

# Семинарский лист 4

Александр Богданов  
[Telegram](#)

Алиса Вернигор  
[Telegram](#)

Анастасия Григорьева  
[Telegram](#)

Василий Шныпко  
[Telegram](#)

Денис Козлов  
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок  
[Telegram](#)

Иван Пешехонов  
[Telegram](#)

Иван Добросовестнов  
[Telegram](#)

Настя Городилова  
[Telegram](#)

Никита Насонков  
[Telegram](#)

Версия от 02.10.2020 10:38

## Вычислите бесконечное произведение как предел частичного

### Задача 1

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$
$$\prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^N \frac{n^2 - 1}{n^2} = \prod_{n=2}^N \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{(N-1) \cdot (N+1)}{N \cdot N} = \frac{N+1}{2N} \rightarrow \frac{1}{2}$$

### Задача 2

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{(-1)^n}{n}}$$
$$\prod_{n=1}^N e^{\frac{(-1)^n}{n}} = e^{\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}} = \diamond$$
$$\ln n + \gamma + o(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \implies \frac{1}{2} (\ln n + \gamma + o(1)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} - \text{чётные члены суммы} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n}$$
$$\ln(2n+1) + \gamma + o(1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \implies (\ln(2n+1) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2} (\ln n + \gamma + o(1)) =$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \text{нечётные члены суммы} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$
$$\diamond = e^{\frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1)) - (\ln(2n+1) + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma + o(1))} = e^{\frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \gamma + o(1) - \ln(2n+1) - \gamma + o(1) + \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{2} \gamma + o(1)} = e^{\ln n - \ln(2n+1) + o(1)} =$$
$$= e^{\ln \frac{n}{2n+1} + o(1)} \rightarrow e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

### Задача 3

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}$$

Найдем частичное произведение:

$$\prod_{n=1}^N \cos \frac{x}{2^n} = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^N}$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} = \dots = 2^k \sin \frac{x}{2^k} \prod_{m=1}^k \cos \frac{x}{2^m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \prod_{m=1}^k \cos \frac{x}{2^m} = \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} \Rightarrow \prod_{n=1}^N \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^N \sin \frac{x}{2^N}}$$

Бесконечное произведение как предел частичного:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^N \sin \frac{x}{2^N}} = \sin x \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^N \frac{x}{2^N}} = \frac{\sin x}{x}$$

Ответ:  $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$ .

## Исследуйте бесконечное произведение на сходимость

### Задача 4

*Формулы Тейлора:*

$$(1+x)^a \sim 1+x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$\prod_{n=1}^N \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = e^{\ln \prod_{n=1}^N \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}} = e^{\sum_{n=1}^N \ln \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}}; \quad a_n = \ln \frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = \ln \left[ \left( 1 + \frac{3}{n^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \sim \ln \left( 1 - \frac{3}{2n^2} \right) \sim -\frac{3}{2n^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  ряд сходится.

## Задача 5

$$\prod_{n=1}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{n})$$

$$\prod_{n=1}^N (2 - \sqrt[n]{n}) = e^{\ln \prod_{n=1}^N (2 - \sqrt[n]{n})} = e^{\sum_{n=1}^N \ln(2 - \sqrt[n]{n})}$$

$$a_n = \ln(2 - \sqrt[n]{n}) = \ln(1 + (1 - \sqrt[n]{n})) \sim (1 - \sqrt[n]{n}) = -\left(e^{\frac{\ln n}{n}} - 1\right);$$

нет, ребята, это жестко,

$\Rightarrow$  но ряд расходится к 0

## Задача 6

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos(\operatorname{arctg} n)$$

$$\cos(\operatorname{arctg} n) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} n) \sin(\operatorname{arctg} n) = n \sqrt{1 - \cos(\operatorname{arctg} n)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\operatorname{arctg} n) = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$$

$$\prod_{n=1}^N \cos(\operatorname{arctg} n) = \prod_{n=1}^N \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = e^{\ln \prod_{n=1}^N \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}} = e^{\sum_{n=1}^N \ln \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}}$$

$$a_n = \ln \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{1}{1+n^2}\right) \sim -\frac{1}{2(1+n^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^N a_n \text{ сходится по признаку сравнения} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \cos(\operatorname{arctg} n) \text{ сходится}$$

**Исследуйте бесконечное произведение на сходимость и абсолютную сходимость**

## Задача 7

$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln n^{\frac{(-1)^n}{n}}} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} \Rightarrow a_n = \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0;$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{монотонно убывает} \Rightarrow \text{ряд сходится по Лейбницу}$$

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n \ln n}{n} \right| \geq \frac{\ln 2}{n} \Rightarrow \text{ряд расходится абсолютно.}$$

Исследуйте функциональную последовательность  $f_n$  на равномерную сходимость к поточечному пределу  $f$  на множестве  $D$ , оценивая  $\|f_n - f\|$ .

### Задача 10

$$f_n(x) = \sin \frac{x}{n}, \quad D = [-1, 1]$$

$$f_n(x) = \sin \frac{x}{n} \rightarrow \sin 0 = 0 \implies f \equiv 0$$

$$\sup_D \left\| \sin \frac{x}{n} \right\| = \sin \frac{1}{n} \rightarrow 0 \implies \text{равномерная сходимость.}$$

### Задача 11

$$f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad D = [0, 1]$$

$$f_n(x) = x^n - x^{2n} \rightarrow 0 \implies f \equiv 0$$

$$\sup_D \|x^n - x^{2n}\| = \diamond$$

$$f'_n(x) = (x^n - x^{2n})' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0$$

$$\text{Критические точки: } x = 0, f_n(x) = 0; \quad x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}, f_n(x) = \frac{1}{4}; \quad x = 1, f_n(x) = 0;$$

$$\diamond = \frac{1}{4} \neq 0 \implies \text{отсутствие равномерной сходимости.}$$

### Задача 15

$$f_n(x) = n \sim \frac{1}{nx}, \quad D = (0, 3]$$

$$\frac{1}{nx} \rightarrow 0 \implies \sin \frac{1}{nx} \sim \frac{1}{nx} \implies f_n(x) \sim \frac{1}{x} \implies f(x) = \frac{1}{x}$$

Расширим  $D$  до компакта:  $D = [0, 3]$

$$\sup_D \left\| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right\|$$

$$\text{Возьмём последовательность аргументов } x_n = \frac{1}{n} \in D. \text{ Тогда } \sup_D \left\| n \sin \frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right\| \geq \sup_D \|n \sin 1 - n\| \rightarrow +\infty \implies$$

$\implies$  Отсутствует равномерная сходимость.

**Докажите равномерную сходимость функциональной последовательности на заданном множестве, применяя теорему Дини (о монотонной сходимости)**

**Теорема Дини:** Если  $f_n \rightarrow f$  на множестве одновременно выполнены следующие условия:

1.  $D$  — компакт
2.  $f_n$  — монотонна
3.  $f_n$  — непрерывна
4.  $f$  — непрерывна

тогда  $f_n$  равномерно сходится к  $f$ .

### Задача 16

$$f_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad D = [1, 2]$$

$$\begin{cases} f_n \text{ — непрерывна, монотонна} \\ D = [1, 2] \text{ — компакт} \\ f_n \rightarrow f(x) = e^x \text{ — непрерывна} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

### Задача 17

$$f_n = nx^2 e^{-nx}, \quad D = [1, +\infty)$$

Расширим  $D$  до компакта:  $D' = [1, +\infty]$

$$f'_n = 2nx \cdot e^{-nx} + nx^2(-n) \cdot e^{-nx} = nxe^{-nx}(2 - nx) = 0 \implies \text{при } n \geq 2, x \geq \frac{2}{n}, f'_n \leq 0 \implies f_n \text{ — монотонна.}$$

$$\begin{cases} f_n \text{ — монотонна} \\ f_n \text{ — непрерывна} \\ f_n \rightarrow 0 \text{ — непрерывна} \\ D' = [1, +\infty] \text{ — компакт} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

**Докажите неравномерную сходимость функциональной последовательности на заданном множестве, используя локализацию особенности.**

**Теорема:** Если  $f_n$  непрерывна, и на множестве  $D$  равномерно сходится к  $f$ , то  $f$  — непрерывна.

## Задача 20

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad D = [0, 1]$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \implies \text{т.к. } f \text{ разрывна в } 0, \text{ то равномерная сходимость отсутствует.}$$

## Задача 24

$$f_n(x) = \frac{n^2}{4+n^2x^2}, \quad D = (0, +\infty)$$

Добавим точку 0 в  $D$ :  $D = [0, +\infty)$

$$f_n(x) = \frac{n^2}{4+n^2x^2} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \implies \text{т.к. } f \text{ разрывна в } 0, \text{ то равномерная сходимость отсутствует.}$$