

Математический Анализ - 2.

Семинарские листы.

Александр Богданов
Алиса Вернигор
Василий Шныпко
Иван Пешехонов

Версия от 18.09.2020 17:45

Содержание

1	Листок №1. Частичная сумма для ряда и необходимое условие сходимости.	2
1.1	Вычислите частичную сумму ряда и исследуйте ее предел.	2
1.2	Докажите, что ряд расходится	4
1.3	При каких значениях x для ряда выполнено необходимое условие сходимости	5

1 Листок №1. Частичная сумма для ряда и необходимое условие сходимости.

1.1 Вычислите частичную сумму ряда и исследуйте ее предел.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{3n-1} + \frac{B}{3n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3Bn - B + 3An + 2A}{(3n-1)(3n+2)} = \left[\begin{cases} 3B + 3A = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases} \right] =$$

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum = \frac{1}{6}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(2n-1)^2} + \frac{B}{(2n+1)^2} =$$

$$\begin{cases} 4A + 4B = 0 \\ 4A - 4B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{8} \\ B = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum = \frac{1}{8}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{An^3 + 3An + 2A + Bn^2 + 2B + Cn^2 + C}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 3A = 0 \\ 2A + 2B + C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum = \frac{1}{2}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} + \frac{3}{n+1} - \frac{5}{n+3}$$

Заметим, что $\frac{2}{k} + \frac{3}{k} - \frac{5}{k} = 0$. Т.е. 3 члена суммы с одинаковыми знаменателями уничтожатся. Так как первый общий зна-

менатель 4, а последний n , получаем $\frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} + \frac{3}{n+1} - \frac{5}{n+3} = \frac{1}{6} \cdot \left(\left(\sum_{n=1}^3 \frac{2}{n} \right) + \left(\sum_{n=1}^2 \frac{3}{n+1} \right) + \frac{3}{n+1} - \left(\sum_{n=n-2}^n \frac{5}{n+3} \right) \right) =$

$$\frac{37}{36} - \frac{12n^2 + 45n + 37}{6(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum = \frac{37}{36}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{n - (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} =$$

$$\sqrt{n+1} - 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum = \infty$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2 \cdot \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n}) :$$

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2 \cdot \sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n}) = \sum_{n=1}^N \sqrt[3]{n+2} - 2 \sum_{n=1}^N \sqrt[3]{n+1} + \sum_{n=1}^N \sqrt[3]{n} = \sum_{n=3}^{N+2} \sqrt[3]{n} - 2 \sum_{n=2}^{N+1} \sqrt[3]{n} + \sum_{n=1}^N \sqrt[3]{n} = (\sqrt[3]{N+1} + \\ &\sqrt[3]{N+2}) - 2(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{N+1}) + (\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2}) = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{N+2} - \sqrt[3]{N+1} = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{N} \left(\left(1 + \frac{2}{N}\right)^{1/3} - \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{1/3} \right) = \\ &= \left[(1+x)^a = 1+ax+O(x) \right] = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{N} \left(\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{N} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{N} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \right) = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{N} \left(\frac{1}{3N} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \\ &1 - \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum = 1$$

$$\begin{aligned} 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+1-1}{(n+2)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n :$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (n+1)x^n &= \sum_{n=1}^N n \cdot x^n + \sum_{n=1}^N x^n = x \sum_{n=1}^N n \cdot x^{n-1} + \sum_{n=1}^N x^n = [x \neq 1] = x \left(x \cdot \frac{x^N - 1}{x - 1} \right)' + \left(x \cdot \frac{x^N - 1}{x - 1} \right) = x \left(\frac{x^{N+1} - x}{x - 1} \right)' + \\ \left(\frac{x^{N+1} - x}{x - 1} \right) &= x \cdot \frac{((N+1)x^N - 1) \cdot (x - 1) - (x^{N+1} - x)}{(x - 1)^2} + \left(\frac{x^{N+1} - x}{x - 1} \right) \end{aligned}$$

Получаем, что для:

1. $|x| \geq 1 \implies a_n(x) = (n+1)x^n \longrightarrow \infty \implies$ ряд расходится;
2. $|x| < 1 \implies x^N \longrightarrow 0, \quad N \cdot x^N \implies 0$ ряд сходится.

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x \cdot \frac{((N+1)x^N - 1) \cdot (x - 1) - (x^{N+1} - x)}{(x - 1)^2} - \left(\frac{x^{N+1} - x}{x - 1} \right)$$

1. $|x| \geq 1 \implies a_n(x) = (2n-1)x^n \longrightarrow \infty \implies$ ряд расходится;
2. $|x| < 1 \implies x^N \longrightarrow 0, \quad 2N \cdot x^N \implies 0$ ряд сходится.

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin x \cdot \sin \frac{x}{2} + \sin 2x \cdot \sin \frac{x}{2} + \dots + \sin nx \cdot \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} =$$

Воспользуемся формулой произведения синусов:

$$= \frac{\frac{1}{2} (\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2}) + \frac{1}{2} (\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2}) + \dots + \frac{1}{2} (\cos(n - \frac{1}{2})x - \cos(n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует при $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ т.к. $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n + \frac{1}{2})x$, но если $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $\sin nx = 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx = 0 + \dots + 0 = 0$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2 nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \cos(2nx)) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2nx)$$

Дальше можно решать как задачу 11 или так:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \cos x = \Re(e^{ix}) \implies \cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2Nx = \Re(1 + e^{2ix} + e^{4ix} + \dots + e^{2Nix}) = \Re\left(\frac{e^{2(N+1)ix} - 1}{e^{2ix} - 1}\right)$$

1.2 Докажите, что ряд расходится

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n+2}$$

Проверим необходимое условие сходимости т.е., что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow 0$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{3} \implies$ ряд расходится.

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$ ряд расходится. $\sqrt[n]{n} = 1$ очевидный факт с 1 курса, но его легко можно доказать: $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \text{по Лопиталю} = \frac{1}{n} = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{n^2+2}) \rightarrow 0}{\frac{1}{n} \rightarrow 0} = [\text{применяем Лопиталю}] = \frac{n^2(n^2+2n-2) \cos(\frac{n+1}{n^2+2})}{(n^2+2)^2} = 1 \text{ т.к. и в числителе и в знаменателе}$$

наибольшая степень n^4 с коэффициентами 1.

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{3} - 1)$$

$a_n = n \cdot (3^{\frac{1}{n}} - 1)$, вспомним оценку $e^x = 1 + x + o(x)$, тогда $3^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 3}{n}} = 1 + \frac{\ln 3}{n} + o(\frac{1}{n}) \implies a_n = n \cdot (1 + \frac{\ln 3}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1) = \ln 3 + o(1) \rightarrow \ln 3$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Докажем одно из свойств замечательного предела $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = [u = \frac{x}{k}, u \rightarrow \infty] = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u \cdot k} = e^k$

В нашем примере $k = -1$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow \frac{1}{e}$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Хочется воспользоваться вторым замечательным пределом, но это ловушка, делаем так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n - \frac{1}{2} + o(1) - n} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

1.3 При каких значениях x для ряда выполнено необходимое условие сходимости

$$21.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$$

Рассмотрим случаи:

$$1. x = 0 \implies \forall n : a_n = 0$$

$$2. x \neq 0. \text{ Поделим на } nx : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{nx} + nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nx} = 0$$

Значит выполнено для $\forall x$

$$21.2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$$

$$a_n(x) = x^n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1} \right) = \frac{x^n}{n} \left(1 - x \cdot \frac{n}{n+1} \right)$$

$$1. |x| > 1 : \frac{x^n}{n} \longrightarrow \infty, \left(1 - x \cdot \frac{n}{n+1} \right) \longrightarrow 1 - x \neq 0$$

$$2. |x| = 1 :$$

$$(a) x = -1 : a_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \left(1 + \frac{n}{n+1} \right) \longrightarrow 0$$

$$(b) x = 1 : a_n(1) = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \longrightarrow 0$$

$$3. |x| < 1 : a_n(x) = \frac{x^n}{n} \cdot \left(1 - x \cdot \frac{n}{n+1} \right) \longrightarrow 0 \left(\frac{n}{n+1} \rightarrow 1; x^n \rightarrow 0; n \rightarrow \infty \right)$$

Ответ: $x \in [-1; 1]$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^x}{x^n} \right) :$$

$$a_n(x) = \frac{x^n}{x^n}$$

$$1. \begin{cases} n^x - \text{степенная функция;} \\ x^n - \text{показательная функция;} \end{cases} \implies a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ при } |x| > 1$$

$$2. |x| = 1 :$$

$$(a) x = 1 : \frac{n}{1} \longrightarrow \infty;$$

$$(b) x = -1 : \frac{n^{-1}}{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$$

$$3. |x| < 1 :$$

$$(a) \text{ при } x > 0 : n^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$(b) \text{ при } x < 0 : n^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ответ:

$$x \in (0; 1) : a_n \longrightarrow \infty;$$

$$x \in (-1; 0) : a_n = \frac{n^x}{x^n} = \left[n^x \rightarrow 0; x^n \rightarrow 0 \right] = \frac{n^{-|x|}}{(-1)^n \cdot |x|^n} \longrightarrow \infty$$

(показательная ф-ия стремится к нулю быстрее степенной)

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n + 3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{nx^n}{2^n + 3^n} \approx \left(\frac{x}{3}\right)^n \cdot n$$

Показательная функция быстрее линейной, поэтому сходимость зависит от неё:

$$1. \left|\frac{x}{3}\right| \geq 1, \text{ то } a_n \rightarrow \infty$$

$$2. \left|\frac{x}{3}\right| < 1, \text{ то } a_n \rightarrow 0$$

Получаем ответ, при $x \in (-3; 3)$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n(x) = \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0 \text{ т.к. показательная функция медленнее факториала, покажем это:}$$

$$\frac{x^n}{n!} \sim \frac{e^{n \ln x} \cdot e^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n} \leq \frac{e^{n \cdot (\ln x + 1)}}{e^{n \ln n}} \sim e^{n(\ln x - \ln n)} \rightarrow e^{-\infty} = 0$$

Значит сходится для $\forall x$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!} :$

Формула Стирлинга: $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + O(1))$

необходимое условие сходимости: $a_n = \frac{x^{n^2}}{n!} \rightarrow 0 \iff |a_n| \rightarrow 0 : |a_n| = \left| \frac{x^{n^2}}{n!} \right| = \frac{|x|^{n^2}}{n!}$

$$|a_n| = \frac{|x|^{n^2}}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = \left[\frac{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \right] \sim \frac{|x|^{n^2}}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{e^{n^2 \ln |x| - n \ln \left| \frac{n}{e} \right| - \frac{1}{2} \ln n}}{\sqrt{2\pi}}$$

1. $|x| \leq 1 : |a_n| \rightarrow \frac{e^{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} = 0$

2. $|x| > 1 : |a_n| \rightarrow \frac{e^{+\infty}}{\sqrt{2\pi}} = +\infty$