

# Лабораторная работа 1.4.5

## Изучение колебаний струны

И. М. Артёмов

11 ноября 2022 г.

**Цель работы:** изучить поперечные стоячие волны на тонкой натянутой струне; измерить собственные частоты колебаний струны и проверить условие образования стоячих волн; измерить скорость распространения поперечных волн на струне и исследовать её зависимость от натяжения струны.

**Оборудование:** закрепленная на станине стальная струна, набор грузов, электромагнитные датчики, звуковой генератор, двухканальный осциллограф, частотомер.

### 1. Теоретическое введение

В работе изучаются поперечные колебания стальной гитарной струны, натянутой горизонтально и закрепленной между двумя неподвижными зажимами. Так как поперечные размеры струны много меньше её длины, то напряжение в струне может быть направлено только *вдоль неё*. В натянутой струне возникает *поперечная упругость*, то есть способность сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения объёма. При вертикальном смещении произвольного элемента струны, возникают силы, действующие на соседние элементы, и в результате вся струна приходит в движение в вертикальной плоскости, т.е. возбуждение «бежит» по струне. Передача возбуждения представляет собой *поперечные бегущие волны*, распространяющиеся с некоторой скоростью в обе стороны от места возбуждения. В ненапрянутом состоянии струна не обладает свойством поперечной упругости, и поперечные волны на ней невозможны.

#### 1.1. Уравнение волны на струне

Рассмотрим гибкую однородную струну, в которой создано натяжение  $T$ , и получим дифференциальное уравнение, описывающее её малые поперечные свободные колебания. Отметим, что, если струна расположена горизонтально в поле тяжести,

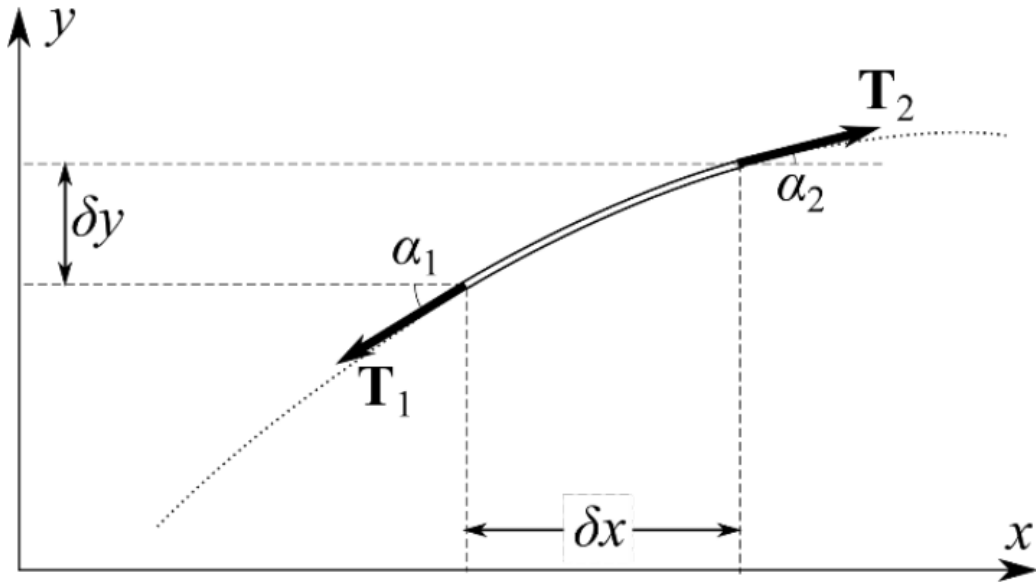


Рис. 1. К выводу уравнения колебаний струны

величина  $T$  должна быть достаточна для того, чтобы в состоянии равновесия струна не провисала, т.е. сила натяжения должна существенно превышать вес струны.

Направим ось  $x$  вдоль струны в положении равновесия. Форму волны будем описывать функцией  $y(x, t)$ , определяющей вертикальное смещение  $y$  струны в данной точке в любой момент времени  $t$ . Рассмотрим малый элемент  $dm$  струны. Так как амплитуда колебаний невелика, то можно пренебречь добавочным напряжением, возникающим из-за удлинения элементов струны и считать силу  $T$  натяжения нити постоянной по её длине. Также можно считать углы отклонения  $\alpha$  струны от оси  $x$  малыми. В итоге по 2 закону Ньютона в проекциях на ось  $y$  для элемента получим:

$$T\alpha_2 - T\alpha_1 \approx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dm \quad (1)$$

Учтём, что в ненатянтом положении длина элемента равна  $\delta x$ , то есть  $dm = \rho \delta x$ , где  $\rho$  - линейная плотность нити в ненатянтом состоянии. Тогда, учитывая, что  $\alpha = \partial y / \partial x$ , получим:

$$T\delta\alpha = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \rho \delta x \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \left( u = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \right) \quad (2)$$

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (*)$  - уравнение свободных малых поперечных колебаний в струне. Оно также называется волновым уравнением.

## 1.2. Бегущие волны

Заметим, что произвольная функция вида  $y(x, t) = f(x - ut)$  является решением волнового уравнения (\*). Действительно, обозначим  $\psi(x, t) = x - ut$ . Тогда

$$y(x, t) = f(\psi(x, t)) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \left( \frac{d^2 f}{d\psi^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{df}{d\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3)$$

Аналогично:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{d^2 f}{d\psi^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{df}{d\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (4)$$

Учитывая, что  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = u$ ,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$ , получим:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{d^2 f}{d\psi^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (5)$$

Заметим теперь, что если в уравнении  $y(x, t) = f(\psi(x, t))$  положить  $\psi = \text{const}$ , то получим:  $dx/dt = u$ , то есть возмущение струны движется поступательно со скоростью  $u$  вдоль оси  $x$ .

Общее же решение волнового уравнения представимо в виде суперпозиции двух волн произвольной формы, бегущих вдоль оси  $x$  со скоростями  $\pm u$ :

$$y(x, t) = f_1(x - ut) + f_2(x + ut) \quad (6)$$

Вид функций  $f_1$  и  $f_2$  в данной конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий. В данной работе будут изучаться *гармонические волны*:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= a \cos[k(x - ut)] + b \cos[k(x + ut)] = \\ &= a \cos(\omega t - kx) + b \cos(\omega t + kx) \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\omega$  - циклическая частота колебаний, а  $k = \frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$  - *пространственная частота* волны. ( $\lambda$  - длина волны).

### 1.3. Собственные колебания струны. Стоячие волны

Найдем вид свободных колебаний струны с *закрепленными концами*. Пусть струна закреплена в точках  $x = 0$  и  $x = L$ . Тогда из условия  $y(0, t) = 0$  ( $\forall t$ ), получим:

$$a \cos(\omega t) + b \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow a = -b \quad (8)$$

Тогда:

$$y(x, t) = a(\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) = 2a \sin kx \cdot \sin \omega t \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что данная волна получается в результате суперпозиции двух гармонических бегущих навстречу друг другу волн с равными амплитудами. Такая волна называется *стоячей*. Вся струна колеблется с циклической частотой  $\omega$ . При этом амплитуда колебаний распределена по струне по закону:  $y_m(x) = 2a \sin kx$ . В точках, где  $\sin kx = 1$ , амплитуда колебаний максимальна (*пучности волны*). Точки, у которых  $\sin kx = 0$  не колеблются вовсе (*узлы волны*). Точки струны между двумя соседними узлами всегда колеблются в одной фазе, то есть в любой момент времени их скорости сонаправлены.

Используем второе граничное условие  $y(L, t) = 0$  ( $\forall t$ ):

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (10)$$

Тогда:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (11)$$

Как видно, параметр  $n$  определяет число полуволен (то есть пучностей), которые умещаются на струне. Так как длина волны однозначно связана с её частотой, то струна может колебаться только с определёнными частотами:

$$\nu_n = \frac{u}{2L}n \quad (12)$$

Спектр собственных частот  $\nu_n$  колебаний струны зависит только от её натяжения, линейной плотности и длины и, в случае малых гармонических колебаний, не зависит от модуля Юнга материала струны.

## 1.4. Возбуждение колебаний струны. Резонанс

При колебаниях реальной струны всегда имеет место потеря энергии. Поддержание незатухающих колебаний в струне может осуществляться точечным источником, в качестве которого в данной работе используется электромагнитный вибратор. Для эффективной раскачки колебаний используется явление резонанса - необходимо, чтобы вынуждающая частота  $\nu$  вибратора совпала с одной из собственных частот  $\nu_n$  струны. Тогда в любой момент времени потери энергии будут компенсироваться поступающей от возбудителя колебаний энергией, процесс становится стационарным и можно наблюдать стоячие волны.

Также стоит отметить, что в идеальном случае поток энергии вдоль стоячей волны отсутствует (в каждом участке между узлами кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот). Однако, энергия от вибратора должна каким-то образом доходить до удалённых от него частей струны, поэтому в реальности помимо стоячей волны, есть ещё и малая бегущая компонента, которая и переносит энергию источника. Если потери энергии за период малы по сравнению с запасом колебательной энергии в струне, то искажение стоячих волн бегущей волной не существенно — наложение бегущей волны малой амплитуды на стоячую визуально приводит к незначительному «размытию» узлов (амплитуда колебаний в узлах совпадает с амплитудой бегущей компоненты волны).

Для достижения максимальной раскачки колебаний, необходимо располагать возбуждающий контакт вблизи узловых точки (но не строго в ней). Действительно, предположим, что вибратор способен раскачать соответствующий элемент струны до амплитуды  $A$ . Если  $x_0$  - расстояние от него до пучности, то из формулы (9):

$$A = 2a \sin kx_0 \Rightarrow a = \frac{A}{2 \sin kx_0}$$

Отсюда видно, что расстояние  $x_0$  следует устремлять к нулю.

Наконец отметим, что в ходе работы необходимо добиться того, чтобы колебания были *линейно поляризованы*, то есть чтобы струна колебалась в одной плоскости. Также необходимо обеспечить малость амплитуды колебаний - в противном случае волновое уравнение (\*) будет неприменимо.

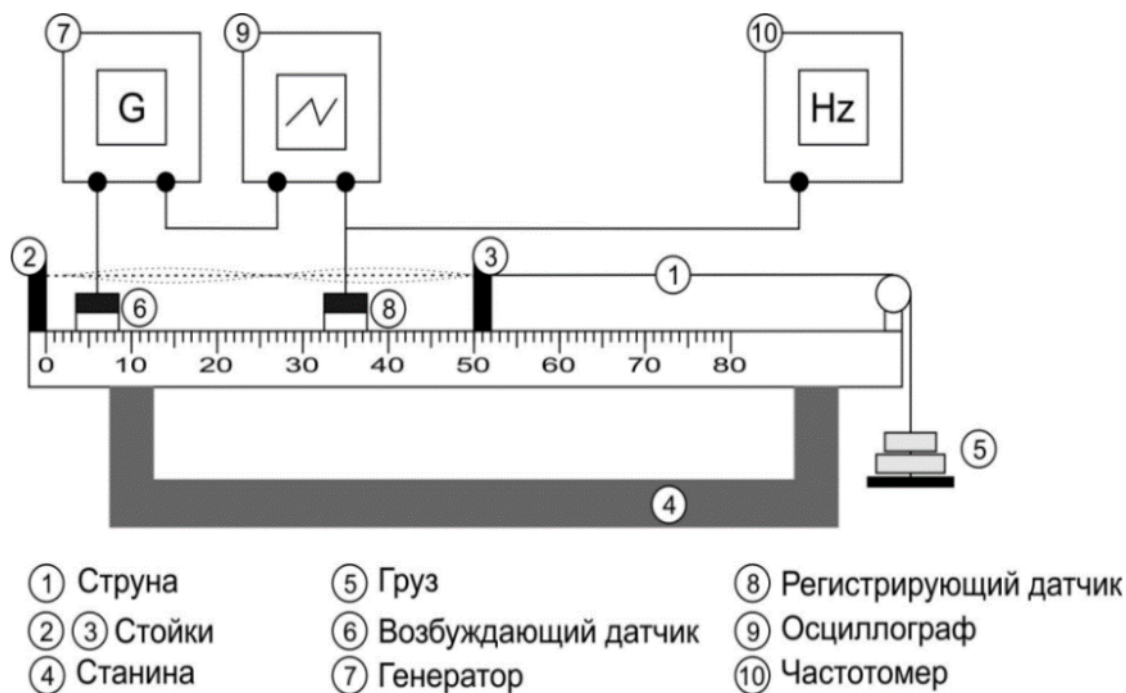


Рис. 2. Экспериментальная установка

## 2. Описание экспериментальной установки

Схема установки приведена на рис. 2. Стальная гитарная струна 1 закрепляется в горизонтальном положении между двумя стойками с зажимами 2 и 3, расположенными на массивной станине 4. Один конец струны закреплен в зажиме 2 неподвижно. К противоположному концу струны, перекинутому через блок, прикреплена платформа с грузами 5, создающими натяжение струны. Зажим 3 можно передвигать по станине, устанавливая требуемую длину струны. Возбуждение и регистрация колебаний струны осуществляются с помощью электромагнитных датчиков (вибраторов), расположенных на станине под струной. Электромагнитный датчик 6 подключен к звуковому генератору 7 и служит для возбуждения колебаний 10 струны, частота которых измеряется с помощью частотомера 10 (в некоторых установках частотомер встроен в генератор). Колебания струны регистрируются с помощью электромагнитного датчика 8, сигнал с которого передается на вход осциллографа 9. Разъёмы, через которые датчики с помощью кабелей соединяются с генератором и осциллографом, расположены на корпусе станины.

## 3. Ход работы.

1. Освобождаем зажим струны на стойке 3 и устанавливаем начальную длину  $L$  (это рекомендованное значение, указанное на установке). Подвешиваем  $N_1 = 2$  грузика к нити массами:  $m_1 = 487.4$  г и  $m_2 = 453.4$  г. Зажимаем струну в стойке 3. Располагаем возбуждающий датчик 6 рядом с неподвижной стойкой 2.
2. Проведём предварительные расчёты. Так как масса подвеса 5 равна  $M_{sup} = 115.1$  г, то сила натяжения нити:  $T = (M_{sup} + m_1 + m_2)g$ . Линейная плотность струны указана на установке:  $\rho = 568.4$  мг/м. Тогда скорость распространения

волн в струне:

$$u = \sqrt{\frac{\left(M_{sup} + \sum_{i=1}^{N_1} m_i\right) g}{\rho}} \approx 142 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad (13)$$

Длину струны измеряем линейкой:  $L = (49.00 \pm 0.05)$  см. Рассчитаем частоту *основной гармоники* струны по формуле (12)

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}u \approx 145 \text{ Гц}$$

Зная значения  $u$  и  $L$ , можно предварительно рассчитать значения остальных гармоник по формуле (12).

3. Включим в сеть звуковой генератор, установим на нём синусоидальный тип сигнала. Установим регистрирующий датчик **8** в центре под струной (в месте пучности). Убеждаемся, что сигнал с выхода генератора подаётся на возбуждающий датчик 6. Устанавливаем на генераторе рассчитанную частоту  $\nu_1$
4. Медленно изменяя частоту генератора в пределах  $\nu_1 \pm 5$  Гц, добиваемся возбуждения стоячей волны с максимальной амплитудой. Записываем частоту, выдаваемую генератором (табл.1).
5. Увеличим частоту генератора в 2 раза и аналогичным образом определим частоту  $\nu_2$ , при которой амплитуда колебаний достигает максимума. Проведём такое же измерение для третьей гармоники. Результат - в табл. 1

$\nu_1$ , Гц	$\nu_2$ , Гц	$\nu_3$ , Гц
132.0	270.0	404.0

Таблица 1

6. Изменим амплитуду сигнала генератора так, чтобы при колебаниях струна не касалась регистрирующего датчика **8**. Убедимся, что сигнал колебаний струны с датчика **8** подаётся на вход канала 2 осциллографа, а на вход канала 1 подаётся опорный сигнал с генератора на частоте возбуждения струны. Включим осциллограф в сеть и проверим его настройку. Выведем на экран сигнал с регистрирующего датчика.

Подстроим частоту  $\nu$  генератора так, чтобы она была близка к рассчитанной частоте  $\nu_1$  основной гармоники. Добьёмся, чтобы амплитуда регистрируемого сигнала была максимальной. Окончательное значение частоты генератора:

$$\nu_1 = 134.6 \text{ Гц}$$

7. Проведём измерения частот ещё 4 нечётных гармоник. Регистрирующий датчик стоит оставлять под струной. Результаты - в табл. 2

$n$	$\nu_n$ , Гц
1	134.6
2	271.2
3	405.3
4	543.6
5	681.9
6	819.3
7	957.1
8	1096.0
9	1238.4
10	1378.0

Таблица 2

$n$	$\nu_n$ , Гц
1	161.5
2	325.0
3	488.7
4	653.6
5	811.9
6	982.4
7	1149.0
8	1313.0
9	1479.0
10	1645.0

Таблица 3

$n$	$\nu_n$ , Гц
1	186.7
2	373.5
3	563.0
4	750.4
5	940.3
6	1129.6
7	1317.5
8	1505.0
9	1695.0
10	1881.0

Таблица 4

$n$	$\nu_n$ , Гц
1	201.4
2	404.3
3	607.5
4	810.4
5	1013.5
6	1215.0
7	1418.0
8	1622.0
9	1825.0
10	2031.0

Таблица 5

$n$	$\nu_n$ , Гц
1	223.0
2	444.0
3	667.5
4	891.6
5	1113.0
6	1338.0
7	1559.0
8	1783.0
9	2008.0
10	2233.0

Таблица 6

№ опыта	№ груза	$m_i$ , г	$T$ , Н
1	1	487.4	10.3
	2	453.4	
2	3	483.4	15.1
3	4	491.9	19.9
4	5	334.3	23.2
5	6	494.6	28.0

Таблица 7

N опыта	$u$ , м/с	$\sigma_u$ , м/с
1	135.3	0.3
2	161.6	0.3
3	184.7	0.2
4	199.0	0.2
5	218.8	0.3

Таблица 8

8. Измерим 5 частот нечётных гармоник. Заметим, что теперь посередине струны всегда находится узел волны, поэтому регистрирующий датчик стоит сместить в сторону пучности. Для  $n$ , не делящихся на 4, можно располагать датчик на расстоянии  $L/4 \approx 12.3$  см от стойки 3, для  $n = 4$  расположим датчик на расстоянии  $3L/8 \approx 18.4$  см, для  $n = 8$  - на расстоянии  $15L/16 \approx 21.4$  см. Результаты - в табл. 2
9. Повторим пункты 7 и 8 ещё для четырёх значений  $T$ .  $T$  будем изменять, подвешивая всё большее число грузов к нити. Результаты - в табл. 3, 4, 5, 6. В табл. 7 представлены значения масс грузов, подвешенных в каждом из пяти опытов и силы натяжения нитей.
10. Построим графики зависимостей  $\nu_n(n)$  для каждого из пяти опытов и аппроксимируем их линейной функцией по МНК. Результаты - на рис. 3. Зная угловые коэффициенты  $\beta$  этих зависимостей, определим скорость распространения волн в струне в каждом случае, как:

$$u = 2\beta L$$

Результаты - в табл. 8. Погрешность измерения  $u$  считалась, как:

$$\sigma_u = u \sqrt{\left(\frac{\sigma_\beta}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

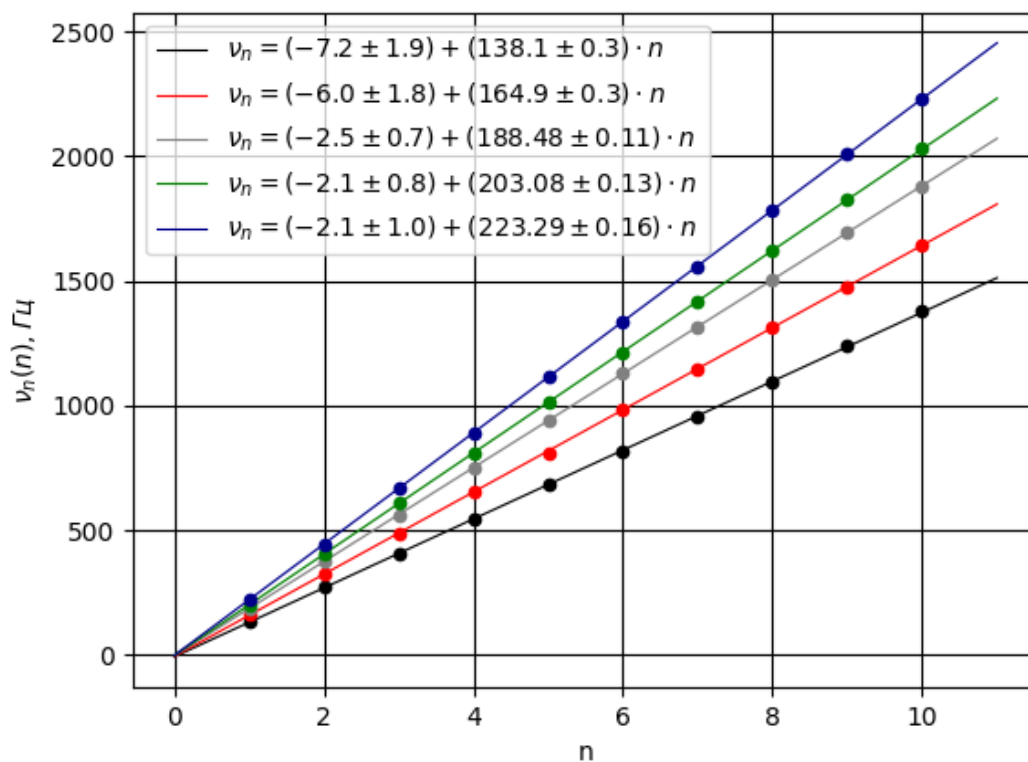


Рис. 3. Графики зависимостей  $\nu_n(n)$  и их аппроксимация линейной функцией по МНК

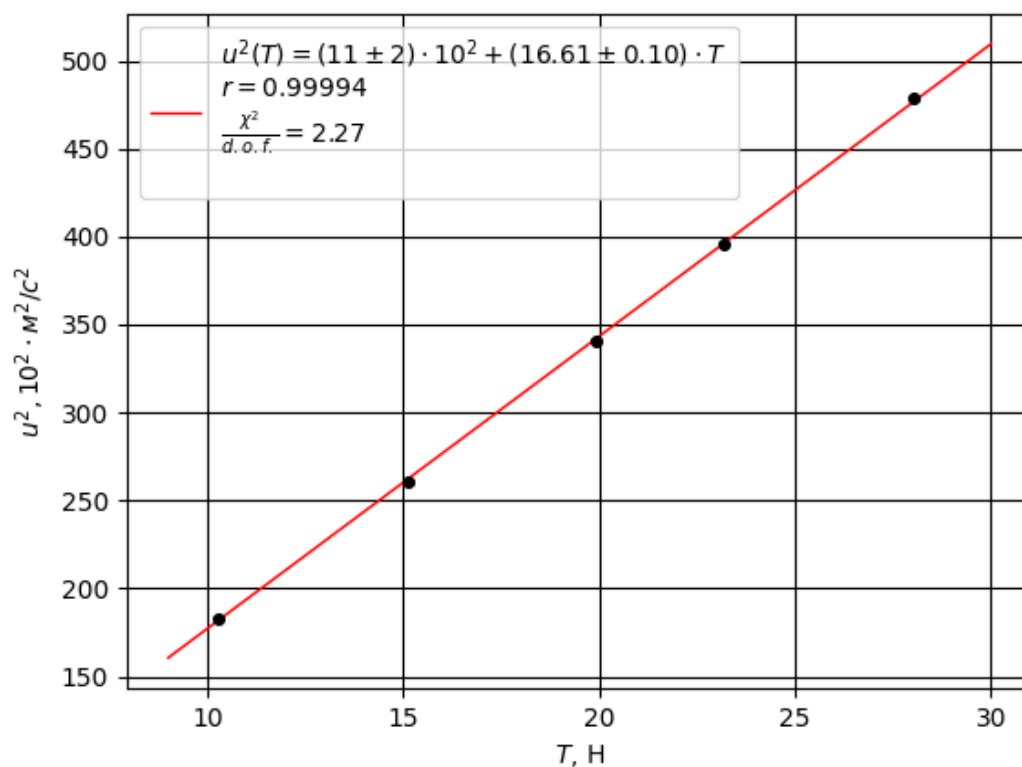


Рис. 4. График зависимости  $u^2(T)$  и его аппроксимация линейной функцией по хи-квадрат



11. Построим график зависимости  $u^2(T)$ . Результат - на рис. 4. Погрешность измерения  $u^2$  считалась по формуле:

$$\sigma_{u^2} = 2u\sigma_u$$

Аппроксимируем график линейной функцией методом хи-квадрат. Получим, что если  $u^2(T) = a + bT$ , то:

$$a = (11 \pm 2) \cdot 10^2 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \quad ; \quad b = (16.61 \pm 0.10) \cdot 10^2 \frac{\text{м}}{\text{кг}} \quad ; \quad r \approx 0.99994 \quad ; \quad \frac{\chi^2}{d.o.f.} \approx 2.27$$

Отсюда получим значение линейной плотности струны:

$$\rho = \frac{1}{b} \approx (602 \pm 4) \frac{\text{мг}}{\text{м}} \quad ; \quad \varepsilon_\rho = \frac{\sigma_\rho}{\rho} \approx 7 \cdot 10^{-3} \% \quad ; \quad \left( \sigma_\rho = \frac{\sigma_b}{b^2} \right)$$

## 4. Вывод

В работе были изучены поперечные стоячие волны на тонкой натянутой струне, были измерены собственные частоты её колебаний, измерена скорость распространения волн в струне и линейная плотность струны. Экспериментальные графики зависимостей  $\nu_n(n)$  и  $u^2(T)$  хорошо ложатся на аппроксимирующие прямые, но эти прямые не проходят через начало координат. Однако отклонение аппроксимирующих прямых от начала координат по оси ординат мало ( $\sim 1\%$ ) по сравнению с значениями ординат экспериментальных точек. Отличие измеренного значения линейной плотности струны от указанного на установке составляет 6%. Само значение  $\rho$  измерено с достаточно высокой точностью  $\varepsilon_\rho = 7 \cdot 10^{-3} \%$ . Отличие  $\rho$  от указанного на установке значения более, чем на погрешность, может быть связано с:

- 1) Неточностью определения собственных частот  $\nu_n$  из-за возникновения нелинейных эффектов при резонансе, и, как следствие, неточностью в определении скорости распространения  $u$  волны в струне.
- 2) Неучтением погрешностей измерения собственных частот.
- 3) Недостаточным количеством экспериментальных точек на графике  $u^2(T)$ , то есть недостаточным количеством опытов по измерению собственных частот струны в зависимости от силы натяжения нити  $T$ .