

# Семинарский лист 4

Александр Богданов  
[Telegram](#)

Алиса Вернигор  
[Telegram](#)

Анастасия Григорьева  
[Telegram](#)

Василий Шныпко  
[Telegram](#)

Денис Козлов  
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок  
[Telegram](#)

Иван Пешехонов  
[Telegram](#)

Иван Добросовестнов  
[Telegram](#)

Настя Городилова  
[Telegram](#)

Никита Насонков  
[Telegram](#)

Версия от 02.10.2020 22:37

## Вычислите бесконечное произведение как предел частичного

### Задача 1

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$
$$\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^N \frac{n^2 - 1}{n^2} = \prod_{n=2}^N \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{(N-1) \cdot (N+1)}{N \cdot N} = \frac{N+1}{2N} \rightarrow \frac{1}{2}$$

### Задача 2

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^n}{n}}$$
$$\prod_{n=1}^N e^{\frac{(-1)^n}{n}} = e^{\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}} = \diamond$$
$$\ln n + \gamma + o(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \implies \frac{1}{2} (\ln n + \gamma + o(1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} - \text{чётные члены суммы} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$$
$$\ln(2n+1) + \gamma + o(1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \implies (\ln(2n+1) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2} (\ln n + \gamma + o(1)) =$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \text{нечётные члены суммы} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$
$$\diamond = e^{\frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1)) - (\ln(2n+1) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1))} = e^{\frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \gamma + o(1) - \ln(2n+1) - \gamma + o(1) + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \gamma + o(1)} = e^{\ln n - \ln(2n+1) + o(1)} =$$
$$= e^{\ln \frac{n}{2n+1} + o(1)} \rightarrow e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

### Задача 3

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$$

Найдем частичное произведение:

$$\prod_{n=1}^N \cos \frac{x}{2^n} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^N}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} = \dots = 2^k \sin \frac{x}{2^k} \prod_{m=1}^k \cos \frac{x}{2^m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \prod_{m=1}^k \cos \frac{x}{2^m} = \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} \Rightarrow \prod_{n=1}^N \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^N \sin \frac{x}{2^N}}$$

Бесконечное произведение как предел частичного:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^N \sin \frac{x}{2^N}} = \sin x \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^N \frac{x}{2^N}} = \frac{\sin x}{x}$$

Ответ:  $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$ .

## Исследуйте бесконечное произведение на сходимость

### Задача 4

*Формулы Тейлора:*

$$(1+x)^a \sim 1+x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$\prod_{n=1}^N \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = e^{\ln \prod_{n=1}^N \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}} = e^{\sum_{n=1}^N \ln \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}}; \quad a_n = \ln \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = \ln \left[ \left( 1 + \frac{3}{n^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \sim \ln \left( 1 - \frac{3}{2n^2} \right) \sim -\frac{3}{2n^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  ряд сходится.

### Задача 5

$$\begin{aligned}
 & \prod_{n=1}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{n}) \\
 & \prod_{n=1}^N (2 - \sqrt[n]{n}) = e^{\ln \prod_{n=1}^N (2 - \sqrt[n]{n})} = e^{\sum_{n=1}^N \ln(2 - \sqrt[n]{n})} \\
 & a_n = \ln(2 - \sqrt[n]{n}) = \ln(1 + (1 - \sqrt[n]{n})) \sim (1 - \sqrt[n]{n}) = -\left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1\right) = \\
 & = [\text{Формула Тейлора для } e^x] - \left(1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) - 1\right) = \\
 & = -\left(\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right) \leq -\frac{\ln n}{n} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \sum_{n=1}^N \ln(2 - \sqrt[n]{n}) < -\sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n}, \quad \left|\sum_{n=1}^N \ln(2 - \sqrt[n]{n})\right| > \sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \sum_{n=1}^N \ln(2 - \sqrt[n]{n}) \text{ расходится в } -\infty \text{ по признаку сравнения} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{n}) \text{ расходится к } 0
 \end{aligned}$$

### Задача 6

$$\begin{aligned}
 & \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\operatorname{arctg} n) \\
 & \cos(\operatorname{arctg} n) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} n) \sin(\operatorname{arctg} n) = n \sqrt{1 - \cos^2(\operatorname{arctg} n)} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos(\operatorname{arctg} n) = \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} \\
 & \prod_{n=1}^N \cos(\operatorname{arctg} n) = \prod_{n=1}^N \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} = e^{\ln \prod_{n=1}^N \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}}} = e^{\sum_{n=1}^N \ln \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}}} \\
 & a_n = \ln \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{1 + n^2}\right) \sim -\frac{1}{2(1 + n^2)} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \sum_{n=1}^N a_n \text{ сходится по признаку сравнения} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\operatorname{arctg} n) \text{ сходится}
 \end{aligned}$$

## Исследуйте бесконечное произведение на сходимость и абсолютную сходимость

### Задача 7

$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \frac{(-1)^n}{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} \Rightarrow a_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0;$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{монотонно убывает} \Rightarrow \text{ряд сходится по Лейбницу}$$

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n \ln n}{n} \right| \geq \frac{\ln 2}{n} \Rightarrow \text{ряд расходится абсолютно.}$$

### Задача 8

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} \right) = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} \right)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} \right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} - \text{знакопередающий ряд, } a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 2}}$$

$$\text{Проверим монотонность } |a_n|: f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 2}}, \quad f'(n) = -\frac{2n}{3(n^2 + 2)^{4/3}} < 0 \text{ и } f(n) \text{ монотонно убывает при } n > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} = 0 \Rightarrow \text{ряд сходится по Лейбницу}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} \text{ расходится по признаку сравнения с } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} \right) \text{ расходится абсолютно} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 2}} \right) \text{ сходится условно}$$

### Задача 9

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sin n} &= e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sin n}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sin n} &= \sum_{n=1}^{\infty} -\ln \left( 1 + \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin^2 n}{2n} + o\left(\frac{\sin^3 n}{n^{3/2}}\right) \right) = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left( \underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\text{сходится}} - \underbrace{\frac{1}{4n}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\frac{\cos 2n}{4n}}_{\text{сходится}} + \underbrace{o\left(\frac{\sin^3 n}{n^{3/2}}\right)}_{\text{сходится}} \right) \text{ расходится } \implies \\ &\implies \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sin n} \text{ расходится} \end{aligned}$$

Исследуйте функциональную последовательность  $f_n$  на равномерную сходимость к поточечному пределу  $f$  на множестве  $D$ , оценивая  $\|f_n - f\|$ .

### Задача 10

$$f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, \quad D = [-1, 1]$$

$$f_n(x) = \sin \frac{x}{n} \rightarrow \sin 0 = 0 \implies f \equiv 0$$

$$\sup_D \left\| \sin \frac{x}{n} \right\| = \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0 \implies \text{равномерная сходимость.}$$

### Задача 11

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad D = [0, 1]$$

$$f_n(x) = x^n - x^{2n} \rightarrow 0 \implies f \equiv 0$$

$$\sup_D \|x^n - x^{2n}\| = \diamond$$

$$f'_n(x) = (x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0$$

$$\text{Критические точки: } x = 0, f_n(x) = 0; \quad x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}, f_n(x) = \frac{1}{4}; \quad x = 1, f_n(x) = 0;$$

$$\diamond = \frac{1}{4} \neq 0 \implies \text{отсутствие равномерной сходимости.}$$

## Задача 12

$$f_n(x) = n \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right), \quad D = [0, 3]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{x}{n} = x \implies f \equiv x \implies$$

$\implies$  функциональная последовательность  $f_n(x)$  сходится поточечно к  $f(x) = x$

$$\sup_D \|f_n(x) - f(x)\| = \sup_D \left\| n \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - x \right\| = \diamond$$

$$(f_n(x) - f(x))' = \left( n \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - x \right)' = n \frac{x/n}{1 + x/n} - 1 = \frac{x}{1 + x/n} - 1$$

Критические точки:

$$x = 1 + \frac{x}{n} \Leftrightarrow x = \frac{n}{n-1} \rightarrow 1, \quad 1 \in D, \quad f_n(1) - f(1) = n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \sim n \frac{1}{n} - 1 = 0$$

$\diamond = 0 \implies$  сходимость равномерная

## Задача 13

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2}, \quad D = [0, 1]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx}{1 + n^2x^2} = [\text{Правило Лопиталя}] \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x}{2nx^2} = 0 \implies f \equiv 0 \implies$$

$\implies$  функциональная последовательность  $f_n(x)$  сходится поточечно к  $f(x) = 0$

$$\sup_D \|f_n(x) - f(x)\| = \sup_D \left\| \frac{2nx}{1 + n^2x^2} \right\| = \diamond$$

$$(f_n(x) - f(x))' = \left( \frac{2nx}{1 + n^2x^2} \right)' = \frac{2n(1 + n^2x^2) - 4n^3x^2}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{2n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2}$$

Критические точки:

$$n^2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad 0 \in D, \quad f_n(0) = 0$$

$\diamond = 0 \implies$  сходимость равномерная

## Задача 14

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}, \quad D = [0, 2]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^2}{n+x} = [\text{Правило Лопиталя}] \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1} \implies f \equiv x^2 \implies$$

$\implies$  функциональная последовательность  $f_n(x)$  сходится поточечно к  $f(x) = x^2$

$$\sup_D \|f_n(x) - f(x)\| = \sup_D \left\| \frac{nx^2}{n+x} - x^2 \right\| = \diamond$$

$$(f_n(x) - f(x))' = \left( \frac{nx^2}{n+x} - x^2 \right)' = \frac{2nx(n+x) - nx^2}{(n+x)^2} - 2x = -\frac{x^2(2x+3n)}{(n+x)^2}$$

Критические точки:

$$x^2(2x+3n) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, & 0 \in D, \quad f_n(0) = 0, \\ x = -\frac{3n}{2} \rightarrow \infty & \notin D \end{cases}$$

$\diamond = 0 \implies$  сходимость равномерная

## Задача 15

$$f_n(x) = n \sim \frac{1}{nx}, \quad D = (0, 3]$$

$$\frac{1}{nx} \rightarrow 0 \implies \sin \frac{1}{nx} \sim \frac{1}{nx} \implies f_n(x) \sim \frac{1}{x} \implies f(x) = \frac{1}{x}$$

Расширим  $D$  до компакта:  $D = [0, 3]$

$$\sup_D \left\| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right\|$$

Возьмём последовательность аргументов  $x_n = \frac{1}{n} \in D$ . Тогда  $\sup_D \left\| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right\| \geq \sup_D \|n \sin 1 - n\| \rightarrow +\infty \implies$

$\implies$  Отсутствует равномерная сходимость.

**Докажите равномерную сходимость функциональной последовательности на заданном множестве, применяя теорему Дини (о монотонной сходимости)**

**Теорема Дини:** Если  $f_n \rightarrow f$  на множестве одновременно выполнены следующие условия:

1.  $D$  — компакт
2.  $f_n$  — монотонна
3.  $f_n$  — непрерывна
4.  $f$  — непрерывна

тогда  $f_n$  равномерно сходится к  $f$ .

### Задача 16

$$f_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad D = [1, 2]$$

$$\begin{cases} f_n - \text{непрерывна, монотонна} \\ D = [1, 2] - \text{компакт} \\ f_n \rightarrow f(x) = e^x - \text{непрерывна} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

### Задача 17

$$f_n = nx^2 e^{-nx}, \quad D = [1, +\infty)$$

Расширим  $D$  до компакта:  $D' = [1, +\infty]$

$$f'_n = 2nx \cdot e^{-nx} + nx^2(-n) \cdot e^{-nx} = nxe^{-nx}(2 - nx) = 0 \implies \text{при } n \geq 2, x \geq \frac{2}{n}, \quad f'_n \leq 0 \implies f_n - \text{монотонна.}$$

$$\begin{cases} f_n - \text{монотонна} \\ f_n - \text{непрерывна} \\ f_n \rightarrow 0 - \text{непрерывна} \\ D' = [1, +\infty] - \text{компакт} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

### Задача 18

$$f_n = \cos \frac{x^2}{n}, \quad D = (0, 1]$$

Расширим  $D$  до компакта:  $D' = [0, 1]$

$$f'_n = -\frac{2x}{n} \sin \frac{x^2}{n} \leq 0 \text{ при } x \in D', n \in \mathbb{N} \implies f_n - \text{монотонна}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x^2}{n} = 1 \implies f_n(x) \rightarrow f(x) = 1$$

$$\begin{cases} f_n - \text{монотонна} \\ f_n - \text{непрерывна} \\ f - \text{непрерывна} \\ D' = [0, 1] - \text{компакт} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

**Докажите неравномерную сходимост функциональной последовательности на заданном множестве, используя локализацию особенности.**

**Теорема:** Если  $f_n$  непрерывна, и на множестве  $D$  равномерно сходится к  $f$ , то  $f$  — непрерывна.



## Задача 20

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad D = [0, 1]$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \implies \text{т.к. } f \text{ разрывна в } 0, \text{ то равномерная сходимость отсутствует.}$$

## Задача 24

$$f_n(x) = \frac{n^2}{4+n^2x^2}, \quad D = (0, +\infty)$$

Добавим точку 0 в  $D$ :  $D = [0, +\infty)$

$$f_n(x) = \frac{n^2}{4+n^2x^2} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \implies \text{т.к. } f \text{ разрывна в } 0, \text{ то равномерная сходимость отсутствует.}$$