Коллоквиум 1

Денис Козлов
Telegram

Сергей Лоптев
Telegram

Версия от 15.10.2020 14:38

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Утверждение 0.1 (Сравнение отношений)**.** *Пусть* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ *при* $n \geqslant n_0$. *Тогда:*

$$\sum b_n \text{ сходится} \implies \sum a_n \text{ сходится}$$
$$\sum a_n \text{ расходится} \implies \sum b_n \text{ расходится}$$

Доказательство. Предполагаем, что $a_n > 0, b_n > 0$.

$$a_{n_0+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$$\ldots$$

$$a_{n_0+k} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k}$$

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^{N} b_n$$

■

14. Сформулируйте (предельный) радикальный признак Коши для положительного ряда.

Утверждение 0.2 (Радикальный признак Коши.)**.** *Пусть* $a_n \geqslant 0$. *Тогда:*

$$\overline{\lim}\, a_n = \begin{cases} < 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сход.} \\ > 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расх.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $q = \overline{\lim}\, \sqrt[n]{a_n}$.

Пусть $q < 1$.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : \sqrt[n]{a_n} \leqslant q + \varepsilon \text{ при } n \geqslant n_0$$
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 : a_n \leqslant (q+\varepsilon)^n \text{ при } n \geqslant n_0$$

Пусть $\varepsilon : q + \varepsilon < 1$

Тогда $\sum a_n$ сходится, поскольку сходится $\sum (q+\varepsilon)^n$.

Пусть $q > 1$.

Тогда $\exists \{n_k\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geqslant q - \varepsilon$ при $k = k_0, k_0+1, \ldots$

Пусть $\varepsilon : q - \varepsilon \geqslant 1$

Тогда $a_{n_k} \geqslant (q-\varepsilon)^{n_k} \geqslant 1 \implies \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$

$\implies$ ряд $\sum a_n$ расходится ■

24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.

Утверждение 0.3. *Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно $\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- < \infty$ сходятся.*

Доказательство. Если $\sum |a_n| < \infty$, то S_N^+, S_N^- ограничены $\implies$ сходятся.

Если $S_N^+ \to S^+$, $S_N^- \to S^-$, то $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \to S^+ - S^-$, $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n| \to S^+ + S^-$. ■

34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

Утверждение 0.4 (Признак Дирихле.). *Если $a_n \searrow 0$ и $\left|\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right| = |B_N| \leqslant C$ — ограничена, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.*

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p},\ x \neq \pi k,\ p > 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^p},\ b_n = \sin nx$$

$$B_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}; \qquad |B_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

$\implies$ ряд сходится по признаку Дирихле.

44. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{A_n\}$, $A_n \neq 0$ таковы, что $a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n$ и бесконечное произведение $\prod c_n$ сходится. Докажите, что существует число $C \neq 0$ такое, что $\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = A_N\left(C + o(1)\right)$.

Доказательство.

$$a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n, \qquad \prod c_n \text{ сходится, то есть } \prod_{n=1}^{N} c_n \to P \neq 0$$

$$\prod_{n=1}^{N} = \frac{\cancel{A_1}}{A_0} \cdot c_1 \cdot \frac{\cancel{A_2}}{\cancel{A_1}} \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot \frac{A_N}{\cancel{A_{N-1}}} \cdot c_N = A_N \cdot \underbrace{\frac{1}{A_0} \cdot \prod_{n=1}^{N} c_n}_{\to \frac{P}{A_0} \neq 0}$$

$$\implies \prod_{n=1}^{N} a_n = A_N \cdot \left(C + o(1)\right), \qquad C = \frac{P}{A_0} \neq 0$$

$\blacksquare$

54. Приведите пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ (с нетривиальной зависимостью от n и x), равномерно сходящейся на некотором множестве (с обоснованием).

Пример.

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \qquad D = [0; +\infty)$$

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$$

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x \in D} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \to 0$$

$\implies$ последовательность сходится равномерно.

64. Покажите на примере как доказать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием).

74. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.

Утверждение 0.5 (Признак Вейерштрасса для функционального ряда.). *Если $|a_n(x)| \leqslant b_n$ при $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, а ряд $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n(x)$ сходится на D абсолютно и равномерно.*

84. Что можно утверждать про равномерную сходимость степенного ряда?

94. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.

Теорема 0.6 (Почленное дифференцирование степенного ряда.). $\sum c_n \left(x - x_0\right)^n$, $R > 0$ *— его радиус сходимости.*

При почленном дифференцировании получаем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot \left(x-\right)^{n-1}$.

Его радиус сходимости равен радиусу сходимости исходного ряда, то есть он сходится равномерно при $|x - x_0| \leqslant r < R$.