

# Семинарский лист 1337

Александр Богданов  
[Telegram](#)

Алиса Вернигор  
[Telegram](#)

Василий Шныпко  
[Telegram](#)

Денис Козлов  
[Telegram](#)

Иван Пешехонов  
[Telegram](#)

Версия от 26.09.2020 00:51

**Применяя признак Вейрштасса, покажите, что ряд сходится абсолютно.**

**Применяя признак Лейбница, покажите, что ряд сходится.**

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2 + 3n + 5} - \text{знакопередающий ряд, } a_n = \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2 + 3n + 5}, |a_n| = \frac{2n-1}{n^2 + 3n + 5}$$

Проверим, что  $|a_n|$  монотонно убывает. Рассмотрим  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+3x+5}$ :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3x+5) - (2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10-4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} = -\frac{2x^2-2x-3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= -\frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \text{ при } x \geq 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$  начиная с  $n = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{n + 3 + \frac{5}{n}} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ряд знакопередающий,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \forall n \geq 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} - \text{знакопередающий ряд, } a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}, |a_n| = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

Проверим, что  $|a_n|$  монотонно убывает. Рассмотрим  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}$ :

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} \sqrt{2x+3} - \ln^2 x \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3} = \frac{\ln x (4x+6-x \ln x)}{x(2x+2)^{3/2}} = -\frac{\ln x}{(2x+2)^{3/2}} \left( \ln x - 4 - \frac{6}{x} \right) < 0 \text{ при } x \geq 50 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$  начиная с  $n = 50$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} = 0, \quad \text{т.к. } \ln^2 n = o(\sqrt{n})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ряд знакопеременный,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 50, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

**Применяя группировку членов постоянного знака, покажите, что ряд расходится.**

7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} - \text{знакопеременный ряд}$$

При  $2k \leq [\ln n] < 2k+1 \Leftrightarrow [e^{2k}] \leq n < [e^{2k+1}]$   $n$ -е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$$

Оценим сумму группы  $A_k = \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$  снизу:

$$\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2[e^{2k+1}]-1} ([e^{2k+1}] - 1 - [e^{2k}]) \geq \frac{2[e^{2k}] - [e^{2k}] - 1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k}] - 1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k+1}]}{2[e^{2k+1}]} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} \text{ тоже расходится}$$

9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} - \text{знакопеременный ряд}$$

При  $2k \leq [\sqrt[3]{n}] < 2k+1 \Leftrightarrow 8k^3 \leq n < (2k+1)^3$ :  $n$ -е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$$

Оценим сумму группы  $A_k = \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$  снизу:

$$\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{((2k+1)^3-1)^2+3}} (12k^2+6k) = \frac{6k(2k+1)}{\sqrt[3]{(2k+1)^6-2(2k+1)^3+4}} =$$

$$= \frac{6k}{\sqrt[3]{(2k+1)^3 - 2 + \frac{4}{(2k+1)^3}}} \geq \frac{6k}{2k+1} \text{ (при } k \geq 1) \geq 3 \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = 3 \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} \text{ тоже расходится}$$

10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n+2} - \text{знакопеременный ряд}$$

При  $2\pi k < \ln n < 2\pi k + \pi \Leftrightarrow [e^{2\pi k}] + 1 \leq n < [e^{2\pi k + \pi}]$ :  $n$ -е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы  $A_k = \sum_{n=[e^{2\pi k}] + 1}^{[e^{2\pi k + \pi}] - 1} \frac{\sin \ln n}{n+2}$  снизу:

при  $2\pi k + \frac{\pi}{6} \leq \ln n \leq 2\pi k + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow [e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 1 \leq n \leq [e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}]$ :  $\sin \ln n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_k \geq \sum_{n=[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 1}^{[e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}]} \frac{1}{2(n+2)} \geq \frac{1}{2([e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] + 2)} ([e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] - [e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] - 1)$$

$$8[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] < [e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] < 9[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] \Rightarrow A_k \geq \frac{7[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] - 1}{2(9[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 2)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{7}{18} \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| \geq \frac{7}{18} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n+2} \text{ тоже расходится}$$

**Применяя признак Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится.**

**Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость, используя асимптотику общего члена.**

**Вычислите произведение рядов.**