Математический Анализ - 2

Версия от 17.09.2020 23:06

Содержание

1 Листок №1. Частичная сумма для ряда и необходимое условие сходимости.

1.1 Вычислите частичную сумму ряда и исследуйте ее предел.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A}{3n-1} + \dfrac{B}{3n+2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3Bn-B+3An+2A}{(3n-1)(3n+2)} = \left[\begin{cases}3B+3A=0\\ 2A-B=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}A=\dfrac{1}{3}\\ B=\dfrac{-1}{3}\end{cases}\right] =$
$\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3n-1} - \dfrac{1}{3n+2} = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}-\dots+\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}) = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n+2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = \dfrac{1}{6}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(4n^2-1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A}{(2n-1)^2} + \dfrac{B}{(2n+1)^2} =$

$$\begin{cases}4A+4B=0\\ 4A-4B=1\\ A+B=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}A=\dfrac{1}{8}\\ B=-\dfrac{1}{8}\end{cases}$$

$= \dfrac{1}{8}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2} - \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{25}-\dots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right) = \dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = \dfrac{1}{8}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1} + \dfrac{C}{n+2} = \dfrac{An^3+3An+2A+Bn^2+2B+Cn^2+C}{n(n+1)(n+2)} =$

$$\begin{cases}A+B+C=0\\ 3A=0\\ 2A+2B+C=1\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}A=0\\ B=1\\ C=-1\end{cases}$$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dots+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = \dfrac{1}{2}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n(n+1)(n+3)} = \dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n+1} - \dfrac{5}{n+3}$

Заметим, что $\dfrac{2}{k}+\dfrac{3}{k}-\dfrac{5}{k}=0$. Т.е. 3 члена суммы с одинаковыми знаменателями уничтожатся. Так как первый общий знаменатель 4, а последний n, получаем $\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n+1}-\dfrac{5}{n+3} = \dfrac{1}{6}\cdot\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{3}\dfrac{2}{n}\right)+\left(\sum\limits_{n=1}^{2}\dfrac{3}{n+1}\right)+\dfrac{3}{n+1}-\left(\sum\limits_{n=n-2}^{n}\dfrac{5}{n+3}\right)\right) =$
$\dfrac{37}{36} - \dfrac{12n^2+45n+37}{6(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = \dfrac{37}{36}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\dots-\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum=\infty$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+2}-2\cdot\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}):$

$S_N=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+2}-2\cdot\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})=\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[3]{n+2}-2\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[3]{n+1}+\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[3]{n}=\sum\limits_{n=3}^{N+2}\sqrt[3]{n}-2\sum\limits_{n=2}^{N+1}\sqrt[3]{n}+\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[3]{n}=(\sqrt[3]{N+1}+$
$\sqrt[3]{N+2})-2(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N+1})+(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2})=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N+2}-\sqrt[3]{N+1}=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N}\Big((1+\dfrac{2}{N})^{1/3}-(1+\dfrac{1}{N})^{1/3}\Big)=$
$=\Big[(1+x)^a=1+ax+O(x)\Big]=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N}\left(\Big(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{N}+O(\dfrac{1}{N})\Big)-\Big(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{N}+O(\dfrac{1}{N})\Big)\right)=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N}\Big(\dfrac{1}{3N}+O(\dfrac{1}{N})\Big)\xrightarrow[\text{N}\to\infty]{}$
$1-\sqrt[3]{2}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1-1}{(n+1)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum=1$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1+1-1}{(n+2)!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}=\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}-\dots+\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{1}{(n+2)!}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+2)!}=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum=\dfrac{1}{2}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n:$

$\sum\limits_{n=1}^{N}(n+1)x^n=\sum\limits_{n=1}^{N}n\cdot x^n+\sum\limits_{n=1}^{N}x^n=x\sum\limits_{n=1}^{N}n\cdot x^{n-1}+\sum\limits_{n=1}^{N}x^n=\Big[x\neq 1\Big]=x\Big(x\cdot\dfrac{x^N-1}{x-1}\Big)'+\Big(x\cdot\dfrac{x^N-1}{x-1}\Big)=x\Big(\dfrac{x^{N+1}-x}{x-1}\Big)'+$
$\Big(\dfrac{x^{N+1}-x}{x-1}\Big)=x\cdot\dfrac{((N+1)x^N-1)\cdot(x-1)-(x^{N+1}-x)}{(x-1)^2}+\Big(\dfrac{x^{N+1}-x}{x-1}\Big)$

Получаем, что для:

1. $|x|\geqslant 1\Longrightarrow a_n(x)=(n+1)x^n\longrightarrow\infty\implies$ ряд расходится;
2. $|x|<1\Longrightarrow x^N\longrightarrow 0,\quad N\cdot x^N\implies 0$ ряд сходится.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=2x\cdot\dfrac{((N+1)x^N-1)\cdot(x-1)-(x^{N+1}-x)}{(x-1)^2}-\Big(\dfrac{x^{N+1}-x}{x-1}\Big)$

1. $|x|\geqslant 1\Longrightarrow a_n(x)=(2n-1)x^n\longrightarrow\infty\implies$ ряд расходится;
2. $|x|<1\Longrightarrow x^N\longrightarrow 0,\quad 2N\cdot x^N\implies 0$ ряд сходится.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx=\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx=\dfrac{\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}+\sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2}+\dots+\sin nx\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=$

Воспользуемся формулой произведения синусов:

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\dots+\frac{1}{2}\left(\cos(n-\frac{1}{2})x-\cos(n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует при $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ т.к. $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+\frac{1}{2})x$, но если $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $sinnx = 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx = 0 + \cdots + 0 = 0$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^2 nx = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\cos(2nx)) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos(2nx)$

Дальше можно решать как задачу 11 или так:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \cos x = \Re(e^{ix}) \implies \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2Nx = \Re(1 + e^{2ix} + e^{4ix} + \cdots + e^{2Nix}) = \Re\left(\frac{e^{2(N+1)ix} - 1}{e^{2ix} - 1}\right)$$

1.2 Докажите, что ряд расходится

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n+2}$

Проверим необходимое условие сходимости т.е., что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3} \implies$ ряд расходится.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$ ряд расходится. $\sqrt[n]{n} = 1$ очевидный факт с 1 курса, но его легко можно доказать: $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} =$ по Лопиталю $= \frac{1}{n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\inf} a_n = \frac{\sin(\frac{n+1}{n^2+2}) \to 0}{\frac{1}{n} \to 0}$ =[применяем Лопиталя]= $\frac{n^2(n^2+2n-2)\cos(\frac{n+1}{n^2+2})}{(n^2+2)^2} = 1$ т.к. и в числителе и в знаменателе наибольшая степень n^4 с коэффициентами 1.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{3} - 1)$

$a_n = n \cdot (3^{\frac{1}{n}} - 1)$, вспомним оценку $e^x = 1 + x + o(x)$, тогда $3^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 3}{n}} = 1 + \frac{\ln 3}{n} + o(\frac{1}{n}) \implies a_n = n \cdot (1 + \frac{\ln 3}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1) = \ln 3 + o(1) \to \ln 3$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Докажем одно из свойств замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = [u = \frac{x}{k}, u \to \infty] = \lim\limits_{u\to\infty}\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u\cdot k} = e^k$

В нашем примере $k = -1$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to \frac{1}{e}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Хочется воспользоваться вторым замечательным пределом, но это ловушка, делаем так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n} = \lim_{n\to\infty} e^{n-\frac{1}{2}+o(1)-n} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

1.3 При каких значениях x для ряда выполнено необходимое условие сходимости

21.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2}$

Рассмотрим случаи:

1. $x = 0 \implies \forall n: \ a_n = 0$
2. $x \neq 0$. Поделим на nx : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{nx}+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx} = 0$

Значит выполнено для $\forall x$

21.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$

$a_n(x) = x^n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n+1}\right) = \frac{x^n}{n}\left(1 - x\cdot\frac{n}{n+1}\right)$

1. $|x| > 1 : \frac{x^n}{n} \longrightarrow \infty, (1 - x \cdot \frac{n}{n+1}) \longrightarrow 1 - x \neq 0$
2. $|x| = 1 :$
   (a) $x = -1 : a_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \left(1 + \frac{n}{n+1}\right) \longrightarrow 0$
   (b) $x = 1 : a_n(1) = \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \longrightarrow 0$
3. $|x| < 1 : a_n(x) = \frac{x^n}{n}] \cdot \left(1 - x \cdot \frac{n}{n+1}\right) \longrightarrow 0\left(\frac{n}{n+1} \to 1; x^n \to 0; n \to \infty\right)$

Ответ: $x \in [-1; 1]$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^x}{x^n}\right)$:

$a_n(x) = \frac{x^n}{x^n}$

1. $\begin{cases} n^x - \text{степенная функция;} \\ \\ x^n - \text{показательная функция;} \end{cases} \implies a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при $|x| > 1$

2. $|x| = 1:$

   (a) $x = 1: \dfrac{n}{1} \longrightarrow \infty;$

   (b) $x = -1: \dfrac{n^{-1}}{(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$

3. $|x| < 1:$

   (a) при $x > 0: n^x \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

   (b) при $x < 0: n^x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ответ:

$x \in (0;1): a_n \longrightarrow \infty;$

$x \in (-1;0): a_n = \dfrac{n^x}{x^n} = \Big[n^x \to 0; x^n \to 0\Big] = \dfrac{n^{-|x|}}{(-1)^n \cdot |x|^n} \longrightarrow \infty$

(показательная ф-ия стремится к нулю быстрее степенной)

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n + 3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{nx^n}{2^n + 3^n} \approx \left(\dfrac{x}{3}\right)^n \cdot n$

Показательная функция быстрее линейной, поэтому сходимость зависит от неё:

1. $\left|\dfrac{x}{3}\right| \geqslant 1$, то $a_n \to \infty$
2. $\left|\dfrac{x}{3}\right| < 1$, то $a_n \to 0$

Получаем ответ, при $x \in (-3;3)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$a_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} \to 0$ т.к. показательная функция медленее факториала, покажем это:

$$\frac{x^n}{n!} \sim \frac{e^{n\ln x}\cdot e^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n} \leqslant \frac{e^{n\cdot(\ln x+1)}}{e^{n\ln n}} \sim e^{n(\ln x - \ln n)} \to e^{-\infty} = 0$$

Значит сходится для $\forall x$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$:

Формула Стирлинга: $n! = \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \cdot (1+O(1))$

необходимое условие сходимости: $a_n = \dfrac{x^{n^2}}{n!} \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow |a_n| \longrightarrow 0 : |a_n| = \left|\dfrac{x^{n^2}}{n!}\right| = \dfrac{|x|^{n^2}}{n!}$

$$|a_n| = \frac{|x|^{n^2}}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}\cdot\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = \left[\frac{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\right] \sim \frac{|x|^{n^2}}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{e^{n^2\ln|x| - n\ln|\frac{n}{e}| - \frac{1}{2}\ln n}}{\sqrt{2\pi}}$$

1. $|x| \leqslant 1 : |a_n| \longrightarrow \dfrac{e^{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} = 0$
2. $|x| > 1 : |a_n| \longrightarrow \dfrac{e^{+\infty}}{\sqrt{2\pi}} = +\infty$

2 Семинарский лист №2

Пусть S - сумма соответствующего ряда. Используя теорему Штольца, докажите асимптотическую формулу для частичной суммы ряда.

Задача 2.1 (19)**.**

$S_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$— сходящийся ряд

$S_N \to S, N \to \infty$

Доказать: $S_N = S - \frac{1}{N} + o(\frac{1}{N}), N \to \infty$

Теорема Штольца: Пусть x_n и y_n обе сходится к нулю, причём $0 < y_n < y_{n-1}$ $\forall n$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Тогда, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - xn - 1}{y_n - y_{n-1}} = A$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

Обозначим $x_n = S - S_n \to 0, y_n = \frac{1}{n} \to 0, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Расмотрим $\frac{x_n - xn - 1}{y_n - y_{n-1}} = \frac{S - S_n - (S - S_{n-1})}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_n}{\frac{n-1-n}{n(n-1)}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{\frac{1}{n(n-1)}} = \frac{1/n^2}{\frac{1}{n^2-n}} = \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

По т. Штольца $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, т.е. $\frac{x_n}{y_n} = 1 + o(1), x_n = y_n + o(y_n)$

$x_n = S - S_n = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \implies S_n = S - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, ч.т.д.