

# Семинарский лист 3

Александр Богданов  
[Telegram](#)

Алиса Вернигор  
[Telegram](#)

Василий Шныпко  
[Telegram](#)

Денис Козлов  
[Telegram](#)

Иван Пешехонов  
[Telegram](#)

Иван Добросовестнов  
[Telegram](#)

Версия от 26.09.2020 02:37

**Применяя признак Вейрштрасса, покажите, что ряд сходится абсолютно.**

## Задача 1

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n^2}{\sqrt{n^3+3}}$  — сходится по признаку сравнения

$$|a_n| = \frac{|\cos n^2|}{\sqrt{n^3+3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ — сходящийся ряд}$$

## Задача 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{\ln n}}{2^{\sqrt{n}}} \quad |a_n| = \frac{n^{\ln n}}{2^{\sqrt{n}}} = \exp \underbrace{[\ln^2 n - \sqrt{n} \ln 2]}_{b_n} = e^{b_n}$$

Рассмотрим  $b_n$ . Заметим, что  $\ln n = o(n^p)$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $p > 0$ . В нашем случае  $p_n = \frac{1}{2}$ ,  $\ln^2 n = o(\sqrt{n}) \Rightarrow b_n \sim -\sqrt{n} \ln 2$

$$\text{Оценим } b_n \text{ — } \sqrt{n} \ln 2 \geq 2 \ln n \Rightarrow -\sqrt{n} \ln 2 \leq -2 \ln n$$

$$\text{Подставим эту оценку для } b_n \text{ — } e^{b_n} \leq e^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2}$$

$|a_n|$  мажорируется  $\frac{1}{n^2} \Rightarrow$  ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_n|$  сходится по признаку сравнения

## Задача 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 3^n) \sin n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} \quad |a_n| \leq \frac{2^n + 3^n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2} \leq \frac{2}{n^2} \text{ — сходится}$$

Применяя признак Лейбница, покажите, что ряд сходится.

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} - \text{знакопередающий ряд, } a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}, \quad |a_n| = \frac{2n-1}{n^2+3n+5}$$

Проверим, что  $|a_n|$  монотонно убывает. Рассмотрим  $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+3x+5}$ :

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3x+5) - (2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10 - 4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} = -\frac{2x^2-2x-3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= -\frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \text{ при } x \geq 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$  начиная с  $n = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{n + 3 + \frac{5}{n}} = 0$$

$$\begin{cases} \text{ряд знакопередающий,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} - \text{знакопередающий ряд, } a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}, \quad |a_n| = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

Проверим, что  $|a_n|$  монотонно убывает. Рассмотрим  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}$ :

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} \sqrt{2x+3} - \ln^2 x \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3} = \frac{\ln x(4x+6-x \ln x)}{x(2x+2)^{3/2}} = -\frac{\ln x}{(2x+2)^{3/2}} \left( \ln x - 4 - \frac{6}{x} \right) < 0 \text{ при } x \geq 50 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$  начиная с  $n = 50$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} = 0, \quad \text{т.к. } \ln^2 n = o(\sqrt{n})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ряд знакочередующийся,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 50, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-2} \quad a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-2} \text{ очевидно знакочередующийся} \quad |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{3n-2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \quad |a_n|' = \frac{\frac{3n-2}{2\sqrt{n}} - 3\sqrt{n}}{(3n-2)^2} = \frac{3n-2-6n}{2\sqrt{n}(3n-2)^2} = -\frac{3n+2}{2\sqrt{n}(3n-2)^2} < 0 \quad \forall n > 0 \Rightarrow \text{монотонно убывает}$$

По признаку Лейбница ряд сходится

**Применяя группировку членов постоянного знака, покажите, что ряд расходится.**

7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} - \text{знакопеременный ряд}$$

При  $2k \leq [\ln n] < 2k+1 \Leftrightarrow [e^{2k}] \leq n < [e^{2k+1}]$   $n$ -е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{Оценим сумму группы } A_k = \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1} \text{ снизу:}$$

$$\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2[e^{2k+1}]-1} ([e^{2k+1}] - 1 - [e^{2k}]) \geq \frac{2[e^{2k}] - [e^{2k}] - 1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k}] - 1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k+1}]}{2[e^{2k+1}]} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} \text{ тоже расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}+2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$[\sqrt{n}] = k \implies k \leq \sqrt{n} < k+1 \implies k^2 \leq n < (k+1)^2 \quad A_k = (-1)^k \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$$

$$|A_k| = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \geq \frac{(k+1)^2-1-k^2+1}{\sqrt{(k+1)^2-1}+2} \geq \frac{2k+1}{\sqrt{(k+1)^2}+2} = \frac{2k+1}{k+3} \rightarrow 2 \neq 0 \implies$$

$\implies$  не выполняется необходимое условие сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2}+3} - \text{знакопеременный ряд}$$

При  $2k \leq [\sqrt[3]{n}] < 2k+1 \Leftrightarrow 8k^3 \leq n < (2k+1)^3$ :  $n$ -е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2}+3} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+3}$$

$$\text{Оценим сумму группы } A_k = \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+3} \text{ снизу:}$$

$$\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+3} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{((2k+1)^3-1)^2}+3} (12k^2+6k) = \frac{6k(2k+1)}{\sqrt[3]{(2k+1)^6-2(2k+1)^3+4}} =$$

$$= \frac{6k}{\sqrt[3]{(2k+1)^3-2+\frac{4}{(2k+1)^3}}} \geq \frac{6k}{2k+1} \text{ (при } k \geq 1) \geq 3 \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = 3 \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2}+3} \text{ тоже расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n+2} - \text{знакопеременный ряд}$$

При  $2\pi k < \ln n < 2\pi k + \pi \Leftrightarrow [e^{2\pi k}] + 1 \leq n < [e^{2\pi k + \pi}]$ :  $n$ -е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы  $A_k = \sum_{n=[e^{2\pi k}] + 1}^{[e^{2\pi k + \pi}] - 1} \frac{\sin \ln n}{n + 2}$  снизу:

при  $2\pi k + \frac{\pi}{6} \leq \ln n \leq 2\pi k + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow [e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 1 \leq n \leq [e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}]$ :  $\sin \ln n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_k \geq \sum_{n=[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 1}^{[e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}]} \frac{1}{2(n + 2)} \geq \frac{1}{2([e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] + 2)} ([e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] - [e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] - 1)$$

$$8[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] < [e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}] < 9[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] \Rightarrow A_k \geq \frac{7[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] - 1}{2(9[e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 2)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{7}{18} \neq 0$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| \geq \frac{7}{18} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$  расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n + 2}$  тоже расходится

11

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \sqrt{n}}{\sqrt{2n + 1}}$  — знакопеременный ряд

При  $2\pi k < \pi \sqrt{n} < 2\pi k + \pi \Leftrightarrow 4k^2 < n < (2k + 1)^2$ :  $n$ -е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы  $A_k = \sum_{n=4k^2 + 1}^{4k^2 + 4k} \frac{\sin \pi \sqrt{n}}{\sqrt{2n + 1}}$  снизу:

при  $2\pi k + \frac{\pi}{6} \leq \pi \sqrt{n} \leq 2\pi k + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \left(2k + \frac{1}{6}\right)^2 \leq n \leq \left(2k + \frac{5}{6}\right)^2$ :  $\sin \pi \sqrt{n} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_k \geq \sum_{n=(2k + \frac{1}{6})^2}^{(2k + \frac{5}{6})^2} \frac{1}{2\sqrt{2n + 1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2(2k + \frac{5}{6})^2 + 1}} \left( \left(2k + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(2k + \frac{1}{6}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(4k + 1)}{2\sqrt{8k^2 + \frac{20}{3}k + \frac{34}{9}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 + \frac{1}{k}}{\sqrt{8 + \frac{20}{3k} + \frac{34}{9k^2}}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{4}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \neq 0$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| \geq \frac{2}{3\sqrt{2}} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k$  расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \sqrt{n}}{\sqrt{2n + 1}}$  тоже расходится

Применяя признак Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится.

12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{2}n}{2n-5}$$

Пусть  $a_n = \cos \sqrt{2}n$ , тогда  $\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq 1$ , то есть частичная сумма  $a_n$  ограничена.

Пусть  $b_n = \frac{1}{2n-5}$ , тогда, очевидно,  $b_n \searrow 0$ .

Заметим, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{2}n}{2n-5} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n \Rightarrow$  ряд сходится по признаку Дирихле.

13

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(4n)}{\ln n - \ln \ln n}$$

$a_n = \sin(4n) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n$  — ограничена.

$$b_n = \frac{1}{\ln n - \ln \ln n}$$

Покажем, что  $b_n \searrow 0$ :

Пусть  $f(x) = \frac{1}{\ln x - \ln \ln x}$ . Найдём её производную и покажем, что она всегда меньше нуля. Это будет означать, что функция, а значит, и  $b_n$  монотонно убывает:

$$f'(x) = -\frac{1 \cdot (\ln x - \ln \ln x)'}{(\ln x - \ln \ln x)^2} = -\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln x}}{(\ln x - \ln \ln x)^2}$$

При  $x \rightarrow \infty$   $\frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln x} > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow b_n$  монотонно убывает. Также заметим, что при  $n \rightarrow \infty$   $\ln n$  растёт

быстрее, чем  $\ln \ln n \Rightarrow (\ln n - \ln \ln n) \rightarrow \infty \Rightarrow b_n = \frac{1}{\ln n - \ln \ln n} \rightarrow 0$ . Следовательно  $b_n \searrow 0 \Rightarrow$  ряд сходится по признаку Дирихле. ■

15

$$\frac{(-1)^n \cdot \cos 3n}{\sqrt{n^2 + 2}}$$

Пусть  $a_n = (-1)^n \cdot \cos 3n$ . Докажем, что частичная сумма этого ряда ограничена. Для этого посчитаем  $S_N^+$  и  $S_N^-$  и докажем, что они ограничены. Для удобства рассмотрим такие  $n$ , что  $n = 2 \cdot p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $S_N^+ = \sum_{p=1}^N \cos(6p)$  ограничена (доказано на семинаре).  $S_N^- = \sum_{p=1}^N \cos(3 + 6p) = \sum_{p=1}^N (\cos 3 \cos 6p - \sin 3 \sin 6p) =$

$\cos 3 \sum_{p=1}^N \cos 6p - \sin 3 \sum_{p=1}^N \sin 6p$  — и уменьшаемое, и вычитаемое ограничены, значит и  $S_N^-$  ограничена.

Таким образом  $S_N = S_N^+ - S_N^-$  ограничена.

Теперь пусть  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}}$ . Докажем, что  $b_n \searrow 0$ . Очевидно, что  $b_n \rightarrow 0$ . Для доказательства монотонного убывания сравним  $b_n$  и  $b_{n+1}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} \searrow \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + 2}}$$

$$\frac{1}{n^2 + 2} \searrow \frac{1}{(n+1)^2 + 2}$$

$$(n+1)^2 + 2 \searrow n^2 + 2$$

$$n^2 + 2n + 3 \searrow n^2 + 2$$

$$2n + 1 > 0, \text{ начиная с какого-то } n_0.$$

Следовательно,  $b_n \searrow 0$ . Значит, наш ряд сходится по признаку Дирихле.

## 16

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2) \cdot \sin(n)}{n^2 - 3n + 1}$$

$$a_n = \sin(n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{ограничена.}$$

$$b_n = \frac{3n-2}{n^2 - 3n + 1}$$

Докажем, что  $b_n \searrow 0$ . Очевидно, что  $b_n \rightarrow 0$ . Для дальнейшего доказательства сравним  $b_n$  и  $b_{n+1}$ :

$$\frac{3n-2}{n^2 - 3n + 1} \searrow \frac{3n+1}{(n+1)^2 - 3n - 2}$$

$$(3n-2)((n+1)^2 - 3n - 2) \searrow (3n+1)(n^2 - 3n + 1)$$

$$(3n-2)(n^2 - n - 1) \searrow (3n+1)(n^2 - 3n + 1)$$

$$3n^3 - 3n^2 - 3n - 2n^2 + 2n + 2 \searrow 3n^3 - 9n^2 + 3n + n^2 - 3n + 1$$

$$3n^2 - n + 1 > 0 \text{ начиная с какого-то } n_0 \Rightarrow \text{ ряд сходится по признаку Дирихле. } \blacksquare$$

## Задача 17

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln n + 1} \quad \cos\left(n + \frac{1}{n}\right) = \cos(n) \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\cos(n)}{1 + \ln n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\sin(n)}{1 + \ln n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right] - \text{сходится по признаку Абеля}$$

$$\left. \begin{array}{l} \uparrow \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \frac{\cos(n)}{1 + \ln n} \quad - \text{сходящийся ряд по Дирихле} \end{array} \right\} \text{ряд сходится по признаку Абеля}$$

$$\left. \begin{array}{l} \downarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{\sin(n)}{1 + \ln n} \quad - \text{сходящийся ряд по Дирихле} \end{array} \right\} \text{ряд сходится по признаку Абеля}$$

**Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость, используя асимптотику общего члена.**

18

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right) \\ \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right) &= \sin\left(\pi n \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n \left(1+\frac{2}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = \sin\left(\pi n + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{\pi}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \text{ сходится по Лейбницу} \end{aligned}$$

21

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$$

$$a_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n} = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}} = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 - \frac{\cos n}{\sqrt{n}} + \frac{\frac{\cos^2 n}{n}}{1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{n} + \frac{\frac{\cos^3 n}{n^{1.5}}}{1 + \frac{\cos n}{\sqrt{n}}} = O\left(\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\cos n}{\sqrt{n}} \text{ сходится по признаку Дирихле} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится условно.}$$

Рассмотрим теперь абсолютную сходимость.  $|a_n| = \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}}$ . С семинара известно, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n}$  расходится,

следовательно, так как  $\frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}}$ , то по признаку сравнения  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}}$  расходится  $\Rightarrow$  ряд расходится абсолютно.



Вычислите произведение рядов.

Задача 25

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad a_n = b_n = \frac{3^n}{n!}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} \cdot \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{3^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{3^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k 1^{n-k} = \frac{3^n}{n!} (1+1)^n = \frac{3^n \cdot 2^n}{n!} = \frac{6^n}{n!}$$