1 Семинарский лист 2

Задача 1.1.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = S - \frac{1}{N2^N} + o\left(\frac{1}{N2^N}\right)$$

$$q_n = S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n}, \quad p_n = \frac{1}{N2^N}$$

По теореме Штольца: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q_n}{p_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q_n - q_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S - S_n - S + S_{n-1}}{\frac{1}{N2^N} - \frac{1}{(N-1)2^{N-1}}} = \dfrac{-\frac{1}{N2^N} \cdot N(N-1)2^{2N-1}}{2^{N-1}(N-1-2N)} = 1,$

$\dfrac{q_n}{p_n} = 1 + o(1) \ \Rightarrow \ q_n = p_n + o(p_n) \Leftrightarrow S - \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{N2^N} + o\left(\frac{1}{N2^N}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = S - \frac{1}{N2^N} \pm o\left(\frac{1}{N2^N}\right),$

что и требовалось доказать.