1 Семинарский лист 2

Задача 1.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}},\ a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 : \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1 \implies a_n \sim \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ сходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \text{ по признаку сравнения.}$$

Задача 1.2.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$$

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln n)\ln(\ln n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \leqslant \frac{1}{n^2} \implies \text{ряд сходится.}$$

Задача 1.3.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}$$

$$a_n = \frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}}$$

$$\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n = \sqrt{n}\ln 3\left(1 - \frac{3\ln n}{\sqrt{n}\ln 3}\right) = \left|\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0\right| \sim \sqrt{n}\ln 3$$

Заметим, что $\forall p \implies p\ln n < \sqrt{n}\ln 3 \implies p\ln n < \sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n \implies \dfrac{1}{e^{p\ln n}} > \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}} \iff \dfrac{1}{n^p} > \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}}$

Выберем $p = 2$, тогда $\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}} \implies$ ряд сходится.

Задача 1.4.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}\right)$$

$$a_n = \ln\left(\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}\right) = \ln\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}\right) = \ln\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \ln\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = -2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Задача 1.5.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2 > 1 \implies \text{ряд расходится.}$$

Задача 1.6.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!3^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 3^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1 \implies \text{ряд сходится.}$$

Оценим теперь N-ый остаток ряда:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{e}{3} \implies a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \leqslant \frac{e}{3} \cdot \frac{e}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{e}{3} \cdot a_1 = \left(\frac{e}{3}\right)^n \cdot a_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{3}\right)^n$$

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leqslant \frac{1}{3}\left(\left(\frac{e}{3}\right)^N + \left(\frac{e}{3}\right)^{N+1} + \ldots\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(e/3)^N}{1-e/3} = \frac{(e/3)^N}{3-e}$$

Задача 1.7.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

Применим признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}} \sim \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3n}{n}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1 \implies \text{ряд расходится.}$$

Задача 1.8.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Применим признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3+\frac{1}{n}} \sim \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3} = \frac{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}}{3} = \left|\sqrt[n]{n} \to 1\right| \to \frac{1}{3} < 1 \implies \text{ряд сходится.}$$

Оценим теперь N-ый остаток ряда:

$$\sqrt[n]{a_n} \approx \frac{1}{3} \implies a_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n \implies r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^N + \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{N+2} + \ldots \leqslant \frac{(1/3)^N}{1-1/3}$$

Задача 1.9.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$$

Применим признак Гаусса:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\right)^2 = \frac{4+\frac{4}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{4+\frac{8}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \delta = 1 \\ p = 1 \quad = 1 \end{cases} \implies \text{ряд расходится.}$$

Задача 1.10.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1)-4) \cdot 3^n \cdot n!}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{3(n+1)-4}{3(n+1)} = \frac{3n-1}{3n+3} = \frac{1-\frac{\frac{1}{3}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \left(1-\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\frac{1}{3}}{n}+\frac{\frac{1}{3}}{n^2}-O\left(\frac{1}{3n^3}\right) = 1-\frac{\frac{4}{3}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies \begin{cases} p = \frac{4}{3} \\ \delta = 1 \end{cases} \implies \text{ряд сходится по признаку Гаусса.}$$

Задача 1.11. $S = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{\ln n}{n} f(n) = \frac{\ln n}{n};\ f'(n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot n - \ln n}{n^2} = \frac{1 - \ln n}{n^2} < 0 \text{ при } x > e$$

$f(n+t) \leqslant f(n) \leqslant f(n-1+t), t \in [0;1], n \geqslant 4$
Проинтегрируем неравенство по переменной t от 0 до 1:

$$\int\limits_0^1 f(n+t)dt \leqslant \int\limits_0^1 f(n)dt \leqslant \int\limits_0^1 f(n-1+t)dt$$

Сделаем замену: $x_1 = n + t$, $x_2 = n - 1 + t$

$$\int\limits_n^{n+1} f(x_1)dx_1 \leqslant f(n) \leqslant \int\limits_{n-1}^{n} f(x_2)dx_2$$

Просуммируем всё от 4 до N:

$$\int\limits_4^{N+1} f(x_1)dx_1 \leqslant \sum_4^N f(n) \leqslant \int\limits_3^N f(x_2)dx_2$$

Найдём первообразную функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$:

$$\int f(x)dx = \int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

Подставим первообразную в двойное неравенство:

$$\frac{1}{2}\ln^2(N+1) - \frac{1}{2}\ln^2 4 \leqslant \sum_4^N f(n) \leqslant \frac{1}{2}\ln^2(N) - \frac{1}{2}\ln^2 3$$

Прибавим ко всем частям $\frac{\ln 3}{3}$:

$$\frac{1}{2}\ln^2(N+1) - \frac{1}{2}\ln^2 4 + \frac{\ln 3}{3} \leqslant S_N \leqslant \frac{1}{2}\ln^2(N) - \frac{1}{2}\ln^2 3 + \frac{\ln 3}{3}$$

Получили необходимую оценку на частичную сумму.

Задача 1.12.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n},\ f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} = 0 \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x = \dfrac{1}{e} \end{cases} \implies f(x) \text{ монотонно убывает при } x > 1$$

$f(n+t) \leqslant a_n \leqslant f((n-1)+t)$

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

$$\int_2^{N+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=2}^{N} a_n \leqslant \int_1^N f(x)dx$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \begin{bmatrix} t=\ln x \\ e^t = x \\ dx = e^t dt \end{bmatrix} = \int \frac{e^t}{t\cdot e^t}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + C = \ln\ln x + C$$

$$\int_2^{N+1} f(x)dx = \ln\ln(N+1) - \ln\ln 2$$

$$\int_1^{N} f(x)dx = \ln\ln N - 0 = \ln\ln N$$

Ответ: $\ln\ln(N+1) - \ln\ln 2 \leqslant \sum\limits_2^N \frac{1}{n\ln n} \leqslant \ln\ln N$

Задача 1.13 (19).

$S_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$— сходящийся ряд

$S_N \to S, N \to \infty$

Доказать: $S_N = S - \frac{1}{N} + o(\frac{1}{N}), N \to \infty$

Теорема Штольца: Пусть x_n и y_n обе сходится к нулю, причём $0 < y_n < y_{n-1}$ $\forall n$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - xn-1}{y_n - y_{n-1}} = A$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

Обозначим $x_n = S - S_n \to 0, y_n = \frac{1}{n} \to 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Расмотрим $\frac{x_n - xn-1}{y_n - y_{n-1}} = \frac{S - S_n - (S - S_{n-1})}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_n}{\frac{n-1-n}{n(n-1)}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{\frac{1}{n(n-1)}} = \frac{1/n^2}{\frac{1}{n^2-n}} = \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

По т. Штольца $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, т.е. $\frac{x_n}{y_n} = 1 + o(1), x_n = y_n + o(y_n)$

$x_n = S - S_n = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \implies S_n = S - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, ч.т.д.

Задача 1.14.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = S - \frac{1}{N2^N} + o\left(\frac{1}{N2^N}\right)$$

$$q_n = S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n}, \quad p_n = \frac{1}{N2^N}$$

По теореме Штольца: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q_n - q_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S - S_n - S + S_{n-1}}{\frac{1}{N2^N} - \frac{1}{(N-1)2^{N-1}}} = \frac{-\frac{1}{N2^N}\cdot N(N-1)2^{2N-1}}{2^{N-1}(N-1-2N)} = 1,$

$\frac{q_n}{p_n} = 1 + o(1) \ \Rightarrow\ q_n = p_n + o(p_n) \Leftrightarrow S - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{N2^N} + o\left(\frac{1}{N2^N}\right) \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = S - \frac{1}{N2^N} \pm o\left(\frac{1}{N2^N}\right),$

что и требовалось доказать.

Задача 1.15 (23).

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ - представить S в виде суммы ряда с общим членом $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

$b_n = \frac{1}{n(n+1)} \approx \frac{1}{n^2}$

$sin\frac{1}{n^2} = u_n \approx \frac{1}{n^2}$

$u_n - b_n = a_n \approx ?$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = u_n - b_n = \sin \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6n^6} + \frac{1}{n^3} \approx \frac{1}{n^3}$$

$$\implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$