Коллоквиум 1

Александр Богданов
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Версия от 15.10.2020 16:30

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши

Утверждение 0.1. *1 Пусть $a_n \downarrow$. Рассмотрим ряды:*

$$\sum a_n \ (1) \ \text{и} \ \sum 2^n \cdot a_{2^n} \ (2)$$

Тогда ряды (1) и (2) ведут себя одинаково

Доказательство.

$$2^m \text{ слаг.: } a_1 + \underbrace{a_2}_{\substack{\leqslant a_1 \\ \geqslant a_2}} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\substack{\leqslant 2a_2 \\ \geqslant 2a_4}} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\substack{\leqslant 4a_4 \\ \geqslant 4a_8}} + \dots + \underbrace{a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \dots + a_{2^{m-1}+2^{m-1}}}_{\substack{\leqslant 2^{m-1} \cdot a_{2^{m-1}} \\ \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2^m \cdot a_{2^m}}}$$

$$a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leqslant a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Левая часть – сумма нижних оценок, правая – сумма верхних

■

17. Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решён с помощью признака Даламбера, но может быть решён с помощью радикального признака Коши (с обоснованием)

Пример.

$0 < a < 1 < b$

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot b^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} a, & \text{n – нечёт.} \\ b, & \text{n – чёт.} \end{cases} \implies \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1, \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$$

– признак Даламбера не работает

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{n-2}{2n}}, & \text{n – чёт.} \\ a^{\frac{n-1}{2n}} \cdot b^{\frac{n-1}{2n}}, & \text{n – нечёт.} \end{cases} \implies \lim \sqrt[n]{n} = \sqrt{ab}$$

Если $a \neq b$, то радикальный признак работает

27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму.

Определение 1. Говорят, что ряд $\sum A_k$ получен из ряда $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1, n_2, \dots : 1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots$ такие, что

$$A_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$
$$A_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

Утверждение 0.2. *Если яд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum A_k$ тоже сходится, причём к той же сумме.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм $S'_k = A_1 + \dots + A_k$ ряда $\sum A_k$ явл. подпоследовательностью последовательности частичных сумм $S_n = a_1 + \dots + a_n$ ряда $\sum a_n$ ■

37. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов.

Утверждение 0.3. *Сумма абс. сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов*

47. Напишите произведение Валлиса и его значение (формула Валлиса). Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?

Утверждение 0.4. *Произведение Валлиса*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \text{ – формула Валлиса}$$

– получается из анализа интегралов $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

57. Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на множестве D к предельной функции f, отделённой от нуля (т.е. $\inf\limits_{x \in D} |f(x)| > 0$), то функциональная последовательность $\frac{1}{f_n}$ сходится равномерно на D к $\frac{1}{f}$.

Доказательство.

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{n} \right\| = \left\| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right\| = \sup_{x \in D} \left| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right| \circledleq \sup_{x \in D} \frac{\varepsilon}{|f_n \cdot f|}$$

т.к. $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$

$\inf |f(x)| = m > 0 \implies |f(x)| \geqslant m \forall x \in D$

Если $\varepsilon < m/2$, то $|f_n| \geqslant |f| - |f_n - f| \geqslant m - \varepsilon \geqslant m/2$

$$\frac{1}{|f_n|} \leqslant \frac{1}{m - \varepsilon}; \ \frac{1}{|f|} \leqslant \frac{1}{m}$$

$$\circledleq \frac{\varepsilon}{(m - \varepsilon)m} \leqslant \frac{\varepsilon}{m/2 \cdot m}$$

■

67. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.

Утверждение 0.5.

$$-\infty < a < b < \infty,\ D = [a;b]$$

Пусть f_n *непрерывна на* $D, f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(\implies f$ *непр. на* $D)$

Тогда: $\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt \overset{D}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)dt,$

т.е. $\displaystyle\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt$