1 Семинарский лист №2

Пусть S - сумма соответствующего ряда. Используя теорему Штольца, докажите асимптотическую формулу для частичной суммы ряда.

Задача 1.1 (19).

$S_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$— сходящийся ряд

$S_N \to S, N \to \infty$

Доказать: $S_N = S - \frac{1}{N} + o(\frac{1}{N}), N \to \infty$

Теорема Штольца: Пусть x_n и y_n обе сходится к нулю, причём $0 < y_n < y_{n-1}$ $\forall n$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - xn - 1}{y_n - y_{n-1}} = A$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

Обозначим $x_n = S - S_n \to 0, y_n = \frac{1}{n} \to 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Расмотрим $\frac{x_n - xn - 1}{y_n - y_{n-1}} = \frac{S - S_n - (S - S_{n-1})}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_n}{\frac{n-1-n}{n(n-1)}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{\frac{1}{n(n-1)}} = \frac{1/n^2}{\frac{1}{n^2-n}} = \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

По т. Штольца $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, т.е. $\frac{x_n}{y_n} = 1 + o(1), x_n = y_n + o(y_n)$

$x_n = S - S_n = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \implies S_n = S - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, ч.т.д.

Представьте S в виде суммы ряда с общим членом a_n, имеющим заданный порядок

Задача 1.2 (23).

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ - представить S в виде суммы ряда с общим членом $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

$b_n = \frac{1}{n(n+1)} \approx \frac{1}{n^2}$

$sin\frac{1}{n^2} = u_n \approx \frac{1}{n^2}$

$u_n - b_n = a_n \approx ?$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} = S - 1 \implies S = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = u_n - b_n = \sin\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6n^6} + \frac{1}{n^3} \approx \frac{1}{n^3}$$

$$\implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$