Семинарский лист 1337

Александр Богданов
Telegram

Алиса Вернигор
Telegram

Василий Шныпко
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Иван Пешехонов
Telegram

Версия от 26.09.2020 02:12

Применяя признак Вейрштрасса, покажите, что ряд сходится абсолютно.

Применяя признак Лейбница, покажите, что ряд сходится.

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ — знакочередующийся ряд,} \quad a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}, \quad |a_n| = \frac{2n-1}{n^2+3n+5}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+3x+5}$:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3x+5)-(2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10-4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} = -\frac{2x^2-2x-3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= -\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \text{ при } x \geq 2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ |a_n| \searrow \text{ начиная с } n=2$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{n+3+\frac{5}{n}} = 0$$

$$\begin{cases} \text{ряд знакочередующийся,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \ \forall n \geq 2, \\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится по признаку сравнения} \ \Rightarrow \ \text{абсолютной сходимости нет.}$$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ — знакочередующийся ряд,} \quad a_n=\frac{(-1)^n\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}},\ \ |a_n|=\frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}$:

$$f'(x)=\frac{\frac{2\ln x}{x}\sqrt{2x+3}-\ln^2 x\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3}=\frac{\ln x(4x+6-x\ln x)}{x(2x+2)^{3/2}}=-\frac{\ln x}{(2x+2)^{3/2}}\left(\ln x-4-\frac{6}{x}\right)<0 \text{ при } x\geq 50 \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ |a_n|\searrow$ начиная с $n=50$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}=0, \ \text{ т.к. } \ln^2 n=o(\sqrt{n})$$

$$\begin{cases}\text{ряд знакочередующийся,}\\ |a_n|>|a_{n+1}|\ \forall n\geq 50,\\ \lim_{n\to\infty}|a_n|=0\end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ — расходится по признаку сравнения } \Rightarrow \text{ абсолютной сходимости нет.}$$

Применяя группировку членов постоянного знака, покажите, что ряд расходится.

7

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} \text{ — знакопеременный ряд}$$

При $2k\leq[\ln n]<2k+1 \ \Leftrightarrow\ [e^{2k}]\leq n<[e^{2k+1}]$ n-е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1}\frac{1}{2n+1}$$

Оценим сумму группы $A_k=\displaystyle\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1}\frac{1}{2n+1}$ снизу:

$$\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1}\frac{1}{2n+1}\geq\frac{1}{2[e^{2k+1}]-1}\left([e^{2k+1}]-1-[e^{2k}]\right)\geq\frac{2[e^{2k}]-[e^{2k}]-1}{2[e^{2k+1}]-1}\geq\frac{[e^{2k}]-1}{2[e^{2k+1}]-1}\geq\frac{[e^{2k+1}]}{2[e^{2k+1}]}=\frac{1}{2}\neq 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty}|A_k| = \dfrac{1}{2} \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1}$ тоже расходится

9

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ — знакопеременный ряд

При $2k \leq [\sqrt[3]{n}] < 2k+1 \;\Leftrightarrow\; 8k^3 \leq n < (2k+1)^3$: n-е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$$

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ снизу:

$$\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{((2k+1)^3-1)^2+3}}(12k^2+6k) = \frac{6k(2k+1)}{\sqrt[3]{(2k+1)^6-2(2k+1)^3+4}} =$$

$$= \frac{6k}{\sqrt[3]{(2k+1)^3-2+\dfrac{4}{(2k+1)^3}}} \geq \frac{6k}{2k+1} \text{ (при } k \geq 1) \geq 3 \neq 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty}|A_k| = 3 \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ тоже расходится

10

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \ln n}{n+2}$ — знакопеременный ряд

При $2\pi k < \ln n < 2\pi k + \pi \;\Leftrightarrow\; [e^{2\pi k}] + 1 \leq n < [e^{2\pi k+\pi}]$: n-е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=[e^{2\pi k}]+1}^{[e^{2\pi k+\pi}]-1} \dfrac{\sin \ln n}{n+2}$ снизу:

при $2\pi k + \dfrac{\pi}{6} \leq \ln n \leq 2\pi k + \dfrac{5\pi}{6} \;\Leftrightarrow\; [e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] + 1 \leq n \leq [e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]$: $\sin \ln n \geq \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ A_k \geq \sum_{n=[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]+1}^{[e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]} \frac{1}{2(n+2)} \geq \frac{1}{2([e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]+2)}([e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]-[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]-1)$$

$$8[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] < [e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}] < 9[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]\ \Rightarrow\ A_k \geq \frac{7[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]-1}{2(9[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]+2)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{7}{18} \neq 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty} |A_k| \geq \dfrac{7}{18} \neq 0\ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \ln n}{n+2}$ тоже расходится

11

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ — знакопеременный ряд

При $2\pi k < \pi\sqrt{n} < 2\pi k + \pi\ \Leftrightarrow\ 4k^2 < n < (2k+1)^2$: n-е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=4k^2+1}^{4k^2+4k} \dfrac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ снизу:

при $2\pi k + \dfrac{\pi}{6} \leq \pi\sqrt{n} \leq 2\pi k + \dfrac{5\pi}{6}\ \Leftrightarrow\ \left(2k+\dfrac{1}{6}\right)^2 \leq n \leq \left(2k+\dfrac{5}{6}\right)^2$: $\sin \pi\sqrt{n} \geq \dfrac{1}{2}\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ A_k \geq \sum_{n=\left(2k+\frac{1}{6}\right)^2}^{(2k+\frac{5}{6})^2} \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2(2k+\frac{5}{6})^2+1}} \left(\left(2k+\frac{5}{6}\right)^2 - \left(2k+\frac{1}{6}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(4k+1)}{2\sqrt{8k^2+\frac{20}{3}k+\frac{34}{9}}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4+\frac{1}{k}}{\sqrt{8+\frac{20}{3k}+\frac{34}{9k^2}}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{4}{3\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \neq 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty} |A_k| \geq \dfrac{2}{3\sqrt{2}} \neq 0\ \Rightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ тоже расходится

Применяя признак Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится.

12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ \sqrt{2}n}{2n-5}$$

Пусть $a_n = cos\ \sqrt{2}n$, тогда $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right| \leqslant 1$, то есть частичная сумма a_n ограничена.

Пусть $b_n = \dfrac{1}{2n-5}$, тогда, очевидно, $b_n \searrow 0$.

Заметим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{cos\ \sqrt{2}n}{2n-5} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ \cdot \ b_n$ => ряд сходится по признаку Дирихле.

13

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{sin(4n)}{ln\ n - ln\ ln\ n}$

$a_n = sin(4n) => \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n -$ ограничена.

$b_n = \dfrac{1}{ln\ n - ln\ ln\ n}$

Покажем, что $b_n \searrow 0$:

Пусть $f(x) = \dfrac{1}{ln\ x - ln\ ln\ x}$. Найдём её производную и покажем, что она всегда меньше нуля. Это будет означать, что функция, а значит, и b_n монотонно убывает:

$$f'(x) = -\frac{1 \ \cdot \ (ln\ x - ln\ ln\ x)'}{(ln\ x - ln\ ln\ x)^2} = -\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x\ ln\ x}}{(ln\ x - ln\ ln\ x)^2}$$

При $x \to \infty$ $\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\ ln\ x} > 0 => f'(x) < 0 => b_n$ монотонно убывает. Также заметим, что при $n \to \infty$ $\ ln\ n$ растёт быстрее, чем $ln\ ln\ n => (ln\ n - ln\ ln\ n) \to \infty => b_n = \dfrac{1}{ln\ n - ln\ ln\ n} \to 0$. Следовательно $b_n \searrow 0 =>$ ряд сходится по признаку Дирихле. ■

15

$\dfrac{(-1)^n \ \cdot \ cos\ 3n}{\sqrt{n^2+2}}$

Пусть $a_n = (-1)^n \cdot cos\ 3n$. Докажем, что частичная сумма этого ряда ограничена. Для этого посчитаем S_N^+ и S_N^- и докажем, что они ограничены. Для удобства рассмотрим такие n, что $n = 2 \cdot p,\ p \in \mathbb{N}$.

Тогда $S_N^+ = \sum\limits_{p=1}^{N} cos(6p)$ ограничена (доказано на семинаре). $S_N^- = \sum\limits_{p=1}^{N} cos(3+6p) = \sum\limits_{p=1}^{N}(cos\ 3\ cos\ 6p - sin\ 3\ sin\ 6p) =$ $cos\ 3\ \sum\limits_{p=1}^{N} cos\ 6p - sin\ 3\ \sum\limits_{p=1}^{N} sin\ 6p -$ и уменьшаемое, и вычитаемое ограничены, значит и S_N^- ограничена.

Таким образом $S_N = S_N^+ - S_N^-$ ограничена.

Теперь пусть $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$. Докажем, что $b_n \searrow 0$. Очевидно, что $b_n \to 0$. Для доказательства монотонного убывания сравним b_n и b_{n+1}:

$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \vee \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2}}$

$\frac{1}{n^2+2} \vee \frac{1}{(n+1)^2+2}$

$(n+1)^2+2 \vee n^2+2$

$n^2+2n+3 \vee n^2+2$
$2n+1>0$, начиная с какого-то n_0.

Следовательно, $b_n \searrow 0$. Значит, наш ряд сходится по признаку Дирихле.

16

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)\ \cdot\ sin(n)}{n^2-3n+1}$

$a_n = sin(n) => \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – ограничена.

$b_n = \frac{3n-2}{n^2-3n+1}$

Докажем, что $b_n \searrow 0$. Очевидно, что $b_n \to 0$. Для дальнейшего доказательства сравним b_n и b_{n+1}:

$\frac{3n-2}{n^2-3n+1} \vee \frac{3n+1}{(n+1)^2-3n-2}$

$(3n-2)((n+1)^2-3n-2) \vee (3n+1)(n^2-3n+1)$

$(3n-2)(n^2-n-1) \vee (3n+1)(n^2-3n+1)$

$3n^3-3n^2-3n-2n^2+2n+2 \vee 3n^3-9n^2+3n+n^2-3n+1$

$3n^2-n+1>0$ начиная с какого-то $n_0 =>$ ряд сходится по признаку Дирихле. ■

Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость, используя асимптотику общего члена.

21

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ n}{\sqrt{n}+cos\ n}$

$$a_n = \frac{cos\ n}{\sqrt{n}+cos\ n} = \frac{cos\ n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}} = \frac{cos\ n}{\sqrt{n}} \cdot (1-\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}+\frac{\frac{cos^2 n}{n}}{1+\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}}) = \frac{cos\ n}{\sqrt{n}} - \frac{cos^2 n}{n} + \frac{\frac{cos^3 n}{n^{1.5}}}{1+\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}} = O(\frac{cos\ n}{\sqrt{n}})$$

$\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Дирихле => $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

Рассмотрим теперь абсолютную сходимость. $|a_n| = \left|\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|cos\ n|}{\sqrt{n}}$. С семинара известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|cos\ n|}{n}$ расходится, следовательно, так как $\frac{|cos\ n|}{n} \leqslant \frac{|cos\ n|}{\sqrt{n}}$, то по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|cos\ n|}{\sqrt{n}}$ расходится => ряд расходится абсолютно.

Вычислите произведение рядов.