Коллоквиум 1

Денис Козлов
Telegram

Сергей Лоптев
Telegram

Версия от 15.10.2020 16:41

2. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ сходится, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$
Критерий Коши сходимости числового ряда

Ряд $\sum x_n$ сходится тогда, и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N,\ n > m \implies |\sum\limits_{i=m}^{n} x_i| < \varepsilon$

Доказательство. Рассмотрим последовательность частных сумм $\{S_n\}$
Ряд сходится тогда, и только тогда, когда сходится $\{S_n\}$

То есть ряд $\sum x_n$ сходится тогда, и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N,\ n > m \implies |S_n - S_m| < \varepsilon \implies |\sum\limits_{i=m}^{n} x_i| < \varepsilon$ ■

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Утверждение 0.1 (Сравнение отношений). *Пусть* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ *при* $n \geqslant n_0$. *Тогда:*

$$\sum b_n \text{ сходится} \implies \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\sum a_n \text{ расходится} \implies \sum b_n \text{ расходится}$$

Доказательство. Предполагаем, что $a_n > 0, b_n > 0$.

$$a_{n_0+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$$\ldots$$

$$a_{n_0+k} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k}$$

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^{N} b_n$$

■

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши

Утверждение 0.2. *1 Пусть $a_n \downarrow$. Рассмотрим ряды:*

$$\sum a_n \ (1) \ \textit{и} \ \sum 2^n \cdot a_{2^n} \ (2)$$

Тогда ряды (1) и (2) ведут себя одинаково

Доказательство.

$$2^m \text{ слаг.: } a_1 + \underbrace{a_2}_{\substack{\leqslant a_1 \\ \geqslant a_2}} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\substack{\leqslant 2a_2 \\ \geqslant 2a_4}} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\substack{\leqslant 4a_4 \\ \geqslant 4a_8}} + \cdots + \underbrace{a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \cdots + a_{2^{m-1}+2^{m-1}}}_{\substack{\leqslant 2^{m-1} \cdot a_{2^{m-1}} \\ \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2^m \cdot a_{2^m}}}$$

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leqslant a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Левая часть – сумма нижних оценок, правая – сумма верхних

■

12. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и S_n его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$

Докажем расходимость:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) &= \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \cdots + \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_N} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_0} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} \to \sqrt{S}.\end{aligned}$$

Перейдем ко второй части вопроса:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}}{a_{n+1}} &= \frac{\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}}{S_{n+1}-S_n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}},\end{aligned}$$

где $\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n} \to \infty$. Это значит, что $\dfrac{1}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$ стремится к 0. Тогда ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$ расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

14. Сформулируйте (предельный) радикальный признак Коши для положительного ряда.

Утверждение 0.3 (Радикальный признак Коши.)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0$*. Тогда:*

$$\overline{\lim}\, a_n = \begin{cases} < 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сход.} \\ > 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расх.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $q = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}$.

Пусть $q < 1$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leqslant q + \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : a_n \leqslant (q+\varepsilon)^n$ при $n \geqslant n_0$

Пусть $\varepsilon : q + \varepsilon < 1$

Тогда $\sum a_n$ сходится, поскольку сходится $\sum (q+\varepsilon)^n$.

Пусть $q > 1$.

Тогда $\exists \{n_k\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant q - \varepsilon$ при $k = k_0, k_0+1, \ldots$

Пусть $\varepsilon : q - \varepsilon \geqslant 1$

Тогда $a_{n_k} \geqslant (q-\varepsilon)^{n_k} \geqslant 1 \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$

$\implies$ ряд $\sum a_n$ расходится ■

17. Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решён с помощью признака Даламбера, но может быть решён с помощью радикального признака Коши (с обоснованием)

Пример.

$$0 < a < 1 < b$$

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot b^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} a, & \text{n – нечёт.} \\ b, & \text{n – чёт.} \end{cases} \implies \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1, \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$$

– признак Даламбера не работает

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{n-2}{2n}}, & \text{n – чёт.} \\ a^{\frac{n-1}{2n}} \cdot b^{\frac{n-1}{2n}}, & \text{n – нечёт.} \end{cases} \implies \lim \sqrt[n]{n} = \sqrt{ab}$$

Если $a \neq b$, то радикальный признак работает

22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

Пусть у нас есть некоторый ряд $\sum a_n$ и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд $\sum a_n'$, который будет сходиться быстрее, чем исходный $\sum a_n$. Пусть у нас есть ряд $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \dots$.

В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$.

24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.

Утверждение 0.4. *Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно $\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- < \infty$ сходятся.*

Доказательство. Если $\sum |a_n| < \infty$, то S_N^+, S_N^- ограничены $\implies$ сходятся.

Если $S_N^+ \to S^+$, $S_N^- \to S^-$, то $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \to S^+ - S^-$, $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n| \to S^+ + S^-$. ∎

27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму.

Определение 1. Говорят, что ряд $\sum A_k$ получен из ряда $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1, n_2, \ldots : 1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что

$$A_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}$$
$$A_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}$$

Утверждение 0.5. *Если яд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum A_k$ тоже сходится, причём к той же сумме.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм $S'_k = A_1 + \cdots + A_k$ ряда $\sum A_k$ явл. подпоследовательностью последовательности частичных сумм $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ ряда $\sum a_n$ ∎

32. Покажите на примере, что к знакопеременным рядам неприменим предельный признак сравнения

Рассмотрим 2 ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Второй ряд сходится по признаку Лейбница.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n} \text{ -- расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \text{ -- расходится как сумма сходящегося и расходящегося ряда.}$$

34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

Утверждение 0.6 (Признак Дирихле.). *Если $a_n \searrow 0$ и $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| = |B_N| \leqslant C$ — ограничена, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.*

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p},\ x \neq \pi k,\ p > 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^p},\ b_n = \sin nx$$

$$B_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}; \qquad |B_n| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

$\implies$ ряд сходится по признаку Дирихле.

37. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов.

Утверждение 0.7. *Сумма абс. сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов*

42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение.

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$ – частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$$

Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

44. Пусть последовательности $\{a_n\}\,,\ \{A_n\}\,,\ A_n \neq 0$ **таковы, что** $a_n = \dfrac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n$ **и бесконечное произведение** $\prod c_n$ **сходится. Докажите, что существует число** $C \neq 0$ **такое, что** $\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = A_N\,(C + o(1))$**.**

Доказательство.

$$a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n, \qquad \prod c_n \text{ сходится, то есть } \prod_{n=1}^{N} c_n \to P \neq 0$$

$$\prod_{n=1}^{N} = \frac{\cancel{A_1}}{A_0} \cdot c_1 \cdot \frac{\cancel{A_2}}{\cancel{A_1}} \cdot c_2 \cdot \dots \cdot \frac{A_N}{\cancel{A_{N-1}}} \cdot c_N = A_N \cdot \underbrace{\frac{1}{A_0} \cdot \prod_{n=1}^{N} c_n}_{\to \frac{P}{A_0} \neq 0}$$

$$\Longrightarrow \prod_{n=1}^{N} a_n = A_N \cdot (C + o(1))\,, \qquad C = \frac{P}{A_0} \neq 0$$

■

47. Напишите произведение Валлиса и его значение (формула Валлиса). Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?

Утверждение 0.8. *Произведение Валлиса*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2} \text{ – формула Валлиса}$$

– получается из анализа интегралов $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

52. Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве.

Определение поточечной сходимости $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geqslant N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Определение равномерной сходимости $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Доказательство. Видно, что в определении равномерной сходимости номер N зависит от ε и не зависит от x, а в определении поточечной - и от ε, и от x. Если выполняется равномерная сходимость, то $\forall x \in E\ \exists$ нужное N, то есть выполняется поточечная сходимость. ■

54. Приведите пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ (с нетривиальной зависимостью от n и x), равномерно сходящейся на некотором множестве (с обоснованием).

Пример.

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \qquad D = [0; +\infty)$$

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$$

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x \in D} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \to 0$$

$\implies$ последовательность сходится равномерно.

57. Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на множестве D к предельной функции f, отделённой от нуля (т.е. $\inf\limits_{x\in D}|f(x)|>0$), то функциональная последовательность $\dfrac{1}{f_n}$ сходится равномерно на D к $\dfrac{1}{f}$.

Доказательство.

$$\left\|\frac{1}{f_n}-\frac{1}{n}\right\| = \left\|\frac{f_n-f}{f_n\cdot f}\right\| = \sup_{x\in D}\left|\frac{f_n-f}{f_n\cdot f}\right| \lesseqgtr \sup_{x\in D}\frac{\varepsilon}{|f_n\cdot f|}$$

т.к. $\|f_n-f\|\le\varepsilon$ при $n\geqslant N(\varepsilon)$

$\inf|f(x)|=m>0 \implies |f(x)|\geqslant m \forall x\in D$

Если $\varepsilon<m/2$, то $|f_n|\geqslant|f|-|f_n-f|\geqslant m-\varepsilon\geqslant m/2$

$$\frac{1}{|f_n|}\leqslant\frac{1}{m-\varepsilon};\ \frac{1}{|f|}\leqslant\frac{1}{m}$$

$$\lesseqgtr \frac{\varepsilon}{(m-\varepsilon)m}\leqslant\frac{\varepsilon}{m/2\cdot m}$$

■

62. Сформулируйте теорему Дини о монотонной сходимости. Приведите пример её применения для доказательства равномерной сходимости функциональной последовательности (с обоснованием)

64. Покажите на примере как доказать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием).

67. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.

Утверждение 0.9.

$$-\infty<a<b<\infty,\ D=[a;b]$$

Пусть f_n *непрерывна на* $D, f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(\implies f$ *непр. на* $D)$

Тогда: $\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt \overset{D}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)dt,$

т.е. $\displaystyle\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)dt$

72. Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно.

Отрицание критерия Коши

$\exists\varepsilon>0\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists m,n>N\ \exists x=x(N)\in E: |\displaystyle\sum_{k=m}^{n}|\geqslant\varepsilon \iff$ ряд сходится на E неравномерно

74. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.

Утверждение 0.10 (Признак Вейерштрасса для функционального ряда.). *Если* $|a_n(x)| \leqslant b_n$ *при* $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, *а ряд* $\sum b_n$ *сходится, то* $\sum a_n(x)$ *сходится на* D *абсолютно и равномерно.*

82. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $D = (a;b)$, $D = [a;b]$, c_n равномерно сходится на D и имеет суммой функцию $s(x)$

$\displaystyle\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t)dt$ – сходится равномерно на D и имееет суммой функцию $\displaystyle\int_a^x s_n$.

84. Что можно утверждать про равномерную сходимость степенного ряда?

94. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.

Теорема 0.11 (Почленное дифференцирование степенного ряда.). $\sum c_n\,(x - x_0)^n$, $R > 0$ *— его радиус сходимости.*

При почленном дифференцировании получаем ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-)^{n-1}$.

Его радиус сходимости равен радиусу сходимости исходного ряда, то есть он сходится равномерно при $|x - x_0| \leqslant r < R$.