Коллоквиум 1

Алиса Вернигор
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Даниэль Хайбулин
Telegram

Сергей Лоптев
Telegram

Версия от 15.10.2020 17:27

2. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ сходится, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$
Критерий Коши сходимости числового ряда

Ряд $\sum x_n$ сходится тогда, и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N, \; n > m \implies |\sum\limits_{i=m}^{n} x_i| < \varepsilon$

Доказательство. Рассмотрим последовательность частных сумм $\{S_n\}$
Ряд сходится тогда, и только тогда, когда сходится $\{S_n\}$

То есть ряд $\sum x_n$ сходится тогда, и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N, \; n > m \implies |S_n - S_m| < \varepsilon \implies |\sum\limits_{i=m}^{n} x_i| < \varepsilon$ ■

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

Утверждение 0.1 (Сравнение отношений). *Пусть* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ *при* $n \geqslant n_0$. *Тогда:*

$$\sum b_n \text{ сходится} \implies \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\sum a_n \text{ расходится} \implies \sum b_n \text{ расходится}$$

Доказательство. Предполагаем, что $a_n > 0, b_n > 0$.

$$a_{n_0+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$$\dots$$

$$a_{n_0+k} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k}$$

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^{N} b_n$$

■

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши

Утверждение 0.2. *1 Пусть $a_n \downarrow$. Рассмотрим ряды:*

$$\sum a_n \text{ (1) } и \sum 2^n \cdot a_{2^n} \text{ (2)}$$

Тогда ряды (1) и (2) ведут себя одинаково

Доказательство.

$$2^m \text{ слаг.: } a_1 + \underbrace{a_2}_{\substack{\leqslant a_1 \\ \geqslant a_2}} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\substack{\leqslant 2a_2 \\ \geqslant 2a_4}} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\substack{\leqslant 4a_4 \\ \geqslant 4a_8}} + \dots + \underbrace{a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \dots + a_{2^{m-1}+2^{m-1}}}_{\substack{\leqslant 2^{m-1} \cdot a_{2^{m-1}} \\ \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2^m \cdot a_{2^m}}}$$

$$a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leqslant a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Левая часть – сумма нижних оценок, правая – сумма верхних

■

9. Пусть $\Sigma a_n, \Sigma a'_n$ – сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\Sigma a'_n$ сходится быстрее ряда Σa_n, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $r'_n = o(r_n)$, где r_n, r'_n – остатки соответствующих рядов.

Доказательство.

$a'_n = o(a_n)$, то есть, $\dfrac{a'_n}{a_n} \to 0$

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Rightarrow r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty}$$

Так как ряды положительные и сходятся, $r_n, r'_n \to 0$, $r_n \downarrow \Rightarrow$ можем применить теорему Штольца

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r'_n}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{r'_n - r'_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a'_n}{a_n} = 0 \Rightarrow r'_n = o(r_n)$$ ■

10. Пусть $\sum a_n$, $\sum a_n'$ – сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a_n'$ сходится медленнее чем ряд a_n, если $a_n' = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $S_n' = o(S_n)$, где S_n, S_n' – частичные суммы соответствующих рядов.

Докажем при помощи теоремы Штольца. У нас даны две расходящиеся последовательности, для которых последовательности частичных сумм положительны и строго возрастают. Рассмотрим предел отношений частичных сумм S_n и S_n': $\lim \frac{S_n'}{S_n} = \lim \frac{S_n' - S_{n-1}'}{S_n - S_{n-1}} = \lim \frac{a_n'}{a_n} = 0$, так как $a_n' = o(a_n)$

Показали, что $S_n' = o(S_n)$

12. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и S_n его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$

Докажем расходимость:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) &= \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \cdots + \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_N} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_0} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} \to \sqrt{S}.\end{aligned}$$

Перейдем ко второй части вопроса:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{a_{n+1}} &= \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{S_{n+1} - S_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}},\end{aligned}$$

где $\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} \to \infty$. Это значит, что $\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}$ стремится к 0. Тогда ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

14. Сформулируйте (предельный) радикальный признак Коши для положительного ряда.

Утверждение 0.3 (Радикальный признак Коши.). *Пусть $a_n \geqslant 0$. Тогда:*

$$\overline{\lim}\, a_n = \begin{cases} < 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сход.} \\ > 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расх.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $q = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$.

Пусть $q < 1$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leqslant q + \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : a_n \leqslant (q + \varepsilon)^n$ при $n \geqslant n_0$

Пусть $\varepsilon : q + \varepsilon < 1$

Тогда $\sum a_n$ сходится, поскольку сходится $\sum (q + \varepsilon)^n$.

Пусть $q > 1$.

Тогда $\exists \{n_k\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant q - \varepsilon$ при $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$

Пусть $\varepsilon : q - \varepsilon \geqslant 1$

Тогда $a_{n_k} \geqslant (q - \varepsilon)^{n_k} \geqslant 1 \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$

$\implies$ ряд $\sum a_n$ расходится ■

17. Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решён с помощью признака Даламбера, но может быть решён с помощью радикального признака Коши (с обоснованием)

Пример.

$0 < a < 1 < b$

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot b^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} a, & \text{n -- нечёт.} \\ b, & \text{n -- чёт.} \end{cases} \implies \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1, \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$$

– признак Даламбера не работает

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{n-2}{2n}}, & \text{n -- чёт.} \\ a^{\frac{n-1}{2n}} \cdot b^{\frac{n-1}{2n}}, & \text{n -- нечёт.} \end{cases} \implies \lim \sqrt[n]{n} = \sqrt{ab}$$

Если $a \neq b$, то радикальный признак работает

19. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

Утверждение 0.4 (Признак Гаусса)**.**

Пусть $\exists \delta > 0, p : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$

Тогда:
если $p > 1 \Rightarrow \sum a_n$ *– сходится если* $p \leqslant 1 \Rightarrow \sum a_n$ *– расходится*

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1)-4) \cdot 3^n \cdot n!}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{3(n+1)-4}{3(n+1)} = \frac{3n-1}{3n+3} = \frac{1 - \frac{\frac{1}{3}}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\frac{1}{3}}{n} + \frac{\frac{1}{3}}{n^2} - O\left(\frac{1}{3n^3}\right) = 1 - \frac{\frac{4}{3}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies \begin{cases} p = \frac{4}{3} \\ \delta = 1 \end{cases} \implies \text{ряд сходится по признаку Гаусса.}$$

Пример. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$

Применим признак Гаусса: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\right)^2 =$

$\frac{4 + \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{4 + \frac{8}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \delta = 1 \\ p = 1 \quad = 1 \end{cases} \implies \text{ряд расходится по признаку Гаусса.}$$

22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

Пусть у нас есть некоторый ряд $\sum a_n$ и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд $\sum a'_n$, который будет сходиться быстрее, чем исходный $\sum a_n$. Пусть у нас есть ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \ldots$.

В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.

Утверждение 0.5. *Ряд* $\sum a_n$ *сходится абсолютно* $\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- < \infty$ *сходятся.*

Доказательство. Если $\sum |a_n| < \infty$, то S_N^+, S_N^- ограничены $\implies$ сходятся.

Если $S_N^+ \to S^+$, $S_N^- \to S^-$, то $\sum_{n=1}^{N} a_n \to S^+ - S^-$, $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \to S^+ + S^-$. ■

27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму.

Определение 1. Говорят, что ряд $\sum A_k$ получен из ряда $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1, n_2, \dots : 1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots$ такие, что

$$A_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$
$$A_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

Утверждение 0.6. *Если яд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum A_k$ тоже сходится, причём к той же сумме.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм $S'_k = A_1 + \dots + A_k$ ряда $\sum A_k$ явл. подпоследовательностью последовательности частичных сумм $S_n = a_1 + \dots + a_n$ ряда $\sum a_n$ ∎

29. Приведите пример приведения преобразования знакопеременного (но не знакочередующегося) ряда к знакочередующемуся.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$(-1)^k$:
$k \leqslant \ln n < k+1$
$e^k \leqslant n < e^{k+1}$

$$A_k = (-1)^k \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n}$$

$$|A_k| \geqslant \frac{1}{e^{k+1}}([e^{k+1}] - ([e^k]+1)) \geqslant \frac{1}{e^{k+1}}(2[e^k] - [e^k] - 1) = \frac{[e^k]-2}{e^{k+1}} > \frac{e^k - 2}{e^{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$$

$\Rightarrow \sum A_k$ – расходится (не выполняется необходимое условие сходимости ряда) $\Rightarrow \sum a_n$ – расходится

32. Покажите на примере, что к знакопеременным рядам неприменим предельный признак сравнения

Рассмотрим 2 ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Второй ряд сходится по признаку Лейбница.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-(-1)^n)} \approx \frac{1}{n} \text{ – расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-(-1)^n)}$$ – расходится как сумма сходящегося и расходящегося ряда.

34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

Утверждение 0.7 (Признак Дирихле.). *Если* $a_n \searrow 0$ *и* $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| = |B_N| \leqslant C$ *— ограничена, то ряд* $\sum a_n b_n$ *сходится.*

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p},\ x \neq \pi k,\ p > 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^p},\ b_n = \sin nx$$

$$B_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}; \qquad |B_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

$\Longrightarrow$ ряд сходится по признаку Дирихле.

37. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов.

Утверждение 0.8. *Сумма абс. сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов*

39. Приведите пример условно сходящегося ряда и перестановки, меняющей его сумму (с обоснованием).

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots = -\ln 2$

$$S_{2n}^{+} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2n}^{-} = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + o(1)$$

Пусть берётся p положительных слагаемых, затем q отрицательных и так далее.
Тогда после m действий получим:

$$S_{2mp}^{+} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2mp} = \frac{1}{2}(\ln(mp) + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2mq-1}^{-} = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2mq-1} = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln(mq) + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2mp}^{+} - S_{2mq}^{-} = -ln2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + o(1)$$

$\Rightarrow$ ряд сходится к числу $-\ln\left(2\sqrt{\frac{q}{p}}\right)$

42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение.

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_N$ – частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$$

Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

44. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{A_n\}$, $A_n \neq 0$ таковы, что $a_n = \dfrac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n$ и бесконечное произведение $\prod c_n$ сходится. Докажите, что существует число $C \neq 0$ такое, что $\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = A_N\left(C + o(1)\right)$.

Доказательство.

$$a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n, \qquad \prod c_n \text{ сходится, то есть } \prod_{n=1}^{N} c_n \to P \neq 0$$

$$\prod_{n=1}^{N} = \frac{\cancel{A_1}}{A_0} \cdot c_1 \cdot \frac{\cancel{A_2}}{\cancel{A_1}} \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot \frac{A_N}{\cancel{A_{N-1}}} \cdot c_N = A_N \cdot \underbrace{\frac{1}{A_0} \cdot \prod_{n=1}^{N} c_n}_{\to \frac{P}{A_0} \neq 0}$$

$$\Longrightarrow \prod_{n=1}^{N} a_n = A_N \cdot \left(C + o(1)\right), \qquad C = \frac{P}{A_0} \neq 0$$

■

47. Напишите произведение Валлиса и его значение (формула Валлиса). Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?

Утверждение 0.9. *Произведение Валлиса*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \text{ – формула Валлиса}$$

– получается из анализа интегралов $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

49. Дайте определения: функциональная последовательность, точка сходимости функциональной последовательности, область (множество) сходимости функциональной последовательности, поточечная сходимость функциональной последовательности на данном множестве.

Определение 2. Функциональным рядом (последовательностью) называется такой ряд (последовательность), что его элементами являются не числа, а функции $f_n(x)$.

Определение 3. Пусть $\forall n, n \in \mathbb{N}, f_n : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что $a \in D$ - точка сходимости $\{f_n(x)\}$, если последовательность $\{f_n(a)\}$ сходится.

Определение 4. Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.

Определение 5. Говорят, что последовательность сходится на D поточечно, если D – множество сходимости.

52. Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве.

Определение поточечной сходимости $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geqslant N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Определение равномерной сходимости $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Доказательство. Видно, что в определении равномерной сходимости номер N зависит от ε и не зависит от x, а в определении поточечной - и от ε, и от x. Если выполняется равномерная сходимость, то $\forall x \in E\ \exists$ нужное N, то есть выполняется поточечная сходимость. ■

54. Приведите пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ (с нетривиальной зависимостью от n и x), равномерно сходящейся на некотором множестве (с обоснованием).

Пример.

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \qquad D = [0; +\infty)$$

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$$

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x \in D} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \to 0$$

$\implies$ последовательность сходится равномерно.

57. Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на множестве D к предельной функции f, отделённой от нуля (т.е. $\inf\limits_{x \in D} |f(x)| > 0$), то функциональная последовательность $\dfrac{1}{f_n}$ сходится равномерно на D к $\dfrac{1}{f}$.

Доказательство.

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{n} \right\| = \left\| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right\| = \sup_{x \in D} \left| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right| \circledleq \sup_{x \in D} \frac{\varepsilon}{|f_n \cdot f|}$$

т.к. $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$

$\inf |f(x)| = m > 0 \implies |f(x)| \geqslant m \forall x \in D$

Если $\varepsilon < m/2$, то $|f_n| \geqslant |f| - |f_n - f| \geqslant m - \varepsilon \geqslant m/2$

$$\frac{1}{|f_n|} \leqslant \frac{1}{m - \varepsilon}; \ \frac{1}{|f|} \leqslant \frac{1}{m}$$

$$\circledleq \frac{\varepsilon}{(m-\varepsilon)m} \leqslant \frac{\varepsilon}{m/2 \cdot m}$$

■

59. Пусть $\varphi : G \to D$ – биекция. Докажите, что равномерная сходимость функциональной последовательности $\{f_n\}$ на множество D равносильна равномерное сходимости на функциональной последовательности $\{f_n \circ \varphi\}$ на множестве G.

Доказательство.
$X \in D, f_n(x)$
$t \in G, \varphi(t) \in D$
$(f_n \circ \varphi)(t) = f_n(\varphi(t))$

Знаем, что $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$

Хотим доказать: $f_n \circ \varphi \overset{G}{\rightrightarrows} f \circ \varphi$

$||f_n \circ \varphi - f \circ \varphi|| = \underset{t \in G}{sup}|f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| = M_n$

Что означает, что супремум равен M_n? Это означает, что:

1) $|f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| \leqslant M_n, \forall t$
2) $\exists\{t_k\} : |f_n(\varphi(t_k)) - f(\varphi(t_k))| \xrightarrow[k\to\infty]{} M_n$

Что получаем?

1) $\Leftrightarrow \forall x \in D\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant M_n$
2) $\Leftrightarrow \exists\{x_k\} : |f_n(x_k) - f(x_k)| \xrightarrow[k\to\infty]{} M_n$, где $x_k = \varphi(t_k)$

$\Rightarrow M_n = \underset{x \in D}{sup}|f_n(x) - f(x)|$

$\Rightarrow ||f_n \circ \varphi - f \circ \varphi||_G = ||f_n - f||_D$
Получается, что если одна норма равна 0, то и вторая норма будет равна 0. А так как везде знаки равносильности, то доказали мы сразу в две стороны. ∎

67. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.

Утверждение 0.10.

$-\infty < a < b < \infty,\ D = [a; b]$

Пусть f_n *непрерывна на* $D, f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(\implies f$ *непр. на* $D)$

Тогда: $\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt \overset{D}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)dt,$

т.е. $\displaystyle\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt$

72. Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно.

Отрицание критерия Коши

$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m,n > N\ \exists x = x(N) \in E : |\sum\limits_{k=m}^{n}| \geqslant \varepsilon \iff$ ряд сходится на E неравномерно

74. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.

Утверждение 0.11 (Признак Вейерштрасса для функционального ряда.). *Если* $|a_n(x)| \leqslant b_n$ *при* $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, *а ряд* $\sum b_n$ *сходится, то* $\sum a_n(x)$ *сходится на* D *абсолютно и равномерно.*

82. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $D = (a; b)$, $D = [a; b]$, c_n равномерно сходится на D и имеет суммой функцию $s(x)$

$\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t)dt$ – сходится равномерно на D и имееет суммой функцию $\int_a^x s_n$.

94. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.

Теорема 0.12 (Почленное дифференцирование степенного ряда.). $\sum c_n (x - x_0)^n$, $R > 0$ *— его радиус сходимости.*

При почленном дифференцировании получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-)^{n-1}$.

Его радиус сходимости равен радиусу сходимости исходного ряда, то есть он сходится равномерно при $|x - x_0| \leqslant r < R$.

99. Приведите пример бесконечной дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

Такая функция бесконечно дифференцируема, но все её производные в нуле равны 0:
$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = 0$
Получается, что её ряд Тейлора при $x_0 = 0 : 0 + 0x + 0x^2 + \ldots = 0$
То есть, такая функция не является аналитической.