

Семинарский лист 1337

Александр Богданов
[Telegram](#)

Алиса Вернигор
[Telegram](#)

Василий Шныпко
[Telegram](#)

Денис Козлов
[Telegram](#)

Иван Пешехонов
[Telegram](#)

Версия от 26.09.2020 00:20

Применяя признак Вейрштасса, покажите, что ряд сходится абсолютно.

Применяя признак Лейбница, покажите, что ряд сходится.

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} - \text{знакопередающийся ряд, } a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}, |a_n| = \frac{2n-1}{n^2+3n+5}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+3x+5}$:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3x+5) - (2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10-4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} = -\frac{2x^2-2x-3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= -\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \text{ при } x \geq 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$ начиная с $n = 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{n + 3 + \frac{5}{n}} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ряд знакопередающийся,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \forall n \geq 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} - \text{знакопередающийся ряд, } a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}, |a_n| = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} \sqrt{2x+3} - \ln^2 x \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3} = \frac{\ln x(4x+6-x \ln x)}{x(2x+2)^{3/2}} = -\frac{\ln x}{(2x+2)^{3/2}} \left(\ln x - 4 - \frac{6}{x} \right) < 0 \text{ при } x \geq 50 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$ начиная с $n = 50$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} = 0, \quad \text{т.к. } \ln^2 n = o(\sqrt{n})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ряд знакопеременный,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 50, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

Применяя группировку членов постоянного знака, покажите, что ряд расходится.

7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} - \text{знакопеременный ряд}$$

При $2k \leq [\ln n] < 2k+1 \Leftrightarrow [e^{2k}] \leq n < [e^{2k+1}]$ n -е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$$

Оценим сумму группы $A_k = \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$ снизу:

$$\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2[e^{2k+1}]-1} ([e^{2k+1}] - 1 - [e^{2k}]) \geq \frac{2[e^{2k}] - [e^{2k}] - 1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k}] - 1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k+1}]}{2[e^{2k+1}]} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} \text{ тоже расходится}$$

9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} - \text{знакопеременный ряд}$$

При $2k \leq [\sqrt[3]{n}] < 2k+1 \Leftrightarrow 8k^3 \leq n < (2k+1)^3$ n -е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$$

Оценим сумму группы $A_k = \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ снизу:

$$\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{((2k+1)^3-1)^2+3}} (12k^2+6k) = \frac{6k(2k+1)}{\sqrt[3]{(2k+1)^6-2(2k+1)^3+4}} =$$

$$= \frac{6k}{\sqrt[3]{(2k+1)^3 - 2 + \frac{4}{(2k+1)^3}}} \geq \frac{6k}{2k+1} \text{ (при } k \geq 1) \geq 3 \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = 3 \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2 + 3}} \text{ тоже расходится}$$

Применяя признак Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится.

Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость, используя асимптотику общего члена.

Вычислите произведение рядов.