Преподаватель: Власов Павел Александрович (ищи его в 1025л)

E-mail: pvlx@mail.ru

Лабораторные работы: Пн, 19:10

Лекция 1

7 сентября 2015

1 Задачи методов оптимизации

1.1 Классификация задач оптимизации

Задача оптимизации имеет обычно имеет следующий вид:

$$\begin{cases} f(x) \to extr \\ x \in G \end{cases},$$

здесь f называется целевой функцией или критерием оптимальности, G называется множеством допустимых решений.

Замечание:

1. Задача min-целевой функции одной переменной:
$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$
2. Задача безусловной оптимизации функции нескольких переменных:
$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in G \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$
3. Задача условной оптимизации функции нескольких переменных:
$$\begin{cases} f(x) \to min \\ \phi(x) = 0 \\ x \in G \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

1. Если $f : G \to \mathbb{R}$ - скалярная функция, то соответсвующая задача называется задачей математическим программированием
2. Если $f : G \to \mathbb{R}^m, m \geq 2$, то соответсвующая задача называется задачей многокретириальной оптимизации

Для задач математического программирования программирования дальнейшая классификация:

Вид функции	Стр. множества G	Название задачи
Линейная	Выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^n$	Задача линейного программирования
Квадратичная	Выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^n$	Задача квадратичного программирования
Выпуклая	Выпуклое множеств в $\mathbb{R}^n$	Задача выпуклого программирования
Произвольная	Конечное множество	Задача дискретного программирования
Произвольная	Подмножество множества $\mathbb{Z}^n$	Задача целочисленного программирования
Произвольная	Подмножество в $\{0, 1\}^n$	Задача логического программирования

Замечание:

1. В этом семестре будем заниматься задачами линейного и целочисленного программирования. Задачами выпуклого и квадратичного программирования будем заниматься в следующем семестре.

2. Как правило задачи оптимизации, в которых мн-во G конечно или счетно, относят к разделу методов оптимизации, которые называется *исследованием операций.*

1.2 Венгерский метод решения задач о назначениях

1.2.1 Постановка задачи о назначениях

Содержательная постановка.

В распоряжении работодателя имеется n работ и n исполнителей. Стоимость выполнения i-ой работы j-ым исполнителем составляет $c_{ij} \geqslant 0$ единиц. Необходимо распределить все работы между исполнителями таким образом, чтобы:

1. Каждый исполнитель исполнял ровно одну работу

2. Суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной

Введем управляемые переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i-\text{ую работу исполняет } j-\text{ый исполнитель} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замечание:

Переменную x_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, удобно записывать в матрицу:

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix},$$

которая называется матрицей назначений.

Стоимости c_{ij} записывают в матрицу,

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

которая называется матрицей стоимостей.

Тогда целевая функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Условие того, что j-ый исполнитель выполняет ровно одну работу

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Условие того, что i-ую работу выполняет ровно один исполнитель

Математическая постановка задачи о назначении:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Замечание:

Множество допустимых решений задачи о назначении является конечным и состоит из $n!$ элементов. Одним из возможных методов решения этой задачи является прямой перебор допустимых решений однако при больших n он практически не реализуем ввиду большой сложности.

1.2.2 Предварительные соображение о методе решений задачи о назначении:

Соображение 1

Выполним над элементами матрицы стоимостей C следующие преобразования:

1. Из всех элементов $j-$ого столбца вычтем некоторое число $\alpha_j, \qquad j = \overline{1,n}$
2. Из всех элементов $i-$ой строки вычтем некоторое число $\beta_j, \qquad i = \overline{1,n}$

Обозначим полученную матрицу $\widetilde{C}$

$$f_{\widetilde{C}}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - \alpha_j - \beta_i)x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_i x_{ij} = f_c(x) - \gamma$$

$$\gamma = -\sum_{j=1}^{n}\alpha_j - \sum_{i=1}^{n}\beta_i$$

В результате:

$$f_{\tilde{c}}(x) = f_c(x) + const$$

То есть задачи о назначениях с матрицей C и с матрицей $\tilde{C}$ эквивалентно (то есть оптимальные значение функций f_c и $f_{\tilde{c}}$ достигаются при одном и том же x_{ij}.

Соображение 2

Предположим, что в матрице C нашлись n нулей, никакие два их которых не стоят на одной строке и одном столбце.

В этом случае можно сразу записать решение рассматриваемой задачи в матрице x, ставим единицы в тех позициях, в которых в матрице C стоят нули. Остальные элементы матрицы x полагаем равными 0.

$$f(x) = \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \geqslant 0$$

$$f(x_{opt}) = 0$$

Определение: Набор нулей матрицы С будем называть *системой независимых нулей* (СНН), если никакие 2 нуля этой системы не стоят в одной строке и одном столбце

Замечание: Для решения задачи о назначениях достаточно преобразовать матрицу С к эквивалентному виду, в котором будет содержаться система из n независимых 0.

Замечание: “Слабые места”

1. Возможно после выполнения указанных преобразований мы получим матрицу, из нулей которой в принципе невозможно сформировать систему независимых нулей.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

   В этой матрице максимальное число в системе независимых нулей равно 2

2. Возможно в некоторой текущей матрице стоимостей существует набор независимых нулей. Но его построение затруднительно.

В любом из этих случаев построенная система независимых нулей (в которой меньше чем n нулей) может быть улучшена.

Будем считать, что после вычитания наименьших элементов из строк и столбцов матрицы C первоначальная система независимых нулей строится по следующему правилу: просматриваем элементы матрицы C по столбцам в поисках нулей. Если в одном столбце и одной строке с найденным нулем не стоит 0^*, то отмечаем найденые нули звездочкой.

1.2.3 1-ый способ улучшения текущей СНН

Идея: убрать из СНН несколько нулей так, чтобы добавить большее число нулей.

Отметим «+» столбцы, в которых стоят 0^*. Эти столбцы и их элементы будем называть *выделенными.*

Если среди невыделенных элементов есть 0, то можно попытаться улучшить текущую СНН, включив в нее этот 0. Отметим этот 0 штрихом.

В этом случае строка, в которой располагается этот 0, уже не может содержать других элементов СНН. Поэтому если в одной строке с $0'$ есть 0^*, то необходимо снять выделение со столбца, в котором стоит 0^* и выделить строку, в которой стоит $0'$.

Снова среди невыделенных элементов ищем 0 и отмечаем его штрихом. В одной строке с этим $0'$ нет 0^*. Это значит, что можно построить L-цепочку:

от текущего $0' \to_{\text{по стобцу}} 0^* \to_{\text{по строке}} 0' \to 0^* \to \ldots \to 0'$

L-цепочка должна быть непродолжаемой и начинаться и заканчиваться $0'$.

В пределах этой L-цепочки 0^* заменяем на просто 0, а $0'$ на 0^*.

Лекция 2

14 сентября 2015

Слабое место 1

В текущей матрице C не существуют СНН из n нулей тогда и только тогда, когда среди невыделенных элементов нет 0.

$$C = \begin{bmatrix} 0^{*+} & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0^{*+} & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0^{*+} \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0^* & 0' & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0^* & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0^* \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to$$

Выберем среди невыделенных элементов наименьший элемент $h > 0$. В этом примере $h = 1$. Вычтем его из невыделенных столбцов

$$\to \begin{bmatrix} -1^* & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0^* \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to$$

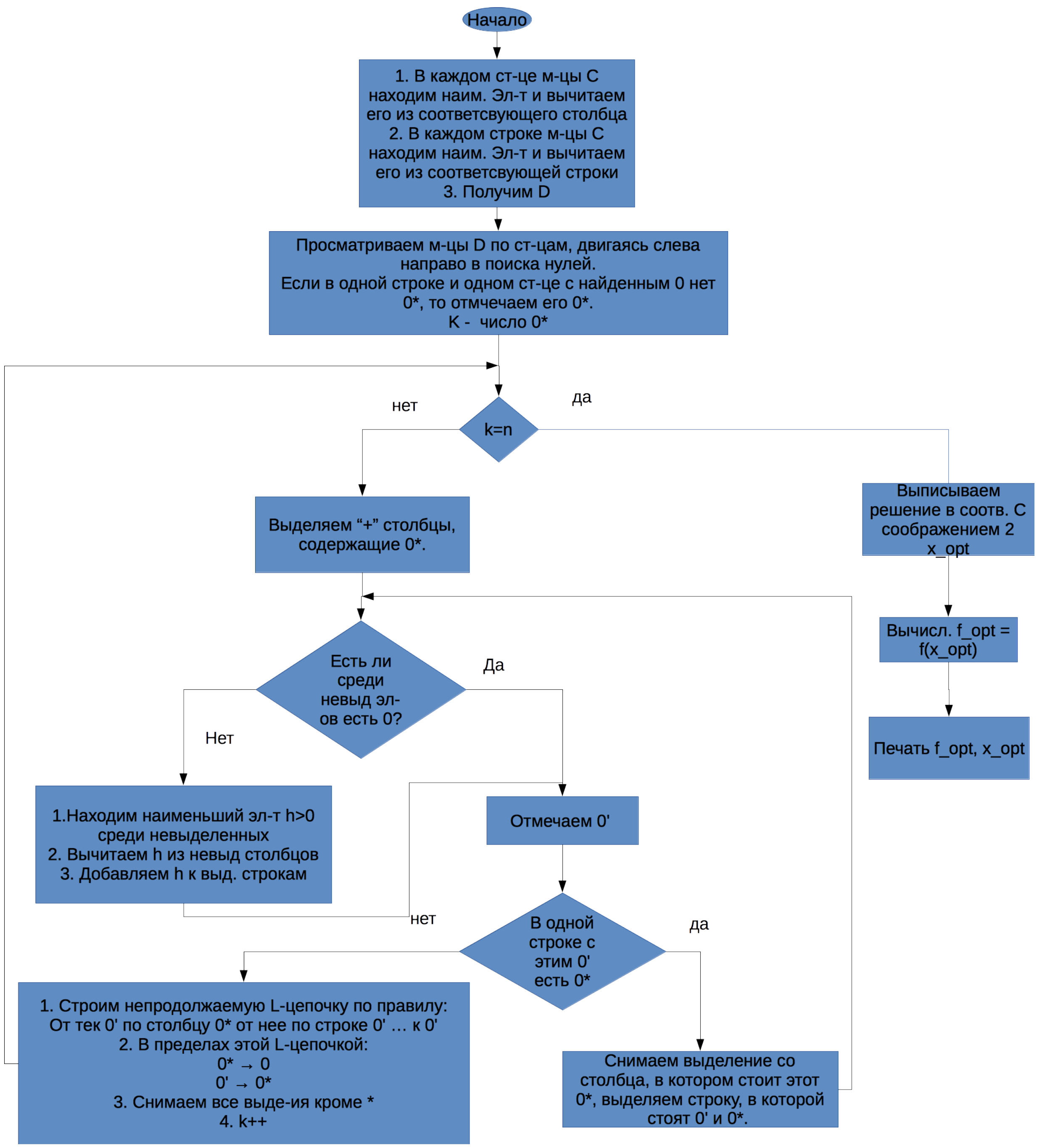
Наличие отрицательных значений не позволяет использовать пункт 2. Прибавим h к выдленным строкам:

$$\to \begin{bmatrix} 0^* & 0' & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0^* \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0^* & 0' & 2 & 5 \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0^* \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to$$

В одной строке с нулем нет 0^*. Строим L-цепочку.

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 0^* & 2 & 5 \\ 0^* & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0^* \\ 2 & 0 & 0^* & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 Венгерский метод решения задачи о назначениях



<u>Пример:</u>

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 5 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 12 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 11 & 1 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 9 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0^* & 5 & 1 & 3 \\ 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 9 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 0^* & 7 \end{bmatrix} \rightarrow k = 3 < 5 = h \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0^* & 5 & 1 & 3 \\ 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 9 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 0^* & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 0^* & 5 & 1 & 3 \\ 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 9 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 0^* & 7 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Среди невыделеных элемнтов нет 0 тогда h = 2

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0^* & 3 & 1 & 1 \\ 0^* & 2 & 0' & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0' & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 0^* & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Делаем L-цепочку} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0^* & 3 & 1 & 1 \\ 0^* & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0' & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 0^* & 5 \end{bmatrix} \rightarrow k = 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0^* & 3 & 1 & 1 \\ 0^* & 2 & 0 & 2 & 0' \\ 4 & 0 & 0' & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 0^* & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0^* & 3 & 1 & 1 \\ 0^* & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0' & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 0^* & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0^* & 3 & 1 & 1 \\ 0^* & 2 & 0 & 2 & 0' \\ 4 & 0 & 0' & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 0^* & 5 \end{bmatrix} \rightarrow k = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0^* & 3 & 1 & 0' \\ 0^* & 3 & 1 & 3 & 0' \\ 3 & 0 & 0' & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 0^* & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0^* & 3 & 1 & 0' \\ 0^* & 3 & 1 & 3 & 0' \\ 3 & 0 & 0' & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 0^* & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0^* & 3 & 1 & 0' \\ 0^* & 3 & 1 & 3 & 0' \\ 3 & 0 & 0^* & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0' & 5 & 6 & 0^* & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0^* & 3 & 1 & 0' \\ 0^* & 3 & 1 & 3 & 0' \\ 3 & 0' & 0^* & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0' & 5 & 6 & 0^* & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Строим L-цепочку} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 & 0^* \\ 0^* & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0^* & 3 & 1 \\ 2 & 0^* & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 0^* & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{opt} = 5 + 1 + 5 + 2 + 1 = 14$$

Замечание:

1. Встречается среди задач о назначениях, в которых величины c_{ij} интерпретируются как прибыль от выполнения $i-$ой работы $j-$ым работником. В этом случае задача о назначениях является задачей максимизации:

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow max \\ \text{те же ограничения} \end{cases} \tag{1}$$

2. В этом случае исходной задаче (1) будет эквивалетна задача:

$$\begin{cases} f_l = f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-c_{ij})\, x_{ij} \rightarrow min \\ \text{те же ограничения} \end{cases} \tag{2}$$

которая не может быть решена с использованием венгерского метода ввиду неположительных $-c_{ij}$.

3. Выберем среди c_{ij} наиб. элементы а и прибавим его всем элементам м-це $(-c)$:

$$-\tilde{c_{ij}} = a - c_{ij}$$

Тогда задача

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{c_{ij}}x_{ij} \to min \\ \text{те же ограничения} \end{cases}$$

эквивалентна задаче (2) и очевидно задаче (1) и может быть решена венгерским методом.

2 Линейное программирование

Задача:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\{\geqslant / \leqslant / =\}b_i \quad i = \overline{1;m} \end{cases}$$

2.1 Основные определения

2.1.1 Задача распределительного типа

Задача распределительного типа является характерной задачей линейного программирования

Пример: Кондитерская фабрика выпускает 2 вида карамели (обозначим их А и Б), да производства которых используются сахарный песок и фруктовое пюре. Данные о затратах:

	Нормы затрат		Общий объем запасов (т)
	А	Б	
Сахарный песок	1	3	13
Фруктовое пюре	3	2	18
Стоимость изготовления 1т. готового продукта	1	2	

Кроме того известно, что рыночный спрос на карамель Б-вида не превышает 4т.

Составить оптимальный план производства, максимизирующий доходы от продаж.

Введем управляемые переменные:

x_1- объем производства карамели А (т)

x_2- объем производства карамели Б (т)

Тогда:

1. Доход от продажи:
$$f = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$$
2. Ограничение на запасы:
   (a) песка:
   $$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leqslant 13$$
   (b) пюре:
   $$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leqslant 18$$
   (c) ограничение на рыночный спрос:
   $$x_2 \leqslant 4$$

Математическая модель:

$$
\begin{cases}
f = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\
1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leqslant 13 \\
3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leqslant 18 \\
x_2 \leqslant 4 \\
x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$

Лекция 3

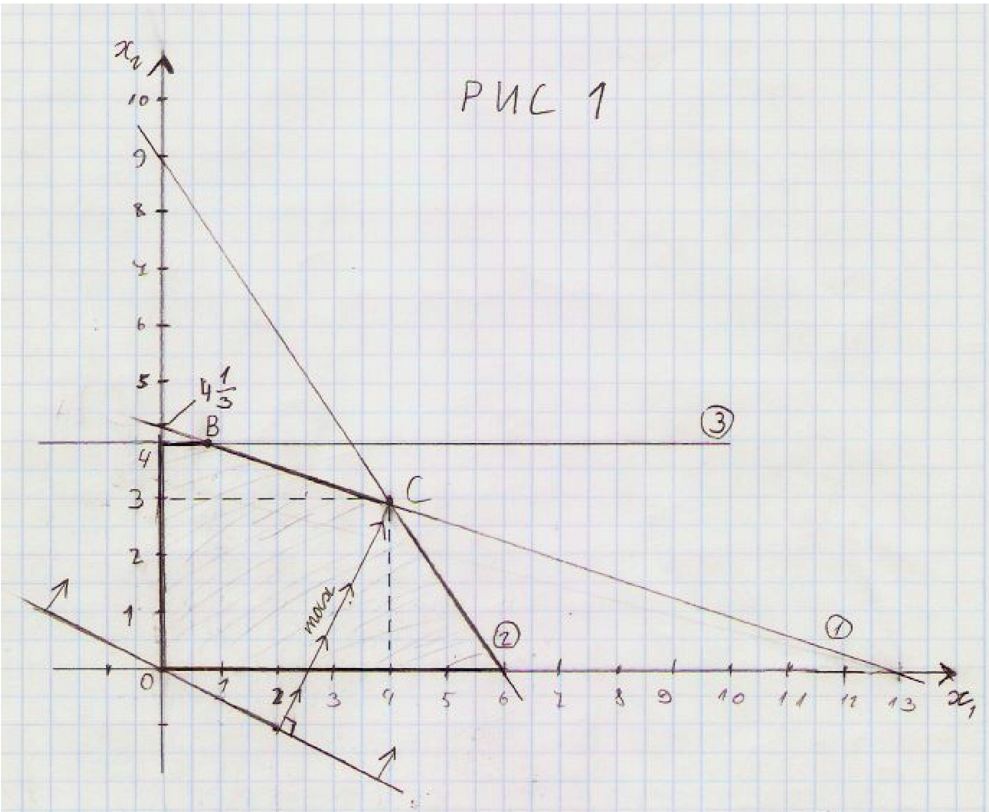
21 сентября 2015

2.2 Графический метод

Графический метод может быть использован для решения ЗЛП малой размерности ($n \leqslant 2$)

Пример: Рассмаотрим задачу о производстве карамели

$f = x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$



Градиент функции

$$
\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} + 2 \cdot \overrightarrow{j}
$$

Нужно решить систему:

$$
C = (1) \cap (2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 = 3
$$

Замечание: На примере этой задачи можно уловить некоторые особенности присущие всем задача линейного программирования.

1. Множество допустимых решений является выпуклым.
2. Оптимальное значение целевой функции достигается в крайней точке множества допустимых решений
3. Если оптимальное значение целевой функции достигается в двух различных точках p, q, то оно достигается во всех точках отрезка $[p, q]$.

2.3 Стандартная форма ЗЛП

Общая форма ЗЛП:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geqslant / \leqslant / =\} b_i \quad i = \overline{1; m} \end{cases}$$

<u>Определение:</u> *Стандартной формой ЗЛП* называется задача следующего вида:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \\ x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

где $b_i \geqslant 0, i = \overline{1, m}$.

Признаки стандартной формы

1. Целевая функция максимизируется
2. Все ограничения имеют вид неравенств с положительными правыми частями
3. Все переменные больше 0

Любая ЗЛП может быть приведена к стандартной форме:

1. Если $f \to min$ то рассм задачу с функцией

$$f_1 = -f = \sum_{j=1}^{n} (-c_j x_j) -> max$$

2. Если некоторое ограничения имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j = b_{i,j},$$

где $b_i < 0$, то умножим обе его части на (-1):

$$\sum_{j=1}^{n} (-b_{i,j})\, x_j = -b_{i,j}$$

3. Если некоторое ограничение имеет вид неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leqslant b_i,$$

то введем дополнительную переменную $x_{n+1} \geqslant 0$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + x_{n+1} = b_i$$

4. Если некоторое ограничение имеет вид неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geqslant b_i,$$

то введем дополнительную переменную $x_{n+1} \geqslant 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - x_{n+1} = b_i$$

5. Если некоторая переменная x_j подчинена условию неполжительности то есть $x \leqslant 0$, то рассмотрим вместо нее переменную $-x_j$

6. Если некоторая переменная x_j не подчинена ни условию $x_j \geqslant 0$ ни устовию $x_j \leqslant 0$ те не ограничена в знаке то представим ее в виде разности:

$$x_j = x'_j - x''_j,$$
$$x'_j \geqslant 0$$
$$x''_j \geqslant 0$$

Пример:

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geqslant -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 4 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \leqslant 0 \\ x_3 \text{ не ограничена в знаке} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 >= 0 \\ x_2 >= 0 \quad (x_2^{'} = -x_2) \\ x_3 = x'_3 - x''_3 \quad (x'_3 \geqslant 0, x''_3 \geqslant 0) \\ x_4 \geqslant 0 \\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = -x_1 + 2x'_2 + 3x'_3 - 3x''_3 \rightarrow min \\ -2x_1 + x'_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x'_2 + x'_3 - x''_3 - x_5 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x'_2 \geqslant 0, \ (x_2^{'} = -x_2) \\ x'_3 \geqslant 0, x''_3 \geqslant 0 \\ x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0 \\ ? \end{cases}$$

Рассмотрим ЗЛП в ст. р

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j >= 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = (a_{i,j})_{i=\overline{1;m}}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax = b \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

<u>Замечание:</u> Всюду в дальнейшим будем предполагать, что

1. Ранг матрицы $A = \mathrm{rg}(A|b)$ - по теореме Кронекера-Капелли. Если условие не выполняется, то СЛАУ $Ax = b$ не совместна, а это значит, что множество дополнительных решений пусто.
2. $\mathrm{rg}(A|b) = m$, где m-число ограничений. m-число строк в $(A|b) \Rightarrow \mathrm{rg}(A|b) \leqslant$ m. Если $\mathrm{rg}(A|b) <$ m, то система ограничений является линейнозависимой то есть некоторые ограничения можно убрать не изменив множество допустимых решений
3. $m < n$, где n - число переменных. Если $m > n$, то $\mathrm{rg}(A|b) > n$ - число столбцов. Если m = n в силу пунктов 1 и 2 СЛАУ $Ax = b$ имеет единственное решение, следовательно задачи оптимизации вырождения.

2.4 О применимости графического метода

Графический метод может быть применен в случае, когда $n \leqslant 2$. Иногда его можно использовать и в случае $n > 2$.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax = b \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Если $m - n \leqslant 2$, то можно использовать графический метод.

<u>Пример:</u>

$$\begin{cases} f = x_1 - 2x_2 + x_3 \to max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1, \ldots, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim$$

Если $\operatorname{rg}(A|b) = 3$, то $h - m = 2$, тогда можно использовать

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$rg(A|b) = 3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = -6 + 7x_4 + 5x_5 & \geqslant 0 \\ x_2 = 5 - 5x_4 - 3x_5 & \geqslant 0 \\ x_3 = 2 - 3x_4 - 2x_5 & \geqslant 0 \end{cases}$$

Подставим в выражение для f:

$$\begin{cases} f = 14x_4 + 2x_5 - 14 \\ 7x_4 + 5x_5 \geqslant 6 \\ 3x_4 + 5x_5 \leqslant 2 \\ x_4 >= 0, x_5 \geqslant 0 \\ 3x_4 + 2x_5 \leqslant 2 \end{cases}$$

3 Основные утверждения линейного программирования

3.1 Выпуклые множества

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$

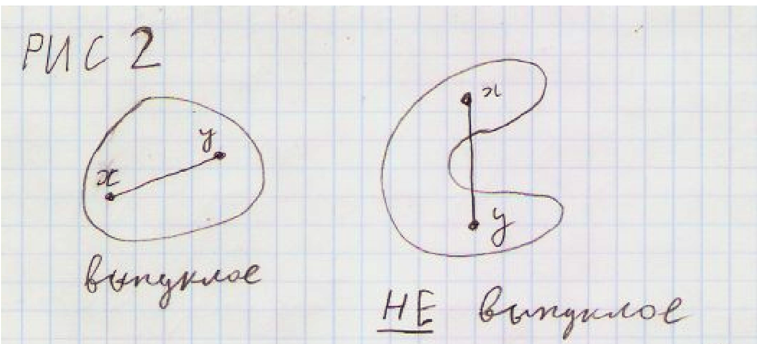
Определение: Отрезком соединяющим точки x и y называется множество точек:

$$t(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y, \qquad \lambda \in [0; 1]$$

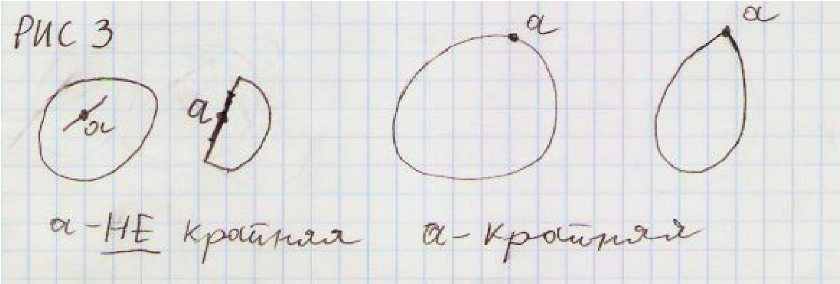
Замечание:

$$\lambda = 0 \Rightarrow t(0) = y$$
$$\lambda = 1 \Rightarrow t(1) = x$$

Определение: Множество $G \in \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если $\forall x, y \in G: \ xy \subseteq G$



Определение: Точка $a \in G$ выпуклого множества G называется крайней точкой этого множества, если a не содержится строго внутри никакого отрезка целиком лежащего в G.



Определение: Выпуклой комбинацией точек $q_1, \dots q_k \in \mathbb{R}^n$ называется множество точек:

$$\langle q_1, \dots q_k \rangle = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : t = \lambda_1 q_1 + \cdots + \lambda_k q_k, \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0 \right\}$$

где

Замечание:

1. Очевидно отрезок
$$xy = \langle x, y \rangle$$
2. Можно доказать что $\langle q_1, \dots, q_k \rangle$ является наименьшим выпуклым множеством содержащим $q_1, \dots, q_k$

Теорема: Пусть

1. G — выпукло
2. G — ограничено
3. G имеет конечное число крайних точек $q_1, \dots, q_k$

Тогда $G = \langle q_1, \dots, q_k \rangle$

Конец теоремы

Лекция 4

28 сентября 2015

3.2 Базисные допустимые решения

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f(x) \to max \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases},$$

где $b \geqslant 0$, $\text{rg}A = \text{rg}(a|B) = m < n$. $m-$ число ограничений, $n-$ число переменных.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$.

Будем считать, что m первых столбцов матрицы A ЛНЗ, тогда их можно взять в качестве базисных.

$$A = [a_1\ a_2\ \dots a_m\ a_{m+1} \dots a_n],$$

$$A_b = [a_1\ a_2\ \dots a_m]$$

$$A_{nb} = [a_{m+1} \dots a_n]$$

a_j— j—ый столбец матрицы A.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad x_{nb} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Тогда СЛАУ $Ax = b$ можно записать:

$$A_b x_b + A_{nb} x_{nb} = b \tag{3}$$

A_b является невырожденной (то есть $\det A_b \neq 0$) $\Rightarrow$ из (3) $\Rightarrow$ $x_b = A_b^{-1} b - A_b^{-1} A_{nb} x_{nb}$.

Тогда общее решение СЛАУ $Ax = b$ можно записать в виде

$$x = \begin{bmatrix} x_b \\ x_{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b^{-1} b - A_b^{-1} A_{nb} x_{nb} \\ x_{nb} \end{bmatrix}$$

Здесь компоненты вектора могут принимать любые значения; при каждом конкретном наборе значений этих переменных будем получать некоторое частное решение исходной СЛАУ.

Определение: Базисным решением СЛАУ $Ax = b$ называется то ее частное решение, которое отвечает $x_{nb} = 0$.

$$x^0 = \begin{bmatrix} A_b^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Замечание:

1. Каждые базисные решения (БР) однозначно определяются выбором m базисных столбцов матрицы $A \Rightarrow$ БР будет равно столько, сколькими способами можно выбрать m базисных столбцов в $A \Rightarrow$ базисных решений будет не более чем C_m^n (не меньше так как не обязательно произвольные m столбцов матрицы А будут ЛПЗ).
2. БР не обязательно являются допустимым решением ЗЛП, так как не обязательно удовлетворяет условию $x \geqslant 0$.

Определение: *Базисным дополнительным решением* (БДР) называется такое базисное решение x СЛАУ $Ax = b$, которое удовлетворяет $x \geqslant 0$.

Определение: Базисное решение называется *вырожденным,* если одна или несколько базисных переменных в нем равны 0.

3.3 Основные утверждения линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f(x) \to max \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases},$$

где $b \geqslant 0$, $\text{rg}A = \text{rg}(a|B) = m < n$. $m-$ число ограничений, $n-$ число переменных.

Обозначим множество допустимых решений:

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geqslant 0\}$$

Теорема 1: Пусть $G! = 0$ Тогда G содержит по крайней мере одно БАР.

Теорема 2: Множество G доп. решени ЗЛП выпукло .

Доказательство

Пусть $y_1 z \in G$.

Рассмотрим $t = \lambda y + (1 - \lambda y)z$, $\lambda \in [0; 1]$:

1. $$At = A(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \lambda Ay + (1 - \lambda)Az = \lambda b + b - \lambda b = b$$

2. $$t = \lambda y + (1 - \lambda)z,\ \lambda \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ (1 - \lambda) \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant 0$$

3. 1 и 2 $\Rightarrow t \in G$

Конец доказательства

Теорема 3: Пусть y — БАР ЗЛП в стандартной форме, тогда y — крайняя точка множества G

Теорема 4: Пусть y — крайняя точка множества G, тогда y — БДР ЗЛП

Теорема 5: Пусть:

1. f принимает оптимальное значение хотя бы в одной точке множества G, тогда f принимает это значение в одной крайней точке множества G.
2. Если f принимает оптимальное значение в нескольких точках $q_1, \ldots, q_l \in G$, то f принимает это значение в любой точке из выпуклой комбинации $\langle q_1, \ldots, q_l \rangle$

Замечание: Таким образом решение ЗЛП следует искать среди крайних точек множества G. Поскольку между крайними точками множества G и БДР ЗЛП существует взаимно однозначное соответствие, искать оптимальное решение следует среди БДР системы $Ax = b$. Этих решений конечное число, тогда одним из возможных методов решения ЗЛП является перебор всех БДР.

Однако эту процедуру оптимизирует так называемый симплекс-метол, который основан на идее последовательного перехода от одного БДР к другому, так, чтобы при этом значение целевой функции f улучшалось (не ухудшалось) .

Пример: Рассмотрим задачу о производстве карамели (без ограничения $x_2 \leqslant 4$):

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \to max \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 13 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

В стандартной форме:

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \to max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 13 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

Пусть x_1, x_2 - базовые переменные, тогда

$$(A|b) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & -7 & -3 & 1 & -21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 \\ x_2 = 3 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 \\ 3 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Базисное решение: $x_3 = x_4 = 0$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{крайняя точка C.}$$

2) Пусть x_1, x_3 - базисные переменные.

Тогда

$$(A|b) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 6 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 7 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 \\ 7 - \frac{7}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Базисное решение: $x_2 = x_4 = 0$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{крайняя точка D}$$

Номер базисного столбца	Базисные неизвестные	Небазисные неизвестные	Базисное решение	Крайняя точка
1, 2	x_1, x_2	x_3, x_4	$(4, 3, 0, 0)^T$	C
1, 3	x_1, x_3	x_2, x_4	$(6, 0, 7, 0)^T$	D
1, 4	x_1, x_4	x_2, x_3	$(13, 0, 0, -21)^T$- не являктся допустимым	$H \notin G$
2, 3	x_2, x_3	x_1, x_4	$(0, 9, -14, 0)^T$- не является допустимым	$F \notin G$
2, 4	x_2, x_4	x_1, x_3	$(0, \frac{13}{3}, 0, \frac{28}{3})^T$	E
3, 4	x_3, x_4	x_1, x_2	$(0, 0, 13, 18)^T$	0

4 Симплекс-метод

4.1 Симплекс-метод при известном БДР

Симплекс-метод является универсальным методом решения ЗЛП. В его основе лежит идея последовательного перехода от одного БДР к другому, так, чтобы значение целевой функции улучшалось (не становилось хуже).

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f(x) \to max \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases},$$

где $b \geqslant 0$, $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(a|B) = m < n$. $m-$ число ограничений, $n-$ число переменных.

Предположим m первых столбцов матрицы A ЛНЗ, значит, что

$$A = [a_1\, a_2\, \ldots a_m\, a_{m+1} \ldots a_n] \quad A_b = [a_1\, a_2\, \ldots a_m] \quad A_{nb} = [a_{m+1} \ldots a_n]$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad x_{nb} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c_b = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad c_{nb} = \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Тогда задача ЗЛП примет вид:

$$\begin{cases} f = c_b^T x_b + c_{nb}^T x_{nb} \to max \\ A_b x_b + A_{nb} x_{nb} = b \\ x_b \geqslant 0, x_{nb} \geqslant 0 \end{cases}$$

Выразим базисные переменные через небазисные:

$$x_b = A_b^{-1} b - A_b^{-1} A_{nb} x_{nb}$$

Подставим в задачу:

$$f = c_b^T A_b^{-1} b - c_b^T A_b^{-1} A_{nb} x_{nb} + c_{nb}^T x_{nb} = c_b^T A_b^{-1} b + (c_{nb}^T - c_b^T A_b^{-1} A_{nb}) x_{nb}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} f = c_b^T A_b^{-1} b + (c_{nb}^T - c_b^T A_b^{-1} A_{nb}) x_{nb} \to max \\ x_b = A_b^{-1} b - A_b^{-1} A_{nb} x_{nb} \\ x_b \geqslant 0, x_{nb} \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

Определение: (4) называется *канонической формой* (не путать со стандартной формой!) ЗЛП, отвечающей базису x_b.

Признаки канонической формы:

1. Базисные переменные выражены через небазисные

2. В выражении для целевой функции отсутствуют базисные переменные.

Так как оптимальное решение ЗЛП достигается на БДР, то обозначим x_{nb}:

$$f = c_b^T A_b^{-1} b = f_0$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} A_b^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Будем счиать, что $x^0 \geqslant$, то есть x^0 - БДР.

Замечание: Именно по этому излагаемый метод называется симплекс методом при известном БДР.

Для того, чтобы перейти к новому БДР, достаточно:

1. Выбрать некоторую небазисную переменную для включения в базис
2. Выбрать некоторую базисную переменную для исключения из базиса

При этом такая замена одной базисной переменной на другую должна удовлетворять следующим условиям:

1. Значение функции f на новом БР должно быть больше (не меньше) значения f на текущем БДР. (принцип оптимальности)
2. Новое базисное решение должно быть допустимо (принцип допустимости)

Рассмотрим (4):

$$\begin{cases} f = f_0 + dx_{nb} \to max \\ x_b = \alpha - Bx_{nb} \\ x_b \geqslant 0, x_{nb} \geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_0 = c_b^T A_b^{-1} b$$

$$d = c_{nb}^T - c_b^T A_b^{-1} A_{nb}$$

$$\alpha = A_b^{-1} b$$

$$B = A_b^{-1} A_{nb} x_{nb}$$

$$f = f_0 + d_{m+1} x_{m+1} + \cdots + d_n x_n \tag{5}$$

Если небазисные некоторые переменные x_j будет включена в базис, то значение целевой функции на новом БР будет равно $f_0 + d_j x_j$, где x_j^0 —значение x_jв текущем БР, так как все небазисные переменные кроме x_j в новом БР будут равны 0, а x_j став базисной может принять положительно значение.

Так как $f \to max$, то в базис следует включать ту переменную x_j, для которой $d_j > 0$. Принцип оптимальности заключается в том, чтобы взять в базис такую переменную x_j, для которой d_j максимальное, то есть

$$d_k = max\left\{d_j : d_j > 0\right\}, \quad j \in \text{небазисный индекс}$$

Если все $d_j \leqslant 0$, то текущее решение улучшить нельзя, таким образом оно оптимально.

Лекция 5

05 октября 2015

2) Выбор базисной переменной для исключения из базиса

Рассмотрим (4) в новом базисе, все переменные вектора x_{nb}, кроме x_k будут равны 0. Тогда запишем (4) в виде:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = A_b^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} - k - \text{ый столбец матрицы } A_b^{-1}A_{nb}$$

Предположим, что x_k в новом БДР приняла значение $x_k^0 \geqslant 0$. Это значит значение f увеличится на $d_k x_k^0$ (смотри (5)).

При увеличении x_k^0 одна или несколько компонент вектора x_b обнулятся, а при дальнейшем увеличении x_k^0 эти компоненты примут отрицательные значения. Таким образом максимальное возможное значение x_k^0 определяется условием:

$$x_k^0 = min\left\{\frac{\alpha_j}{\beta_j} : \beta_j > 0\right\}, \quad j \in \text{базисным номерам}$$

Таким образом из базиса следует исключить ту переменную x_r, для которой достигается:

$$\frac{\alpha_r}{\beta_r} = min\left\{\frac{\alpha_j}{\beta_j} : \beta_j > 0\right\}$$

Замечание: Если все $\beta_j \leqslant 0$, то целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений (задача оптимизации не имеет решение).

Пример:

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 \to max \\ -x_1 + x_2 \leqslant -1 \\ x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Решение:

в стандартной форме:

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 \to max \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 4 \\ x_1, \dots x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & -1 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -1 & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(выделенные **жирным** - базисные переменные, то есть x_1 и x_2)

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_3 - x_4 \\ x_2 = 2 - x_4 \end{cases}$$

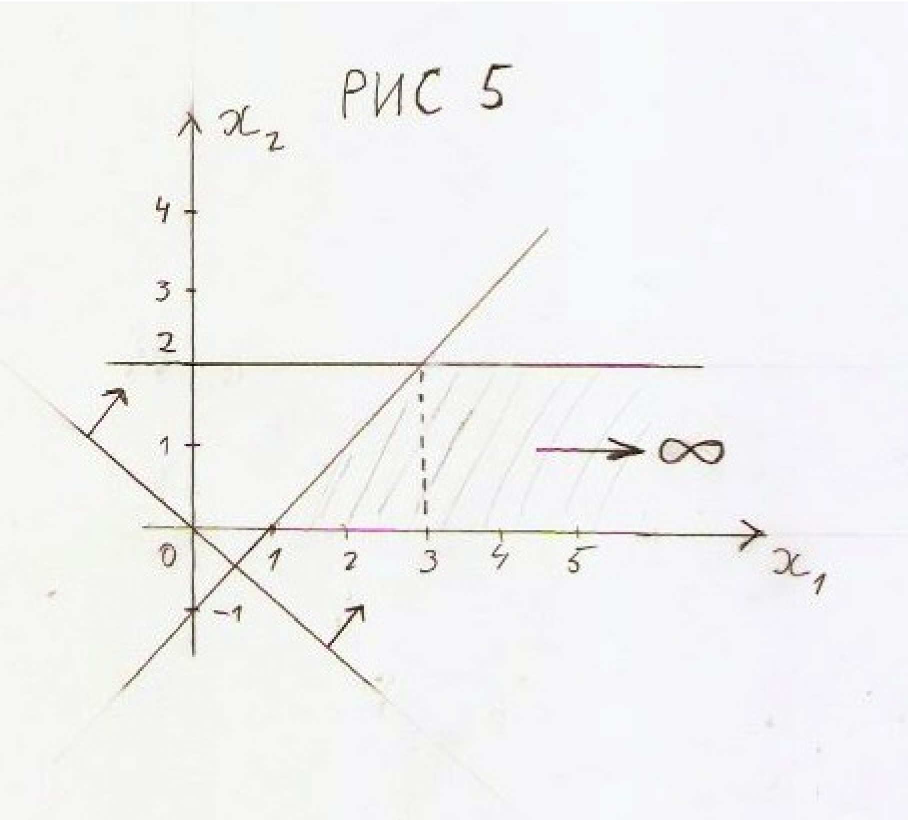
$$\begin{cases} f = 5 + 1 \cdot x_3 - 2x_4 \\ x_1 = 3 + x_3 - x_4 \\ x_2 = 2 - x_4 \\ x_1, \dots x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

1. $d_3 = 1$, $d_4 = -2 \Rightarrow x_3$ в базис.
2. x_4 остается небазисной в новом БДР. $x_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$$

$$\beta_1 = -1 \qquad \beta_2 = 0$$

Все $\beta_j \leqslant 0 \Rightarrow$ целевая функция не ограничена на множестве допустимых решений



Замечание: Если при $x_k = x_k^0$ в 0 обращается две или более базисных переменных, то из базиса может быть выведена любая из них, но только одна.

Пример: Решить ЗЛП

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 5x_2 \to max \\ x_1 \leqslant 400 \\ x_2 \leqslant 300 \\ x_1 + x_2 \leqslant 500 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

В стандартной форме ЗЛП:

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 5x_2 \to max \\ x_1 + x_3 = 400 \\ x_2 + x_4 = 300 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 500 \\ x_1, \dots, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Замечание: В рассматриваемом примере все ограничения имеют вид неравенств «$\leqslant$» с положительными (не отрицательными) правыми частями. Это значит, что дополнительные переменные x_3, x_4, x_5 можно включить в начальный базис, при этом соответсвующее БР будет допустимо.

В качестве базисных переменных возьмем x_3, x_4, x_5:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 300 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 500 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_3 = 400 - x_1 \\ x_4 = 300 - x_2 \\ x_5 = 500 - x_1 - x_2 \\ f = 2x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

$$d_1 = 2, \qquad d_2 = 5$$

d_2 — максимальное среди положительных, тогда x_2 в базис. x_1 остается небазисной, тогда:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

$$min \left\{ \frac{\alpha_j}{\beta_j} : \beta_j > 0 \right\}$$

$$\beta_4 = 1 \qquad \beta_5 = 1$$

$$\frac{\alpha_4}{\beta_4} = \frac{300}{1} \qquad \frac{\alpha_5}{\beta_5} = \frac{500}{1}$$

x_4из базиса

2-ая итерация

x_2, x_3, x_4- базис

Построим канон. форму ЗЛП для этого:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 400 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 300 \\ 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 500 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 400 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 300 \\ 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{1} & 200 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_2 = 300 - x_4 \\ x_3 = 400 - x_1 \\ x_5 = 200 - x_1 + x_4 \\ f = 2x_1 + 5x_2 = 1500 + 2x_1 - 5x_4 \end{cases}$$

$$d_1 = 2 \qquad d_4 = -5$$

x_1 в базис. x_4 останется небазисной, значит $x_4 = 0$. Получаем:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

$$x_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ 200 \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta_3} = \frac{400}{1} \qquad \frac{\alpha_5}{\beta_5} = \frac{200}{1} \Rightarrow x_5 \text{ из базиса}$$

3-ая итерация

x_1, x_2, x_3- базис

Строим каноническую форму для этого базиса:

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 400 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 300 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & 1 & 200 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & -1 & 200 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 300 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & 1 & 200 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 200 + x_4 - x_5 \\ x_2 = 300 - x_4 \\ x_3 = 200 - x_4 + x_5 \\ f = 1500 + 2x_1 - 5x_4 = 1900 - 3x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

$$d_4 = -3 \qquad d_5 = -2$$

Все $d_j \leqslant 0 \Rightarrow$ текущая БДР оптимальная.

Ответ:

$$x^{opt} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f^{opt} = f(x^{opt}) = 1900$$

Проведенные вычисления удобно организовать в так называемой *симплекс таблице:*

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 5x_2 \to max \\ x_1 + x_3 = 400 \\ x_2 + x_4 = 300 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 500 \\ x_1, \ldots, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

x_3, x_4, x_5- начальный базис

Итерация	Базисные переменные	Значения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\frac{\alpha_i}{\beta_j}$	Итог
1	x_3	400	1	0	1	0	0		x_4из базиса, x_2 в базис
	x_4	300	0	**1**	0	1	0	$\frac{300}{1}$	
	x_5	500	1	1	0	0	1	$\frac{500}{1}$	
	$-f$	0	2	*5*	0	0	0		
2	x_3	400	1	0	1	0	0	$\frac{400}{1}$	x_5из базиса, x_1 в базис
	x_2	300	0	1	0	1	0		
	x_5	500	**1**	0	0	-1	1	$\frac{200}{1}$	
	$-f$	-1500	*2*	0	0	0	0		
3	x_3	200	0	0	1	1	-1		Оптимальное
	x_2	300	0	1	0	1	0		
	x_1	500	1	0	0	-1	1		
	$-f$	-1900	0	0	0	-3	-2		

4.2 Построение начального БДР

В рассмотренных выше примерах начальное БДР отвечало либо m первым столбцам матрицы A, либо дополнительным переменным. В общем случае это не так и для построения начального БДР нужна регулярная процедура.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f(x) \to max \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases},$$

где $b \geqslant 0$, $\text{rg}A = \text{rg}(a|B) = m < n$. $m-$ число ограничений, $n-$ число переменных.

Построение начального БДР можно свести к решению вспомогательной ЗЛП.

Рассмотрим ЗЛП:

$$\begin{cases} w = -I^T y \to max \\ Ax + y = b \\ x \geqslant 0, \geqslant 0, \end{cases}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in R^n$$

$$w = -\left(y_1 + \cdots + y_m\right) \to max$$

Определение: Переменные $y_1, \ldots, y_m$ называются искусственными.

1. Для этой задачи переменные $y_1, \ldots y_m$ могут быть использованы в качестве начального базиса
2. $w \leqslant 0$, а при $y = \overrightarrow{0}$, $w = 0 \Rightarrow$ после решения этой ЗЛП переменные $y_1, \ldots, y_m = 0$, исключаются из базиса и более не рассматриваются. Текущий базис из переменных x_j используются в качестве начального для решения исходных ЗЛП.

Замечание: Если $w_{opt} < 0$ (то есть $y^{opt} \neq 0$), то исходная ЗЛП не имеет допустимых решений. $w \to max$,$w \neq 0$ за счет того, что для $y = 0$ не выполняется ограничение задачи, тогда равенство $Ax + y = b$ не может быть выполнено при $y = 0$.

Лекция 6

12 октября 2015

Пример:

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 4x_2 \to max \\ x_1 \geqslant 10 \\ x_2 \geqslant 5 \\ x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 20 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 4x_2 \to max \\ x_1 - x_3 = 10 \\ x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 20 \\ -x_1 + 4x_2 + x_6 = 20 \\ x_1, \ldots, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

Переменные x_1, x_2 — небазисные, тогда $x_1 = x_2 = 0$,

$$x_3 = -10 < 0$$

$$x_4 = -15 = 0$$

Что плохо

$$x_5 = 20 \geqslant 0$$

$$x_6 = 20 \geqslant 0$$

Что хорошо.

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 4x_2 \to max \\ x_1 - x_3 + y_1 = 10 \\ x_2 - x_4 + y_2 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 20 \\ -x_1 + 4x_2 + x_6 = 20 \\ x_1, \dots, x_6 \geqslant 0 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3, x_4 — небазисные.

y_1, y_2, x_5, x_6 — базисные, тогда

$$\begin{cases} \text{в соответствии с БР} \\ y_1 = 10 \\ y_2 = 5 \\ x_5 = x_6 = 20 \end{cases}$$

,

тогда БР является БДР.

$x_3, \dots, x_6$ называются дополнительными переменными, y_1, y_2 называются искусственными.

$$w = -(y_1 + y_2) = -25 + x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to max$$

Из первого ограничения $-y_1 = -10 + x_1 - x_3$, из второго ограничения $-y_2 = -5 + x_2 - x_4$

Итерация	БП	Значения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	$\frac{\alpha_i}{\beta_j}$	Итог
1	y_1	10	**1**	0	-1	0	0	0	1	0	$\frac{10}{1}$	y_1 из базиса, x_1 в базис
	y_2	5	0	1	0	1	0	0	0	1		
	x_5	20	1	1	0	0	1	0	0	0	$\frac{20}{1}$	
	x_6	20	-1	4	0	0	0	1	0	0		
	$-f$	0	3	4	0	0	0	0	0	0		
	$-w$	15	*1*	1	-1	-1	0	0	0	0		
2	x_1	10	1	0	4	0	0	0	1	0		y_2 из базиса, x_2 в базис
	y_2	5	0	**1**	0	-1	0	0	0	1	$\frac{5}{1}$	
	x_5	10	0	1	1	0	1	0	-1	0	$\frac{10}{1}$	
	x_6	30	0	4	-1	0	0	1	1	0	$\frac{15}{2}$	
	$-f$	-30	0	4	3	0	0	0	-3	0		
	$-w$	5	0	*1*	0	-1	0	0	-1	0		
3	x_1	10	1	0	-1	0	0	0	1	0		Строка для w оптимальные $y_1, y_2 = 0$. x_1, x_2, x_5, x_6 — начальный базис x_6 из базиса x_4 в базис
	x_2	5	0	1	0	-1	0	0	0	1	$\frac{5}{1}$	
	x_5	5	0	0	1	1	1	0	-1	-1	$\frac{10}{4}$	
	x_6	10	0	0	-1	4	0	1	1	-4	$\frac{15}{2}$	
	$-f$	-50	0	0	3	4	0	0	-3	-4		
	$-w$	0	0	*0*	0	0	0	0	-1	-1		

Итерация	БП	Значения	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	<u>Итог</u>
4	x_1	10	1	0	-1	0	0	0	
	x_2	7.5	0	1	-1/4	0	0	1/4	
	x_5	2.5	0	0	**5/4**	0	1	-1/4	x_4из базиса
	x_4	2.5	0	0	-1/4	1	0	1/4	
	$-f$	-60	0	0	*4*	0	0	-1	x_3в базис
5	x_1	12	1	0	0	0	4/5	-1/5	
	x_2	8	0	1	0	0	1/5	1/5	
	x_3	2	0	0	1	0	4/5	-1/5	
	x_4	3	0	0	0	1	1/5	1/20	
	$-f$	-68	0	0	0	0	-16/5	-1/5	

$$f^{opt} = 68$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5 Двойственная задача

5.1 Определение

<u>Определение:</u> Стандартной формой прямой задачи называют задачу вида:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

(не обязательно $b \geqslant 0$)

Признаки стандартной формы прямой задачи:

1. Целевая функция максимизируется
2. Все ограничения имеют вид $\leqslant$
3. Все переменные подчинены условию неотрицательности

Замечание Ниже мы покажем, что любая ЗЛП может быть приведена к стандартной форме простой задачи

<u>Определение:</u> Задачей двойственности к (6), называется ЗЛП вида

$$\begin{cases} g = b^T y \to min \\ A^T y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

При этом (7) называется стандартной формой двойственной задачи

<u>Пример:</u>

$$\begin{cases} f = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \to min \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_3 \geqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Составим двойственную задачу

Решение

Приведем к стандартной форме простой задачи:

$$\begin{cases} f_1 = -f = -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to max \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leqslant 7 & (y_1) \\ -x_3 \leqslant -4 & (y_2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 6 & (y_3') \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \leqslant -6 & (y_3'') \\ x_1, x_{2.}x_3 \geqslant 0, \text{так как:} \end{cases}$$

$$\left(a = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant b \\ a \geqslant b \end{cases} \right)$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} g = 7y_1 - 4y_2 + 6y_3' - 6y_3'' \to min \\ 3y_1 + 0y_2 + y_3' - y_3'' \geqslant -1 \\ 4y_1 + 0y_2 + 2y_3' - 2y_3'' \geqslant 4 \\ y_1 - y_2 + y_3' - y_3'' \geqslant 3 \\ y_1, y_2, y_3', y_3'' \geqslant 0 \end{cases}$$

$$y_3 = y_3' - y_3''$$

$$\begin{cases} g = 7y_1 - 4y_2 + 6y_3 \to min \\ 3y_1 + 0y_2 + y_3 \geqslant -1 \\ 4y_1 + 0y_2 + 2y_3 \geqslant 4 \\ y_1 - y_2 + y_3 \geqslant 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Замечание:

1. Число ограничений двойственной задачи равно числу переменных прямой задачи
2. Число переменных двойственной задачи равно числу ограничений прямой задачи
3. Если некоторое ограничение прямой задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи не ограничена в знаке.

Пример: Составить двойственную задачу для

$$\begin{cases} f = 6x_1 + 10x_2 \to max \\ 5x_1 + 3x_2 \geqslant 10 \\ x_1 - x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \text{не ограничена в знаке} \end{cases}$$

Приведем к стандартной форме простой задачи:

$$\begin{cases} f = 6x_1 + 10x_2 \to max \\ -5x_1 - 3x_2 \leqslant -10 \\ x_1 - x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 = x_2' - x_2'' \\ x_2', x_2'' \geqslant 0 \end{cases}$$

Стандартная форма простой задачи:

$$\begin{cases} f = 6x_1 + 10x_2'' - 10x_2'' \to max \\ -5x_1 - 3x_2' + 3x_2'' \leqslant -10 \\ x_1 - x_2' + x_2'' \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2', x_2'' \geqslant 0 \end{cases}$$

Двойственная задача

$$\begin{cases} g = -10y_1 + 4y_2 \to min \\ -5y_1 + y_2 \geqslant 6 \\ -3y_1 - y_2 \geqslant 10 \\ 3y_1 + y_2 \geqslant -10 \equiv -3y_1 - y_2 \leqslant 10 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g = -10y_1 + 4y_2 \to min \\ -5y_1 + y_2 \geqslant 6 \\ -3y_1 - y_2 \geqslant 10 \\ 3y_1 - y_2 = -10 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Замечание: Таким образом если некоторая переменная принимает значение не ограничена в знаке, то её соответсвующее ограничение двойственной задачи является равенством.

5.2 Основные соотношения двойственности

Теорема 1: Задача, двойственная к двойственной, эквивалентна прямой задаче.

Доказательство

Прямая задача:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} g = b^T y \to min \\ A^T y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Двойственная задача в стандартной форме прямой задачи

$$\begin{cases} g_1 = \left(-b^T\right) y \to max \\ \left(-A^T\right) y \leqslant -c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Задача двойственная к двойственной:

$$\begin{cases} h = \left(-c^T\right) z \to min \\ \left(-A^T\right)^T z \geqslant -b \\ z \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = c^T z \to max \\ Az \geqslant -b \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

Меняем z на x и получаем прямую задачу

Конец доказательства

Теорема 2: Пусть:

1. Прямая задача имеет **допустимое** решение $\hat{x}$
2. Двойственная задача имеет **допустимое** решение $\hat{y}$

Тогда $f(\hat{x}) \leqslant g(\hat{y})$

Доказательство

Прямая задача:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} g = b^T y \to min \\ A^T y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Так как $\hat{x}$ допустим $\Rightarrow A\hat{x} \leqslant b$, умножим обе части $\hat{y}^T$ слева и получим $\hat{y}^T Ax \leqslant \hat{y}^T b$. Левая и правая честь — скаляры., тогда получим $\hat{x}^T A^T \hat{y} \leqslant b^T \hat{y}$
2. Так как $\hat{y}$ допустим $\Rightarrow A^T \hat{y} \geqslant c$, умножим на $\hat{x}^T \geqslant 0$ справа и слева и получим $\hat{x}^T A^T \hat{y} \geqslant \hat{x}c \Rightarrow \hat{x}A^T \hat{y} \geqslant c^T \hat{x} = f(\hat{x})$
3. Таким образом $f(\hat{x}) \leqslant g(\hat{y})$

Конец доказательства

Следствие: Если целевая функция прямой задач не ограничена (сверху y) на множестве допустимых решений, то множество допустимых решений двойственно задачи пусто.

Лекция 7

19 октября 2015

Теорема 3: Пусть:

1. $\tilde{x}$ - допустимое решение прямой задачи
2. $\tilde{y}$ - допустимое решение двойственной задачи
3. $f(\tilde{x}) = g(\tilde{y})$

Тогда:

1. $\tilde{x}$ — оптимальное решение простой задачи
2. $\tilde{y}$ — оптимальное решение простой задачи

Доказательство

Покажем, что $\tilde{x}$ — оптимальное решение простой задачи.

$\forall x \in G_{\text{пр}} \qquad f(x) \leqslant f(\tilde{y})$, но $f(\tilde{y}) = f(\tilde{x}) \Rightarrow \forall x \in G_{\text{пр}} \qquad f(x) \leqslant f(\tilde{x}) \Rightarrow \tilde{x}$ - оптимальное

Конец доказательства

Теорема 4

Пусть Простая задача имеет оптимальное решение x^0

Тогда

1. Двойственная задача имеет оптимальное решение y^0
2. $f(x^0) = g(y^0)$

Док-во

Прямая задача:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} g = b^T y \to min \\ A^T y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Запишем ограничения прямой задачи в виде равенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + \dots + x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$

Так как $x^0 = \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)$ — оптимальное решение простой задачи, тогда x^0 — допустимое решение

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + \dots + a_{1n}x_n^0 + x_{n+1} & = b_1(-u_1) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1^0 + \dots + a_{mn}x_n^0 + \dots + x_{n+m}^0 & = b_m(-u_m) \\ c_1 x_1^0 + \dots c_n x_n^0 & = f_0 \end{cases}$$

где $f_0 = f(v^0)$

1) Умножим $i-$ое ограничение на (-u_i) и добавим к последней строке для f_0:

$$\left(c_1 - \sum_{i=1}^{m} a_{i1}u_i\right) x_1^0 + \dots + \left(c_n - \sum_{i=1}^{m} a_{in}u_i\right) x_n^0 + \sum_{i=1}^{m} (-u_i x_{n+i}) = f_0 - \sum_{i=1}^{m} b_i u_i \tag{8}$$

2) Пусть оптимальному решению x^0 отвечает некоторый базис в матрице $(A|E)$

Подберем числа u_i таким образом, что в (8) коэффициенты при базисных переменных равны 0

$$c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i = 0, \qquad j \in \{\text{множество номеров базисных переменных}\}$$

Если $j \in \{n+1,\dots,n+m\}$, то $c_j = 0$, $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

В координатной форме эта СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{1j_1}u_1 + \dots + a_{m,j_2}u_m = c_{j_1} \\ \vdots \\ a_{1j_m}u_1 + \dots + a_{m,j_m}u_m = c_{j_m} \end{cases} \tag{9}$$

Матрица этой СЛАУ:

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_{1,j_1} & \dots & a_{m,j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,j_1} & \dots & a_{m,j_m} \end{bmatrix} = A_{\text{Б}}^T$$

$\det A_{\text{Б}} <> 0$ тогда $\det A_{\text{Б}}^T <> 0$ тогда СЛАУ (9) имеет единственное решение. Обозначим это решение $u^0 = \left(u_1^0 \dots u_m^0\right)$, $u^0 = (A_{\text{Б}}^T)^{-1}c_{\text{Б}}$.

3) Так как в левой части (8) константы при базисных переменных равны 0 (для подобранных нами $u_i = u_i^0$), то (8) является канонической формой записи целевой функции отвечающей оптимальному базису, тогда остальные константы в левой части (8) меньше либо равны 0:

$$\begin{cases} c_j - \sum_{i=0}^m a_{ij}u_i^0 \leqslant 0, & j = \overline{1;n} \\ -u_i^0 \leqslant 0, & i = \overline{1;m} \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij}u_i^0 \geqslant c_j, & j = \overline{1;n} \\ u_i \geqslant 0, & i = \overline{1;m} \end{cases}$$

То есть

$$\begin{cases} A^T u^0 \geqslant 0 \\ u^0 \geqslant 0 \end{cases}$$

Тогда u^0 допустимое решение двойственной задачи.

4) В (8) u_i^0 подобраны так, что константы при базисе $x_j = 0$, а небазисные переменные в БР и так равны 0, тогда левая часть в (8) $= 0$, Правая часть $= 0$, тогда $f_9 = \sum_{i=1}^m b_i u_i^0 = g(u^0)$.

5) Так как u_0 — дополнительное решение двойственной задачи $g(u^0) = f(x^0)$, то u^0 — оптимальное.

Решение двойственной задачи (теорема 3).

Замечание: В ходе доказательства теоремы 4 мы доказали несколько больше заявленного в условии. Мы указали способ построения оптимального решения двойственной задачи:

$$y^0 = (A_{\text{Б}}^T)^{-1}c_{\text{Б}}$$

Следствие: Если двойственная задача имеет оптимальное решение y^0, то и прямая задача имеет оптимальное решение x^0, причем $f(x^0) = g(y^0)$.

Теорема 5 Пусть

1. x^0— оптимальное решение прямой задачи
2. y^0— оптимальное решение двойственной задачи

Тогда

$$y_i^0\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^0-b_j\right)=0,\qquad i=\overline{1;m}$$

$$x_j^0\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_i^0-\mathrm{c}_i\right)=0,\qquad j=\overline{1;n}$$

Доказательство

Прямая задача:

$$\begin{cases}f=c^Tx\to max\\ Ax\leqslant b\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases}g=b^Ty\to min\\ A^Ty\geqslant c\\ y\geqslant 0\end{cases}$$

1) Так как x^0,y^0 — оптимальные решения, тогда они допустимы

$$\begin{cases}Ax^0-b\leqslant 0\\ A^Ty^0-c\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{matrix}(y^0)^T\geqslant 0\\ (x^0)^T\geqslant 0\end{matrix}\ \Rightarrow\begin{cases}{y^0}^T(Ax^0-b)\leqslant 0\\ {x^0}^T(A^Ty^0-c)\geqslant 0\end{cases}\quad\Rightarrow \tag{10}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}{y^0}^TAx^0-{y^0}^Tb\leqslant 0\\ {x^0}^TA^Ty^0-{x^0}^Tc\geqslant 0\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}{y^0}^TAx^0\leqslant g(y^0)\\ {x^0}^TA^Ty^0\geqslant f(x^0)\end{cases}$$

Так как x^0,y^0 — оптимальные решения, то $f(x^0)=g(y^0)$ $\Rightarrow$неравенства (10) выполняются в форме равенств.

2) Рассмотрим 1-ое неравенство из (10): $Ax^0\leqslant b$

$${y^0}^T(Ax^0-b)=0$$

В координатной форме:

$$\sum_{k=1}^{m}y_i^0\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j-b_k\right)=0$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j-b_k\right)\leqslant 0,\quad y_i^0\geqslant 0\Rightarrow y_i^0\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j-b_k\right)\leqslant 0$$

Каждое из слагаемых равно 0.

Конец доказательства

Пример:

$$\begin{cases}f=6x_1+x_2-16x_3-4x_4\to max\\ 3x_1-2x_2-x_4\leqslant 4\\ 1.5x_1+x_2-4x_3\leqslant -1\\ x_1,\dots,x_4\geqslant 0\end{cases}$$

1. Решить задачу симплекс методом
2. Составить двойственную задачу и решить её симплекс методом.

Решение

1) Прямая задача

$$\begin{cases} f = 6x_1 + x_2 - 16x_3 - 4x_4 \to max \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ 1.5x_1 + x_2 - 4x_3 - x_6 + y_1 = -1 \\ x_1, \dots, x_6, y_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ит	БП	Значение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	Итог
1	x_5	4	3	-2	0	-1	1	0	0	
	y_1	1	-1.5	-1	**4**	0	0	-1	1	y_1 из базиса
	$-f$	0	6	1	-16	-4	0	0	0	
	$-w$	1	-1.5	-1	*4*	0	0	-1	0	x_3 в базис
2	x_5	4	3	-2	0	-1	1	0	0	
	x_3	1/4	-3/8	-1/4	1	0	0	-1/4	-1/4	
	$-f$	4	0	-3	0	-4	0	-4	4	
	$-w$	0	0	0	0	0	0	0	-1	

Таким образом $f_0 = -4$, $x^0 = (0, 0, \frac{1}{4}, 0, 4, 0)$.

2) Составим задачу, двойственной к исходной

$$\begin{cases} g = 4y_1 - y_2 \to min \\ 3y_1 + \frac{3}{2}y_2 \geqslant 6 \\ -2y_1 + y_2 \geqslant 1 \\ -4y_2 \geqslant -16 \\ -y_1 \geqslant -4 \\ y_1, y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Приведем к стандартной форме ЗЛП:

$$\begin{cases} g = 4y_1 - y_2 \to max \\ 3y_1 + \frac{3}{2}y_2 - y_3 + z_1 = 6 \\ -2y_1 + y_2 - y_4 + z_2 = 1 \\ -4y_2 + y_5 = -16 \\ -y_1 + y_6 = -4 \\ y_1, \dots, y_6, z_1, z_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$w = -(z_1 + z_2) = y_1 + \frac{5}{2}y_2 - y_3 - y_4 - 7 \to max$$

Ит	БП	Значение	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	z_1	z_2	Итог
1	z_1	6	3	1.5	-1	0	0	0	1	0	
	z_2	1	-2	**1**	0	-1	0	0	0	1	z_2 из базиса
	y_5	16	0	4	0	0	1	0	0	0	
	y_6	4	1	0	0	0	0	1	0	0	
	-g_1	0	-4	1	0	0	0	0	0	0	
	$-w$	7	1	*2.5*	-1	-1	0	0	0	0	y_2 в базис
2	z_1	4.5	6	0	-1	-15	0	0	1	-1.5	z_1из базиса
	y_2	1	-2	1	0	-1	0	0	0	1	
	y_5	12	8	0	0	4	1	1	0	4	
	y_6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	
	$-g_1$	-1	-2	0	0	1	0	1	0	-1	
	$-w$	4.5	6	0	-1	1.5	0	0	0	-2.5	y_1 в базис
3	y_1	3/4	1	0	-1/6	1/4	0	0	1/6	-1/4	
	y_2	2.5	0	1	-1/3	-1/2	0	0	1/3	1/2	
	y_5	6	0	0	4/3	2	1	0	-4/3	-2	
	y_6	13/4	0	0	1/6	-1/4	0	1	-1/6	1/4	
	$-g_1$	1/2	0	0	-1/3	3/2	0	0	1/3	-3/2	
	$-w$	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	
4	y_4	3	4	0	-2/3	1	0	0			
	y_2	4	2	1	-2/3	0	0	0			
	y_5	0	-8	0	8/3	0	1	0			y_5из базиса
	y_6	4	1	0	0	0	0	1			
	$-g_1$	-4	-6	0	2/3	0	0	0			y_3в базис
5	y_4	3	2	0	0	1	1/4	0			
	y_2	4	0	1	0	0	1/4	0			
	y_3	9/2	-3	0	1	0	3/8	0			
	y_6	4	1	0	0	0	0	1			
	$-g_1$	-4	-4	0	0	0	-1/4	0			

$$-g_1 = -4 \Rightarrow g_1 = 4 \Rightarrow g_{opt} = -4 = f_{opt}$$

$$y^0 = \left(0, 4, \frac{9}{2}, 3, 0, 4\right), \quad y_1^0 = 0;\ y_2^0 = 4$$

Замечание: В ходе доказательства теоремы 4 мы показали, что зная оптимальное решение прямой задачи, можно найти оптимальное решение двойственной задачи по формуле:

$$y^0 = (A_{\text{Б}}^T)^{-1} c_{\text{Б}}$$

Однако это не требуется, так как значения коэффициентов при дополнительных переменных. $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ в оптимальной строке для f совпадают со значениями переменных в оптимальном решении двойственной задачи

Таким образом получив оптимальное решение одной из задач можно сразу же выписать оптимальное решение двойственной ей задачи. Из двух задач обычно решают ту, которая содержит меньше ограничений.

Лекция 8

26 октября 2015

6 Целочисленное программирование

6.1 Основные понятия

6.1.1 Постановка задачи

Определение: *Задачей целочисленного программирования* (ЗЦП), называется задача следующего вида:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max & (1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1;m} & (2) \\ x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1;n} & (3) \\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z} & (4) \end{cases}$$

При этом задача (1)-(3) является «обычной» ЗЛП. Эта задача по отношению к задаче (1)-(4) называется задачей с *ослабленными ограничениями*

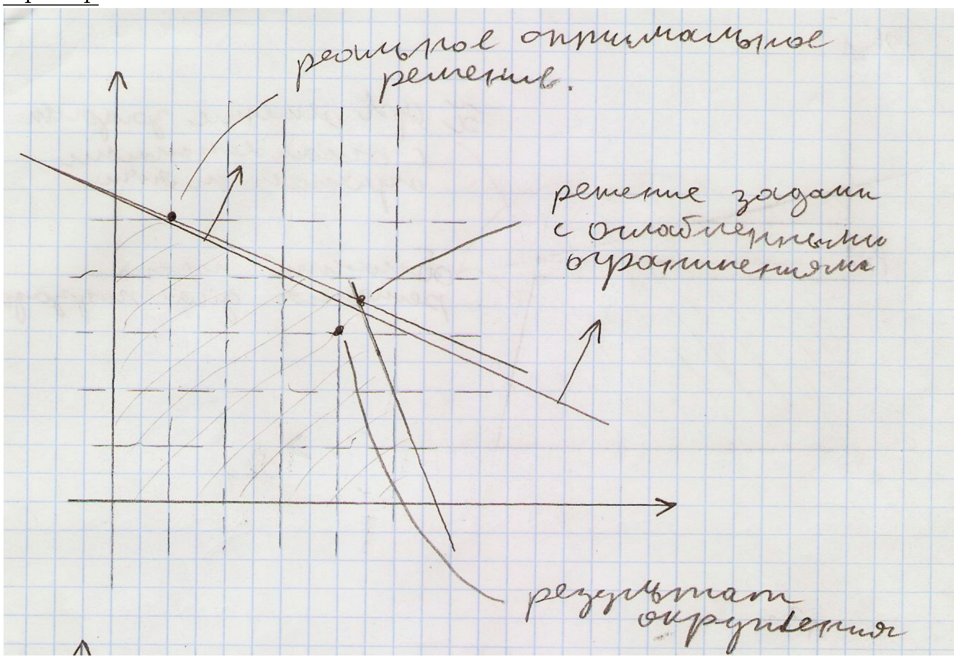
При этом:

- Если $p = n$, то задача (1)-(4) называется *полностью* целочисленной
- Если $p < n$, то задача (1)-(4) называется *частично* целочисленной.

Замечание: Станки, люди, автомобили, самолеты измеряются в целых единицах. Это и приводит к необходимости рассматривать ЗЦП.

6.1.2 О методах решения ЗЦП

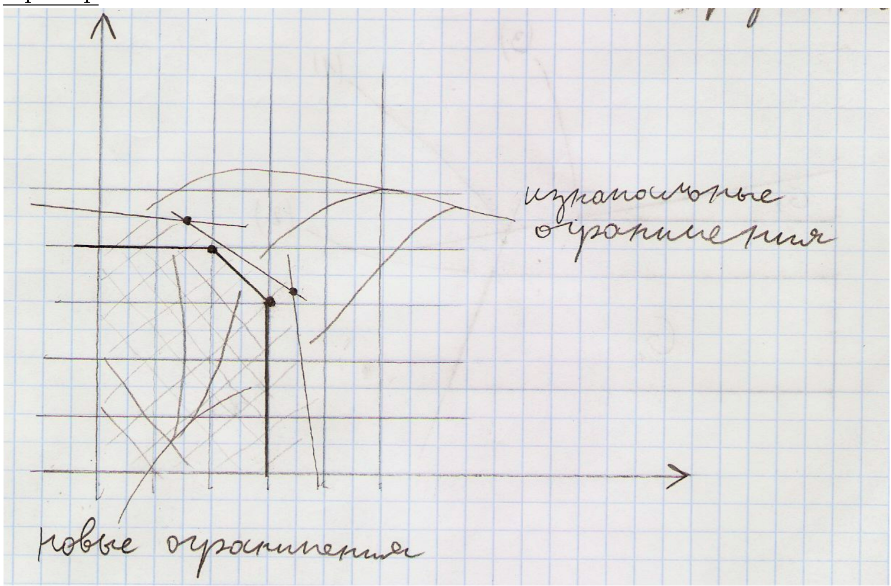
1. **«Решить задачу с ослабленными ограничениями и округлить результат»**
   Этот метод не всегда дает корректный результат.
   Пример



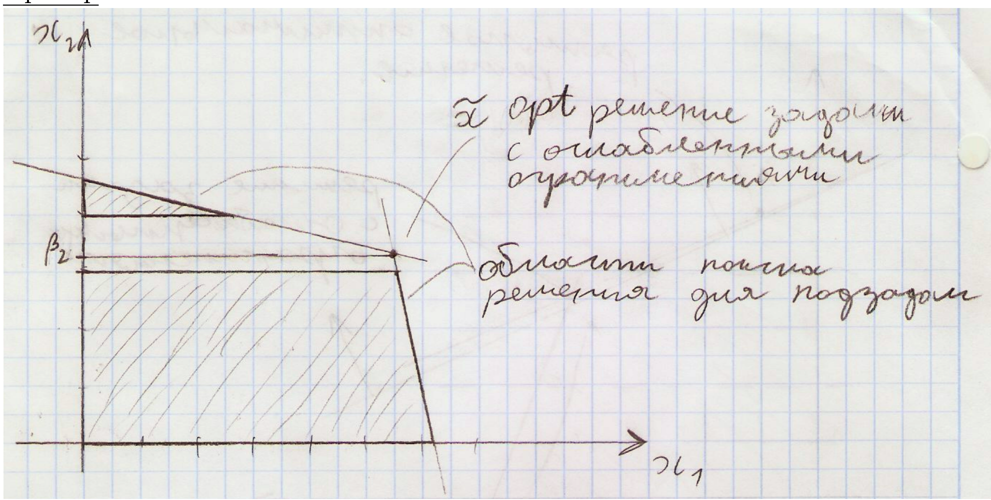
   Замечание: Кром того, аппарат округления оказывается принципиально неприменимым в некоторых случаях, например при решении задач булевого программирования.

2. **Методы отсечения.**
   Множество допустимых решений задачи с ослабленными ограничениями являются выпуклым многогранником. В основе методов отсечения лежит идея добавления новых ограничений к системе ограничений исходной задачи так, чтобы крайними точками «нового» множеств допустимых решений стали точки, удовлетворяющие требованию целочисленности.

Пример



3. **Комбинаторные методы.**
   В основе комбинаторных методов лежит идея полного перебора всех допустимых решений ЗЦП. За счет использования специальных приемов объемы этого перебора можно существенно сократить.
   Пример



Пусть $\tilde{x}$ — оптимальное решение задачи с ослабленными ограничениями, тогда $x_2 = \beta_2$ имеет нецелое значение и, следовательно не удовлетворяет условию целочисленности. В этом случае можно утверждать, что оптимальное решение исходной ЗЦП совпадает с оптимальным решением одной из подзадач:

$$\begin{cases} \text{Исх. ЗЦП} \\ + \text{ Ограничение} \\ x_2 \leqslant [\beta_2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Исходная ЗЦП} \\ + \text{ Ограничение} \\ x_2 \geqslant [\beta_2] + 1 \end{cases}$$

$[\beta]$ — целая часть β. $[1.7] = 1$; $[-2.3] = -3$. $[\beta] = max\,\{x \in \mathbb{Z} : x \leqslant \beta\}$
Далее аналогичным образом рассматриваются поставленные подзадачи.

6.2 Метод ветвей и границ

6.2.1 Основные идеи

Метод ветвей и границ является представителем семейства комбинаторных методов и может быть использован для решения как полностью, так и частично целочисленной задачи.

Предположим, что мы решили задачу с ослабленными ограничениями и нашли её оптимальное решение $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$.

Если это решение удовлетворяет условию целочисленности, то она является оптимальным решением рассматриваемой ЗЦП.

Если $\tilde{x}$ не удовлетворяет условию целочисленности, то некоторая переменная $\tilde{x}_i$ этого вектора имеет нецелочисленное значение:

$$x_i = \beta_i \notin \mathbb{Z}.$$

Тогда можно утверждать, что оптимальное решение исходной ЗЦП совпадает с оптимальным решением одной из подзадач

$$\begin{cases} \text{Исходная ЗЦП} \\ + \\ x_i \leqslant [\beta_i] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Исходная ЗЦП} \\ + \\ x_i \geqslant [\beta_i] + 1 \end{cases}$$

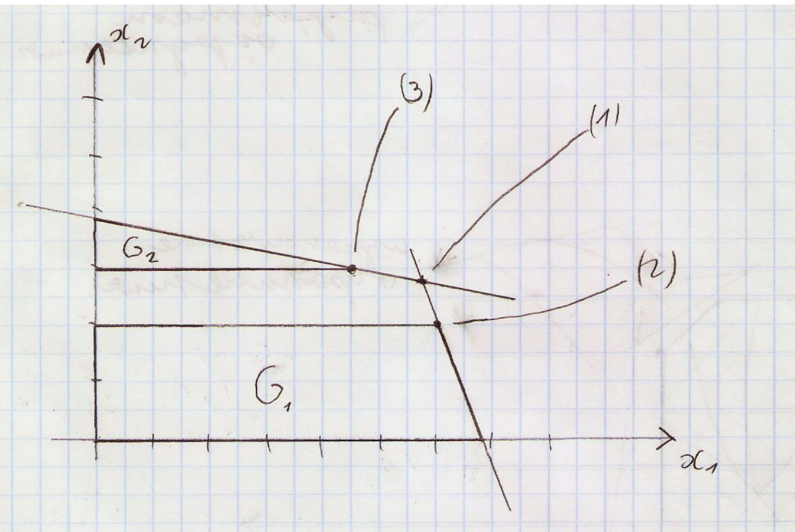
Далее аналогичным образом рассматриваются эти подзадачи. На некотором шаге мы получим набор оптимальных решений рассмотренных подзадач. Самое «лучшее» из них будет оптимальным решением исходной ЗЦП.

Процедуру полного перебора можно существенно сократить, если использовать следующее соображение.

Предположим на некотором шаге для очередной подзадачи было получено оптимальное решение, удовлетворяющее требованию целочисленности.

Если оптимальное решение следующей подзадачи (с ослабленными ограничениями) доставляет целевой функции худшее значение, то эту подзадачу, а так же все порождаемые ею подзадачи можно не рассматривать.

<ins>Пример</ins>



(1) — Оптимальное решение исходной задачи с ослабленными ограничениями

(2) — Оптимальное решение первой подзадачи задачи, которое удовлетворяет условию целочисленности. $f_2 = f(\text{от этого решения})$

(3) — Оптимальное решение очередной подзадачи $f_3 = f(\text{этого решения})$.

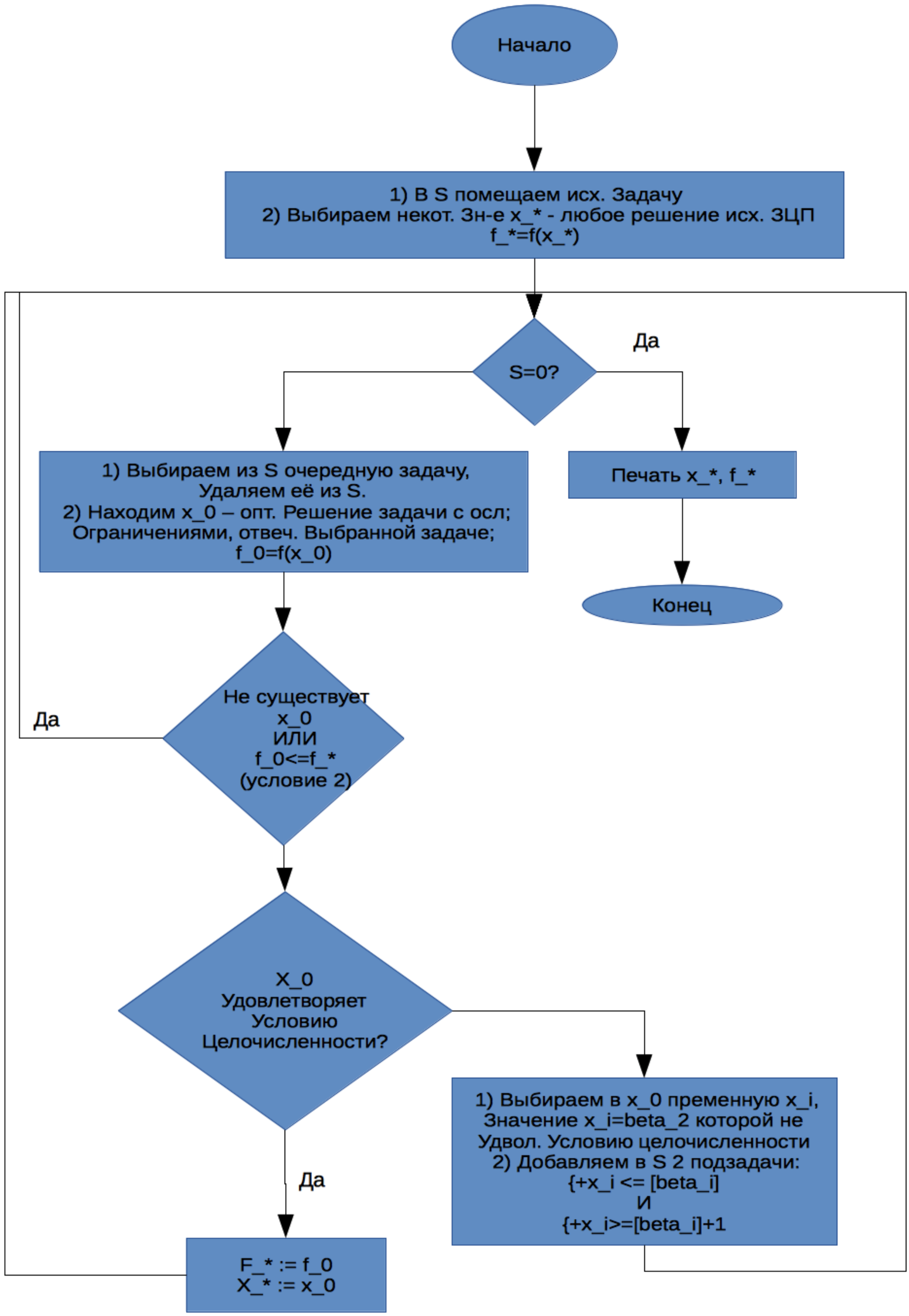
Если $f_3 < f_2$ (решается задача максимизации), то подзадачу с множеством G_2 можно более не рассматривать.

6.2.2 Метод ветвей и границ для решения ЗЦП

В процессе работы соответствующего алгоритма используется:

- x_*, f_*— оценки оптимального решения и оптимального значения целевой функции рассматриваемой ЗЦП.
- S — основной список задач

В конце работы алгоритма x_* соответсвует оптимальное решение задачи, а $f_* = f(x_*)$.


Начало
1) В S помещаем исх. Задачу
2) Выбираем некот. Зн-е x_* - любое решение исх. ЗЦП
f_*=f(x_*)
S=0?
Да
1) Выбираем из S очередную задачу,
Удаляем её из S.
2) Находим x_0 – опт. Решение задачи с осл;
Ограничениями, отвеч. Выбранной задаче;
f_0=f(x_0)
Печать x_*, f_*
Конец
Не существует
x_0
ИЛИ
f_0<=f_*
(условие 2)
Да
X_0
Удовлетворяет
Условию
Целочисленности?
1) Выбираем в x_0 пременную x_i,
Значение x_i=beta_2 которой не
Удвол. Условию целочисленности
2) Добавляем в S 2 подзадачи:
{+x_i <= [beta_i]
И
{+x_i>=[beta_i]+1
Да
F_* := f_0
X_* := x_0

Замечание:

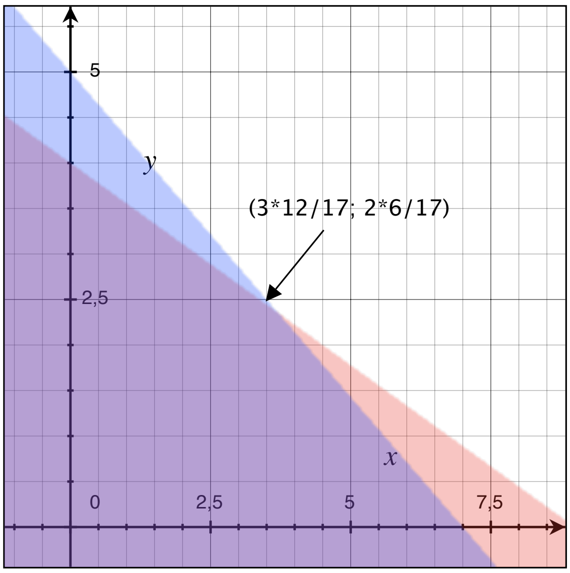
1. О выборе начальных оценок f_*, x_*.
   (a) В качестве x_* можно взять любое дополнительно решение исходной ЗЦП; $f_* = f(x_*)$.
   (b) Если получается сходу подобрать дополнительное решение ЗЦП, то можно принять $f_* = \infty$, x_* — не определен.
2. Если исходная задача является полностью целочисленной, а $c_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1; n}$, то «условие 2» можно записать в виде «$\nexists x_0$ ИЛИ $[f_0] \leqslant f_*$».
   Эта модификация корректна, так как при выполнении условий f может принимать лишь целые значения.
   Пример
   $f_* = 10$
   $f_0 = 10.7$
   $f_0 > f_x \Rightarrow$ проверяем целочисленность x_0. Но так как $f \in \mathbb{Z}$, то множестве дополнительных решений текущей задачи наибольшее целочисленное значение f.

Лекция 9

9 ноября 2015

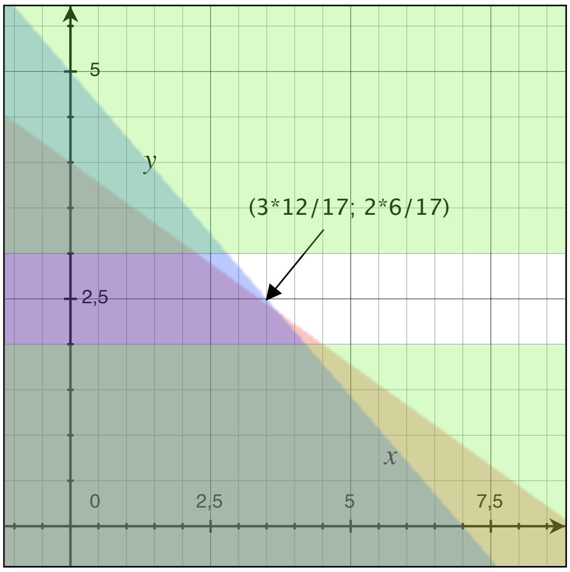
Пример:

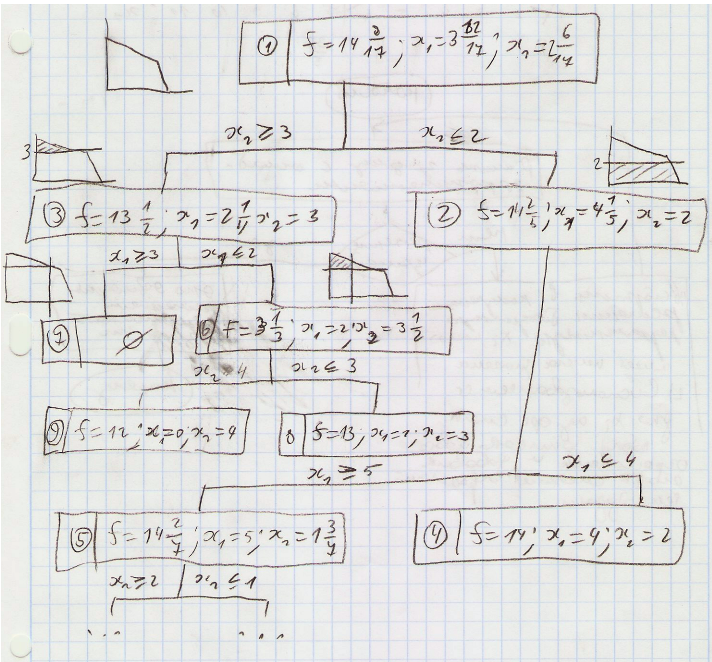
$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 \to max \\ 5x_1 + 7x_2 \leqslant 35 \\ 4x_1 + 9x_2 \leqslant 36 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$x_2^0 = 2\frac{6}{17} \notin \mathbb{Z}$$

2 подзадачи: $\begin{cases} \text{исх. ЗЦП} \\ + \\ x_2 \leqslant 2 \end{cases}$; $\begin{cases} \text{исх. ЗЦП} \\ + \\ x_2 \geqslant 3 \end{cases}$





Решения для задачи 2 и 3 не являются целочисленными. Необходимо добавить дополнительно добавить ограничений.

<u>Реализация</u>

# итерации	Тек. з-ча	x_0, f_0	x_*, f_*	S
1	1	$\left(3\frac{12}{17}; 2\frac{6}{17}\right), 14\frac{8}{7}$	$x_* = (0,0), f_* = 0$	2, 3
2	3	$\left(2\frac{1}{4}; 3\right), 13\frac{1}{2}$	$-//-$	3, 6, 7
3	6	$\left(2, 3\frac{1}{9}\right), 13\frac{1}{3}$	$-//-$	3, 7, 8, 9
4	7	$\emptyset$	$-//-$	3, 8, 9
5	9	$(0;4), 12$	$(0;4), 12$	3, 8
6	8	$(2;3), 13$	$(2;3), 13$	2, 8
7	2	$\left(4\frac{1}{5}; 2\right), 14\frac{2}{5}$	$-//-$	4, 5
8	4	$(4;2), 14$	$(4;2), 14$	5
9	5	$(\,), 14\frac{2}{5}$	$(4;2), 14$	—

$[f_0] = 14 = f_* \Rightarrow$ отбрасываем задачу 7

Могла быть другая ситуация.

# итерации	Тек. з-ча	x_0, f_0	x_*, f_*	S
1	1	$\left(3\frac{12}{17}; 2\frac{6}{17}\right), 14\frac{8}{7}$	$(0,0), 0$	2, 3
2	2	$\left(4\frac{1}{5}, 2\right), 14\frac{2}{5}$	$(0,0), 0$	3, 5, 4
3	4	$(4; 2), 14$	$(4,2), 14$	3, 5
4	5	$\left(5; 1\frac{3}{7}\right), 14\frac{2}{7}$	$(4,2), 14$	3
5	3	$\left(2\frac{1}{4}, 3\right), 13\frac{1}{2}$	$(4,2), 14$	—

Замечание:

1. Основным недостатком метода ветвей и границ в том, что он не дает четких инструкций
   (a) По выбору нецелой переменной для порождения подзадач;
   (b) По выбору очередной задачи из списка S.
2. Метод ветвей и границ можно было бы назвать *«методом обрыва ветвей»* (ветви дерева задач обрываются с соответсвии с текущим значением f_* — нижней границы оптимальных значений)

6.3 Метод Гомори

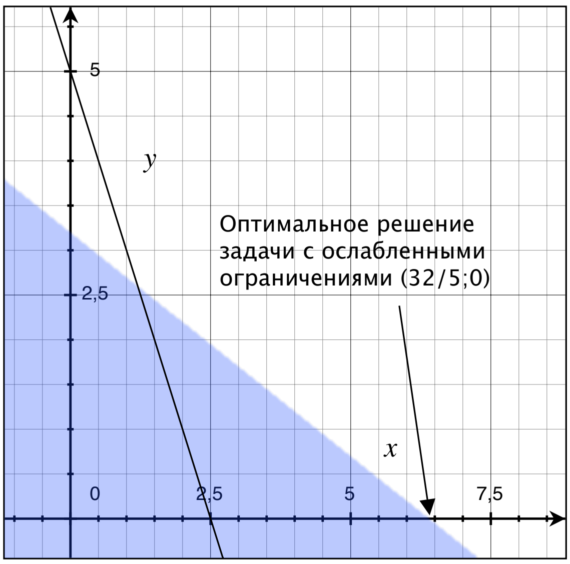
Метод Гомори является одним из методов отсечения.

6.3.1 Основные определения

Пример:

$$\begin{cases} f = 2x_1 + x_2 \to max \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 \leqslant \frac{16}{5} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1) Решим задачу графически (с ослабленными ограничениями):



2) Решим задачу с ослабленными ограничениями симплекс методом. Приведем систему ограничений к целочисленному виду (это важно для метода Гомори!):

$$\begin{cases} f = 2x_1 + x_2 \to max \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 32 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Решим симплекс методом:

Ит	БП	Знач.	x_1	x_2	x_3	
1	x_3	32	5	10	1	x_3 из базиса
	$-f$	0	2	1	0	x_1 в базис
2	$-x_1$	32/5	1	2	1/5	
	$-f$	-64/5	0	-4	-2/5	

$$x_1^0 = \frac{32}{5}, \quad x_2^0 = 0, \quad f^0 = -\frac{64}{5}$$

3) Рассмотрим ограничение с из оптимальной симплекс таблицы, которое отвечает базисной переменной , имеющей нецелое значение:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{32}{5}$$

$$x_1 = \frac{32}{5} - 2x_2 - \frac{1}{5}x_3 \Rightarrow \frac{32}{5} - 2x_2 - \frac{1}{5}x_3 = \text{целое}$$

Выделим у всех коэффициентов целую и дробную части:

$$\left(\left[\frac{32}{5}\right] + \left\{\frac{32}{5}\right\}\right) - ([2] + \{2\})\, x_2 - \left(\left[\frac{1}{5}\right] + \left\{\frac{1}{5}\right\}\right) x_3$$

$$\left(6 + \frac{2}{5}\right) - (2+0)\, x_2 - \left(0 + \frac{1}{5}\right) x_3 = \text{целое}$$

$$(6 - 2x_2 - 0x_3) + \left(\frac{2}{5} - 0x_2 - \frac{1}{5}x_3\right) = \text{целое}$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{5}x_3 = \text{целое} \Rightarrow \frac{1}{5}x_3 = \frac{2}{5} + \text{целое}$$

целое $\geqslant 0$, так как если **целое** $= -1$**,** то правая часть $< 0 \Rightarrow x_3 < 0$, но $x_3 \geqslant 0$

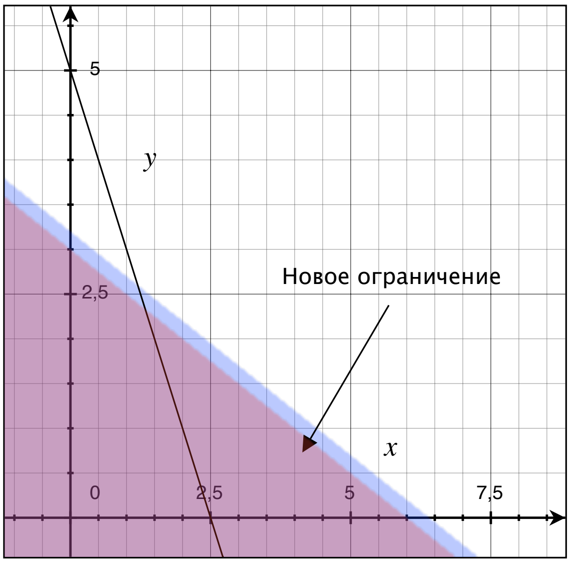
$\Rightarrow \frac{1}{5}x_3 \geqslant \frac{2}{5}$ — дополнительное новое ограничение

Геометрическая интерпретация этого ограничения:

$x_3 \geqslant 2$, но $x_3 = 32 - 5x_1 - 10x_2 \Rightarrow 30 - 5x_1 - 10x_2 \geqslant 0$

$5x_1 + 10x_2 \leqslant 30$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 6$



4) Добавим новое ограничение и решим полученную задачу симплекс методом

Ит	БП	Знач.	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
3	x_1	32/5	1	2	1/5	0	0	
	y_1	2/5	0	0	1/5	-1	1	y_1 из базиса
	$-f$	-64/5	0	-4	-2/5	0	0	
	$-w$	2/5	0	0	1/5	-1	0	x_3 в базис
4	x_1	30/5=6	1	2	0	1	-1	
	x_3	2	0	0	1	-5	5	
	$-f$	-60/5=-12	0	-4	0	-2	2	
	$-w$	0	0	0	0	0	-1	

$$x_1^0 = 6, \quad x_2^0 = 0, \quad f^0 = 12$$

6.3.2 Метод Гомори для полностью целочисленной задачи

Рассмотрим ЗЦП

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad\qquad i = \overline{1;m} \\ x_1, \ldots, x_n \geqslant 0 \\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Будем считать, что все a_{ij} и b_i являются целыми (если это не так, приведем систему ограничений к такому виду эквивалентными преобразованиями). Решим соответствующую задачу с ослабленными ограничениями с использованием симплекс метода.

1. Если полученное решение удовлетворяет требованию целочисленности, то оно является оптимальным решение исходной ЗЦП

2. Если это решение не удовлетворяет требованию целочисленности, то выберем базовые переменные x_i, которые в этом решении имеют нецелое значение:

$$x_i = \beta_i$$

Выпишем ограничение, отвечающее переменной x_i из оптимальной симплекс таблицы

$$x_i + \sum_{j \in S} a'_{ij} x_j = \beta_i,$$

где S — множество номеров небазисных переменных.

$$x_i = \beta_i - \sum_{j \in S} a'_{ij} x_j$$

Представим каждый коэффициент в виде суммы целой и дробной части:

$$\beta_i = [\beta_i] + f_i, \quad f_i \in (0;1) \text{— т. к. } \beta_i \notin \mathbb{Z}$$

$$a_{ij} = \left[a'_{ij}\right] + f_{ij}, \quad f_{ij} \in [0;1)$$

$$x_i = [\beta_i] + f_i \sum_{j \in S} \left(\left[a'_{ij}\right] + f_{ij}\right) x_j$$

$$\sum_{j \in S} f_{ij} x_j = f_i + [\beta_i] - x_i - \sum_{j \in S} [a_{ij}] \, x_j$$

$$\sum_{j \in S} f_{ij} x_j = f_i + \text{целое}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_{ij} \geqslant 0 \\ x_j \geqslant 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Л. ч } \geqslant 0$$

$$f_i < 1 \Rightarrow \text{целое } \geqslant 0$$

Таким образом

$$\sum_{j \in S} f_{ij} x_j \geqslant f_i \tag{11}$$

(11) задает новое ограничение, которое называется отсечение Гомори. Это ограничение является необходимым условием целочисленности.

Замечание: Метод Гомори так же называется *дробным алгоритмом*. Это связанно с тем, что все коэффициенты добавляемого на некотором шаге являются ограничениями