Семинарский лист 1337

Александр Богданов
Telegram

Алиса Вернигор
Telegram

Василий Шныпко
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Иван Пешехонов
Telegram

Версия от 26.09.2020 01:14

Применяя признак Вейрштрасса, покажите, что ряд сходится абсолютно.

Применяя признак Лейбница, покажите, что ряд сходится.

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ — знакочередующийся ряд,} \quad a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}, \quad |a_n| = \frac{2n-1}{n^2+3n+5}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+3x+5}$:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3x+5)-(2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10-4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} = -\frac{2x^2-2x-3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= -\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \text{ при } x \geq 2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |a_n| \searrow \text{ начиная с } n = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{n+3+\frac{5}{n}} = 0$$

$$\begin{cases} \text{ряд знакочередующийся,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \; \forall n \geq 2, \\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится по признаку сравнения} \;\Rightarrow\; \text{абсолютной сходимости нет.}$$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ — знакочередующийся ряд,} \quad a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}, \quad |a_n| = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2\ln x}{x}\sqrt{2x+3} - \ln^2 x \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3} = \frac{\ln x(4x+6-x\ln x)}{x(2x+2)^{3/2}} = -\frac{\ln x}{(2x+2)^{3/2}}\left(\ln x - 4 - \frac{6}{x}\right) < 0 \text{ при } x \geq 50 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ |a_n| \searrow$ начиная с $n=50$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} = 0,$ т.к. $\ln^2 n = o(\sqrt{n})$

$$\begin{cases} \text{ряд знакочередующийся,} \\ |a_n| > |a_{n+1}|\ \forall n \geq 50, \\ \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} > \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ — расходится по признаку сравнения $\Rightarrow$ абсолютной сходимости нет.

Применяя группировку членов постоянного знака, покажите, что ряд расходится.

7

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1}$ — знакопеременный ряд

При $2k \leq [\ln n] < 2k+1 \Leftrightarrow [e^{2k}] \leq n < [e^{2k+1}]$ n-е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1}\frac{1}{2n+1}$$

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1}\dfrac{1}{2n+1}$ снизу:

$$\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1}\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2[e^{2k+1}]-1}\left([e^{2k+1}]-1-[e^{2k}]\right) \geq \frac{2[e^{2k}]-[e^{2k}]-1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k}]-1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k+1}]}{2[e^{2k+1}]} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty}|A_k| = \dfrac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1}$ тоже расходится

9

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ — знакопеременный ряд

При $2k \leq [\sqrt[3]{n}] < 2k+1 \Leftrightarrow 8k^3 \leq n < (2k+1)^3$: n-е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k}\frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$$

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ снизу:

$$\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{((2k+1)^3-1)^2+3}}(12k^2+6k) = \frac{6k(2k+1)}{\sqrt[3]{(2k+1)^6-2(2k+1)^3+4}} =$$

$$= \frac{6k}{\sqrt[3]{(2k+1)^3 - 2 + \frac{4}{(2k+1)^3}}} \geq \frac{6k}{2k+1} \text{ (при } k \geq 1) \geq 3 \neq 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty} |A_k| = 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ тоже расходится

10

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n+2}$ — знакопеременный ряд

При $2\pi k < \ln n < 2\pi k + \pi \;\Leftrightarrow\; [e^{2\pi k}] + 1 \leq n < [e^{2\pi k + \pi}]$: n-е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=[e^{2\pi k}]+1}^{[e^{2\pi k+\pi}]-1} \frac{\sin \ln n}{n+2}$ снизу:

при $2\pi k + \frac{\pi}{6} \leq \ln n \leq 2\pi k + \frac{5\pi}{6} \;\Leftrightarrow\; [e^{2\pi k + \frac{\pi}{6}}] + 1 \leq n \leq [e^{2\pi k + \frac{5\pi}{6}}]$: $\sin \ln n \geq \frac{1}{2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; A_k \geq \sum_{n=[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]+1}^{[e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]} \frac{1}{2(n+2)} \geq \frac{1}{2([e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]+2)}([e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}] - [e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] - 1)$$

$$8[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] < [e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}] < 9[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] \;\Rightarrow\; A_k \geq \frac{7[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] - 1}{2(9[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]+2)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{7}{18} \neq 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty} |A_k| \geq \frac{7}{18} \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n+2}$ тоже расходится

11

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ — знакопеременный ряд

При $2\pi k < \pi\sqrt{n} < 2\pi k + \pi \;\Leftrightarrow\; 4k^2 < n < (2k+1)^2$: n-е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=4k^2+1}^{4k^2+4k} \frac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ снизу:

при $2\pi k + \frac{\pi}{6} \leq \pi\sqrt{n} \leq 2\pi k + \frac{5\pi}{6} \;\Leftrightarrow\; \left(2k + \frac{\pi}{6}\right)^2 \leq n \leq (2k + \frac{5\pi}{6})^2$: $\sin \pi\sqrt{n} \geq \frac{1}{2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; A_k \geq \sum_{n=\left(2k+\frac{\pi}{6}\right)^2}^{(2k+\frac{5\pi}{6})^2} \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{(2k+\frac{5\pi}{6})^2+1}} \left(\left(2k+\frac{5\pi}{6}\right)^2 - \left(2k+\frac{\pi}{6}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\frac{2\pi}{3}(4k+\pi)}{2\sqrt{4k^2 + \frac{5\pi}{3}k + \frac{25\pi}{36} + 1}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4 + \frac{\pi}{k}}{\sqrt{4 + \frac{5\pi}{3k} + \frac{25\pi+36}{36k^2}}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{2\pi}{3} \neq 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty} |A_k| \geq \frac{2\pi}{3} \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ тоже расходится

Применяя признак Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится.

Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость, используя асимптотику общего члена.

Вычислите произведение рядов.