Преподаватель: Власов Павел Александрович (ищи его в 1025л)

E-mail: pvlx@mail.ru

Лабораторныеработы: Пн, 19:10

Лекция 1

7 сентября 2015

1 Задачи методов оптимизации

1.1 Классификация задач оптимизации

Задача оптимизации имеет обычно имеет следующий вид:

$$\begin{cases} f(x) \to extr \\ x \in G \end{cases},$$

здесь f называется целевой функцией или критерием оптимальности, G называется множеством допустимых решений.

Замечание:

1. Задача min-целевой функции одной переменной:

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Задача безусловной оптимизации функции нескольких переменных:

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ x \in G \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

3. Задача условной оптимизации функции нескольких переменных:

$$\begin{cases} f(x) \to min \\ \phi(x) = 0 \\ x \in G \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

1. Если $f : G \to \mathbb{R}$ - скалярная функция, то соответсвующая задача называется задачей математическим программированием
2. Если $f : G \to \mathbb{R}^m, m \geq 2$, то соответсвующая задача называется задачей многокретириальной оптимизации

Для задач математического программирования программирования дальнейшая классификация:

Вид функции	Стр. множества G	Название задачи
Линейная	Выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^n$	Задача линейного программирования
Квадратичная	Выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^n$	Задача квадратичного программирования
Выпуклая	Выпуклое множеств в $\mathbb{R}^n$	Задача выпуклого программирования
Произвольная	Конечное множество	Задача дискретного программирования
Произвольная	Подмножество множества $\mathbb{Z}^n$	Задача целочисленного программирования
Произвольная	Подмножество в $\{0, 1\}^n$	Задача логического программирования

Замечание:

1. В этом семестре будем заниматься задачами линейного и целочисленного программирования. Задачами выпуклого и квадратичного программирования будем заниматься в следующем семестре.

2. Как правило задачи оптимизации, в которых мн-во G конечно или счетно, относят к разделу методов оптимизации, которые называется *исследованием операций.*

1.2 Венгерский метод решения задач о назначениях

1.2.1 Постановка задачи о назначениях

Содержательная постановка.

В распоряжении работодателя имеется n работ и n исполнителей. Стоимость выполнения i-ой работы j-ым исполнителем составляет $c_{ij} \geqslant 0$ единиц. Необходимо распределить все работы между исполнителями таким образом, чтобы:

1. Каждый исполнитель исполнял ровно одну работу

2. Суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной

Введем управляемые переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i-\text{ую работу исполняет } j-\text{ый исполнитель} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Замечание:

Переменную x_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, удобно записывать в матрицу:

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix},$$

которая называется матрицей назначений.

Стоимости c_{ij} записывают в матрицу,

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

которая называется матрицей стоимостей.

Тогда целевая функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Условие того, что j-ый исполнитель выполняет ровно одну работу

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Условие того, что i-ую работу выполняет ровно один исполнитель

Математическая постановка задачи о назначении:

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = \overline{1,n} \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i,j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Замечание:

Множество допустимых решений задачи о назначении является конечным и состоит из $n!$ элементов. Одним из возможных методов решения этой задачи является прямой перебор допустимых решений однако при больших n он практически не реализуем ввиду большой сложности.

1.2.2 Предварительные соображение о методе решений задачи о назначении:

Соображение 1

Выполним над элементами матрицы стоимостей C следующие преобразования:

1. Из всех элементов $j-$ого столбца вычтем некоторое число α_j, $\qquad j = \overline{1,n}$
2. Из всех элементов $i-$ой строки вычтем некоторое число β_j, $\qquad i = \overline{1,n}$

Обозначим полученную матрицу $\widetilde{C}$

$$f_{\widetilde{C}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - \alpha_j - \beta_i) x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i x_{ij} = f_c(x) - \gamma$$

$$\gamma = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \sum_{i=1}^{n} \beta_i$$

В результате:

$$f_{\tilde{c}}(x) = f_c(x) + const$$

То есть задачи о назначениях с матрицей C и с матрицей $\tilde{C}$ эквивалентно (то есть оптимальные значение функций f_c и $f_{\tilde{c}}$ достигаются при одном и том же x_{ij}.

Соображение 2

Предположим, что в матрице C нашлись n нулей, никакие два их которых не стоят на одной строке и одном столбце.

В этом случае можно сразу записать решение рассматриваемой задачи в матрице x, ставим единицы в тех позициях, в которых в матрице C стоят нули. Остальные элементы матрицы x полагаем равными 0.

$$f(x) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \geqslant 0$$

$$f(x_{opt}) = 0$$

Определение: Набор нулей матрицы С будем называть *системой независимых нулей* (СНН), если никакие 2 нуля этой системы не стоят в одной строке и одном столбце

Замечание: Для решения задачи о назначениях достаточно преобразовать матрицу С к эквивалентному виду, в котором будет содержаться система из n независимых 0.

Замечание: “Слабые места”

1. Возможно после выполнения указанных преобразований мы получим матрицу, из нулей которой в принципе невозможно сформировать систему независимых нулей.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 9 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

   В этой матрице максимальное число в системе независимых нулей равно 2

2. Возможно в некоторой текущей матрице стоимостей существует набор независимых нулей. Но его построение затруднительно.

В любом из этих случаев построенная система независимых нулей (в которой меньше чем n нулей) может быть улучшена.

Будем считать, что после вычитания наименьших элементов из строк и столбцов матрицы C первоначальная система независимых нулей строится по следующему правилу: просматриваем элементы матрицы C по столбцам в поисках нулей. Если в одном столбце и одной строке с найденным нулем не стоит 0^*, то отмечаем найденые нули звездочкой.

1.2.3 1-ый способ улучшения текущей СНН

Идея: убрать из СНН несколько нулей так, чтобы добавить большее число нулей.

Отметим «+» столбцы, в которых стоят 0^*. Эти столбцы и их элементы будем называть *выделенными*.

Если среди невыделенных элементов есть 0, то можно попытаться улучшить текущую СНН, включив в нее этот 0. Отметим этот 0 штрихом.

В этом случае строка, в которой располагается этот 0, уже не может содержать других элементов СНН. Поэтому если в одной строке с $0'$ есть 0^*, то необходимо снять выделение со столбца, в котором стоит 0^* и выделить строку, в которой стоит $0'$.

Снова среди невыделенных элементов ищем 0 и отмечаем его штрихом. В одной строке с этим $0'$ нет 0^*. Это значит, что можно построить L-цепочку:

от текущего $0' \to_{\text{по стобцу}} 0^* \to_{\text{по строке}} 0' \to 0^* \to \ldots \to 0'$

L-цепочка должна быть непродолжаемой и начинаться и заканчиваться $0'$.

В пределах этой L-цепочки 0^* заменяем на просто 0, а $0'$ на 0^*.

Лекция 2

14 сентября 2015

Слабое место 1

В текущей матрице C не существуют СНН из n нулей тогда и только тогда, когда среди невыделенных элементов нет 0.

$$C = \begin{bmatrix} 0^{*+} & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0^{*+} & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0^{*+} \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0^* & 0' & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0^* & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0^* \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to$$

Выберем среди невыделенных элементов наименьший элемент $h > 0$. В этом примере $h = 1$. Вычтем его из невыделенных столбцов

$$\to \begin{bmatrix} -1^* & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0^* \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to$$

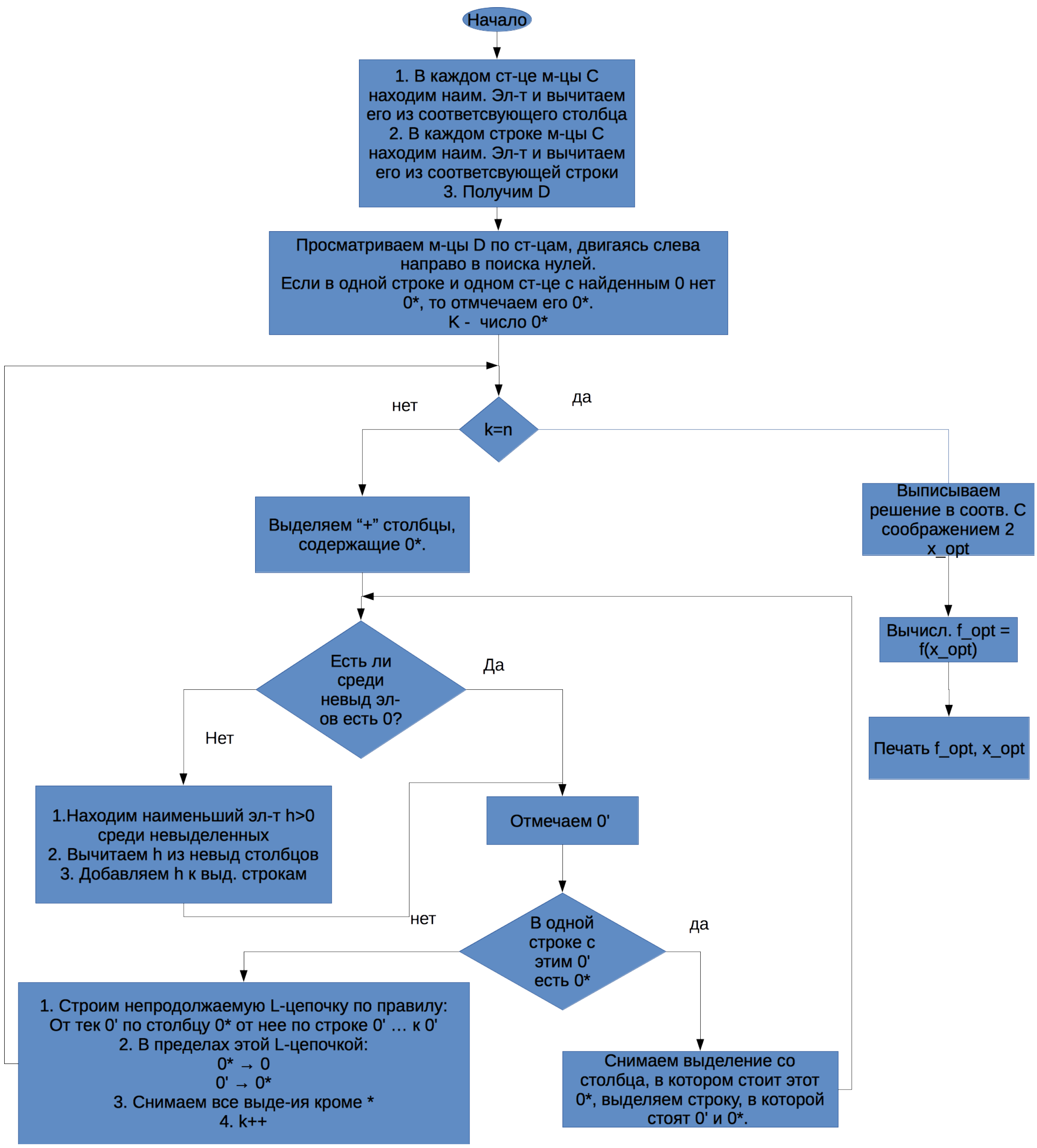
Наличие отрицательных значений не позволяет использовать пункт 2. Прибавим h к выделенным строкам:

$$\to \begin{bmatrix} 0^* & 0' & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0^* \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0^* & 0' & 2 & 5 \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0^* \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to$$

В одной строке с нулем нет 0^*. Строим L-цепочку.

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 0^* & 2 & 5 \\ 0^* & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0^* \\ 2 & 0 & 0^* & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{opt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3 Венгерский метод решения задачи о назначениях



<u>Пример:</u>

$$C=\begin{bmatrix}7&2&8&2&5\\1&2&3&1&2\\7&2&5&3&6\\6&2&12&3&6\\4&7&11&1&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}6&0&5&1&3\\0&0&0&0&0\\6&0&2&2&4\\5&0&9&2&4\\3&5&8&0&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}6&0^*&5&1&3\\0^*&0&0&0&0\\6&0&2&2&4\\5&0&9&2&4\\3&5&8&0^*&7\end{bmatrix}\to k=3<5=h\to$$

$$\to\begin{bmatrix}6&0^*&5&1&3\\0^*&0&0&0&0\\6&0&2&2&4\\5&0&9&2&4\\3&5&8&0^*&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}6&0^*&5&1&3\\0^*&0&0&0&0\\6&0&2&2&4\\5&0&9&2&4\\3&5&8&0^*&7\end{bmatrix}\to$$

Среди невыделеных элемнтов нет 0 тогда h = 2

$$\to\begin{bmatrix}4&0^*&3&1&1\\0^*&2&0'&2&0\\4&0&0'&2&2\\3&0&7&2&2\\1&5&6&0^*&5\end{bmatrix}\to\text{Делаем L-цепочку}\to\begin{bmatrix}4&0^*&3&1&1\\0^*&2&0&2&0\\4&0&0'&2&2\\3&0&7&2&2\\1&5&6&0^*&5\end{bmatrix}\to k=4\to$$

$$\to\begin{bmatrix}4&0^*&3&1&1\\0^*&2&0&2&0'\\4&0&0'&2&2\\3&0&7&2&2\\1&5&6&0^*&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&0^*&3&1&1\\0^*&2&0&2&0\\4&0&0'&2&2\\3&0&7&2&2\\1&5&6&0^*&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&0^*&3&1&1\\0^*&2&0&2&0'\\4&0&0'&2&2\\3&0&7&2&2\\1&5&6&0^*&5\end{bmatrix}\to k=1\to$$

$$\to\begin{bmatrix}3&0^*&3&1&0'\\0^*&3&1&3&0'\\3&0&0'&2&1\\2&0&7&2&1\\0&5&6&0^*&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0^*&3&1&0'\\0^*&3&1&3&0'\\3&0&0'&2&1\\2&0&7&2&1\\0&5&6&0^*&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0^*&3&1&0'\\0^*&3&1&3&0'\\3&0&0^*&2&1\\2&0&7&2&1\\0'&5&6&0^*&4\end{bmatrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix}3&0^*&3&1&0'\\0^*&3&1&3&0'\\3&0'&0^*&2&1\\2&0&7&2&1\\0'&5&6&0^*&4\end{bmatrix}\to\text{Строим L-цепочку}\to\begin{bmatrix}3&0&3&1&0^*\\0^*&3&1&3&0\\3&0&0^*&3&1\\2&0^*&7&2&1\\0&5&6&0^*&4\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{opt}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$f_{opt}=5+1+5+2+1=14$$

Замечание:

1. Встречается среди задач о назначениях, в которых величины c_{ij} интерпретируются как прибыль от выполнения $i-$ой работы $j-$ым работником. В этом случае задача о назначениях является задачей максимизации:

$$\begin{cases}f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to max\\ \text{те же ограничения}\end{cases}\tag{1}$$

2. В этом случае исходной задаче (1) будет эквивалетна задача:

$$\begin{cases}f_l=f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-c_{ij})\,x_{ij}\to min\\ \text{те же ограничения}\end{cases}\tag{2}$$

которая не может быть решена с использованием венгерского метода ввиду неположительных $-c_{ij}$.

3. Выберем среди c_{ij} наиб. элементы a и прибавим его всем элементам м-це $(-c)$:

$$-\tilde{c_{ij}} = a - c_{ij}$$

Тогда задача

$$\begin{cases} f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{c_{ij}} x_{ij} \to min \\ \text{те же ограничения} \end{cases}$$

эквивалентна задаче (2) и очевидно задаче (1) и может быть решена венгерским методом.

2 Линейное программирование

Задача:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geqslant / \leqslant / =\} b_i \quad i = \overline{1;m} \end{cases}$$

2.1 Основные определения

2.1.1 Задача распределительного типа

Задача распределительного типа является характерной задачей линейного программирования

Пример: Кондитерская фабрика выпускает 2 вида карамели (обозначим их А и Б), да производства которых используются сахарный песок и фруктовое пюре. Данные о затратах:

	Нормы затрат		Общий объем запасов (т)
	А	Б	
Сахарный песок	1	3	13
Фруктовое пюре	3	2	18
Стоимость изготовления 1т. готового продукта	1	2	

Кроме того известно, что рыночный спрос на карамель Б-вида не превышает 4т.

Составить оптимальный план производства, максимизирующий доходы от продаж.

Введем управляемые переменные:

x_1- объем производства карамели А (т)

x_2- объем производства карамели Б (т)

Тогда:

1. Доход от продажи:
$$f = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$$
2. Ограничение на запасы:
   (a) песка:
   $$1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leqslant 13$$
   (b) пюре:
   $$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leqslant 18$$
   (c) ограничение на рыночный спрос:
   $$x_2 \leqslant 4$$

Математическая модель:

$$\begin{cases} f = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \\ 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leqslant 13 \\ 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leqslant 18 \\ x_2 \leqslant 4 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Лекция 3

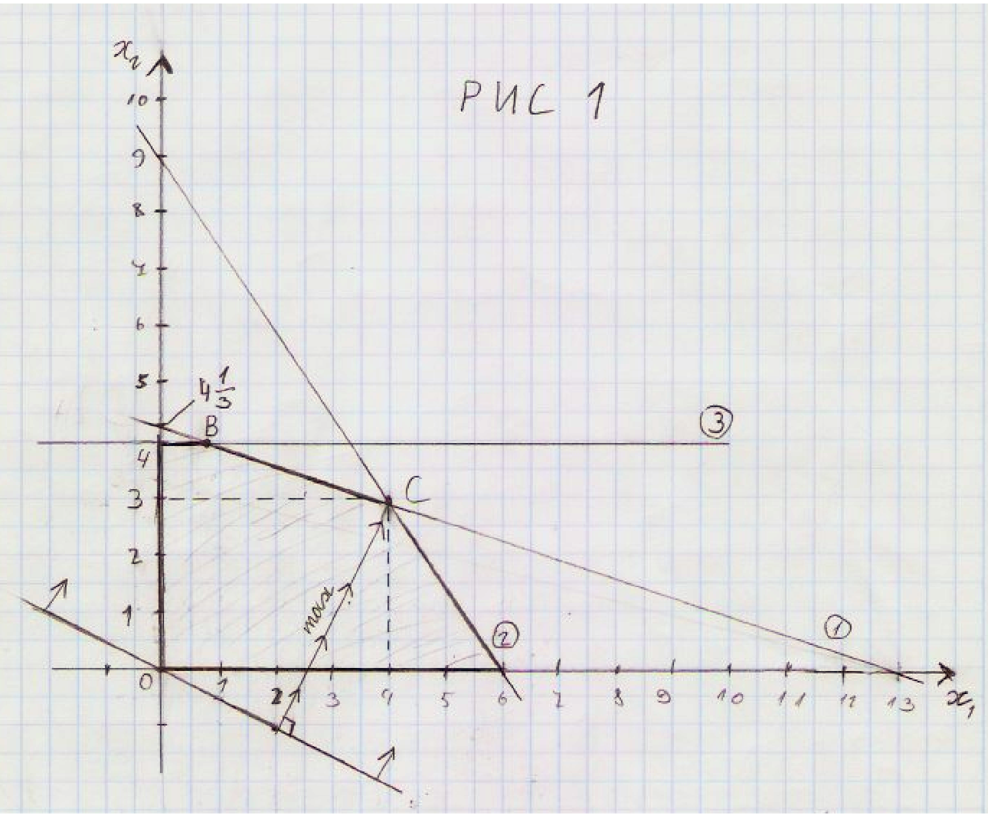
21 сентября 2015

2.2 Графический метод

Графический метод может быть использован для решения ЗЛП малой размерности ($n \leqslant 2$)

Пример: Рассмаотрим задачу о производстве карамели

$f = x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$



Градиент функции

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} + 2 \cdot \overrightarrow{j}$$

Нужно решить систему:

$$C = (1) \cap (2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4;\ x_2 = 3$$

Замечание: На примере этой задачи можно уловить некоторые особенности присущие всем задача линейного программирования.

1. Множество допустимых решений является выпуклым.
2. Оптимальное значение целевой функции достигается в крайней точке множества допустимых решений
3. Если оптимальное значение целевой функции достигается в двух различных точках p, q, то оно достигается во всех точках отрезка $[p, q]$.

2.3 Стандартная форма ЗЛП

Общая форма ЗЛП:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to extr \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\geqslant / \leqslant / =\} b_i \quad i = \overline{1;m} \end{cases}$$

Определение: *Стандартной формой ЗЛП* называется задача следующего вида:

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \\ x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$$

где $b_i \geqslant 0, i = \overline{1,m}$.

Признаки стандартной формы

1. Целевая функция максимизируется
2. Все ограничения имеют вид неравенств с положительными правыми частями
3. Все переменные больше 0

Любая ЗЛП может быть приведена к стандартной форме:

1. Если $f \to min$ то рассм задачу с функцией
$$f_1 = -f = \sum_{j=1}^{n} (-c_j x_j) - > max$$
2. Если некоторое ограничения имеет вид
$$\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} x_j = b_{i,j},$$
где $b_i < 0$, то умножим обе его части на (-1):
$$\sum_{j=1}^{n} (-b_{i,j})\, x_j = -b_{i,j}$$
3. Если некоторое ограничение имеет вид неравенства:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leqslant b_i,$$
то введем дополнительную переменную $x_{n+1} \geqslant 0$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + x_{n+1} = b_i$$

4. Если некоторое ограничение имеет вид неравенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geqslant b_i,$$

то введем дополнительную переменную $x_{n+1} \geqslant 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - x_{n+1} = b_i$$

5. Если некоторая переменная x_j подчинена условию неполжительности то есть $x \leqslant 0$, то рассмотрим вместо нее переменную $-x_j$

6. Если некоторая переменная x_j не подчинена ни условию $x_j \geqslant 0$ ни устовию $x_j \leqslant 0$ те не ограничена в знаке то представим ее в виде разности:

$$x_j = x'_j - x''_j,$$
$$x'_j \geqslant 0$$
$$x''_j \geqslant 0$$

<u>Пример:</u>

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geqslant -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 4 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \leqslant 0 \\ x_3 \text{ не ограничена в знаке} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 >= 0 \\ x_2 >= 0 \quad (x_2^{'} = -x_2) \\ x_3 = x'_3 - x''_3 \quad (x'_3 \geqslant 0, x''_3 \geqslant 0) \\ x_4 \geqslant 0 \\ x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = -x_1 + 2x'_2 + 3x'_3 - 3x''_3 \to min \\ -2x_1 + x'_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x'_2 + x'_3 - x''_3 - x_5 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x'_2 \geqslant 0,\ (x_2^{'} = -x_2) \\ x'_3 \geqslant 0, x''_3 \geqslant 0 \\ x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0 \\ ? \end{cases}$$

Рассмотрим ЗЛП в ст. р

$$\begin{cases} f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, i = \overline{1,m} \\ x_j >= 0, j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = (a_{i,j})_{i=\overline{1;m}}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax = b \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Замечание: Всюду в дальнейшим будем предполагать, что

1. Ранг матрицы $A = \text{rg}(A|b)$ - по теореме Кронекера-Капелли. Если условие не выполняется, то СЛАУ $Ax = b$ не совместна, а это значит, что множество дополнительных решений пусто.
2. $\text{rg}(A|b) = m$, где m-число ограничений. m-число строк в $(A|b) \Rightarrow \text{rg}(A|b) \leqslant$ m. Если $\text{rg}(A|b) <$ m, то система ограничений является линейнозависимой то есть некоторые ограничения можно убрать не изменив множество допустимых решений
3. $m < n$, где n - число переменных. Если $m > n$, то $\text{rg}(A|b) > n$ - число столбцов. Если m = n в силу пунктов 1 и 2 СЛАУ $Ax = b$ имеет единственное решение, следовательно задачи оптимизации вырождения.

2.4 О применимости графического метода

Графический метод может быть применен в случае, когда $n \leqslant 2$. Иногда его можно использовать и в случае $n > 2$.

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f = c^T x \to max \\ Ax = b \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Если $m - n \leqslant 2$, то можно использовать графический метод.

Пример:

$$\begin{cases} f = x_1 - 2x_2 + x_3 \to max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1, \dots, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim$$

Если $\text{rg}(A|b) = 3$, то $h - m = 2$, тогда можно использовать

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$rg(A|b) = 3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = -6 + 7x_4 + 5x_5 & \geqslant 0 \\ x_2 = 5 - 5x_4 - 3x_5 & \geqslant 0 \\ x_3 = 2 - 3x_4 - 2x_5 & \geqslant 0 \end{cases}$$

Подставим в выражение для f:

$$\begin{cases} f = 14x_4 + 2x_5 - 14 \\ 7x_4 + 5x_5 \geqslant 6 \\ 3x_4 + 5x_5 \leqslant 2 \\ x_4 >= 0, x_5 \geqslant 0 \\ 3x_4 + 2x_5 \leqslant 2 \end{cases}$$

3 Основные утверждения линейного программирования

3.1 Выпуклые множества

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$

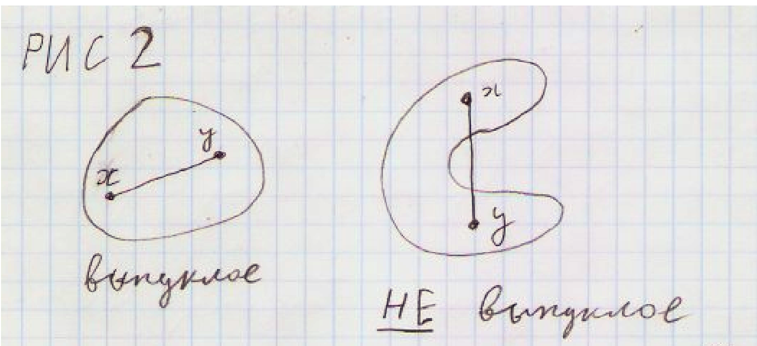
Определение: Отрезком соединяющим точки x и y называется множество точек:

$$t(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda) y, \qquad \lambda \in [0; 1]$$

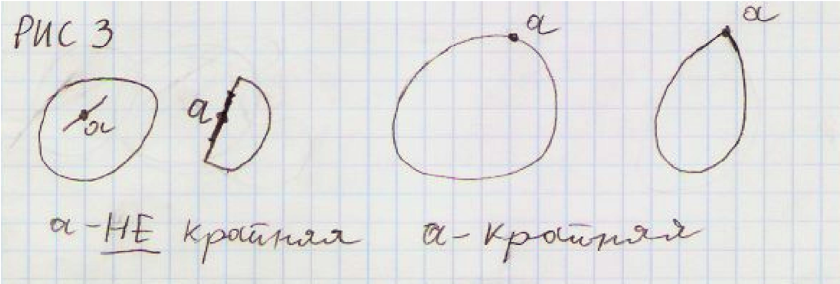
Замечание:

$$\lambda = 0 \Rightarrow t(0) = y$$
$$\lambda = 1 \Rightarrow t(1) = x$$

Определение: Множество $G \in \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если $\forall x, y \in G: \ xy \subseteq G$



Определение: Точка $a \in G$ выпуклого множества G называется крайней точкой этого множества, если a не содержится строго внутри никакого отрезка целиком лежащего в G.



Определение: Выпуклой комбинацией точек $q_1, \dots q_k \in \mathbb{R}^n$ называется множество точек:

$$\langle q_{1}, \dots q_k \rangle = \left\{ t \in \mathbb{R}^n : t = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_k q_k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geqslant 0 \right\}$$

где

Замечание:

1. Очевидно отрезок
$$xy = \langle x, y \rangle$$
2. Можно доказать что $\langle q_1, \dots, q_k \rangle$ является наименьшим выпуклым множестов содержащим $q_1, \dots, q_k$

Теорема: Пусть

1. G — выпукло
2. G — ограничено
3. G имеет конечное число крайних точек $q_1, \dots, q_k$

Тогда $G = \langle q_1, \dots, q_k \rangle$

Конец теоремы

Лекция 4

28 сентября 2015

3.2 Базисные допустимые решения

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f(x) \to max \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases},$$

где $b \geqslant 0$, $\text{rg}A = \text{rg}(a|B) = m < n$. $m-$ число ограничений, $n-$ число переменных.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$.

Будем считать, что m первых столбцов матрицы A ЛНЗ, тогда их можно взять в качестве базисных.

$$A = [a_1\ a_2\ \dots a_m\ a_{m+1} \dots a_n],$$

$$A_b = [a_1\ a_2\ \dots a_m]$$

$$A_{nb} = [a_{m+1} \dots a_n]$$

a_j— j—ый столбец матрицы A.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad x_{nb} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Тогда СЛАУ $Ax = b$ можно записать:

$$A_b x_b + A_{nb} x_{nb} = b \tag{3}$$

A_bявляется невырожденной (то есть $\det A_b \neq 0$) $\Rightarrow$ из (3) $\Rightarrow$ $x_b = A_b^{-1} b - A_b^{-1} A_{nb} x_{nb}$.

Тогда общее решение СЛАУ $Ax = b$ можно записать в виде

$$x = \begin{bmatrix} x_b \\ x_{nb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_b^{-1} b - A_b^{-1} A_{nb} x_{nb} \\ x_{nb} \end{bmatrix}$$

Здесь компоненты вектора могут принимать любые значения; при каждом конкретном наборе значений этих переменных будем получать некоторое частное решение исходной СЛАУ.

Определение: Базисным решением СЛАУ $Ax = b$ называется то ее частное решение, которое отвечает $x_{nb} = 0$.

$$x^0 = \begin{bmatrix} A_b^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Замечание:

1. Каждые базисные решения (БР) однозначно определяются выбором m базисных столбцов матрицы $A \Rightarrow$ БР будет равно столько, сколькими способами можно выбрать m базисных столбцов в $A \Rightarrow$ базисных решений будет не более чем C_m^n (не меньше так как не обязательно произвольные m столбцов матрицы А будут ЛПЗ).
2. БР не обязательно являются допустимым решением ЗЛП, так как не обязательно удовлетворяет условию $x \geqslant 0$.

Определение: *Базисным дополнительным решением* (БДР) называется такое базисное решение x СЛАУ $Ax = b$, которое удовлетворяет $x \geqslant 0$.

Определение: Базисное решение называется *вырожденным,* если одна или несколько базисных переменных в нем равны 0.

3.3 Основные утверждения линейного программирования

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f(x) \to max \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases},$$

где $b \geqslant 0$, $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg}(a|B) = m < n$. $m-$ число ограничений, $n-$ число переменных.

Обозначим множество допустимых решений:

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geqslant 0\}$$

Теорема 1: Пусть $G! = 0$ Тогда G содержит по крайней мере одно БАР.

Теорема 2: Множество G доп. решени ЗЛП выпукло .

Доказательство

Пусть $y_1 z \in G$.

Рассмотрим $t = \lambda y + (1 - \lambda y)z$, $\lambda \in [0; 1]$:

1. $$At = A(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \lambda Ay + (1 - \lambda)Az = \lambda b + b - \lambda b = b$$

2. $$t = \lambda y + (1 - \lambda)z,\ \lambda \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ (1 - \lambda) \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant 0$$

3. 1 и 2 $\Rightarrow t \in G$

Конец доказательства

Теорема 3: Пусть y — БАР ЗЛП в стандартной форме, тогда y — крайняя точка множества G

Теорема 4: Пусть y — крайняя точка множества G, тогда y — БДР ЗЛП

Теорема 5: Пусть:

1. f принимает оптимальное значение хотя бы в одной точке множества G, тогда f принимает это значение в одной крайней точке множества G.

2. Если f принимает оптимальное значение в нескольких точках $q_1, \ldots, q_l \in G$, то f принимает это значение в любой точке из выпуклой комбинации $\langle q_1, \ldots, q_l \rangle$

Замечание: Таким образом решение ЗЛП следует искать среди крайних точек множества G. Поскольку между крайними точками множества G и БДР ЗЛП существует взаимно однозначное соответствие, искать оптимальное решение следует среди БДР системы $Ax = b$. Этих решений конечное число, тогда одним из возможных методов решения ЗЛП является перебор всех БДР.

Однако эту процедуру оптимизирует так называемый симплекс-метол, который основан на идее последовательного перехода от одного БДР к другому, так, чтобы при этом значение целевой функции f улучшалось (не ухудшалось) .

Пример: Рассмотрим задачу о производстве карамели (без ограничения $x_2 \leqslant 4$):

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \to max \\ x_1 + 3x_2 \leqslant 13 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

В стандартной форме:

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \to max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 13 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

Пусть x_1, x_2 - базовые переменные, тогда

$$(A|b) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & -7 & -3 & 1 & -21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 \\ x_2 = 3 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 \\ 3 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Базисное решение: $x_3 = x_4 = 0$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{крайняя точка C.}$$

2) Пусть x_1, x_3 - базисные переменные.

Тогда

$$(A|b) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 6 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 7 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 \\ 7 - \frac{7}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Базисное решение: $x_2 = x_4 = 0$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{крайняя точка D}$$

Номер базисного столбца	Базисные неизвестные	Небазисные неизвестные	Базисное решение	Крайняя точка
1, 2	x_1, x_2	x_3, x_4	$(4, 3, 0, 0)^T$	C
1, 3	x_1, x_3	x_2, x_4	$(6, 0, 7, 0)^T$	D
1, 4	x_1, x_4	x_2, x_3	$(13, 0, 0, -21)^T$- не являктся допустимым	$H \notin G$
2, 3	x_2, x_3	x_1, x_4	$(0, 9, -14, 0)^T$- не является допустимым	$F \notin G$
2, 4	x_2, x_4	x_1, x_3	$(0, \frac{13}{3}, 0, \frac{28}{3})^T$	E
3, 4	x_3, x_4	x_1, x_2	$(0, 0, 13, 18)^T$	0

4 Симплекс-метод

4.1 Симплекс-метод при известном БДР

Симплекс-метод является универсальным методом решения ЗЛП. В его основе лежит идея последовательного перехода от одного БДР к другому, так, чтобы значение целевой функции улучшалось (не становилось хуже).

Рассмотрим ЗЛП в стандартной форме:

$$\begin{cases} f(x) \to max \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases},$$

где $b \geqslant 0$, $\text{rg}A = \text{rg}(a|B) = m < n$. $m-$ число ограничений, $n-$ число переменных.

Предположим m первых столбцов матрицы A ЛНЗ, значит, что

$$A = [a_1\, a_2\, \dots a_m\, a_{m+1} \dots a_n] \quad A_b = [a_1\, a_2\, \dots a_m] \quad A_{nb} = [a_{m+1} \dots a_n]$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad x_{nb} = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \\ c_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c_b = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad c_{nb} = \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Тогда задачу ЗЛП примет вид:

$$\begin{cases} f = c_b^T x_b + c_{nb}^T x_{nb} \to max \\ A_b x_b + A_{nb} x_{nb} = b \\ x_b \geqslant 0, x_{nb} \geqslant 0 \end{cases}$$

Выразим базисные переменные через небазисные:

$$x_b = A_b^{-1} b - A_b^{-1} A_{nb} x_{nb}$$

Подставим в задачу:

$$f = c_b^T A_b^{-1} b - c_b^T A_b^{-1} A_{nb} x_{nb} + c_{nb}^T x_{nb} = c_b^T A_b^{-1} b + (c_{nb}^T - c_b^T A_b^{-1} A_{nb}) x_{nb}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} f = c_b^T A_b^{-1} b + (c_{nb}^T - c_b^T A_b^{-1} A_{nb}) x_{nb} \to max \\ x_b = A_b^{-1} b - A_b^{-1} A_{nb} x_{nb} \\ x_b \geqslant 0, x_{nb} \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

Определение: (4) называется канонической формой (не путать со стандартной формой!) ЗЛП, отвечающей базису x_b.

Признаки каноничной формы:

1. Базисные переменные выражены через небазисные
2. В выражении для целевой функции отсутствуют базисные переменные.

Так как оптимальное решение ЗЛП достигается на БДР, то обозначим x_{nb}:

$$f = c_b^T A_b^{-1} b = f_0$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} A_b^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Будем счиать, что $x^0 \geqslant$, то есть x^0 - БДР.

Замечание: Именно по этому излагаемый метод называется симплекс методом при известном БДР.

Для того, чтобы перейти к новому БДР, достаточно:

1. Выбрать некоторую небазисную переменную для включения в базис
2. Выбрать некоторую базисную переменную для исключения из базиса

При этом такая замена одной базисной переменной на другую должна удовлетворять следующим условиям:

1. Значение функции f на новом БР должно быть больше (не меньше) значения f на текущем БДР. (принцип оптимальности)
2. Новое базисное решение должно быть допустимо (принцип допустимости)

Рассмотрим (4):

$$\begin{cases} f = f_0 + dx_{nb} \to max \\ x_b = \alpha - Bx_{nb} \\ x_b \geqslant 0, x_{nb} \geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_0 = c_b^T A_b^{-1} b$$

$$d = c_{nb}^T - c_b^T A_b^{-1} A_{nb}$$

$$\alpha = A_b^{-1} b$$

$$B = A_b^{-1} A_{nb} x_{nb}$$

$$f = f_0 + d_{m+1} x_{m+1} + \cdots + d_n x_n$$

Если небазисные некоторые переменные x_j будет включена в базис, то значение целевой функции на новом БР будет равно $f_0 + d_j x_j$, где x_j^0 —значение x_jв текущем БР, так как все небазисные переменные кроме x_j в новом БР будут равны 0, а x_j став базисной может принять положительно значение.

Так как $f \to max$, то в базис следует включать ту переменную x_j, для которой $d_j > 0$. Принцип оптимальности заключается в том, чтобы взять в базис такую переменную x_j, для которой d_j максимальное, то есть

$$d_k = max\left\{d_j : d_j > 0\right\}, \quad j \in \text{небазисный индекс}$$

Если все $d_j \leqslant 0$, то текущее решение улучшить нельзя, таким образом оно оптимально.