Коллоквиум 1

Денис Козлов
Telegram

Версия от 15.10.2020 16:57

36. Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример.

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция.

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из ряда $\sum a_n$ перестановкой членов, если $\exists$ биекция $f: \; b_n = a_{f(n)}$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = -\ln 2.$$

Пусть $\sum b_n$ получен так: сложим сначала p положительных слагаемых из $\sum a_n$, потом q отрицательных, затем снова p положительных и так далее ($p, q \in \mathbb{N}$, берем слагаемые по возрастанию их индексов).

46. В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ наз-ся абсолютно сходящимся, если абсолютно сх-ся соответствующий ряд из логарифмов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

Критерий абс. сх-ти:

$$\boxed{\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сход. абс.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) \text{ сход. абс.}}$$

Доказательство. Пусть $a_n = 1 + \alpha_n$; $\alpha_n \to 0$. $\circledast$

Тогда $\ln a_n = \ln(1 + \alpha_n) = \alpha_n + \overline{o}(\alpha_n) = \alpha_n(1 + \overline{o}(1)) \implies |\ln a_n| = |\alpha_n| \cdot (1 + \overline{o}(1))$, то есть $|\ln a_n| \sim |\alpha_n|$.

Возможно, тут стоит упомянуть, что необходимое условие сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ln a_n|$ *это* $|\ln a_n| \to 0 \iff a_n \to 1$.

Поэтому, если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сход. абс., то* $\circledast$ *у нас верно всегда.*

■

56. Докажите, что если 2 функциональные последовательности сходятся равномерно к ограниченным предельным функциям, то их произведение также сходится равномерно к произведению этих предельных функций.

Доказательство. Пусть наши последовательности - $\{f_n\}$, $\{g_n\}$; их предельные функции - f, g соотв.

Знаем: $\forall\, \varepsilon_1, \varepsilon_2\ \exists\, N_1(\varepsilon_1),\ N_2(\varepsilon_2) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1;\ |g_m(x) - g(x)| < \varepsilon_2$ при $n \geqslant N_1(\varepsilon_1),\ m \geqslant N_2(\varepsilon_2)$.

Пусть $|f(x)|$ ограничен ограничен какой-нибудь константой C_1.

Так как $|g(x)|$ ограничен, то $|g_n(x)|$ ограничен какой-нибудь константой C_2. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| = \\
&= |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x) + f(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leqslant \\
&\leqslant |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x)| + |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g_n(x)| = \\
&= |g_n(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \cdot |g(x) - g_n(x)| \leqslant C_2 \cdot \varepsilon_1 + C_1 \cdot \varepsilon_2 \text{ (начиная с } n = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))\text{)}.
\end{aligned}$$

Теперь возьмем произвольный $\varepsilon > 0$, и положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot C_2}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot C_1}$.

Начиная с $n = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))$ верно, что $|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$. Мы победили. ■

66. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности.

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,\ \ D = (a, b)$ или $D = [a, b]$.

Пусть f_n дифф. на мн-ве D, и $f'_n \overset{D}{\rightrightarrows} g$, $\exists\, c \in D : \{f_n(c)\}$ сходится.

Тогда $\exists$ такая предельная функция $f : f_n \overset{D}{\to} f$ (причем, если D ограничена, то $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$), что f дифф., и $f' = g$.

Говоря иначе, $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

69. Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда.

$D \subseteq \mathbb{R},\ a_n : D \to \mathbb{R}$. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, и его ч.с. $S_N(x) := \sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)$.

Говорят, что ряд сх-ся равномерно на D, если последовательность $\{S_N\}$ сх-ся равномерно на D.

77. Сформулируйте признак Лейбница равномерной сходимости знакочередующегося функционального ряда.

Рассмотрим знакочередующийся функциональный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(x),\ u_n(x) \geqslant 0$ на D.

Если $u_n(x) \downarrow_{(n)}$ и $u_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$, то ряд сходится равномерно.

79. Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = \circledast$.

Если $a_n(x)$ мотонна по n (при $\forall\, x \in D \subseteq \mathbb{R}$) и $\|a_n\| \leqslant C$ при всех n,

а ряд $\sum b_n(x)$ сх-ся равномерно, то $\circledast$ сх-ся равномерно.

86. Докажите, что если степенной ряд $\sum c_n(x-x_0)^n$ расходится в точке x_1, то он расходится во всех точках x, для которых $|x-x_0| > |x_1 - x_0|$.

Доказательство. Докажем, что если $\sum c_n(x-x_0)^n$ сходится в точке x_1, то он сходится во всех точках x, для которых $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ $\circledast$. Из этого будет следовать сформулированное выше утверждение (методом от противного).

Итак, доказываем $\circledast$. (Будем рассматривать нетривиальный случай $x_1 \neq x_0$, иначе очевидно).

$$\left|\sum_{n=m}^{N} c_n(x-x_0)^n\right| = \left|\sum_{n=m}^{N} c_n \cdot (x_1-x_0)^n \cdot \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^n\right| \leqslant \sum_{n=m}^{N} \left|c_n \cdot (x_1-x_0)^n\right| \cdot \left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n = \bigstar.$$

Заметим, что $\left|c_n \cdot (x_1-x_0)^n\right| < \varepsilon$ при $m \geqslant n_0(\varepsilon)$ (следствие из необходимого условия сходимости).

Далее, (при наших условиях) $\sum \left|\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n$ образуют геом. прогрессию, где $q = \left|\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right| < 1$.

Так что $\bigstar \leqslant \varepsilon \cdot (q^m + \dots + q^n) \leqslant \varepsilon \cdot q^m \cdot \dfrac{1}{1-q} \to 0$.

Почему к нулю? При $m \to \infty$ выражение $q^m \cdot \dfrac{1}{1-q}$ остается ограниченным одной и той же константой, а ε - это произвольная сколь угодно малая величина.

Итог: ряд сходится по критерию Коши.

$\blacksquare$

87. Выведите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n$, где $\{c_n\}$ - числовая посл-ть, $x_0 \in \mathbb{R}$ фиксирован, $x \in \mathbb{R}$ - переменная, радиус сходимости R вычислим по формуле Коши-Адамара:

$$\boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}}$$

Доказательство. В нашем ряде $a_n(x) = c_n \cdot (x - x_0)^n$. Применим радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0| \implies \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0| = |x - x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} \implies$$

если $|x - x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} < 1$, то ряд сх-ся;

если $|x - x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} > 1$, то ряд расх-ся.

Введем $R := \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Из полученных результатов ясно, что $|x - x_0| < R \iff |x - x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} < 1$ и ряд сходится;

$|x - x_0| > R \iff |x - x_0| \cdot \overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|} > 1$ и ряд расходится. А это определение радиуса сходимости.

■

96. Запишите формулу Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции с остаточным членом в формах Лагранжа и Коши.

Если функция $f(x)$ беск. дифф. в точке x_0, то $f(x)$ можно сопоставить в соотв. ее ряд Тейлора:

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. При этом $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_N(x)$.

Фор-ла Лагранжа: $r_N(x) = \dfrac{f^{(N+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1},\ \Theta \in (0, 1)$.

Фор-ла Коши: $r_N(x) = \dfrac{f^{(N+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{N!}(1 - \Theta)^N (x - x_0)^{N+1},\ \Theta \in (0, 1)$.

97. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности разложения функции в степенной ряд.

Если $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n,\ |x - x_0| < \delta$ (говоря иначе, функция представлена степенным рядом в некой окр-ти x_0);

то этот степенной ряд - ее ряд Тейлора.

Доказательство.

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot (x - x_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot (x - x_0)^{n-k} \implies$$

$$f^{(k)}(x_0) = c_k \cdot k! \implies c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

(Мы заменили в первом переходе нижнюю границу суммирования с нуля на k, так как все предыдущие слагаемые зануляются)

То есть функция может быть представлена в виде степенного ряда единственным образом - и это будет ее р.Т.

■