1 Семинарский лист 2

Задача 1.1. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + 3}{n\,(\ln^3 n + 2)}$

$$a_n = \frac{\ln n + 3}{n(\ln^3 n + 2)} = \frac{\ln n \cdot (1 + \frac{3}{\ln n})}{n \ln^3 n\, \left(1 + \frac{2}{\ln^3 n}\right)} \sim \frac{1}{n \ln^2 n} =: b_n$$

Пользуемся (без доказательства) тем фактом, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится при $p > 1$, иначе расходится.

$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow$ по предельному признаку сравнения ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут себя одинаково, значит a_n сходится.

Задача 1.2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}},\ a_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 : \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1 \implies a_n \sim \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ сходится $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$ по признаку сравнения.

Задача 1.3. $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{2^{\frac{n}{\ln n}}},\ \ a_n = \frac{n^2}{2^{\frac{n}{\ln n}}}$

$$\ln a_n = 2\ln n - \frac{n}{\ln n} \cdot \ln 2 = -\frac{n}{\ln n}\left(\ln 2 - \frac{2\ln^2 n}{n}\right) \sim -\frac{n \ln 2}{\ln n} \ \left(\text{так как } \frac{2\ln^2 n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0\right)$$

$$C_1 \cdot n > \frac{n}{\ln n} > C_2 \cdot \ln n\ \ \forall\, C_1, C_2 > 0 \ \Rightarrow\ -C_1 \ln 2 \cdot n < -\frac{n \ln 2}{\ln n} < -C_2 \ln 2 \cdot \ln n \ \Rightarrow\ \ln a_n < -p \ln n = \ln \frac{1}{n^p}\ \ \forall p > 0 \ \Rightarrow$$
$$a_n < \frac{1}{n^p}$$

При $p = 2$ $\sum a_n$ сходится из сходимости $\sum \frac{1}{n^2}$

Задача 1.4.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$$

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln n)\ln(\ln n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \leqslant \frac{1}{n^2} \implies \text{ряд сходится.}$$

Задача 1.5.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}$$

$$a_n = \frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}}$$

$$\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n = \sqrt{n}\ln 3\left(1 - \frac{3\ln n}{\sqrt{n}\ln 3}\right) = \left|\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0\right| \sim \sqrt{n}\ln 3$$

Заметим, что $\forall p \implies p\ln n < \sqrt{n}\ln 3 \implies p \ln n < \sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n \implies \frac{1}{e^{p\ln n}} > \frac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}} \iff \frac{1}{n^p} > \frac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}}$

Выберем $p = 2$, тогда $\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}} \implies$ ряд сходится.

Задача 1.6.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}\right)$$

$$a_n = \ln\left(\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}\right) = \ln\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}\right) = \ln\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - \ln\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = -2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Задача 1.7.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{n+1} \to 2 > 1 \implies \text{ряд расходится.}$$

Задача 1.8. $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(2n+3)!}{(3n+3)!} \div \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!} = \frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4}{27} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится по признаку Д'Аламбера}$$

Оценим остаток ряда: $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \approx \dfrac{4}{27}\, a_n + \left(\dfrac{4}{27}\right)^2 a_n + \dots = \dfrac{\frac{4}{27}\, a_n}{1 - \frac{4}{27}} = \dfrac{4}{23}\, a_n$

Задача 1.9.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)! 3^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 3^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1 \implies \text{ряд сходится.}$$

Оценим теперь N-ый остаток ряда:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{e}{3} \implies a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \leqslant \frac{e}{3} \cdot \frac{e}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{e}{3} \cdot a_1 = \left(\frac{e}{3}\right)^n \cdot a_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{e}{3}\right)^n$$

$$r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leqslant \frac{1}{3}\left(\left(\frac{e}{3}\right)^N + \left(\frac{e}{3}\right)^{N+1} + \ldots\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(e/3)^N}{1 - e/3} = \frac{(e/3)^N}{3 - e}$$

Задача 1.10. $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+3}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n^2+3}} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)\cdot\frac{n^2+3}{-n(n+2)}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится по признаку Коши}$$

Оценим остаток ряда: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-n} \Rightarrow r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \sim e^{-n-1} + e^{-n-2} + \dots = \dfrac{a_n}{e} + \dfrac{a_n}{e^2} + \dots = \dfrac{a_n}{e\left(1 - \frac{1}{e}\right)} = \dfrac{a_n}{e-1}$

Задача 1.11.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

Применим признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}} \sim \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3n}{n}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1 \implies \text{ряд расходится.}$$

Задача 1.12.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Применим признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3+\frac{1}{n}} \sim \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3} = \frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}}{3} = \left|\, \sqrt[n]{n} \to 1 \right| \to \frac{1}{3} < 1 \implies \text{ряд сходится.}$$

Оценим теперь N-ый остаток ряда:

$$\sqrt[n]{a_n} \approx \frac{1}{3} \implies a_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n \implies r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^N + \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{N+2} + \ldots \leqslant \frac{(1/3)^N}{1-1/3}$$

Задача 1.13. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$, где $n!!$ — двойной факториал

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{2n+3}\right) \div \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4}{4} = 1 \text{ (фиаско)}$$

Признак Гаусса: если $\exists\, \delta > 0 : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$, то $\sum a_n \begin{cases} \text{сходится}, & p > 1 \\ \text{расходится}, & p \leq 1 \end{cases}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2+\frac{1}{n})^2}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{3}{n})} = \frac{4+\frac{4}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{4+\frac{10}{n}+O(\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{1+\frac{5/2}{n}+O(\frac{1}{n^2})} = ?$$

Бахнем Тейлора: $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ при $x \to 0$. Пусть $x = \dfrac{5/2}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{1+\frac{5/2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 -$

$$\left(\frac{5/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\left(\frac{5/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right) = 1 - \left(\frac{5/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + O\left(\frac{25/4}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - \frac{5/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1-\dfrac{5/2}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \dfrac{3/2}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \delta = 1,\ p = \dfrac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ ряд сходится по признаку Гаусса

Задача 1.14.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$$

Применим признак Гаусса:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\right)^2 = \frac{4+\frac{4}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{4+\frac{8}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \delta = 1 \\ p = 1 \quad = 1 \end{cases} \implies \text{ряд расходится.}$$

Задача 1.15.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3(n+1)-4)\cdot 3^n\cdot n!}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}=\frac{3(n+1)-4}{3(n+1)}=\frac{3n-1}{3n+3}=\frac{1-\frac{\frac{1}{3}}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\left(1-\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\frac{1}{3}}{n}+\frac{\frac{1}{3}}{n^2}-O\left(\frac{1}{3n^3}\right)=1-\frac{\frac{4}{3}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\implies\begin{cases}p=\dfrac{4}{3}\\ \delta=1\end{cases}\implies \text{ряд сходится по признаку Гаусса.}$$

Задача 1.16. $S=\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$

$$S_N=\sum_{n=3}^{N}\frac{\ln n}{n}f(n)=\frac{\ln n}{n};\ f'(n)=\frac{\frac{1}{n}\cdot n-\ln n}{n^2}=\frac{1-\ln n}{n^2}<0 \text{ при } x>e$$

$f(n+t)\leqslant f(n)\leqslant f(n-1+t), t\in[0;1], n\geqslant 4$
Проинтегрируем неравенство по переменной t от 0 до 1:

$$\int_0^1 f(n+t)dt\leqslant\int_0^1 f(n)dt\leqslant\int_0^1 f(n-1+t)dt$$

Сделаем замену: $x_1=n+t$, $x_2=n-1+t$

$$\int_n^{n+1} f(x_1)dx_1\leqslant f(n)\leqslant\int_{n-1}^{n} f(x_2)dx_2$$

Просуммируем всё от 4 до N:

$$\int_4^{N+1} f(x_1)dx_1\leqslant\sum_4^N f(n)\leqslant\int_3^{N} f(x_2)dx_2$$

Найдём первообразную функции $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$:

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x d(\ln x)=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$$

Подставим первообразную в двойное неравенство:

$$\frac{1}{2}\ln^2(N+1)-\frac{1}{2}\ln^2 4\leqslant\sum_4^N f(n)\leqslant\frac{1}{2}\ln^2(N)-\frac{1}{2}\ln^2 3$$

Прибавим ко всем частям $\dfrac{\ln 3}{3}$:

$$\frac{1}{2}\ln^2(N+1)-\frac{1}{2}\ln^2 4+\frac{\ln 3}{3}\leqslant S_N\leqslant\frac{1}{2}\ln^2(N)-\frac{1}{2}\ln^2 3+\frac{\ln 3}{3}$$

Получили необходимую оценку на частичную сумму.

Задача 1.17.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n},\ f(x)=\frac{1}{x\ln x}$$

$$f'(x)=-\frac{\ln x+1}{x^2\ln^2 x}=0\iff\begin{cases}x\neq 0\\ x\neq 1\\ x=\dfrac{1}{e}\end{cases}\implies f(x)\text{ монотонно убывает при } x>1$$

$$f(n+t) \leqslant a_n \leqslant f((n-1)+t)$$

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

$$\int_2^{N+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=2}^{N} a_n \leqslant \int_1^{N} f(x)dx$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ e^t = x \\ dx = e^t dt \end{bmatrix} = \int \frac{e^t}{t \cdot e^t}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + C = \ln\ln x + C$$

$$\int_2^{N+1} f(x)dx = \ln\ln(N+1) - \ln\ln 2$$

$$\int_1^{N} f(x)dx = \ln\ln N - 0 = \ln\ln N$$

Ответ: $\ln\ln(N+1) - \ln\ln 2 \leqslant \sum\limits_2^N \frac{1}{n\ln n} \leqslant \ln\ln N$

Задача 1.18 (19)**.**

$S_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$— сходящийся ряд

$S_N \to S, N \to \infty$

Доказать: $S_N = S - \frac{1}{N} + o(\frac{1}{N}), N \to \infty$

Теорема Штольца: Пусть x_n и y_n обе сходится к нулю, причём $0 < y_n < y_{n-1}$ $\forall n$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{bmatrix} \frac{0}{0} \end{bmatrix}$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - xn - 1}{y_n - y_{n-1}} = A$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

Обозначим $x_n = S - S_n \to 0, y_n = \frac{1}{n} \to 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{bmatrix} \frac{0}{0} \end{bmatrix}$

Расмотрим $\frac{x_n - xn - 1}{y_n - y_{n-1}} = \frac{S - S_n - (S - S_{n-1})}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_n}{\frac{n-1-n}{n(n-1)}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{\frac{1}{n(n-1)}} = \frac{1/n^2}{\frac{1}{n^2-n}} = \frac{n^2-n}{n^2} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

По т. Штольца $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, т.е. $\frac{x_n}{y_n} = 1 + o(1), x_n = y_n + o(y_n)$

$x_n = S - S_n = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \implies S_n = S - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, ч.т.д.

Задача 1.19.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = S - \frac{1}{N2^N} + o\left(\frac{1}{N2^N}\right)$$

$$q_n = S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n}, \quad p_n = \frac{1}{N2^N}$$

По теореме Штольца: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q_n}{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q_n-q_{n-1}}{p_n-p_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S-S_n-S+S_{n-1}}{\frac{1}{N2^N}-\frac{1}{(N-1)2^{N-1}}}=\dfrac{-\frac{1}{N2^N}\cdot N(N-1)2^{2N-1}}{2^{N-1}(N-1-2N)}=1,$

$$\frac{q_n}{p_n}=1+o(1)\ \Rightarrow\ q_n=p_n+o(p_n)\Leftrightarrow S-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n2^n}=\frac{1}{N2^N}+o\left(\frac{1}{N2^N}\right)\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n2^n}=S-\frac{1}{N2^N}\pm o\left(\frac{1}{N2^N}\right),$$

что и требовалось доказать.

Задача 1.20 (23)**.**

$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n^2}$ - представить S в виде суммы ряда с общим членом $a_n=\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

$$b_n=\frac{1}{n(n+1)}\approx\frac{1}{n^2}$$

$$sin\frac{1}{n^2}=u_n\approx\frac{1}{n^2}$$

$$u_n-b_n=a_n\approx ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}u_n-\sum_{n=1}^{\infty}=S-1\implies S=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$a_n=u_n-b_n=\sin\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^6}-\frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\approx\frac{1}{n^2}-\frac{1}{6n^6}-\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{6n^6}+\frac{1}{n^3}\approx\frac{1}{n^3}$$

$$\implies S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$