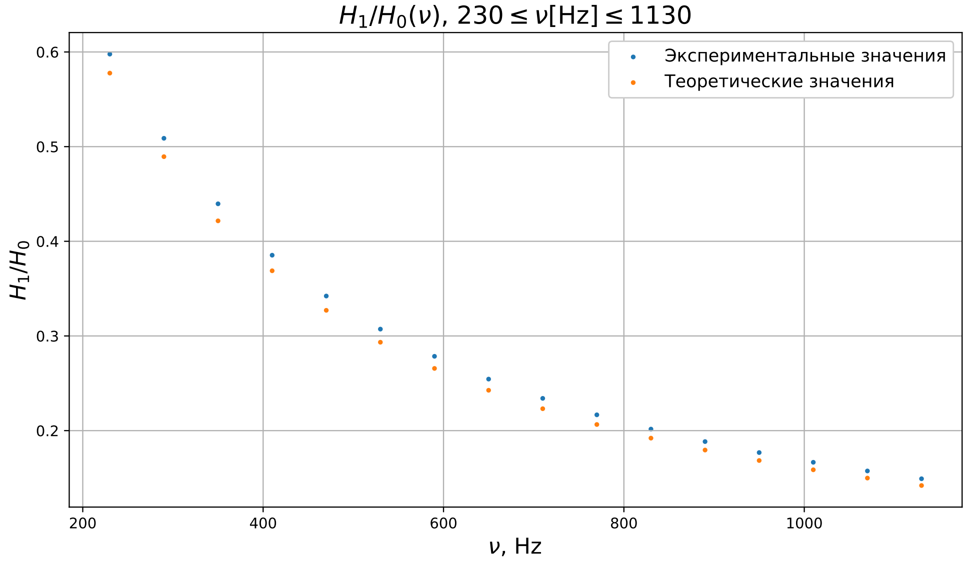

Рис. 13: Отношение полей - среднечастотный диапазон

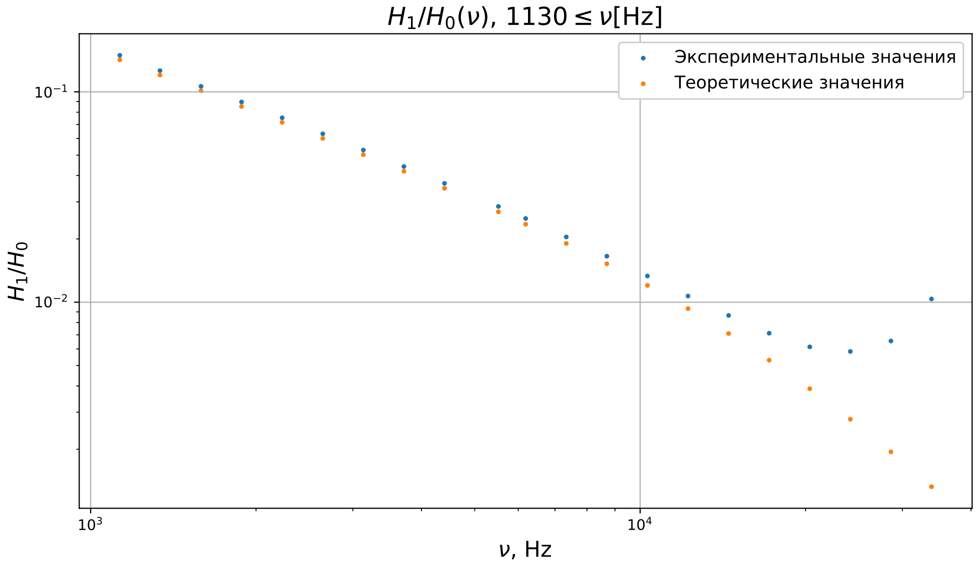

Рис. 14: Отношение полей - высокочастотный диапазон

3 Вывод

Мы измерили проводимость материала цилиндра 4 разными способами. Сравним эти данные между собой

Для данной марки меди проводимость состовляет $\sigma_{\text{точн.}} = 5.62 \cdot 10^7$См/м. Учитывая высокую точность измерения первым методом, предположительно значеня не совпадают из за неприменимости формул для коэффициентов в нашем случае, в частности из за приближения о бесконечности цилиндра.

Самым неточным оказался метод измерения через разность фаз при высоких частотах. Это связано не только с погрешностями измерения разности фаз, но так же с другими эффектами,

Метод измерения	$\sigma, 10^7$См/м	$\Delta\sigma, 10^7$См/м	ε_σ
Отношение амплитуд	4.4122	0.0061	0.14%
Разности фаз (низкие частоты)	4.66	0.17	3.6%
Разности фаз (высокие частоты)	4.28	0.33	7.7%
Индуктивность	4.49	0.07	1.6%

Таблица 1: Сравнение результатов различных методов

которые наблюдаются на графике 9. Как видим, при частотах ~ 5кГц зависимость индуктивности не описывается теорией (скорее всего из за токов Фуко), следовательно, при этих частотах не должна работать и остальная теория. Как результат, зависимость разности фаз от корня частоты уже не описывается линейной зависимостью.

Погрешность измерения проводимости через разность фаз при низких частотах в основном связана с погрешностью измерения самой разности фаз, т.к. погрешность последней возрастает в несколько раз при подсчете тангенса угла.

Несоответствие величин $\eta = |H_1|/|H_0|$ возможно является следствием ошибки коэффициента c. Чтобы понять это, построим график зависимости $\eta_{\text{эксп}}/\eta_{\text{теор}}$ от частоты ν

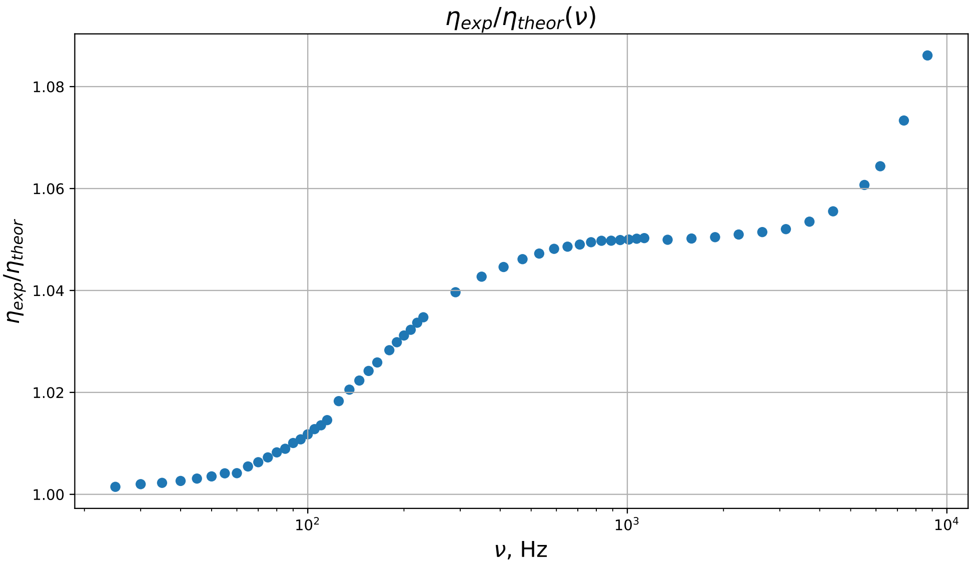

Рис. 15: График зависимости $\eta_{\text{эксп}}/\eta_{\text{теор}}(\nu)$

Как видим, теория всегда предсказывает большее ослабление, и при том отношение предсказывании монотонно растет, что свидетельствует о том, что причиной несоответствия является не ошибка коэффициента c, а несоответствие теоретической модели с действительностью.