

# Коллоквиум 1

Александр Богданов  
[Telegram](#)

Денис Козлов  
[Telegram](#)

Сергей Лоптев  
[Telegram](#)

Версия от 15.10.2020 18:36

## 2. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  сходится, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$

Критерий Коши сходимости числового ряда

Ряд  $\sum x_n$  сходится тогда, и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N, n > m \implies \left| \sum_{i=m}^n x_i \right| < \varepsilon$

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность частных сумм  $\{S_n\}$

Ряд сходится тогда, и только тогда, когда сходится  $\{S_n\}$

То есть ряд  $\sum x_n$  сходится тогда, и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N, n > m \implies |S_n - S_m| < \varepsilon \implies$

$$\left| \sum_{i=m}^n x_i \right| < \varepsilon$$

■

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .

**Утверждение 0.1** (Сравнение отношений). Пусть  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  при  $n \geq n_0$ . Тогда:

$$\sum b_n \text{ сходится} \implies \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\sum a_n \text{ расходится} \implies \sum b_n \text{ расходится}$$

*Доказательство.* Предполагаем, что  $a_n > 0, b_n > 0$ .

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

...

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k}$$

$$\sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

## 7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши

**Утверждение 0.2.** 1 Пусть  $a_n \downarrow$ . Рассмотрим ряды:

$$\sum a_n \quad (1) \quad \text{и} \quad \sum 2^n \cdot a_{2^n} \quad (2)$$

Тогда ряды (1) и (2) ведут себя одинаково

*Доказательство.*

$$2^m \text{ слаг.: } a_1 + \underbrace{a_2}_{\leq a_1, \geq a_2} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\leq 2a_2, \geq 2a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\leq 4a_4, \geq 4a_8} + \dots + \underbrace{a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \dots + a_{2^{m-1}+2^{m-1}}}_{\leq 2^{m-1} \cdot a_{2^{m-1}}, \geq \frac{1}{2} \cdot 2^m \cdot a_{2^m}}$$

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leq a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Левая часть – сумма нижних оценок, правая – сумма верхних

■

**12.** Пусть положительный ряд  $\sum a_n$  расходится и  $S_n$  его частичная сумма. Докажите, что ряд  $\sum (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$  также расходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$

Докажем расходимость:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) &= \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_N} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_0} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} \rightarrow \sqrt{S}. \end{aligned}$$

Перейдем ко второй части вопроса:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{a_{n+1}} &= \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{S_{n+1} - S_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}},\end{aligned}$$

где  $\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} \rightarrow \infty$ . Это значит, что  $\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}$  стремится к 0. Тогда ряд  $\sum (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$  расходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$ .

#### 14. Сформулируйте (предельный) радикальный признак Коши для положительного ряда.

**Утверждение 0.3** (Радикальный признак Коши.). Пусть  $a_n \geq 0$ . Тогда:

$$\overline{\lim} a_n = \begin{cases} < 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сход.} \\ > 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расх.} \end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть  $q = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$ .

Пусть  $q < 1$ .

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leq q + \varepsilon \text{ при } n \geq n_0 \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : a_n \leq (q + \varepsilon)^n \text{ при } n \geq n_0\end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon : q + \varepsilon < 1$

Тогда  $\sum a_n$  сходится, поскольку сходится  $\sum (q + \varepsilon)^n$ .

Пусть  $q > 1$ .

Тогда  $\exists \{n_k\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq q - \varepsilon$  при  $k = k_0, k_0 + 1, \dots$

Пусть  $\varepsilon : q - \varepsilon \geq 1$

$$\text{Тогда } a_{n_k} \geq (q - \varepsilon)^{n_k} \geq 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$$

$\implies$  ряд  $\sum a_n$  расходится

■

**17. Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решён с помощью признака Даламбера, но может быть решён с помощью радикального признака Коши (с обоснованием)**

*Пример.*

$$0 < a < 1 < b$$

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot b^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} a, & n - \text{нечёт.} \\ b, & n - \text{чёт.} \end{cases} \implies \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1, \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$$

– признак Даламбера не работает

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{n-2}{2n}}, & n - \text{чёт.} \\ a^{\frac{n-1}{2n}} \cdot b^{\frac{n-1}{2n}}, & n - \text{нечёт.} \end{cases} \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{ab}$$

Если  $ab \neq 1$ , то радикальный признак работает

**22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.**

Пусть у нас есть некоторый ряд  $\sum a_n$  и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд  $\sum a'_n$ , который будет сходиться быстрее, чем исходный  $\sum a_n$ . Пусть у нас

есть ряд  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды

$$\text{вида } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \dots$$

В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку  $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ .

**24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.**

**Утверждение 0.4.** Ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно  $\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- < \infty$  сходятся.

*Доказательство.* Если  $\sum |a_n| < \infty$ , то  $S_N^+, S_N^-$  ограничены  $\implies$  сходятся.

Если  $S_N^+ \rightarrow S^+, S_N^- \rightarrow S^-$ , то  $\sum_{n=1}^N a_n \rightarrow S^+ - S^-, \sum_{n=1}^N |a_n| \rightarrow S^+ + S^-$ . ■

**27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму.**

**Определение 1.** Говорят, что ряд  $\sum A_k$  получен из ряда  $\sum a_n$  группировкой членов, если  $\exists n_1, n_2, \dots: 1 \leq n_1 < n_2 < \dots$  такие, что

$$A_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$A_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

**Утверждение 0.5.** Если ряд  $\sum a_n$  сходится, то ряд  $\sum A_k$  тоже сходится, причём к той же сумме.

*Доказательство.* Последовательность частичных сумм  $S'_k = A_1 + \dots + A_k$  ряда  $\sum A_k$  явл. подпоследовательностью последовательности частичных сумм  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  ряда  $\sum a_n$  ■

**32. Покажите на примере, что к знакопеременным рядам неприменим предельный признак сравнения**

Рассмотрим 2 ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . Второй ряд сходится по признаку Лейбница.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n} - \text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} - \text{расходится как сумма сходящегося и расходящегося ряда.}$$

**34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.**

**Утверждение 0.6** (Признак Дирихле.). Если  $a_n \searrow 0$  и  $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| = |B_N| \leq C$  — ограничена, то ряд  $\sum a_n b_n$  сходится.

*Пример.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad x \neq \pi k, \quad p > 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^p}, \quad b_n = \sin nx$$

$$B_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \quad |B_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

$\Rightarrow$  ряд сходится по признаку Дирихле.

**37. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов.**

**Утверждение 0.7.** Сумма абс. сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов

**42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение.**

$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$  – частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$

Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

**44. Пусть последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{A_n\}$ ,  $A_n \neq 0$  таковы, что  $a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n$  и бесконечное произведение  $\prod c_n$  сходится. Докажите, что существует число  $C \neq 0$  такое, что  $\prod_{n=1}^N a_n = A_N (C + o(1))$ .**

*Доказательство.*

$$a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n, \quad \prod c_n \text{ сходится, то есть } \prod_{n=1}^N c_n \rightarrow P \neq 0$$

$$\prod_{n=1}^N = \frac{\cancel{A_1}}{A_0} \cdot c_1 \cdot \frac{\cancel{A_2}}{\cancel{A_1}} \cdot c_2 \cdot \dots \cdot \frac{A_N}{\cancel{A_{N-1}}} \cdot c_N = A_N \cdot \underbrace{\frac{1}{A_0} \cdot \prod_{n=1}^N c_n}_{\rightarrow \frac{P}{A_0} \neq 0}$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^N a_n = A_N \cdot (C + o(1)), \quad C = \frac{P}{A_0} \neq 0$$

■

**47. Напишите произведение Валлиса и его значение (формула Валлиса). Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?**

**Утверждение 0.8.** *Произведение Валлиса*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2} - \text{формула Валлиса}$$

– получается из анализа интегралов  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

**52. Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве.**

Определение поточечной сходимости  $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Определение равномерной сходимости  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

*Доказательство.* Видно, что в определении равномерной сходимости номер  $N$  зависит от  $\varepsilon$  и не зависит от  $x$ , а в определении поточечной - и от  $\varepsilon$ , и от  $x$ . Если выполняется равномерная сходимость, то  $\forall x \in E \exists$  нужное  $N$ , то есть выполняется поточечная сходимость. ■

**54. Приведите пример функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$  (с нетривиальной зависимостью от  $n$  и  $x$ ), равномерно сходящейся на некотором множестве (с обоснованием).**

*Пример.*

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \quad D = [0; +\infty)$$

$$f_n(x) \xrightarrow{D} 0$$

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x \in D} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$\implies$  последовательность сходится равномерно.

**57.** Пусть функциональная последовательность  $\{f_n\}$  сходится равномерно на множестве  $D$  к предельной функции  $f$ , отделимой от нуля (т.е.  $\inf_{x \in D} |f(x)| > 0$ ), то функциональная последовательность  $\frac{1}{f_n}$  сходится равномерно на  $D$  к  $\frac{1}{f}$ .

*Доказательство.*

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| = \left\| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right\| = \sup_{x \in D} \left| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right| \leq \sup_{x \in D} \frac{\varepsilon}{|f_n \cdot f|}$$

т.к.  $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$  при  $n \geq N(\varepsilon)$

$\inf |f(x)| = m > 0 \implies |f(x)| \geq m \forall x \in D$

Если  $\varepsilon < m/2$ , то  $|f_n| \geq |f| - |f_n - f| \geq m - \varepsilon \geq m/2$

$$\frac{1}{|f_n|} \leq \frac{1}{m - \varepsilon}; \quad \frac{1}{|f|} \leq \frac{1}{m}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{(m - \varepsilon)m} \leq \frac{\varepsilon}{m/2 \cdot m}$$

■

**62.** Сформулируйте теорему Дини о монотонной сходимости. Приведите пример её применения для доказательства равномерной сходимости функциональной последовательности (с обоснованием)

**64.** Покажите на примере как доказать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием).

**67.** Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.

**Утверждение 0.9.**

$$-\infty < a < b < \infty, \quad D = [a; b]$$

Пусть  $f_n$  непрерывна на  $D$ ,  $f_n \xrightarrow{D} f \implies f$  непр. на  $D$

$$\text{Тогда: } \int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{D} \int_a^x f(t) dt,$$

$$\text{т.е. } \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt$$

**72.** Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно.

Отрицание критерия Коши

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists m, n > N \quad \exists x = x(N) \in E : \left| \sum_{k=m}^n \right| \geq \varepsilon \iff \text{ряд сходится на } E \text{ неравномерно}$$



**74. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.**

**Утверждение 0.10** (Признак Вейерштрасса для функционального ряда.). Если  $|a_n(x)| \leq b_n$  при  $\forall n \geq n_0, \forall x \in D$ , а ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.

**82. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.**

Пусть  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$ ,  $c_n$  равномерно сходится на  $D$  и имеет суммой функцию  $s(x)$

$$\int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt - \text{сходится равномерно на } D \text{ и имеет суммой функцию } \int_a^x s_n.$$

**84. Что можно утверждать про равномерную сходимость степенного ряда?**

**94. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.**

**Теорема 0.11** (Почленное дифференцирование степенного ряда.).  $\sum c_n (x - x_0)^n$ ,  $R > 0$  — его радиус сходимости.

При почленном дифференцировании получаем ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ .

Его радиус сходимости равен радиусу сходимости исходного ряда, то есть он сходится равномерно при  $|x - x_0| \leq r < R$ .