

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау



## Лабораторная работа 1.2.5

Исследование прецессии уравнивающего  
гироскопа

Авторы:  
Петров Олег  
Б02-202

# 1 Аннотация

**Цель работы:** Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа. Установление зависимости скорости вынужденной прецессии от величины момента сил трения, действующих на ось гироскопа. Определения скорости вращения ротора гироскопа и сравнение ее с рассчитанной по скорости прецессии.

**Оборудование:** гироскоп, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

## 2 Теоретические сведения

### 2.1 Измерение частоты вращения ротора

Гироскопом называется быстро вращающееся твердое тело для, для которого, момент импульса относительно одной оси значительно больше момента импульса относительно других, например, вокруг оси  $OZ$ :

$$\vec{L}_z \gg \vec{L}_y, \quad \vec{L}_x \quad (1)$$

Гироскоп уравновешен, если его центр масс неподвижен. А устойчивость вращения гироскопа связана с тем, что приращение момента импульса при действии внешних сил в течении короткого промежутка времени много меньше самого момента импульса и практически не иеняет его, то есть:

$$|\Delta \vec{L}| = \left| \int \vec{M} dt \right| \ll |\vec{L}| \quad (2)$$

Рассмотрим гироскоп вращающийся только относительно оси  $OZ$  со скоростью  $\omega$ . Для того чтобы гироскоп начал совершать регулярную прецессию вокруг вертикальной оси  $OY$  с угловой скоростью  $\Omega$  необходимо приложить к нему момент внешних сил  $\vec{M}$  направленный вдоль оси  $OX$ . при этом если выполнено условие:

$$\vec{L}_\Omega \ll \vec{L}_\omega \quad (3)$$

То момент импульса гироскопа относительно главной оси  $\vec{L}$  практически не меняется со временем по модулю и связан с моментом приложенных сил  $\vec{M}$  и скоростью прецессии  $\Omega$  следующим соотношением:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (4)$$

Для изучения регулярной прецессии уравновешанного гироскопа подвесим к нему дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создает момент силы тяжести, вызывающий прецессию. Тогда скорость вращения ротора гироскопа равна:

$$\omega = \frac{L}{I_z} = \frac{M}{I_z \Omega}, \quad \text{где } M = mgl \quad (5)$$

### 2.2 Измерение момента инерции ротора

Момент инерции ротора измеряем по периоду крутильных колебаний на жесткой проволоке. Чтобы исключить модуль кручения проволоки  $f$ , подвешиваем цилиндр правильной формы с известным моментом инерции  $I$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{f}}, \quad I = I_{\text{ц}} \frac{T^2}{T_{\text{ц}}^2} \quad (6)$$

## 2.3 Измерени момента сил трения

Так как силы трения имеют составляющую, не лежащую в плоскости осей вращения, они меняют момент импульса и по направлению, и по величине. Для ротора гироскопа действие сил трение скомпенсировано электромотором, для осей карданова подвеса компенсации нет. В результате чего ось гироскопа будет опускаться в направлении действия груза. Момент сил трения  $M_{тр}$  может быть вычислен по формуле:

$$M_{тр} = \frac{\Delta\alpha}{t} L \quad (7)$$

## 3 Результаты эксперимента и обработка данных

### 3.1 Измерение момента импульса ротора

Отклоним рычаг на 5-6 градусов в верх и подвесим к нему груз. Результаты измерения числа оборотов, времени движения и всего осатльного заносим в таблицу один ???. Установим параметры системы и систематические погрешности:

$$l = 121 \pm 1 \text{ мм}, \quad g = 9.815 \pm 0.005 \text{ мс}^{-2}$$

,

$$\Delta m = 1 \text{ г}, \quad \Delta T = 0.1 \text{ с}$$

Расчет угла, на который опускается вертикальная ось, заносим в таблицу и производим по формуле :

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta h}{l} \cdot \frac{180}{\pi}$$

№	$m$ ,	$t, c$	$N$	$\Delta h, \text{мм}$	$\Delta\alpha, ^\circ$	$T, c$	$\Delta\alpha/T, ^\circ \cdot c^{-1}$
1	61	168.4	1	5	2.37	168.4	0.014
2	61	170.9	1	5	2.37	170.9	0.014
3	93	221.3	2	8	3.79	110.7	0.017
4	93	222.6	2	7	3.32	111.3	0.015
5	93	221.6	2	8	3.79	110.8	0.017
6	142	216.6	3	9	4.26	72.2	0.020
7	142	215	3	8	3.79	71.7	0.018
8	142	215.8	3	9	4.26	71.9	0.020
9	214	143	3	4	1.90	47.7	0.013
10	214	143	3	3	1.42	47.7	0.010
1	335	122.2	4	5	2.37	30.6	0.019
12	335	123.7	4	5	2.37	30.9	0.019
13	335	125.1	4	4	1.90	31.3	0.015
14	335	122.7	4	5	2.37	30.7	0.019

Таблица 1: Все измерения величин

Усредняем значения периода для выборки с одинаковой массой и заносим результаты в таблицу ??. Погрешность измерения периода оцениваем по формуле:

$$\sigma_{\text{случ}}^T = \sqrt{\sum_i (T_i - \langle T \rangle)^2 / N}, \quad \sigma_{\text{сист}}^T = \Delta T / N$$

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2}$$

Тогда скорость прецессии и ее погрешность вычисляем по формуле по формуле:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \sigma_\Omega = \frac{\Omega}{T} \cdot \sigma_T$$

И аналогично для вычисления момента сил тяжести имеем:

$$M = mgl, \quad \sigma_M = M \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2}$$

Средние относительные погрешности измерений  $\Omega$  и  $M$ , таким образом получаются  $\varepsilon_\Omega = 0.3\%$  и  $\varepsilon_M = 1.3\%$ .

№	$m$	$T, c$	$\sigma_T, c$	$\Omega, 10^{-2} c$	$\sigma_\Omega, 10^{-2} c$	$M, 10^{-2} Hm$	$\sigma_M, 10^{-2} Hm$
1	61	169.7	1.6	3.70	0.03	7.2	0.1
2	93	110.9	0.1	5.66	0.01	11.0	0.1
3	142	71.9	0.1	8.73	0.01	16.9	0.2
4	214	47.7	0.1	13.18	0.03	25.4	0.2
5	335	30.9	0.1	20.36	0.05	39.8	0.3

Таблица 2: Все измерения величин

Построим график зависимости  $M(\Omega)$  пользуясь методом наименьших квадратов(МНК):

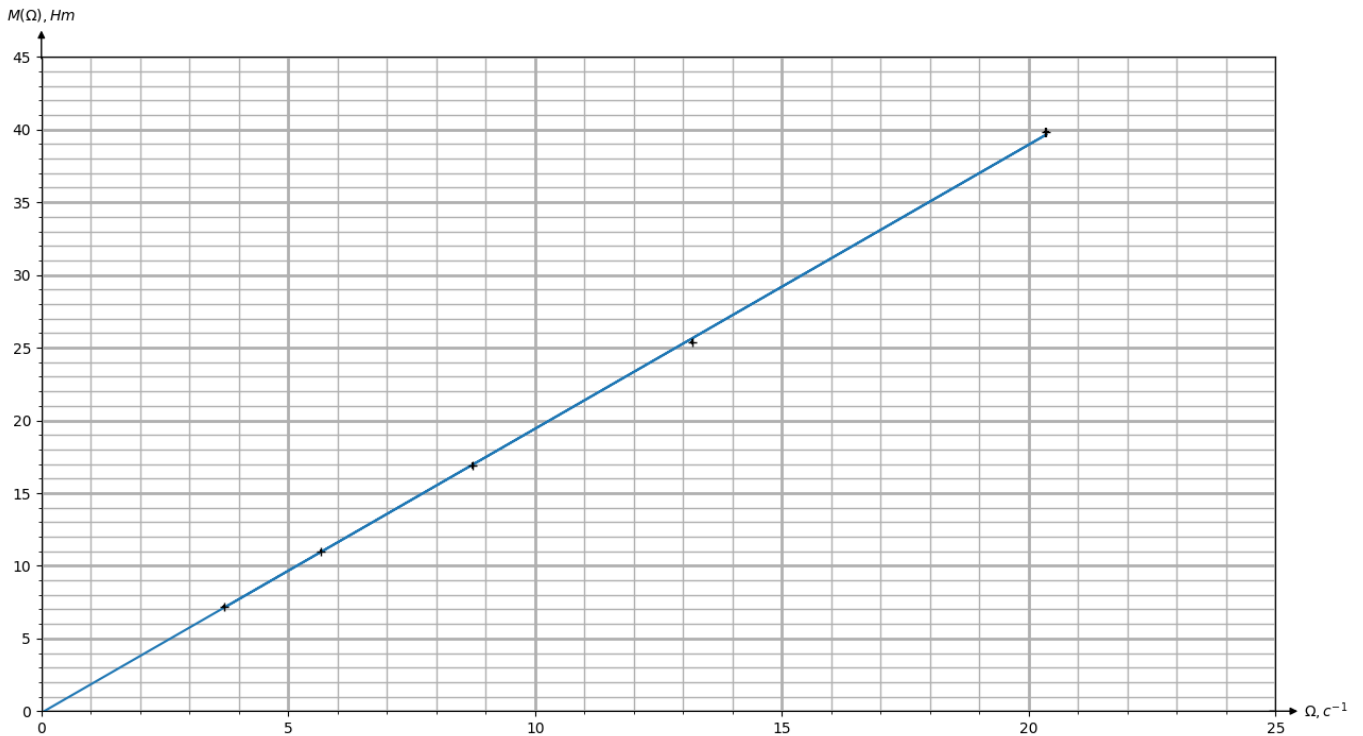


Рис. 1: График зависимости  $M$  от  $\Omega$

Воспользовавшись формулой (??) получим, что коэффициент наклона графика  $k = M/\Omega = L$ . Пользуясь формулами МНК найдем коэффициент:

$$L = \frac{\langle M\Omega \rangle - \langle \Omega \rangle \langle M \rangle}{\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2} = 1.95 \frac{\text{кг м}^2}{\text{с}}$$

Для оценки погрешности  $L$  имеем:

$$\sigma_L^{\text{случ}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2}{\langle \Omega^2 \rangle - \langle \Omega \rangle^2} - k^2} = 0.03 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}, \quad \sigma_L^{\text{сист}} = L \sqrt{\left\langle \frac{\sigma_M}{M} \right\rangle^2 + \left\langle \frac{\sigma_\Omega}{\Omega} \right\rangle^2} = 0.02 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2} = 0.03 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}, \quad \varepsilon_L = 1.5\%$$

Таким образом получаем итоговое значение момента импульса  $L = 1.95 \pm 0.03 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ .

### 3.2 Измерение момента инерции ротора

Измерим момент инерции ротора гироскопа относительно оси симметрии  $I$ . Для этого подвесим ротор и цилиндр к концу стальной нити и возбуждим крутильные колебания. Время для  $N = 20$  колебаний ротора и цилиндра заносим в таблицу ?? . Расчеты будем проводить по формулам (??). Параметры системы:

$$m_{\text{ц}} = 1616.9 \text{ гр}, \quad R_{\text{ц}} = 38.5 \text{ мм}$$

$$\Delta T = 1 \text{ с}, \quad \Delta m_{\text{ц}} = 0.1 \text{ гр}, \quad \Delta R_{\text{ц}} = 0.1 \text{ мм}$$

№	$N = 20, T, \text{с}$	$N = 20, T_{\text{ц}}, \text{с}$	$T, \text{с}$	$T_{\text{ц}}, \text{с}$
1	63.6	78.8	3.18	3.94
2	64.2	78.7	3.21	3.935
3	66.6	81	3.33	4.05

Таблица 3: Результаты измерений периода

За итоговое значение периода принимаем усредненный по выборке  $\langle T \rangle$ , погрешность измерения периода оцениваем как:

$$\sigma_{\text{случ}}^T = \sqrt{\sum_i (T_i - \langle T \rangle)^2 / N}, \quad \sigma_{\text{сист}}^T = \Delta T / N, \quad \sigma_T = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2}$$

Для  $T$  и  $T_{\text{ц}}$  получаем конкретные значения периода и погрешностей:

$$T_{\text{ц}} = 3.975 \text{ с}, \quad \sigma_{T_{\text{ц}}} = 0.006 \text{ с} \quad \varepsilon_{T_{\text{ц}}} = 0.07\%$$

$$T = 3.240 \text{ с}, \quad \sigma_T = 0.006 \text{ с} \quad \varepsilon_T = 0.13\%$$

Тогда для момента инерции цилиндра  $I_{\text{ц}}$  и его погрешности имеем:

$$I_{\text{ц}} = m_{\text{ц}} \cdot R_{\text{ц}}^2 = 1.198 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \sigma_{I_{\text{ц}}} = I_{\text{ц}} \sqrt{\left( \frac{\Delta m_{\text{ц}}}{m_{\text{ц}}} \right)^2 + \left( \frac{2\Delta R_{\text{ц}}}{R_{\text{ц}}} \right)^2} \approx 0.006 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \varepsilon_{I_{\text{ц}}} = 0.5\%$$

Тогда для итогового значения момента импульса  $I$  и его погрешности имеем:

$$I = I_{\text{ц}} \cdot \frac{T^2}{T_{\text{ц}}^2} = 0.796 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

С учетом  $\varepsilon_{I_{\text{ц}}} \gg \varepsilon_T, \quad \varepsilon_{T_{\text{ц}}}$  получаем, что  $\varepsilon_{I_{\text{ц}}} \approx \varepsilon_I = 0.5\%$  и итог для погрешности измерения имеем:

$$\sigma_I = I \sqrt{(\varepsilon_{I_{\text{ц}}})^2 + (2\varepsilon_T)^2 + (2\varepsilon_{T_{\text{ц}}})^2} \approx \varepsilon_{I_{\text{ц}}} \cdot I = 0.004 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

То есть получаем тоговое значение для момента инерции:

$$I = 0.796 \pm 0.004 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \varepsilon_I = 0.5\%$$

### 3.3 Измерение частоты вращения ротора

Зная момент импульса и момент инерции ротора, легко вычисляем частоту его вращения и погрешность измерения по формулам:

$$f = \frac{L}{2\pi I} = 390 \text{ Гц}, \quad \sigma_f = f \sqrt{\varepsilon_I^2 + \varepsilon_L^2} \approx \varepsilon_L \cdot f = 6 \text{ Гц}, \quad \varepsilon_f = 1.6\%$$

Итого для частоты имеем:  $f = 390 \pm 6 \text{ Гц}$  Также при измерении частоты с помощью осциллографа и цифрового частотометра было получено значение:

$$f = 390 \pm 1 \text{ Гц}$$

### 3.4 Измерени момента сил трения

Во время эксперимента трение в вертикальной оси не было скомпенсированно. Поэтому ось гироскопа незначительно опускалась. Для оценки сил трения будем измерять высоту на которую вертикально опустился груз  $\Delta h$  за время  $t$  и рассчитывать с помощью него угол  $\alpha = \Delta h/l$ . Данные заносим в таблицу:

№	$t, c$	$\Delta h, \text{мм}$	$\Delta \alpha, ^\circ$	$M_{\text{тр}}, \text{Нм}$
1	168.4	5	2.37	4.9
2	170.9	5	2.38	4.7
3	221.3	8	3.79	5.8
4	222.6	7	3.31	5.1
5	221.6	8	3.79	5.8
6	216.6	9	4.27	6.7
7	215	8	3.79	6.0
8	215.8	9	4.26	6.7
9	143	4	1.89	4.5
10	143	3	1.42	3.4
11	122.2	5	2.37	6.6
12	123.7	5	2.37	6.5
13	125.1	4	1.89	5.2
14	122.7	5	2.37	6.6

Таблица 4: Измерение момента сил трения

Расчет значения в каждом измерении делаем по формуле:

$$M_{\text{тр}} = \frac{\Delta \alpha}{t} L = \frac{L}{2\pi t} \cdot \frac{\Delta h}{l}$$

За итоговое значение  $M_{\text{тр}}$  принимаем усредненное по всей выборке. В силу большой несовершенности методики измерений  $\Delta h, \alpha$  существенную ошибку дает систематическая погрешность измерения  $\sigma_{\Delta h} = 0.5 \text{ мм}$  со средней относительной погрешностью  $\varepsilon_{\Delta h} = 9\%$ . Все остальные факторы имеют значительно меньшую относительную погрешность, а потому их можно отбросить и считать, что

$$\varepsilon_{M_{\text{тр}}} = \varepsilon_{\Delta h} = 9\%, \quad \sigma_{M_{\text{тр}}} = \varepsilon_{M_{\text{тр}}} \cdot M_{\text{тр}} = 0.5 \text{ Нм}$$

Итого получаем значением момента силы трения:

$$M_{\text{тр}} = 5.6 \pm 0.5 \text{ Нм}$$

## 4 Выводы

Получены результаты хорошо согласующие с теоретическими предсказаниями. Подтверждена линейная зависимость между моментом сил и скоростью прецессии. Получено значение частоты  $f = 390 \pm 6$  Гц хорошо согласующее с измеренным  $f = 390 \pm 1$  Гц.