Лекции ИУ7. Методы Вычислений. Семестр 2

Власов П. А.*

12 февраля 2016 г.

Содержание

Основные понятия

Типовая задача оптимизации имеет следующий вид

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in G \end{cases} \tag{1}$$

Замечание:

1. Если требуется задачу максимизации, то обычно вместо функции $f(x)$ рассматривают функцию $g(x) = -f(x)$ и решают задачу минимизации для G.
2. В прошлом семестре мы рассматривали задачу (1) для:
   (a) случая, когда G конечно или счетно
   (b) случая, когда f линейна, а G — выпуклый многоугольник в пространстве $\mathbb{R}^n$. (В этом случае задачу (1) называют *задачей исследования операций*)
3. В этом семестре будем рассматривать задачу (1) для
   (a) произвольной (не обязательно скалярной) функции f и
   (b) для произвольного множества $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

Используется следующая терминология:

Функция f	Множество G	Название задачи
$f : G \to \mathbb{R}$	$[a; b] \subset \mathbb{R}$	Задача одномерной оптимизации
$f : G \to \mathbb{R}$	$G = \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$	Задача многомерной безусловной оптимизации
$f : G \to \mathbb{R}$	$G \subset \mathbb{R}^n, n \geqslant 2$	Задача многомерной условной оптимизации
$f : G \to \mathbb{R}^m, m \geqslant 2$	$G \subseteq \mathbb{R}^n$	Задача многокритериальной оптимизации

*Законспектировано Абакумкиным А. В.

1. Одномерная оптимизация

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in [a;b] \end{cases} \tag{2}$$

1.1. Основные понятия одномерной оптимизации

1.1.1. Минимум функции

Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n, G \subseteq \mathbb{R}$

Определение: Точка $x^* \in G$ называется *точкой глобального минимума* функции f на множестве $\forall x \in G \quad f(x^*) \leqslant f(x)$.

При этом число f^* называется *минимум* (глобальным) функции f на G и обозначается $f^* = \min\limits_{x \in G} f(x)$.

Замечание: Обозначим *множество всех точек глобальных* минимумов f на G, как

$$G^* = \left\{ x^* \in G : f(x^*) = \min_{x \in G} f(x) \right\}$$

Определение: Точка $\tilde{x} \in G$ называется *точкой локального минимума* функции на множестве G, если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in u_\varepsilon(\tilde{x}) \cap G \quad f(x) \leqslant f(x),$$

где $u_\varepsilon(\tilde{x}) = \{x : |\tilde{x} - x| < \varepsilon\}$.

Замечание:

1. Точка глобального минимума является точкой локального минимума. Обратное неверное.
2. Задача (2) имеет решение тогда и только тогда, когда $G^* \neq 0$
3. Согласно теореме Вейерштрасса, всякая функция, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве, достигает на этом множестве своих inf и sup (которые являются в этом случае минимум и максимумом этой функции на этом множестве).
   Таким образом задача (2) всегда имеет решение в случае непрерывной функции f.

1.1.2. Унимодальные функции

Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$

Определение: f называется *унимодальной* на отрезке $[a;b]$, если $\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}$:

1. $a \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$
2. Если $a < a_1$, то f монотонно убывает на $[a;a_1]$
3. Если $b_1 < b$, то f монотонно возрастает на $[b_1;b]$.
4. $\forall \tilde{x} \in [a_1;b_1] \quad f(\tilde{x}) = \min\limits_{x \in G} f(x)$

Свойства унимодальных функций

1° Каждая точка локального минимума унимодальной функции является одновременно точкой её глобального минимума.

2° Если f унимодально на $[a;b]$, то f унимодально и на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset [a;b]$.

3° Пусть:

1. f унимодальна на отрезке $[a;b]$

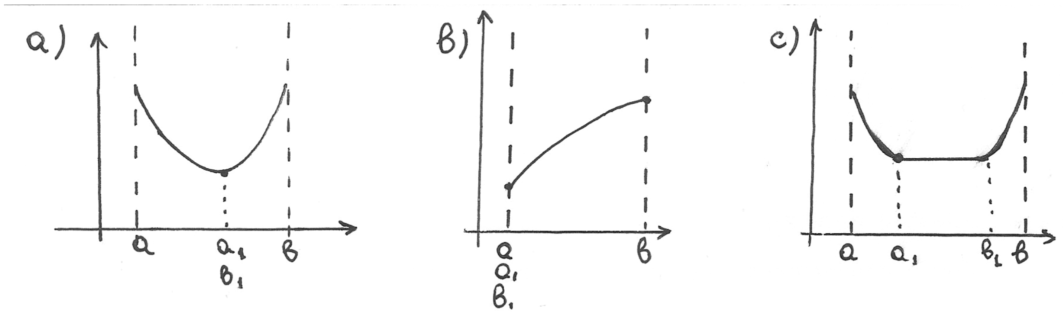


Рис. 1:

2. $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$
3. x^*— точка минимума функции f.

Тогда

1. Если $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то $x^* \in [a; x_2]$
2. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то $x^* \in [x_1; b]$

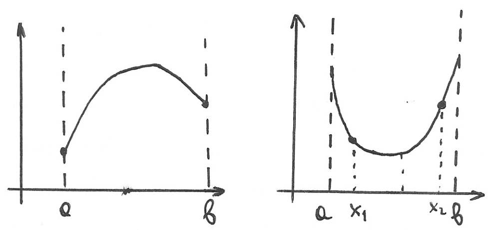
1.1.3. Выпуклые функции

Пусть $f : [a; b] \to \mathbb{R}$

Определение: Функция f называется *выпуклой,* если

$$\forall\forall x_1, x_2 \in [a; b] \quad \forall \alpha \in [0; 1]$$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \tag{3}$$



Замечание:

1. Неравенство (3) означает, что для любой хорды графика функции $f(x)$, которая соединяет точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$, график функции $f(x)$ на отрезке, соединяющий x_1и x_2, лежит не выше этой хорды.
2. В классическом математическом анализе такие функции называются выпуклыми вниз. Функции, которые в классическом математическом анализе являются выпуклыми вверх, мы не будем считать выпуклыми (так как они не удовлетворяют нашему определению). Эта «дискриминация» связана с тем, что в дальнейшем будем рассматривать только задачу минимизации.

Свойства выпуклых функций

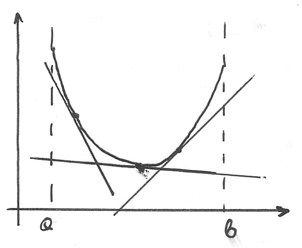
Через $C^{(k)}[a; b]$ будем обозначать функции, которые непрерывны на отрезке $[a; b]$ и имеют на $[a; b]$ непрерывные производные до порядка k включительно.

1° Пусть $f \in C^{(1)}[a;b]$

Тогда f выпукла тогда и только тогда, когда $f'(x)$ не убывает на $[a;b]$

2° Пусть $f \in C^{(2)}[a;b]$, тогда f выпукла на $[a;b] \Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0, \quad x \in [a;b]$

3° Пусть $f \in C^{(3)}[a;b]$, тогда f выпукла $\Leftrightarrow \forall x_0 \in [a;b]$ касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0 лежит не выше графика $f(x)$.



4° Пусть

1. $f \in C^{(1)}[a;b]$
2. f выпукла на $[a;b]$
3. $f'(x^*) = 0, \quad x^* \in [a;b]$

Тогда x^* — точка глобального минимума $f(x)$, $x \in [a;b]$.

5° $C[a;b] = C^0[a;b]$

Пусть

1. $f \in C[a;b]$
2. f выпукло на $[a;b]$

Тогда f унимодальна на $[a;b]$

Замечание:

1. Многие методы минимизации разработанны для унимодальных функций. При этом эти методы хорошо сходятся, если f выпукла.
2. На практике проверку выпуклости целевой функции осуществляют не с помощью использования определения, а с использованием свойств 1-3 или физических соображений.

1.1.4. Липшицевы функции

Пусть $f : [a;b] \to \mathbb{R}$

Определение: Говорят, что f удовлетворяет на отрезке $[a;b]$ удовлетворяет условию Липшица (является липшицевой), если

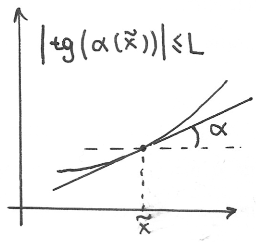
$$\exists L \geqslant 0 \quad \forall\forall x_1, x_2 \in [a;b]$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L \cdot |x_1 - x_2|$$

При этом L называется константой Липшица для f на $[a;b]$.

Замечание: Для дифференцируемой на $[a;b]$ функции условие Липшица означает, что для любой точки $\tilde{x} \in [a;b]$ угловой коэффициент касательной к графику $f(x)$ в этой точке по абсолютной величине не превосходит L.

$$\forall \tilde{x} \quad |\mathrm{tg}\alpha(\tilde{x})| \leqslant L$$



Свойства липшицевых функции

1° Если f удовлетворяет условию Липшеца с констанотой L, то f удовлетворяет условию и с любой константой $L_1 > L$.

2° Если f липшицева на $[a;b]$, то f является липшицевой и на любом отрезке $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$.

3° Если $f \in C^{(1)}[a;b]$, то

1. f липшицева на $[a;b]$
2. константа Липшица для f на $[a;b]$ может быть выбрана

$$L = \max_{x \in [a,b]} \left| f'(x) \right|.$$

4° Пусть

1. $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$
2. f является липшицевой на $[x_{i-1}, x_i]$ с константой L_i, $i = \overline{1;n}$.

Тогда f является липшицвой на $[x_0; x_n]$ с константой

$$L = \max_{i=\overline{1;n}} L_i.$$

5° Если f липшицева на $[a;b]$, то она непрерывна на $[a;b]$.

Пример:

1. $f(x) = \sin x$ является липшицевой на любом отрезке $[a;b]$, так как она непрерывно дифференцируема на $[a;b]$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ не является липшицевой на $[0;a]$, $a > 0$. Если бы f была липшицевой, то угловые коэффициенты касательных к графику были бы ограничены некоторой константой. Для $\sqrt{x}$ на $[0;a]$ это не так.