

Семинарский лист 3

Александр Богданов
[Telegram](#)

Алиса Вернигор
[Telegram](#)

Василий Шныпко
[Telegram](#)

Денис Козлов
[Telegram](#)

Иван Пешехонов
[Telegram](#)

Иван Добросовестнов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Версия от 26.09.2020 13:16

Применяя признак Вейрштрасса, покажите, что ряд сходится абсолютно.

Задача 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n^2}{\sqrt{n^3+3}}$ — сходится по признаку сравнения

$$|a_n| = \frac{|\cos n^2|}{\sqrt{n^3+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ — сходящийся ряд}$$

Задача 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{\ln n}}{2^{\sqrt{n}}} \quad |a_n| = \frac{n^{\ln n}}{2^{\sqrt{n}}} = \exp \underbrace{[\ln^2 n - \sqrt{n} \ln 2]}_{b_n} = e^{b_n}$$

Рассмотрим b_n . Заметим, что $\ln n = o(n^p)$, $n \rightarrow \infty$, $p > 0$. В нашем случае $p_n = \frac{1}{2}$, $\ln^2 n = o(\sqrt{n}) \Rightarrow b_n \sim -\sqrt{n} \ln 2$

$$\text{Оценим } b_n \text{ — } \sqrt{n} \ln 2 \geq 2 \ln n \Rightarrow -\sqrt{n} \ln 2 \leq -2 \ln n$$

$$\text{Подставим эту оценку для } b_n \text{ — } e^{b_n} \leq e^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2}$$

$|a_n|$ мажорируется $\frac{1}{n^2} \Rightarrow$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|$ сходится по признаку сравнения

Задача 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 3^n) \sin n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} \quad |a_n| \leq \frac{2^n + 3^n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2} \leq \frac{2}{n^2} \text{ — сходится}$$

Применяя признак Лейбница, покажите, что ряд сходится.

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} - \text{знакопередающий ряд, } a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}, \quad |a_n| = \frac{2n-1}{n^2+3n+5}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+3x+5}$:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3x+5) - (2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10 - 4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} = -\frac{2x^2-2x-3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= -\frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \text{ при } x \geq 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$ начиная с $n = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{n + 3 + \frac{5}{n}} = 0$$

$$\begin{cases} \text{ряд знакопередающий,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} - \text{знакопередающий ряд, } a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}, \quad |a_n| = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} \sqrt{2x+3} - \ln^2 x \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3} = \frac{\ln x(4x+6-x \ln x)}{x(2x+2)^{3/2}} = -\frac{\ln x}{(2x+2)^{3/2}} \left(\ln x - 4 - \frac{6}{x} \right) < 0 \text{ при } x \geq 50 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$ начиная с $n = 50$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} = 0, \quad \text{т.к. } \ln^2 n = o(\sqrt{n})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ряд знакопеременный,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 50, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-2} \quad a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-2} \text{ очевидно знакопеременный} \quad |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{3n-2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \quad |a_n|' = \frac{\frac{3n-2}{2\sqrt{n}} - 3\sqrt{n}}{(3n-2)^2} = \frac{3n-2-6n}{2\sqrt{n}(3n-2)^2} = -\frac{3n+2}{2\sqrt{n}(3n-2)^2} < 0 \quad \forall n > 0 \Rightarrow \text{монотонно убывает}$$

По признаку Лейбница ряд сходится

Применяя группировку членов постоянного знака, покажите, что ряд сходится.

7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} \text{ — знакопеременный ряд}$$

При $2k \leq [\ln n] < 2k+1 \Leftrightarrow [e^{2k}] \leq n < [e^{2k+1}]$ n -е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$$

Оценим сумму группы $A_k = \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$ снизу:

$$\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2[e^{2k+1}]-1} ([e^{2k+1}]-1 - [e^{2k}]) \geq \frac{2[e^{2k}]-[e^{2k}]-1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k}]-1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k+1}]}{2[e^{2k+1}]} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} \text{ тоже расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}+2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$[\sqrt{n}] = k \implies k \leq \sqrt{n} < k+1 \implies k^2 \leq n < (k+1)^2 \quad A_k = (-1)^k \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$$

$$|A_k| = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \geq \frac{(k+1)^2 - 1 - k^2 + 1}{\sqrt{(k+1)^2 - 1} + 2} \geq \frac{2k+1}{\sqrt{(k+1)^2} + 2} = \frac{2k+1}{k+3} \rightarrow 2 \neq 0 \implies$$

\implies не выполняется необходимое условие сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} - \text{знакопеременный ряд}$$

При $2k \leq [\sqrt[3]{n}] < 2k+1 \Leftrightarrow 8k^3 \leq n < (2k+1)^3$: n -е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$$

Оценим сумму группы $A_k = \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ снизу:

$$\begin{aligned} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} &\geq \frac{1}{\sqrt[3]{((2k+1)^3-1)^2+3}} (12k^2+6k) = \frac{6k(2k+1)}{\sqrt[3]{(2k+1)^6-2(2k+1)^3+4}} = \\ &= \frac{6k}{\sqrt[3]{(2k+1)^3-2+\frac{4}{(2k+1)^3}}} \geq \frac{6k}{2k+1} \quad (\text{при } k \geq 1) \geq 3 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = 3 \neq 0 \implies \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} \text{ тоже расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n+2} - \text{знакопеременный ряд}$$

При $2\pi k < \ln n < 2\pi k + \pi \Leftrightarrow [e^{2\pi k}] + 1 \leq n < [e^{2\pi k + \pi}]$: n -е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы $A_k = \sum_{n=[e^{2\pi k}] + 1}^{[e^{2\pi k + \pi}] - 1} \frac{\sin \ln n}{n + 2}$ снизу:

при $2\pi k + \frac{\pi}{6} \leq \ln n \leq 2\pi k + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow [e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 1 \leq n \leq [e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}]$: $\sin \ln n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_k \geq \sum_{n=[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 1}^{[e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}]} \frac{1}{2(n + 2)} \geq \frac{1}{2([e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] + 2)} ([e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] - [e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] - 1)$$

$$8[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] < [e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] < 9[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] \Rightarrow A_k \geq \frac{7[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] - 1}{2(9[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 2)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{7}{18} \neq 0$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| \geq \frac{7}{18} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n + 2}$ тоже расходится

11

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \sqrt{n}}{\sqrt{2n + 1}}$ — знакопеременный ряд

При $2\pi k < \pi \sqrt{n} < 2\pi k + \pi \Leftrightarrow 4k^2 < n < (2k + 1)^2$: n -е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы $A_k = \sum_{n=4k^2 + 1}^{4k^2 + 4k} \frac{\sin \pi \sqrt{n}}{\sqrt{2n + 1}}$ снизу:

при $2\pi k + \frac{\pi}{6} \leq \pi \sqrt{n} \leq 2\pi k + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \left(2k + \frac{1}{6}\right)^2 \leq n \leq \left(2k + \frac{5}{6}\right)^2$: $\sin \pi \sqrt{n} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_k \geq \sum_{n=(2k + \frac{1}{6})^2}^{(2k + \frac{5}{6})^2} \frac{1}{2\sqrt{2n + 1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2(2k + \frac{5}{6})^2 + 1}} \left(\left(2k + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(2k + \frac{1}{6}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(4k + 1)}{2\sqrt{8k^2 + \frac{20}{3}k + \frac{34}{9}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 + \frac{1}{k}}{\sqrt{8 + \frac{20}{3k} + \frac{34}{9k^2}}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{4}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \neq 0$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| \geq \frac{2}{3\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \sqrt{n}}{\sqrt{2n + 1}}$ тоже расходится

Применяя признак Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится.

12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{2}n}{2n-5}$$

Пусть $a_n = \cos \sqrt{2}n$, тогда $\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq 1$, то есть частичная сумма a_n ограничена.

Пусть $b_n = \frac{1}{2n-5}$, тогда, очевидно, $b_n \searrow 0$.

Заметим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{2}n}{2n-5} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Дирихле.

13

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(4n)}{\ln n - \ln \ln n}$$

$a_n = \sin(4n) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ — ограничена.

$$b_n = \frac{1}{\ln n - \ln \ln n}$$

Покажем, что $b_n \searrow 0$:

Пусть $f(x) = \frac{1}{\ln x - \ln \ln x}$. Найдём её производную и покажем, что она всегда меньше нуля. Это будет означать, что функция, а значит, и b_n монотонно убывает:

$$f'(x) = -\frac{1 \cdot (\ln x - \ln \ln x)'}{(\ln x - \ln \ln x)^2} = -\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln x}}{(\ln x - \ln \ln x)^2}$$

При $x \rightarrow \infty$ $\frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln x} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow b_n$ монотонно убывает. Также заметим, что при $n \rightarrow \infty$ $\ln n$ растёт

быстрее, чем $\ln \ln n \Rightarrow (\ln n - \ln \ln n) \rightarrow \infty \Rightarrow b_n = \frac{1}{\ln n - \ln \ln n} \rightarrow 0$. Следовательно $b_n \searrow 0 \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Дирихле. ■

14

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln^2 n}$$

Последовательность $\{a_n\}$, $a_n = \sqrt[n]{n}$ монотонно убывает при $n \geq 3$ $\left[(\sqrt[n]{n})'_n = \left(e^{\frac{\ln n}{n}} \right)'_n = \sqrt[n]{n} \frac{1 - \ln n}{n^2} < 0, n \geq 3 \right]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ряд } \sum_{n=2}^{\infty} b_n, \quad b_n = \frac{(-1)^n}{\ln^2 n} \quad - \text{ знакопеременный,} \\ |b_n| = \frac{1}{\ln^2 n} \searrow \text{ при } n > 1 \quad \left[\left(\frac{1}{\ln^2 n} \right)' = -\frac{2}{n \ln^3 n} < 0, \quad n > 1 \right] \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} b_n \text{ сходится по признаку Лейбница} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^2 n} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{a_n\} \text{ монотонно убывает,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится} \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln^2 n} \text{ сходится по признаку Абеля}$$

15

$$\frac{(-1)^n \cdot \cos 3n}{\sqrt{n^2 + 2}}$$

Пусть $a_n = (-1)^n \cdot \cos 3n$. Докажем, что частичная сумма этого ряда ограничена. Для этого посчитаем S_N^+ и S_N^- и докажем, что они ограничены. Для удобства рассмотрим такие n , что $n = 2 \cdot p$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\text{Тогда } S_N^+ = \sum_{p=1}^N \cos(6p) \text{ ограничена (доказано на семинаре). } S_N^- = \sum_{p=1}^N \cos(3 + 6p) = \sum_{p=1}^N (\cos 3 \cos 6p - \sin 3 \sin 6p) = \\ \cos 3 \sum_{p=1}^N \cos 6p - \sin 3 \sum_{p=1}^N \sin 6p - \text{ и уменьшаемое, и вычитаемое ограничены, значит и } S_N^- \text{ ограничена.}$$

Таким образом $S_N = S_N^+ - S_N^-$ ограничена.

Теперь пусть $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}}$. Докажем, что $b_n \searrow 0$. Очевидно, что $b_n \rightarrow 0$. Для доказательства монотонного убывания сравним b_n и b_{n+1} :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} \vee \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 2}}$$

$$\frac{1}{n^2 + 2} \vee \frac{1}{(n+1)^2 + 2}$$

$$(n+1)^2 + 2 \vee n^2 + 2$$

$$n^2 + 2n + 3 \vee n^2 + 2$$

$$2n + 1 > 0, \text{ начиная с какого-то } n_0.$$

Следовательно, $b_n \searrow 0$. Значит, наш ряд сходится по признаку Дирихле.

16

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2) \cdot \sin(n)}{n^2 - 3n + 1}$$

$$a_n = \sin(n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{ограничена.}$$

$$b_n = \frac{3n-2}{n^2 - 3n + 1}$$

Докажем, что $b_n \searrow 0$. Очевидно, что $b_n \rightarrow 0$. Для дальнейшего доказательства сравним b_n и b_{n+1} :

$$\frac{3n-2}{n^2-3n+1} \vee \frac{3n+1}{(n+1)^2-3n-2}$$

$$(3n-2)((n+1)^2-3n-2) \vee (3n+1)(n^2-3n+1)$$

$$(3n-2)(n^2-n-1) \vee (3n+1)(n^2-3n+1)$$

$$3n^3-3n^2-3n-2n^2+2n+2 \vee 3n^3-9n^2+3n+n^2-3n+1$$

$3n^2-n+1 > 0$ начиная с какого-то $n_0 \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Дирихле. ■

Задача 17

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln n + 1} \quad \cos\left(n + \frac{1}{n}\right) = \cos(n) \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(n)}{1 + \ln n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\sin(n)}{1 + \ln n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right] \text{ — сходится по признаку Абеля}$$

$$\left. \begin{array}{l} \uparrow \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \frac{\cos(n)}{1 + \ln n} \text{ — сходящийся ряд по Дирихле} \end{array} \right\} \text{ ряд сходится по признаку Абеля}$$

$$\left. \begin{array}{l} \downarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{\sin(n)}{1 + \ln n} \text{ — сходящийся ряд по Дирихле} \end{array} \right\} \text{ ряд сходится по признаку Абеля}$$

Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость, используя асимптотику общего члена.

18

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right)$$

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right) = \sin\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{2}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = \sin\left(\pi n + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \text{ сходится по Лейбницу}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} \right)$$

$$\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} \right) = [\text{Ряд Маклорена}] \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} - \frac{(-1)^n}{2n^{4/3}} + o \left(\frac{1}{n^{4/3}} \right) = (-1)^n \frac{2n^{2/3} - 1}{2n^{4/3}} + o \left(\frac{1}{n^{4/3}} \right) \sim$$

$$\sim (-1)^n \frac{1}{n^{2/3}} + \underbrace{o \left(\frac{1}{n^{4/3}} \right)}_{\text{сходится}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \quad - \text{знакопеременный,} \\ |b_n| = \frac{1}{n^{2/3}} \searrow \quad \text{при } n \geq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2/3}} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница}$$

$$\text{Сумма сходящихся рядов также сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \text{ сходится условно}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \right| \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n^{2/3}}}_{\text{расходится}} + \underbrace{o \left(\frac{1}{n^{4/3}} \right)}_{\text{сходится}} \right)$$

$$\text{Сумма сходящегося и расходящегося рядов расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} \right) \text{ расходится абсолютно}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n - \sin n}$$

$$\frac{\cos n}{n - \sin n} = \frac{\cos n}{n} \left(\frac{n - \sin n}{n} \right)^{-1} = \frac{\cos n}{n} \left(1 - \frac{\sin n}{n} \right)^{-1} =$$

$$\left[\text{Ряд Маклорена для } \frac{1}{1-x} \right] \frac{\cos n}{n} \left(1 + \frac{\sin n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) =$$

$$= \frac{\cos n}{n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}}$$

$$\sum_{n=1}^N \cos n = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^N e^{i \cdot n} = \operatorname{Re} \frac{1 - e^{i(N+1)}}{1 - e^i} - 1 = \frac{\sin \frac{N}{2} \cos \frac{(N+1)}{2}}{\sin \frac{1}{2}} < 3 \quad \text{при } N \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \text{ — знакопеременный,} \\ \frac{1}{n} \searrow \text{ при } n \geq 1 \\ \left\{ \sum_{n=1}^N \cos n \right\} \text{ ограничена} \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \text{ сходится условно по признаку Дирихле}$$

$$\text{Сумма сходящихся рядов также сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n - \sin n} \text{ сходится условно}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n - \sin n} \right| \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{|\cos n|}{n}}_{\text{расходится}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}} \right)$$

$$\text{Сумма сходящегося и расходящегося рядов расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n - \sin n} \text{ расходится абсолютно}$$

21

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$$

$$a_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n} = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}} = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - \frac{\cos n}{\sqrt{n}} + \frac{\frac{\cos^2 n}{n}}{1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}} \right) = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{n} + \frac{\frac{\cos^3 n}{n^{1.5}}}{1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}} = O\left(\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\cos n}{\sqrt{n}} \text{ сходится по признаку Дирихле} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится условно.}$$

$$\text{Рассмотрим теперь абсолютную сходимость. } |a_n| = \left| \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right| = \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}}. \text{ С семинара известно, что } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n} \text{ расходится,}$$

$$\text{следовательно, так как } \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}}, \text{ то по признаку сравнения } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \text{ расходится} \Rightarrow \text{ряд расходится абсолютно.}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n - (-1)^n}} \\
& \frac{(-1)^n}{\sqrt{n - (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(-1)^n}{n}}} = \\
& = \left[\text{Ряд Маклорена для } (1+x)^{-1/2}, x = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \\
& = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \underbrace{\frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница}$$

$$\text{Сумма сходящихся рядов также сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n - (-1)^n}} \text{ сходится условно}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n - (-1)^n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n - (-1)^n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \text{расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n - (-1)^n}} \text{ расходится абсолютно}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}) \\
& (\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}) = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1 \right) = \\
& = \left[\text{Ряд Маклорена для } (1+x)^{1/2}, x = \frac{(-1)^n}{n} \right] \sqrt{n} \left(\cancel{x} + \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{x} \right) = \\
& = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \underbrace{\frac{1}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}}
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница}$$

$$\text{Сумма сходящихся рядов также сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}) \text{ сходится условно}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \text{расходится} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}) \text{ расходится абсолютно}
\end{aligned}$$

Вычислите произведение рядов.

24

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right)$$

Ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ сходятся абсолютно по признаку сравнения с $\frac{1}{n!} \Rightarrow$

\Rightarrow их произведение $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right)$ также сходится абсолютно

$$\text{Тогда } \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

$$\text{где } c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \cdot \frac{(-1)^j}{(2j)!} = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)!(2j)!} =$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2j)!(2j)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \sum_{j=1}^n C_{2n+1}^j = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 2^{2n} = \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n+1)!}$$

$$\text{И тогда произведение: } \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n}{(2n+1)!}$$

Задача 25

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad a_n = b_n = \frac{3^n}{n!}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} \cdot \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{3^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k 1^{n-k} = \frac{3^n}{n!} (1+1)^n = \frac{3^n \cdot 2^n}{n!} = \frac{6^n}{n!}$$