

Семинарский лист 1337

Александр Богданов
[Telegram](#)

Алиса Вернигор
[Telegram](#)

Василий Шныпко
[Telegram](#)

Денис Козлов
[Telegram](#)

Иван Пешехонов
[Telegram](#)

Версия от 25.09.2020 22:35

Применяя признак Вейрштрасса, покажите, что ряд сходится абсолютно.

Применяя признак Лейбница, покажите, что ряд сходится.

Задача 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} - \text{знакопередающийся ряд, } a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}, \quad |a_n| = \frac{2n-1}{n^2+3n+5}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+3x+5}$:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3x+5) - (2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10-4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} = -\frac{2x^2-2x-3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= -\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \text{ при } x \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a_n| \searrow \text{ начиная с } n = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{n + 3 + \frac{5}{n}} = 0$$

$$\begin{cases} \text{ряд знакопередающийся,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

Задача 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} - \text{знакопередающийся ряд, } a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}, \quad |a_n| = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \frac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} \sqrt{2x+3} - \ln^2 x \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3} = \frac{\ln x(4x+6-x \ln x)}{x(2x+2)^{3/2}} = -\frac{\ln x}{(2x+2)^{3/2}} \left(\ln x - 4 - \frac{6}{x} \right) < 0 \text{ при } x \geq 50 \Rightarrow$$

$\Rightarrow |a_n| \searrow$ начиная с $n = 50$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} = 0, \quad \text{т.к. } \ln^2 n = o(\sqrt{n})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ряд знакопеременный,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \quad \forall n \geq 50, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится по признаку сравнения} \Rightarrow \text{абсолютной сходимости нет.}$$

Применяя группировку членов постоянного знака, покажите, что ряд расходится.

Применяя признак Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится.

Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость, используя асимптотику общего члена.

Вычислите произведение рядов.